



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática

**Alguns resultados de controlabilidade nula e controlabilidade
exata para uma equação de Korteweg - de Vries linear
quando o termo de dispersão é conduzido a zero**

George José Bautista Sánchez

DISSERTAÇÃO
Orientador: Ademir Fernando Pazoto

Rio de Janeiro
Novembro de 2014

**Alguns resultados de controlabilidade nula e
controlabilidade exata para uma equação de
Korteweg - de Vries quando o termo de dispersão é
conduzido a zero**

George José Bautista Sánchez

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Ademir Fernando Pazoto

Rio de Janeiro
Novembro de 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

Alguns resultados de controlabilidade nula e controlabilidade exata para uma equação de Korteweg - de Vries linear quando o termo de dispersão é conduzido a zero

George José Bautista Sánchez

Ademir Fernando Pazoto

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática Pura.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Ademir Fernando Pazoto - IM/UFRJ

Prof. José Felipe Linares Ramirez - IMPA

Prof. Gustavo Alberto Perla Menzala - IM/UFRJ e LNCC/MCT

Prof. Paulo Verdasca Amorim - IM/UFRJ

Rio de Janeiro - Brasil

2014

Agradecimentos

Aos meus pais Jorge e Estela, pelo amor, confiança e apoio incondicional durante todos estes anos.

Ao meu orientador Ademir Fernando Pazoto, pois seus conhecimentos foram fundamentais na elaboração deste trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

"À minha anja" pela motivação.

Resumo

Neste trabalho, estudamos propriedades de controlabilidade para a equação Korteweg-de Vries linear em um intervalo limitado. A parte principal deste trabalho é o resultado de controlabilidade uniforme quando o termo dispersivo é "pequeno". Além disso, estabelecemos um resultado de controlabilidade nula para a equação linear através da condição de contorno tipo Dirichlet à esquerda, e de controlabilidade exata via ambas as condições de contorno de Dirichlet.

Palavras chave: controlabilidade, equação KdV, limite de dispersão nula

Abstract

In this paper, we study the controllability properties for the linear Korteweg-de Vries equations in a bounded interval. The main part of this paper is a result of uniform controllability of a linear KdV equation in the limit of zero-dispersion. Moreover, we establish a result of null controllability for the linear equation via the left Dirichlet boundary condition, and of exact controllability via both Dirichlet boundary conditions.

Key Words: controllability, KdV equation, zero dispersion limit

Introdução

Um Pouco da História das Ondas Solitárias

As equações que modelam o movimento de ondas em meios dispersivos, lineares e não lineares, tem suas raízes na descoberta de uma "Onda Solitária" por John Scott Russell, um engenheiro naval Escocês. Por volta de 1834 ele observou ondas criadas na superfície da água em um canal, que pareciam se propagar de forma constante e sem modificar sua de forma. Russell realizou vários experimentos deste fenômeno que ele chamou de "Ondas de Translação" ("wave of translation"), que mais tarde ficaria conhecida como "Ondas Solitárias" [38]. Naquele dia, Russell observou uma onda muito particular, tal onda viajava através de um canal, sem perder a sua forma ou velocidade. A fascinação tomou conta de Russell, que concentrou sua atenção nos estudos deste tipo de ondas por anos.

Com a sua descoberta, fez inúmeros experimentos conhecidos como "o sistema de linha de ondas para construção de cascos", que consistiu em criar uma área na forma de um canal na qual se colocava um obstáculo. Atrás do obstáculo se introduzia o fluido e, em seguida, se removeria tal obstáculo para que uma onda longa se formasse e se propagasse ao longo do canal. Tais experimentos revolucionaram a arquitetura naval no século XIX, e ele foi condecorado com a medalha de ouro da "Royal Society of Edinburgh" por seu trabalho em 1837.

Os experimentos de Russell contradisseram várias conjecturas físicas, tais como a teoria de G. B. Airy [1], no qual a onda viajante não poderia existir, pelo motivo que a mesma acabaria mudando sua velocidade ou a sua forma, ou a teoria de G. G. Stokes [42], em que as ondas de amplitude finita e forma fixa são possíveis, mas apenas em águas profundas e somente na forma periódica. No entanto, Stokes estava ciente do estado inacabado da teoria de Russell:

"É a opinião do Sr. Russell que a onda solitária é um fenômeno sui generis. Seus experimentos parecem tornar esta conclusão provável. Caso esteja correto, o caráter analítico de uma onda solitária contínua pode vir a ser descoberto."

Consequentemente, a fim de convencer a comunidade física, Scott Russell desafiou a comunidade matemática para provar teoricamente a existência do fenômeno que ele testemunhou:

"Tendo verificado que ninguém tenha conseguido prever o fenômeno que eu me aventurei a chamar de ondas de translação... não era de se supor que, depois que sua existência tenha sido descoberta e seus fenômenos determinados, esforços não seriam feitos... para mostrar como ela deveria ter sido previsto a partir de conhecidas equações gerais do movimento de

fluido. Em outras palavras, agora ficou para os matemáticos a descoberta, ou seja, para dar uma *à priori* demonstração *à posteriori* ".

Uma grande quantidade de pesquisadores enfrentou o desafio proposto por Russell. Os próprios George Airy e George Stokes se interessaram pelo assunto desenvolvendo e analisando principalmente os modelos matemáticos dos fenômenos observados anteriormente em laboratórios.

Uma das primeiras grandes contribuições e respostas para o Russell foi dada pelo matemático Francês Joseph Boussinesq por volta de 1871 [4]. Em 1876, o físico Inglês Lord Rayleigh obteve um resultado diferente [34], e em 1895 os matemáticos holandeses D. J. Korteweg e seu aluno G. de Vries deram o último resultado importante do século 19 [24]. Na verdade, Boussinesq considerou um modelo de ondas longas incompressíveis e de rotação livre em um canal raso com seção retangular desprezando o atrito ao longo da fronteira (paredes do canal). Ele obteve a seguinte equação

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + gH \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{2h^2}{2H} + \frac{H^2}{3} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right), \quad (1)$$

onde (t, x) são as coordenadas de uma partícula do fluido no tempo t , h é a amplitude da onda, H é altura da água em equilíbrio e g é a constante gravitacional.

Enquanto isso, Rayleigh considerou independentemente o mesmo fenômeno e acrescentou a hipótese da existência de uma onda estacionária “desaparecendo“ no infinito. Ele considerou apenas a dependência espacial e observou o comportamento da equação

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{3}{H^3} h^2 (h - h_0) = 0, \quad (2)$$

com h_0 sendo a “crista“ da onda e os outros parâmetros definidos da mesma forma que Boussinesq. Esta equação possui uma forma explícita de solução dado por

$$h(x) = h_0 \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{3h_0}{4H^3}} x \right).$$

Em 1876, Rayleigh escreveu em seu artigo [34]:

"Eu recentemente vi um livro de memórias de Boussinesq, Rendus, vol. LXXII, no qual está contido uma teoria de ondas solitárias muito semelhante ao do presente trabalho. Então, na medida em que nossos resultados são comuns, o crédito de prioridade pertence, naturalmente, à J. Boussinesq"

Finalmente, em 1895, surgiu o famoso artigo de dois cientistas holandeses, Diederik Korteweg e Gustav de Vries, que relata uma modelagem matemática sobre ondas solitárias observado por Russell. A forma original da equação principal do artigo é

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{3}{2} \alpha \eta + \frac{1}{3} \beta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right), \quad (3)$$

onde η é a elevação da superfície do líquido sobre o seu nível de equilíbrio $l > 0$, $\alpha > 0$ é uma constante relacionada ao movimento uniforme (propulsão linear) do líquido, $g > 0$ é a constante de gravidade e $\beta = \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$ é a constante relacionada às forças capilares do tensor

T e da densidade ρ , constante e positiva. Eliminando as constantes físicas pelas mudanças de variáveis

$$t \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l\beta}} t, \quad x \rightarrow -\frac{x}{\beta} \quad \text{e} \quad u \rightarrow -\left(\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{3}\alpha\right)$$

obtem-se a equação de Korteweg-de Vries (KdV) padrão

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{4}$$

que é um modelo que descreve a propagação em pequena amplitude de ondas de águas rasas em um canal de seção transversal retangular.

Existem inúmeras aplicações físicas e matemáticas deste modelo, por exemplo, C.S. Gardner e G.K. Morikawa [15] encontraram uma nova aplicação deste modelo no estudo de ondas livres de colisão hidromagnéticas na esperança de descrever a propagação unidirecional de ondas pequenas mas de amplitude finita em um meio dispersivo não linear. Além disso, M. Kruskal e N. Zabusky [44] mostraram que os modelos de equações KdV para o problema de Fermi-Pasta-Ulam é descrito por ondas longitudinais que se propagam em uma rede unidimensional de massas iguais acoplados por meio de molas não lineares. Outras aplicações têm sido encontrados após o desafio de Russell, tais modelos resultantes são focos de estudos até o dia de hoje.

Controlabilidade para EDPs - Principais Métodos Utilizados

Estamos interessados em obter controlabilidade e estabilização para sistemas dispersivos governados por EDPs. Vamos começar tratando de dois importantes problemas relativos a controlabilidade são eles: *a controlabilidade interna e controlabilidade na fronteira para EDPs*.

Os vários conceitos de controlabilidade, que concordam em dimensão finita, mas não de um modo geral para as EDPs, são introduzidas e caracterizadas por uma abordagem de dualidade clássica (ver por exemplo [11, 27]). Nesta abordagem a controlabilidade exata de um sistema é provada ser equivalente a prova de uma *desigualdade de observabilidade* para o sistema adjunto. Tal fato é baseado no método *HUM - Hilbert Uniqueness Method* devido à J.-L. Lions (para mais detalhes ver [27, 28, 29]). Os métodos de controlabilidade dados aqui podem ser vistos como extensões naturais do critério de Kalman para sistemas de dimensão finita como mostrado em [9].

Quanto à questão da estabilização, vamos introduzir conceitos de estabilidade em dimensão infinita. Para isso, mostraremos alguns métodos que comprovam a estabilização exponencial para EDPs. A estabilização de uma EDP está relacionada fortemente com a controlabilidade anteriormente definida. Uma atenção especial é dada a EDPs com um gerador infinitesimal anti-adjunto (*skew-adjoint*) para quem os conceitos de controlabilidade e estabilidade, considerados aqui, concordem.

Precisamos inicialmente introduzir algumas notações. Vamos denotar por $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ o operador diferencial com $\mathcal{P} \in \mathbb{C}[\tau, \xi_1, \dots, \xi_n]$ e $\mathcal{D} = (-i\partial_t, -i\partial_{x_1}, \dots, -i\partial_{x_n})$. Por exemplo, se considerarmos $\mathcal{P} = -\tau^2 + |\xi|^2$ teremos o operador da equação da onda $\mathcal{P}(\mathcal{D}) = \partial_t^2 - \Delta$. De agora em diante, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ será um subconjunto aberto suficientemente suave, cuja fronteira $\partial\Omega$ é denotada por Γ .

Problema de Controlabilidade Interna

Dados um subconjunto $\omega \subset \Omega$ com fronteira suave Γ e um conjunto de condições de contorno, que escreveremos como $\mathcal{B}(\mathcal{D})z = 0$, vamos considerar o problema de controle

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\mathcal{D})z = \mathcal{X}_\omega f & t > 0, x \in \Omega, \\ \mathcal{B}(\mathcal{D})z = 0 & t > 0, x \in \Gamma, \\ z(0, x) = z_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (5)$$

Aqui, $f = f(t, x)$ é o controle interno, $z = z(t, x)$ é a função procurada que satisfaz o sistema acima e \mathcal{X} representa uma função característica. Sejam H e U dois espaços funcionais normados, dados z_0 e z_1 em H , buscamos um controle $f \in L^2(0, T; U)$ tal que a solução z do sistema (5) satisfaz $z(T, x) = z_1(x)$.

Problema de Controlabilidade na Fronteira

Dados um subconjunto $\gamma \subset \Gamma$ e dois conjuntos de condições de contorno, que escreveremos como $\mathcal{B}_1(\mathcal{D})z = \mathcal{X}_\omega f$, $\mathcal{B}_2(\mathcal{D})z = 0$, vamos considerar o problema de controle

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\mathcal{D})z = 0 & t > 0, x \in \Omega, \\ \mathcal{B}_1(\mathcal{D})z = \mathcal{X}_\omega f & t > 0, x \in \Gamma, \\ \mathcal{B}_2(\mathcal{D})z = 0 & x \in \Omega, \\ z(0, x) = z_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (6)$$

Aqui, $f = f(t, x)$ é o controle de fronteira, $z = z(t, x)$ é a função procurada que satisfaz o sistema acima e \mathcal{X} é uma função característica. Dados z_0 e z_1 em H , buscamos um controle $f \in L^2(0, T; U)$ tal que a solução z do sistema (6) satisfaz $z(T, x) = z_1(x)$.

Controlabilidade e Observabilidade

Conceitos de Controlabilidade

Dados $z_0 \in H$, $u \in L^2(0, T; U)$, consideremos a solução $z : [0, T] \rightarrow H$ do seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \quad (7)$$

Relembremos que para qualquer $z_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $u \in W^{1,1}(0, T; U)$, o problema de Cauchy (7) admite uma única solução $z \in C([0, T]; \mathcal{D}(A)) \cap C^1(0, T; H)$ dada pela fórmula de Duhamel

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Para $z_0 \in H$ e $u \in L^1(0, T; U)$, a fórmula anterior define uma solução suave (*mild solution*) de (7).

Definição 0.1. Dizemos que o sistema (7) é exatamente controlável no tempo T se para qualquer $z_0, z_T \in H$, existe $u \in L^2(0, T; U)$ tal que a solução do sistema (7) satisfaz $z(T) = z_T$.

Definição 0.2. Dizemos que o sistema (7) é nulamente controlável no tempo T se para qualquer $z_0 \in H$, existe $u \in L^2(0, T; U)$ tal que a solução do sistema (7) satisfaz $z(T) = 0$.

Introduziremos agora o seguinte operador $\mathcal{L}_T : L^2(0, T; U) \rightarrow H$ definido por

$$\mathcal{L}_T u = \int_0^T S(T-t) B u(s) ds.$$

Assim, as seguintes definições de controlabilidade, acima mencionadas, são equivalentes à:

$$\text{Controlabilidade Exata em } T \Leftrightarrow \text{Im } \mathcal{L}_T = H; \quad (8)$$

$$\text{Controlabilidade Nula em } T \Leftrightarrow S(T) H \subset \text{Im } \mathcal{L}_T. \quad (9)$$

Em dimensão finita, i.é., quando $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, os dois conceitos são equivalentes, e a equivalência é uma condição puramente algébrica, a famosa condição das filas de Kalman: $\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$. Como uma consequência, o tempo T não desempenha nenhum papel, para mais detalhes podemos citar [9, 43].

Para EDPs as situações são mais complicadas do que para dimensão finita. Por exemplo:

- não existe nenhuma condição algébrica para a controlabilidade;
- o controle no tempo desempenha um papel para a EDPs hiperbólicas;
- a recíproca abaixo não é natural em geral

$$\text{Controlabilidade Exata} \Rightarrow \text{Controlabilidade a Zero.7}$$

Métodos para Controlabilidade

As provas dos resultados aqui citadas são clássicas, e eles podem ser encontrados, por exemplo em [9, 27, 43, 46]. Tais provas são baseadas no método H.U.M. devido a J.-L. Lions (ver [27]). Um primeiro resultado que garante a controlabilidade pode ser dado da seguinte maneira:

Resultado A: Diremos que o sistema (7) é **exatamente controlável** no tempo $T > 0$ se, e somente se, existe alguma constante $c > 0$ tal que

$$\int_0^T \|B^* S^*(t) y_0\|_U^2 dt \geq c \|y_0\|_H^2, \forall y_0 \in H. \quad (10)$$

A desigualdade (10) é chamada de *desigualdade de observabilidade*. Tal desigualdade significa que a aplicação

$$\Upsilon : y_0 \mapsto B^* S^*(\cdot) y_0,$$

é limitada e inversível, ou seja, temos a chamada *propriedade de observabilidade*, isto quer dizer que é possível recuperar completamente as informações sobre o estado inicial y_0 , sobre uma medida em $[0, T]$, na saída dos dados $B^* [S^*(t) y_0]$.

Um outro resultado relacionada com uma desigualdade de observabilidade, porém em um sentido mais fraco, e assim será chamada de *desigualdade de observabilidade fraca*, nos garantirá a controlabilidade nula do sistema (7) e pode ser formulado como segue.

Resultado B: O sistema (7) é **controlável a zero ou nulamente controlável** no tempo $T > 0$ se, e somente se, existe alguma constante $c > 0$ tal que

$$\int_0^T \|B^* S^*(t) y_0\|_U^2 dt \geq c \|S^*(T) y_0\|_H^2, \forall y_0 \in H. \quad (11)$$

A desigualdade (11) tem um sentido fraco pelo fato de que a mesma nos dá somente que as informações de $S^*(T) y_0$ podem ser recuperadas, não podendo recuperar informações sobre o estado inicial do sistema y_0 .

O método H. U. M. O método H.U.M. desenvolvido por J.-L. Lions é uma ferramenta de suma importância para o estudo de controlabilidade de sistemas governados por EDPs. Se considerarmos um problema de valor inicial e de contorno

$$\Sigma \quad \begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ z(0) = 0, \end{cases}$$

e seu problema adjunto, obtido tomando a distribuição do operador adjunto $\partial_t - A$, à saber, $-\partial_t - A^*$:

$$\Sigma^* \quad \begin{cases} \dot{y} = -A^*y, \\ y(T) = y_T, \end{cases}$$

podemos assumir a seguinte *Identidade Chave*: $(z(t), y_T)_H = \int_0^T (u, B^*y)_U dt$ e garantir a equivalência entre desigualdade de observabilidade e controlabilidade do sistema Σ . Além disso, podemos concluir que:

- A equação de evolução no *problema adjunto* $\dot{y} = -A^*y$ difere de um *operador adjunto* $\dot{y} = A^*y$ por um sinal de menos. Uma simples transformação $t \rightarrow T - t$ faz com que as soluções do operador adjunto sejam soluções do problema adjunto;
- O método prova que o operador $\Lambda : z_T \mapsto u$ nos dar um controle;
- Em geral, não precisamos explicitar B e B^* . Os ingredientes importantes para o método são: a *identidade chave* e a *desigualdade de observabilidade*.

Problemas e Principais Resultados

Vamos investigar as propriedades de controlabilidade para a equação de Korteweg-de Vries. Mais precisamente, vamos investigar propriedades do seguinte sistema

$$\begin{cases} y_t + \nu y_{xxx} + (My)_x = 0 & \text{em } (0, T) \times (0, 1), \\ y(t, 0) = v_1, y(t, 1) = v_2, y_x(t, 1) = v_3 & \text{em } (0, T), \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{em } (0, 1), \end{cases} \quad (12)$$

onde

$M = M(t, x)$ é um coeficiente de transporte (constante em alguns problemas).

v_i ($i = 1, 2, 3$) são funções dependentes do tempo, que constituem os controles de nosso sistema.

ν é um coeficiente de dispersão positiva .

Observe que a equação KdV clássica corresponde a $M = 1 + \frac{u}{2}$.

Como mencionado na primeira parte desta introdução, a KdV teve seu desenvolvimento a partir das descobertas do engenheiro escocês John Scott Russell [38] no qual observou a criação de ondas a partir de um experimento em um canal de superfície rasa. A ideia deste trabalho é investigar a controlabilidade (nula e exata) desse sistema que modela ondas em superfícies rasas.

Mais precisamente, para o problema de controlabilidade nula o estudo foi feito como segue:

1. estudo do problema de Cauchy para a equação KdV linear;
2. utilização de estimativas do tipo "Carleman" para encontrar uma *desigualdade de observabilidade* interna apropriada para o estudo da controlabilidade do sistema linear associado a (12);

Em relação a controlabilidade exata o estudo foi feito da seguinte maneira:

1. estudo do problema de Cauchy para a equação KdV linear;
2. estimativas a priori obtidas por *métodos dos multiplicadores* (ver [23]) e provas de *desigualdades de observabilidade* adequadas;

A Equação KdV em um Intervalo Finito $(0, L)$

Inicialmente vamos dar atenção a equação KdV em um intervalo finito $(0, L)$ com condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann, mais precisamente vamos mencionar os primeiros resultados relativos a controlabilidade exata na fronteira da equação

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0 & \text{em } (0, T) \times (0, L), \\ u(t, 0) = h_1(t) & \text{em } (0, T), \\ u(t, L) = h_2(t) & \text{em } (0, T), \\ u_x(t, L) = h_3(t) & \text{em } (0, T), \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{em } (0, L). \end{cases} \quad (13)$$

A controlabilidade na fronteira da KdV foi primeiramente estudada por Rosier [35] quando considerou o sistema (13) com somente um controle h_3 ($h_1 = h_2 \equiv 0$) em ação. Ele provou que o sistema (13) é localmente exatamente controlável no espaço $L^2(0, L)$.

Teorema 1. ^[35] *Sejam $T > 0$ e*

$$L \notin \mathcal{N} := \left\{ 2\pi \sqrt{\frac{j^2 + l^2 + jl}{3}} : j, l \in \mathbb{N}^* \right\}. \quad (14)$$

Considere $\delta > 0$ tal que $u_0, u_T \in L^2(0, L)$ satisfazem

$$\|u_0\|_{L^2(0, L)} + \|u_T\|_{L^2(0, L)} \leq \delta,$$

então encontra-se um controle interno $h_3 \in L^2(0, T)$ tal que o sistema (13) com $h_1 = h_2 \equiv 0$ admite uma única solução

$$u \in C([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$$

satisfazendo

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{e} \quad u(T, x) = u_T(x).$$

O teorema foi inicialmente provado para o sistema linear usando o método H. U. M com a afirmação que os dados devem ser suficientemente pequenos. Com o resultado linear em mãos, foi estendido o resultado de controlabilidade exata para o sistema não linear obtendo o Teorema 1, utilizando o princípio da contração. Neste mesmo trabalho Rosier prova que se $L \in \mathcal{N}$ o sistema linear associado a (13) com $h_1 = h_2 \equiv 0$ não é exatamente controlável; isto é; existe um subespaço de dimensão finita M de $L^2(0, L)$ para o qual as soluções do sistema não são levadas da origem a um determinado tempo final T . Mais precisamente, para qualquer $0 \neq u_T \in M$, a solução u de (13) satisfaz

$$u(0, x) = 0, \quad u(T, x) \neq u_T,$$

para qualquer controle interno $h_3 \in L^2(0, L)$. De agora em diante um domínio $(0, L)$ é chamado de crítico se seu comprimento $L \in \mathcal{N}$.

No que diz respeito a controlabilidade nos comprimentos críticos, Coron e Crépeau, em [10], provam que o sistema (13) com $h_1 = h_2 \equiv 0$ e $L = 2k\pi \in \mathcal{N}$ é localmente exatamente controlável no espaço $L^2(0, L)$ embora o seu sistema linear associado **não é exatamente controlável**. Para obter tal resultado os autores fazem uso de um método denominado *método do retorno* devido a Coron em [9].

Teorema 2. ^[10] *Seja $T > 0$ e $L = 2k\pi \notin \mathcal{N}$ para algum inteiro k . Existe um $\delta > 0$ tal que para $u_0, u_T \in L^2(0, L)$ satisfazendo*

$$\|u_0\|_{L^2(0, L)} + \|u_T\|_{L^2(0, L)} \leq \delta,$$

pode-se encontrar um controle $h_3 \in L^2(0, T)$ onde o sistema (13), com $h_1 = h_2 \equiv 0$, admite uma única solução

$$u \in C([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$$

satisfazendo

$$u(0, x) = u_0(x) \quad e \quad u(T, x) = u_T(x).$$

Outros resultados relativos a controlabilidade do sistema (13) foram provados. Por exemplo, em Glass-Guerrero [17] e Rosier [36], os autores garantem que o sistema (13) é controlável a zero quando considera-se $h_3 \equiv 0$.

Em [36], o autor esclarece de forma sucinta o motivo físico pelo qual se deve considerar o controle atuando do lado direito do domínio espacial na equação KdV, além disso, ele considera o sistema (13) com apenas um controle atuando na fronteira, a saber h_1 . Usando uma estimativa do tipo Carleman, ele prova que o sistema (13), com $h_2 = h_3 \equiv 0$, é localmente controlável por trajetórias e, em particular, é localmente controlável a zero.

Teorema 3. ^[36] *Sejam $T > 0$ e $L > 0$. Considere*

$$v \in C([0, T]; H^2(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L)) \cap H^1(0, T; H^1(0, L)),$$

sendo uma função que satisfaz

$$\begin{cases} v_t + v_x + vv_x + v_{xxx} = 0 & \text{em } (0, T) \times (0, L), \\ v(t, L) = v_x(t, L) = 0 & \text{em } (0, T), \\ v(0, x) = v_0(x) & \text{em } (0, L). \end{cases} \quad (15)$$

Então, existe um $\delta > 0$ tal que para $u_0 \in H^3(0, L)$ com $u_0(L) = u_0'(L) = 0$ e

$$\|u_0 - v_0\|_{H^3(0, L)} \leq \delta,$$

existe uma função

$$u \in C([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$$

o qual é solução de

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0 & \text{em } (0, T) \times (0, L), \\ u(t, L) = u_x(t, L) = 0 & \text{em } (0, T), \\ u(0, x) = u_0(x) \quad u(T, x) = v(T, x) & \text{em } (0, L). \end{cases} \quad (16)$$

Observe que em (16) o autor especifica somente duas condições de contorno. Para tal sistema ser considerado compatível é necessário acrescentar uma terceira condição de contorno envolvendo o controle, por exemplo

$$u(t, 0) = h_1(t).$$

Neste caso, Rosier considera o h_1 na classe $H^1(0, T)$. Porém, alguns anos depois, Glass e Guerrero, em [17], nos diz que é possível tornar esse controle mais regular através do seguinte resultado.

Teorema 4. ^[17] Sejam $T > 0$ e $L > 0$. Considere $v \in C([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$ satisfazendo

$$\begin{cases} v_t + v_x + vv_x + v_{xxx} = 0 & \text{em } (0, T) \times (0, L), \\ v(t, 0) = v(t, L) = v_x(t, L) = 0 & \text{em } (0, T), \\ v(0, x) = v_0(x) & \text{em } (0, L). \end{cases}$$

Então, existe um $\delta > 0$ tal que para $u_0 \in L^2(0, L)$ com

$$\|u_0 - v_0\|_{L^2(0, L)} \leq \delta,$$

existe $h_1 \in H^{1/2-\epsilon}$ tal que o sistema (13) com $h_2 = h_3 \equiv 0$ admite uma única solução

$$u \in C([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$$

satisfazendo

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u(T, x) = v(T, x).$$

Glass e Guerrero também consideraram neste mesmo trabalho o sistema (13) com $h_3 \equiv 0$. Eles provam que este sistema é localmente exatamente controlável em $L^2(0, L)$ mesmo se o domínio espacial é crítico.

Teorema 5. ^[17] Sejam $L > 0$ e $T > 0$. Existe um $\delta > 0$ tal que para qualquer $u_0, u_T \in L^2(0, L)$ com

$$\|u_0\|_{L^2(0, L)} + \|u_T\|_{L^2(0, L)} \leq \delta,$$

existem controles $h_1, h_2 \in L^2(0, T)$ tal que a solução do sistema (13) com $h_3 \equiv 0$ admite uma única solução

$$u \in C([0, T]; H^{-1}(0, L)) \cap L^2(0, T; L^2(0, L))$$

satisfazendo

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u(T, x) = u_T.$$

Motivados pelos Teoremas 4 e 5, nos dedicaremos ao estudo dos principais resultados de controlabilidade obtidos em [17] para o sistema linear correspondente. Mais precisamente, provaremos os seguintes resultados:

Teorema A. *Existe uma constante positiva K_0 com a seguinte propriedade: para cada constante negativa M , existe $\nu_0 > 0$, tal que para cada $T \geq \frac{K_0}{|M|}$, cada $y_0 \in W^{1,\infty}(0,1)$ e cada $\nu \in (0, \nu_0)$, existem v_1^ν , v_2^ν e v_3^ν em $L^2(0,T)$, tais que a solução $y \in Y_0$ de (12) satisfaz $y|_{t=T} = 0$ em $(0,1)$. Além disso, os controles são uniformes no seguinte sentido:*

$$\|v_1^\nu\|_{L^2(0,T)} + \|v_2^\nu\|_{L^2(0,T)} + \|v_3^\nu\|_{L^2(0,T)} \leq K_1 \|y_0\|_{W^{1,\infty}(0,1)}, \quad (17)$$

para alguma constante positiva K_1 independente de ν e y_0 .

Teorema B. *Seja M uma constante e $\nu > 0$ fixo. Então, para cada $y_0 \in H^{-1}(0,1)$, existe $v_1 \in L^2(0,T)$, tal que a solução $y \in Y_0$ de (12) com dados $v_2 = v_3 = 0$ satisfaz $y|_{t=T} = 0$ em $(0,1)$. Além disso, para cada $\nu \in (0,1)$, existe $C^* > 0$, tal que*

$$\|v_1\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{C^*}{\nu} \|y_0\|_{H^{-1}(0,1)}. \quad (18)$$

Por outro lado, para ν suficientemente pequeno (em termos de M somente), obtemos

$$C^* = \exp \left\{ \frac{\tilde{C}|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}} \right) \right\}, \quad (19)$$

onde \tilde{C} é uma constante independente de M , ν e y_0 .

Teorema C. *Seja M uma constante e $\nu > 0$ fixo. Então, para cada $y_0, y_1 \in L^2(0,1)$, existem v_1 e v_2 em $L^2(0,T)$, tais que a solução $y \in Y_0$ de (12) com $v_3 = 0$ satisfaz $y|_{t=T} = y_1$ em $(0,1)$.*

Esses resultados serão provados utilizando o método **HUM** que descrevemos na seção anterior.

Sumário

1	Preliminares	2
1.1	Espacos L^p	2
1.1.1	Espaços de Sobolev	4
1.2	Espaços Funcionais a Valores Vetoriais	6
1.3	O Adjunto de um operador linear não limitado	7
1.4	C_0 - Semigrupos	8
1.5	Interpolação de Espaços de Sobolev	10
2	O Problema de Cauchy	13
2.1	Estimativas de Energia	14
2.2	Estimativas de ganho de regularidade, para o caso $M=0$	21
2.3	Estimativas dos termos de fronteira para o caso $M = 0$	27
2.3.1	Argumentos de interpolação	27
2.3.2	Estimativas dos termos de fronteira	30
2.3.3	Algumas conclusões: existência de solução e sua dependência em relação às condições iniciais e termos de fronteira	36
3	Teoremas principais	41
3.1	Desigualdade de Carleman	41
3.2	Resultados Principais	42

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo apresentaremos alguns resultados clássicos que serão usados ao longo do trabalho. As demonstrações podem ser encontradas em [2], [5], [18], [26], [29], [30], [31], [32], [33], [37] e [45].

1.1 Espaços L^p

Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n . Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções definidas em Ω com valores em K tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω .

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|u(x)|, \text{ para } p = +\infty,$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Proposição 1. *Se $u \in L^1(\Omega)$ então as integrais indefinidas de u são funções absolutamente contínuas.*

Proposição 2. (Desigualdade de Young) - *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Proposição 3. (Desigualdade de Minkowski) - *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e f, g em $L^p(\Omega)$, então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Proposição 4. (Desigualdade de Hölder) - Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e temos a desigualdade

$$\int_{\Omega} |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Segue como corolário da Proposição anterior o seguinte resultado:

Corolário 1. (Desigualdade de Hölder generalizada) - Sejam f_1, f_2, \dots, f_k funções, tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, onde $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p}$ e $\frac{1}{p} \leq 1$. Então o produto $f = f_1 f_2 \dots f_k \in L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Além dos resultados acima, temos que:

- i) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;
- ii) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;
- iii) $\mathcal{D}(\Omega)$ tem imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;
- iv) Se (f_n) é uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ então existe uma subsequência (f_{n_k}) tal que $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ quase sempre em Ω .

Teorema 6. (Teorema da Representação de Riesz) - Sejam $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ com $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Então existe uma única $u \in L^q(\Omega)$, tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \forall v \in L^p(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Quando $p = \infty$, temos:

Proposição 5. Seja $\varphi \in (L^1(\Omega))'$, então existe uma única $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \forall v \in L^1(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \rightarrow K$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω munido da seguinte noção de convergência: Uma sucessão u_ν converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se para cada compacto K de Ω tem-se:

$$p_K(u_\nu - u) = \left(\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0.$$

Lema 1. (Lema de Du Bois Raymond) - Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω , onde T_u é a distribuição definida por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Deste Lema tem-se que T_u fica univocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω .

Proposição 6. Seja $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, tal que $u_\nu \rightarrow u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$, então $u_\nu \rightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lema 2. (Lema de J-L. Lions) - Seja (u_ν) uma sucessão de funções pertencentes à $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se

i) $u_\nu \rightarrow u$ quase sempre em Q ,

ii) $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq C, \forall \nu \in \mathbb{N}$,

então, $u_\nu \rightarrow u$ fraco em $L^q(Q)$.

1.1.1 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n , $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|, \quad \text{para } p = \infty$$

é um espaço de Banach.

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ que são espaços de Hilbert.

Sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por esta razão define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Proposição 7. *Sejam Ω um conjunto aberto do \mathbb{R}^n , de classe C^m , com fronteira limitada e m um inteiro tal que $m \geq 1$, e $1 \leq p < \infty$. Então temos as seguintes imersões contínuas:*

$$\begin{aligned} \text{se } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0 \text{ então } W^{m,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ onde } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}, \\ \text{se } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 \text{ então } W^{m,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [p, +\infty[, \\ \text{se } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 \text{ então } W^{m,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Teorema 7. (Teorema de Rellich-Kondrachov) - *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do \mathbb{R}^n , Ω de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$\begin{aligned} \text{se } p < n \text{ então } W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*], \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \\ \text{se } p = n \text{ então } W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[, \\ \text{se } p = n \text{ então } W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow C(\overline{\Omega}), \\ \text{com imersões compactas.} \end{aligned}$$

Proposição 8. *Sejam $1 \leq q \leq p \leq \infty$ e inteiros $m > n$. Então*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-a} \|u\|_{W^{1,m}(\Omega)}^a, \quad \forall u \in W^{1,m}(\Omega),$$

onde

$$a = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{q} + \frac{1}{n} - \frac{1}{m}},$$

para alguma constante $C > 0$.

Para todo número real $s > 0$ definimos o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ como sendo

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); (1 + \|\xi\|^2)^{s/2} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Este espaço coincide com os espaços $H^m(\mathbb{R}^n)$ quando s é o número inteiro m . De forma análoga ao caso $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ se mostra que as funções $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ são densas em $H^s(\mathbb{R}^n)$ para todo \mathbb{R}^n . Definimos $H^s(\mathbb{R}^n)$ para valores negativos de s como sendo o espaço dual de $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

No caso em que Ω seja de classe C^m , podemos definir os espaços fracionários

$$H^s(\Omega) = \{v|_\Omega; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}.$$

Se munimos a este espaço com a norma

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf\{\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad v = u \text{ em } \Omega\},$$

se tem que $H^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Proposição 9. *$D(\overline{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$ para todo $s \geq 0$ real.*

Proposição 10. *Se $0 \leq s_1 \leq s_2$, então $H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$.*

Proposição 11. *Se $s - \frac{n}{2} > m$, m inteiro não negativo, então*

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}).$$

1.2 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar os espaços em que são consideradas as variáveis temporal e espacial, os quais são necessários para dar sentido aos problemas de evolução. Sejam X um espaço de Banach e $a, b \in \mathbb{R}$.

O espaço $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < +\infty$, consiste das (classes de) funções mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em X , ou seja as funções $u : (a, b) \rightarrow X$, tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço $L^\infty(a, b; X)$ consiste das (classes de) funções mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em X , limitadas quase sempre em (a, b) . A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \inf \{c \geq 0; \|u(t)\|_X \leq c, q.s.\}.$$

O espaço $C^m([a, b]; X)$, $m = 0, 1, \dots$, consiste de todas as funções contínuas $u : [a, b] \rightarrow X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[a, b]$. A norma é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \inf \{c \geq 0; \|u(t)\|_X \leq c, q.s.\}.$$

O espaço $C^m([a, b]; X)$, $m = 0, 1, \dots$, consiste de todas as funções contínuas $u : [a, b] \rightarrow X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[a, b]$. A norma é dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^m \max_{t \in [a,b]} |u^{(i)}(t)|.$$

Vejamos algumas propriedades desses espaços.

Proposição 12. *Sejam $m = 0, 1, \dots$; $1 \leq p < +\infty$; X e Y espaços de Banach sobre o corpo K , onde $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Então:*

- i) $C^m([a, b]; X)$ é um espaço de Banach sobre K .
- ii) $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < +\infty$ e $L^\infty(a, b; X)$, são espaços de Banach sobre K .
- iii) $C([a, b]; X)$ é denso em $L^p(a, b; X)$ e a imersão $C([a, b]; X) \hookrightarrow L^p(a, b; X)$ é contínua.
- iv) Se X é um espaço de Hilbert com produto escalar $(\cdot, \cdot)_X$, então $L^2(a, b; X)$ é também um espaço de Hilbert com produto escalar

$$(u, v)_{L^2(a,b;X)} := \int_a^b (u(t), v(t))_X dt.$$

- v) $L^p(a, b; X)$ é separável, se X for separável e $1 \leq p < +\infty$.
- vi) Se $X \hookrightarrow Y$, então $L^r(a, b; X) \hookrightarrow L^q(a, b; Y)$, $1 \leq q \leq r \leq +\infty$.

Denotaremos por $D(a, b; X)$ o espaço localmente convexo completo das funções vetoriais $\varphi : (a, b) \mapsto X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em (a, b) . Diremos que $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ em $D(a, b; X)$ se:

- i) $\exists K$ compacto de (a, b) , tal que $\text{supp}(\varphi_\nu)$ e $\text{supp}(\varphi)$ estão contidos em K , $\forall \nu$;
- ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \rightarrow \varphi^{(k)}(t)$ em X uniformemente em $t \in (a, b)$.

Seja $v \in L^p(0, T; X)$, onde X é um espaço de Hilbert separável e $\varphi \in D(0, T)$. A integral em X

$$\int_0^T v(s)\varphi(s)ds$$

existe, sendo um vector de X (esta integral é entendida como uma integral em X). Assim, dado $v \in L^p(0, T; X)$, a aplicação

$$Tv : D(0, T) \longrightarrow X$$

definida por

$$\langle Tv, \varphi \rangle = \int_0^T v(s)\varphi(s)ds$$

está bem definida, é linear e contínua. Denota-se por $\mathcal{D}'(0, T; X)$ o espaço das distribuições sobre $(0, T)$ com valores em X , isto é, o espaço das aplicações lineares e contínuas de $D(0, T)$ em X . Deste modo, $Tv \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ e demonstra-se que Tv é univocamente definida por v . Logo, identificando a função v com a distribuição Tv pode-se afirmar que

$$L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'(0, T; X).$$

Conclui-se, deste fato que toda $v \in L^p(0, T; X)$ possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$.

Seja $T \in \mathcal{D}'(0, T; X)$. A derivada de ordem n de T é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X dada por

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle.$$

1.3 O Adjunto de um operador linear não limitado

Sejam X e Y espaços de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ um operador linear não limitado com domínio denso. Definamos o conjunto

$$D(A^*) = \{v \in Y'; \exists c > 0 \text{ tal que } |\langle v, Au \rangle| \leq c \|u\|_X, \forall u \in D(A)\}.$$

Para cada $v \in D(A^*)$, definimos a aplicação $g_v : D(A) \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g_v(u) = \langle v, Au \rangle, \quad \forall u \in D(A),$$

que satisfaz

$$|g_v(u)| \leq c\|u\|_X, \quad \forall u \in D(A).$$

Observe que g_v é um operador linear limitado, com domínio denso. Então existe uma única extensão linear limitada $f_v : X \rightarrow \mathbb{R}$ de g_v , que satisfaz

$$|f_v(u)| \leq c\|u\|_X, \quad \forall u \in X.$$

Assim, definimos

$$\begin{aligned} A^* : D(A^*) \subset Y' &\rightarrow X' \\ v &\mapsto A^*v = f_v \end{aligned} \quad (1.1)$$

que é denominado o operador adjunto de A . Como f_v estende g_v , então eles coincidem em $D(A)$ e com (1.1) resulta a relação de adjunção:

$$\langle A^*v, u \rangle = \langle v, Au \rangle, \quad \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*).$$

Um resultado que será utilizado, sobre adjunto de um operador linear não limitado, é o seguinte:

Teorema 8. *O adjunto de um operador é um operador fechado.*

1.4 C_0 - Semigrupos

Durante esta seção, X denotará um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X em X . Uma família de operadores $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é denominada um Semigrupo de Operadores Lineares quando satisfaz:

- i) $S(0) = I$, onde I denota o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;
- ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}_+$.

O semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é denominado de classe C_0 , ou C_0 -semigrupo, quando satisfaz:

- iii) $\lim_{t \rightarrow 0_+} \|S(t)x - x\|_X = 0$, $\forall x \in X$.

Proposição 13. *Se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, então $t \mapsto \|S(t)\|_X$ é uma função limitada em todo intervalo limitado $[0, T]$.*

Resulta, da Proposição anterior, que existem $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que

$$\|S(t)\|_X \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

No caso em que $\omega = 0$ e $M = 1$, o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é denominado C_0 -**semigrupo de contrações**.

Definição 1.1. O operador A definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe} \right\};$$

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} x, \quad \forall x \in D(A),$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Proposição 14. $D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.

Proposição 15. Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal.

i) Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$, $\forall t \geq 0$ e

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax; \quad (1.2)$$

ii) Se $x \in D(A)$ então

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau; \quad (1.3)$$

iii) Se $x \in X$, então $\int_0^t S(\tau)x d\tau \in D(A)$ e

$$S(t)x - x = A \int_0^t S(\tau)x d\tau. \quad (1.4)$$

iv) Para todo $x \in X$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau = S(t)x. \quad (1.5)$$

Proposição 16. i) O gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo é um operador linear fechado e seu domínio é denso em X ;

ii) Um operador linear A , fechado e com domínio denso em X , é o gerador infinitesimal de, no máximo, um C_0 -semigrupo.

Definição 1.2. i) Diz-se que um operador linear $A : D(A) \subset X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade j ,

$$\operatorname{Re}\langle j(x), Ax \rangle \leq 0 \quad \forall x \in D(A). \quad (1.6)$$

No caso em que X é um espaço de Hilbert, equivalentemente, $A : D(A) \subset X$ é dissipativo quando

$$(Ax, x)_X \leq 0, \quad \forall x \in D(A);$$

ii) Diz-se que A é m -dissipativo se for dissipativo e $\operatorname{Im}(I\lambda - A) = X$ para algum $\lambda > 0$;

iii) Diz-se que A é m -acretivo (ou m -acretivo) se $-A$ for dissipativo (m -dissipativo).

Teorema 9 (Lumer-Phillips). *Um operador A é gerador de um C_0 -semigrupo de contrações se, e somente se, A é m -dissipativo e densamente definido.*

Corolário 2. *Seja A um operador linear fechado densamente definido. Se A e seu adjunto A^* são dissipativos, então A é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações.*

1.5 Interpolação de Espaços de Sobolev

Sejam X e Y dois espaços de Hilbert separáveis, com imersão contínua e densa. Sejam $(\cdot, \cdot)_X$ e $(\cdot, \cdot)_Y$ os produtos internos de X e Y , respectivamente.

Indicaremos por S , o conjunto de todas as funções u definidas em X , tal que a aplicação $v \rightarrow (u, v)_X$, $v \in X$ é contínua na topologia induzida por Y . Então $(u, v)_X = (Sv, u)_Y$ define S , como sendo um operador ilimitado em Y com domínio $D(S)$, denso em Y .

S é um operador auto-adjunto e estritamente positivo. Usando a decomposição espectral de operadores auto-adjuntos, podemos definir S^θ , $\theta \in \mathbb{R}$. Em particular, usaremos $A = S^{1/2}$.

O operador A , é auto-adjunto, positivo definido em Y , com domínio X e

$$(u, v)_X = (Au, Av)_Y, \quad \forall u, v \in X.$$

Definição 1.3. *Com as hipóteses anteriores, definimos o espaço intermediário*

$$[X, Y]_\theta = D(A^{1-\theta}) \quad (\text{domínio de } A^{1-\theta}), 0 \leq \theta \leq 1,$$

com a norma

$$\|u\|_{[X, Y]_\theta}^2 = \|u\|_Y^2 + \|A^{1-\theta}u\|_Y^2.$$

Observação.

1. $X \hookrightarrow [X, Y]_\theta \hookrightarrow Y$.
2. $\|u\|_{[X, Y]_\theta} \leq \|u\|_X^{1-\theta} \|u\|_Y^\theta$.
3. Se $0 < \theta_0 < \theta < 1$, então $[X, Y]_{\theta_0} \hookrightarrow [X, Y]_\theta$ onde a injeção é densa.
4. $[[X, Y]_{\theta_0}, [X, Y]_{\theta_1}]_\theta = [X, Y]_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1}$.

Proposição 17. *Seja $u \in X$. Então,*

$$\|u\|_{[X, Y]_\theta} \leq C \|u\|_X^{1-\theta} \|u\|_Y^\theta,$$

para alguma constante positiva C .

Teorema 10. *Sejam A_0, A_1 espaços de Banach e $1 \leq p_0 < \infty, 1 \leq p_1 < \infty, 0 < \theta < 1$. Então,*

$$[L^{p_0}(A_0), L^{p_1}(A_1)]_\theta = L^p([A_0, A_1]_\theta),$$

onde $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Além disso, se $1 \leq p_0 < \infty$ tem-se

$$[L^{p_0}(A_0), L^\infty(A_1)]_\theta = L^p([A_0, A_1]_\theta),$$

onde $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}$.

Teorema 11. *Sejam Ω , um conjunto suficientemente regular de \mathbb{R}^n , $s_1 > s_2 \geq 0$, tais que s_1 e $s_2 \neq k + 1/2$ (k inteiro ≥ 0). Então,*

$$[H_0^{s_1}(\Omega), H_0^{s_2}(\Omega)]_\theta = H^{(1-\theta)s_1 - \theta s_2}(\Omega),$$

se $(1-\theta)s_1 + \theta s_2 \neq k + 1/2$ e

$$[H_0^m(\Omega), H^0(\Omega)]_\theta = H^{(1-\theta)m}(\Omega),$$

se $(1-\theta)m \neq k + 1/2$, com normas equivalentes.

Teorema 12. *Seja Ω suficientemente regular. Sejam s_1 e $s_2 \geq 0$, tais que $s_2 \neq \mu + 1/2$ (μ inteiro ≥ 0). Então,*

$$[H^{s_1}(\Omega), H^{-s_2}(\Omega)]_\theta = H^{(1-\theta)s_1 - \theta s_2}(\Omega), \quad (1.7)$$

se $(1-\theta)s_1 - \theta s_2 \neq -1/2 - \nu$ (ν inteiro ≥ 0).

Teorema 13. *Seja \tilde{X}, \tilde{Y} um par de espaços de Hilbert, com as propriedades análogas às do par X, Y . Se $\pi \in L(X, Y) \cap L(\tilde{X}, \tilde{Y})$, então*

$$\pi \in L([X, \tilde{X}]_\theta; [Y, \tilde{Y}]_\theta) \text{ para todo } 0 < \theta < 1.$$

Definição 1.4. *Dizemos que dois espaços vetoriais topológicos normados X e Y são compatíveis se existe um espaço vetorial topológico separável U , tal que X e Y são subespaços de U .*

Consideremos o par (X, Y) de espaços compatíveis, então podemos definir sua soma, denotada por

$$\sum(X, Y) = X + Y = \{u \in U, \quad u = x + y, \quad x \in X, y \in Y\},$$

munidos da norma

$$\|u\|_{\sum(X, Y)} = \inf\{\|x\|_X + \|y\|_Y, \quad u = x + y\}$$

e

$$\Delta(X, Y) = X \cap Y$$

munido da norma

$$\|u\|_{\Delta(X,Y)} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

Sejam $S = \{z|z \in \mathbb{C}, 0 \leq \text{Re}(z) \leq 1\}$ e $S_0 = \{z|z \in \mathbb{C}, 0 < \text{Re}(z) < 1\}$. Definimos $\mathbb{F}(X, Y)$ como sendo o conjunto das funções contínuas em S que satisfazem:

1. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \Sigma(X, Y)$. analítica em S_0 ;
2. $\|f(z)\|_{\Sigma(X,Y)} \leq M, \forall z \in S$;
3. $t \longrightarrow f(it) \in X$, sendo contínua e nula no infinito;
4. $t \longrightarrow f(1 + it) \in Y$, sendo contínua e nula no infinito,

munido com a norma

$$\|f\|_{\mathbb{F}(X,Y)} = \max\{\sup_t \|f(it)\|_X, \sup_t \|f(1 + it)\|_Y\}.$$

Lema 3. *O espaço $\mathbb{F}(X, Y)$ é um espaço de Banach.*

Definição 1.5. *Definimos $[X, Y]_\theta$ como sendo*

$$[X, Y]_\theta = \left\{ u \mid u \in \Sigma(X, Y), u = f(\theta), \text{ para algum } f \in \mathbb{F}(X, Y) \right\}$$

munido com a norma

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} = \inf \{ \|f(\theta)\|_{\mathbb{F}(X,Y)} \mid u = f(\theta), f \in \mathbb{F}(X, Y) \}.$$

Observação.

1. O espaço $[X, Y]_\theta$ é um espaço de Banach.
2. $\Delta(X, Y) \subset [X, Y]_\theta \subset \Sigma(X, Y)$.

Teorema 14. *Sejam X e Y dois espaços de Banach, $1 \leq p_0, p_1 < \infty, 0 < \theta < 1$. Então,*

$$[L^{p_0}(0, T; X), L^{p_1}(0, T; Y)]_\theta = L^p(0, T; [X, Y]_\theta)$$

onde $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ com normas equivalentes. Se $1 \leq p_0 < \infty$, temos

$$[L^{p_0}(0, T; X), L^\infty(0, T; Y)]_\theta = L^p(0, T; [X, Y]_\theta)$$

onde $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}$ com normas equivalentes.

Capítulo 2

O Problema de Cauchy

Dado $T > 0$, consideremos o sistema

$$\begin{cases} y_t + \nu y_{xxx} + (My)_x = 0 & \text{em } (0, T) \times (0, 1) \\ y|_{x=0} = v_1, y|_{x=1} = v_2, y_x|_{x=1} = v_3 & \text{em } (0, T) \\ y|_{t=0} = y_0 & \text{em } (0, 1). \end{cases} \quad (2.1)$$

Estudaremos a seguinte classe de soluções:

Definição 2.1. *Dados $T > 0$, $y_0 \in H^{-1}(0, 1)$ e $(v_1, v_2, v_3) \in [L^2(0, T)]^2 \times H^{-1/3}(0, T)$, dizemos que uma função $y \in L^2((0, 1) \times (0, T))$ é uma solução (por transposição) de (2.1) se y satisfaz*

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 y f \, dx dt = & \langle y_0, u|_{t=0} \rangle_{H^{-1}(0,1) \times H_0^1(0,1)} + \nu \int_0^T v_1 u_{xxx}|_{x=0} \, dt - \nu \int_0^T v_2 u_{xx}|_{x=1} \, dt \\ & + \nu \langle v_3, u|_{x=1} \rangle_{H^{-1/3}(0,T) \times H^{1/3}(0,1)}, \quad \forall f \in L^2((0, 1) \times (0, T)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde u é solução do seguinte problema adjunto

$$\begin{cases} -u_t - \nu u_{xxx} - Mu_x = f & \text{em } (0, T) \times (0, 1) \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = u_x|_{x=0} = 0 & \text{em } (0, T) \\ u|_{t=T} = 0 & \text{em } (0, 1). \end{cases} \quad (2.3)$$

Os resultados de existência dessa classe de solução serão dadas na seção (2.33) e dependem do Teorema da Representação de Riesz, de argumentos de interpolação e das estimativas a seguir.

2.1 Estimativas de Energia

Nessa seção vamos provar que para f em $L^2(0, T; H^{-1}(0, 1)) \cup L^1(0, T; L^2(0, 1))$ a solução do sistema adjunto (2.3) está no espaço

$$Y_{1/4} = L^2(0, T; H^1(0, 1)) \cap C^0([0, T]; L^2(0, 1)).$$

Lema 4. *Seja M uma constante e $f \in L^2(0, T; H^{-1}(0, 1)) \cup L^1(0, T; L^2(0, 1))$. Então, a solução u do sistema (2.3) pertence a $Y_{1/4}$. Além disso, existe uma constante positiva C , tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, 1))} + \nu^{1/2} \|u\|_{L^2(0, T; H^1(0, 1))} + \nu^{1/2} \|u_x|_{x=1}\|_{L^2(0, T)} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(0, 1))} \quad (2.4)$$

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, 1))} + \nu^{1/2} \|u\|_{L^2(0, T; H^1(0, 1))} + \nu^{1/2} \|u_x|_{x=1}\|_{L^2(0, T)} \leq C \|f\|_{L^1(0, T; L^2(0, 1))}. \quad (2.5)$$

Demonstração. Basta mostrar para $f \in C_0^\infty((0, T) \times (0, 1))$. O resultado segue por argumentos de densidade.

Primeiro caso: $f \in L^2(0, T; H^{-1}(0, 1))$.

Multiplicamos a equação (2.3) por $(1-x)u$ e integramos com respeito a x :

$$\begin{aligned} - \int_0^1 (1-x)uu_t dx - \nu \int_0^1 (1-x)uu_{xxx} dx - M \int_0^1 (1-x)uu_x dx &= \\ &= \langle f, (1-x)u \rangle_{H^{-1}(0, 1) \times H_0^1(0, 1)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Observe que

$$-\nu \int_0^1 (1-x)uu_{xxx} dx = \nu \int_0^1 (1-x)u_x u_{xx} dx - \nu \int_0^1 uu_{xx} dx \quad (2.7)$$

$$-M \int_0^1 (1-x)(uu_x) dx = -M \int_0^1 (1-x) \left(\frac{u^2}{2}\right)_x dx = \frac{-M}{2} \int_0^1 u^2 dx. \quad (2.8)$$

Substituindo (2.7) e (2.8) em (2.6) obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 (1-x)u^2 dx + \nu \int_0^1 ((1-x)(u_x u_{xx}) - uu_{xx}) dx - \frac{M}{2} \int_0^1 u^2 dx &= \\ &= \langle f, (1-x)u \rangle_{H^{-1}(0, 1) \times H_0^1(0, 1)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Novamente, integrando por partes, obtemos as identidades

$$\int_0^1 (1-x)u_x u_{xx} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2 dx \quad (2.10)$$

e

$$-\int_0^1 uu_{xx} dx = \int_0^1 u_x^2 dx. \quad (2.11)$$

Substituindo (2.10) e (2.11) em (2.9) e utilizando a desigualdade de Hölder, concluímos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (1-x)u^2 dx + \nu \frac{3}{2} \int_0^1 u_x^2 dx &= \frac{M}{2} \int_0^1 u^2 dx + \langle f, (1-x)u \rangle_{H^{-1}(0,1) \times H_0^1(0,1)} \\ &\leq \frac{M}{2} \int_0^1 u^2 dx + \|f\|_{H^{-1}(0,1)} \|(1-x)u\|_{H_0^1(0,1)} \\ &\leq \frac{M}{2} \int_0^1 u^2 dx + \frac{\nu}{2} \|f\|_{H^{-1}(0,1)}^2 + \frac{1}{2\nu} \|(1-x)u\|_{H_0^1(0,1)}^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Como

$$\begin{aligned} \|(1-x)u\|_{H_0^1(0,1)}^2 &= \int_0^1 u^2 dx - 2 \int_0^1 (1-x)(uu_x) dx + \int_0^1 (1-x)^2 u_x^2 dx = \\ &= \int_0^1 (1-x)^2 u_x^2 dx \leq \int_0^1 u_x^2 dx \end{aligned} \quad (2.13)$$

de (2.13) e (2.12) obtém-se

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (1-x)u^2 dx + \frac{3}{2} \nu \int_0^1 u_x^2 dx \leq C \int_0^1 u^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{C}{\nu} \|f\|_{H^{-1}(0,1)}^2. \quad (2.14)$$

Agora, multiplicamos a equação (2.3) por u e integramos com respeito a x :

$$-\int_0^1 uu_t dx - \nu \int_0^1 uu_{xxx} dx - M \int_0^1 uu_x dx = \langle f, u \rangle_{H^{-1}(0,1) \times H_0^1(0,1)}. \quad (2.15)$$

Observe que

$$\int_0^1 uu_x dx = 0 \quad (2.16)$$

e

$$-\int_0^1 uu_{xxx}dx = \int_0^1 u_x u_{xx}dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (u_x^2)_x dx = \frac{1}{2} |u_x|_{x=1}|^2. \quad (2.17)$$

Integrando por partes, usando as desigualdades acima e aplicando a desigualdade de Hölder segue que

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u^2 dx + \frac{\nu}{2} \|u_x|_{x=1}\|^2 = \langle f, u \rangle_{H^{-1}(0,1) \times H_0^1(0,1)} \leq \frac{1}{2\nu} \|f\|_{H^{-1}(0,1)}^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx. \quad (2.18)$$

Combinando as desigualdades (2.14) e (2.18) obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (2-x)u^2 dx + \nu \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\nu}{2} \|u_x|_{x=1}\|^2 &\leq \\ &\leq C \int_0^1 u^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{C}{\nu} \|f\|_{H^{-1}(0,1)}^2 \\ &\leq \frac{C}{2} \int_0^1 (2-x)u^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{C}{\nu} \|f\|_{H^{-1}(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (2-x)u^2 dx - \frac{C}{2} \int_0^1 (2-x)u^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\nu}{2} \|u_x|_{x=1}\|^2 &\leq \\ &\leq \frac{C}{\nu} \|f\|_{H^{-1}(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (e^{Ct} \int_0^1 (2-x)u^2 dx) + \frac{\nu}{2} e^{Ct} \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\nu}{2} e^{Ct} \|u_x|_{x=1}\|^2 \leq \frac{C}{\nu} e^{Ct} \|f\|_{H^{-1}(0,1)}^2. \quad (2.19)$$

Lembrando que $u(T, x) = 0$, integramos (2.19) de t até T obtendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{Ct} \int_0^1 (2-x)u^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_t^T (e^{Cs} \int_0^1 u_x(s, x)^2 dx) ds + \nu \int_t^T e^{Cs} \|u_x(s, 1)\|^2 ds &\leq \\ &\leq C \int_t^T \frac{e^{Cs}}{\nu} \|f(s)\|_{H^{-1}(0,1)}^2 ds. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Da desigualdade (2.20) obtemos uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 dx &\leq \frac{1}{2} e^{Ct} \int_0^1 (2-x) u^2 dx \leq C \int_t^T \frac{e^{Cs}}{\nu} \|f(s)\|_{H^{-1}(0,1)}^2 ds \\ &\leq \frac{C}{\nu} \int_0^T \|f(s)\|_{H^{-1}(0,1)}^2 ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))}. \quad (2.21)$$

Novamente, da desigualdade (2.20) segue que

$$\frac{\nu}{2} \int_t^T \left(\int_0^1 u_x(s,x)^2 dx \right) ds \leq \frac{\nu}{2} \int_t^T (e^{Cs} \int_0^1 u_x(s,x)^2 dx) ds \leq \frac{C}{\nu} \int_0^T \|f(s)\|_{H^{-1}(0,1)}^2 ds$$

e

$$\nu \int_t^T \|u_x(s,1)\|^2 ds \leq \nu \int_t^T e^{Cs} \|u_x(s,1)\|^2 ds \leq \frac{C}{\nu} \int_0^T \|f(s)\|_{H^{-1}(0,1)}^2 ds.$$

Fazendo $t \rightarrow 0$ nas desigualdades acima, tem-se

$$\nu^{1/2} \|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))}, \quad (2.22)$$

$$\nu^{1/2} \|u_x|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))}. \quad (2.23)$$

Finalmente, somando as desigualdades (2.21), (2.22) e (2.23), obtemos (2.4).

Segundo caso: $f \in L^1(0, T; L^2(0, 1))$.

Procedendo como no caso anterior deduzimos que

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (1-x) u^2 dx + \nu \frac{3}{2} \int_0^1 u_x^2 dx \leq \frac{M}{2} \int_0^1 u^2 dx + \int_0^1 f u dx \quad (2.24)$$

e

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u^2 dx + \frac{\nu}{2} \|u_x|_{x=1}\|^2 = \int_0^1 f u dx. \quad (2.25)$$

Somando as desigualdades anteriores, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (2-x)u^2 dx + \frac{3\nu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\nu}{2} \|u_x|_{x=1}\|^2 &\leq \frac{C}{2} \int_0^1 u^2 dx + 2 \int_0^1 f u dx \\
&\leq \frac{C}{2} \int_0^1 (2-x)u^2 dx + C \int_0^1 f u dx.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (e^{Ct} \int_0^1 (2-x)u^2 dx) + \frac{3\nu}{2} e^{Ct} \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\nu}{2} e^{Ct} \|u_x|_{x=1}\|^2 &\leq C e^{Ct} \int_0^1 f u dx \\
&\leq C e^{CT} \int_0^1 f u dx \leq C \int_0^1 f u dx.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Integrando de t até T resulta de (2.26) que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} e^{Ct} \int_0^1 (2-x)u^2 dx + \frac{3\nu}{2} \int_t^T (e^{Cs} \int_0^1 u_x(s,x)^2 dx) ds + \frac{\nu}{2} \int_t^T e^{Cs} \|u_x(s,1)\|^2 ds \\
\leq C \int_t^T \int_0^1 f u dx ds \leq C \int_0^T \int_0^1 f u dx ds.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

De (2.27) obtemos uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^1 u^2 dx &\leq \frac{1}{2} e^{Ct} \int_0^1 (2-x)u^2 dx \leq C \int_0^T \int_0^1 f u dx ds \\
&\leq C \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))} \\
&\leq \frac{1}{4} \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}^2 + C \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}^2
\end{aligned}$$

onde

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \leq C \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}. \tag{2.28}$$

Novamente, da desigualdade (2.27) temos a estimativa

$$\frac{3\nu}{2} \int_t^T \int_0^1 u_x(s,x)^2 dx ds \leq \frac{3\nu}{2} \int_t^T (e^{Cs} \int_0^1 u_x(s,x)^2 dx) ds \leq C \int_0^T \int_0^1 f u dx ds.$$

Fazendo $t \rightarrow 0$, pela desigualdade (2.28) obtemos que

$$\nu^{1/2} \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(0,1))} \leq C \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}. \tag{2.29}$$

Analogamente, das desigualdades (2.27) e (2.28) (fazendo $t \rightarrow 0$) limitamos o termo de fronteira $u_x|_{x=1}$:

$$\frac{\nu}{2} \int_t^T \|u_x(s, 1)\|^2 ds \leq C \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}^2,$$

ou seja,

$$\nu^{1/2} \|u_x|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq C \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}. \quad (2.30)$$

Somando as desigualdades (2.28), (2.29) e (2.30) resulta (2.5). \square

Lema 5. *Seja M em $Y_{1/4}$ e f como no Lema 4. Então, existe uma única solução u em $Y_{1/4}$ do sistema (2.3). Além disso, existe uma constante positiva $\tilde{C} = \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu)$, tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + \|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} + \|u_x|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu) \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))} \quad (2.31)$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + \|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} + \|u_x|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu) \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}. \quad (2.32)$$

Demonstração. Se $f \in L^1(0, T; L^2(0, 1))$, então (2.32) segue do segundo caso do Lema 1. Se $f \in L^2(0, T; H^{-1}(0, 1))$, pelo caso 1 do lema anterior obtemos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (1-x)u^2 dx + \frac{3\nu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx - \int_0^1 M(1-x)uu_x dx \\ = \langle f, (1-x)u \rangle_{H^{-1}(0,1) \times H_0^1(0,1)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Mas pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_0^1 M(1-x)uu_x dx &\leq \|u_x\|_{L^2(0,1)} \|M(1-x)u\|_{L^2(0,1)} \leq \\ &\leq \frac{\nu}{2} \|u_x\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2\nu} \|M(1-x)u\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\leq \frac{\nu}{2} \|u_x\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{C}{\nu} \|M\|_{L^\infty(0,1)}^2 \|u\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Agora, multiplicando a equação (2.3) por u , integrando com respeito a x e levando em conta as identidades (2.16) e (2.17), temos

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u^2 dx + \frac{\nu}{2} \|u_x|_{x=1}\|^2 - \int_0^1 M u u_x dx = \langle f, u \rangle_{H^{-1}(0,1) \times H_0^1(0,1)}, \quad (2.35)$$

onde

$$\int_0^1 M u u_x dx \leq \frac{\nu}{2} \|u_x\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{C}{\nu} \|M\|_{L^\infty(0,1)}^2 \|u\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (2.36)$$

De (2.33), (2.34), (2.35) e (2.36) resulta que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (2-x) u^2 dx + \frac{\nu}{2} \|u_x|_{x=1}\|^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx &\leq \\ &\leq \langle f, (2-x)u \rangle_{H^{-1}(0,1) \times H_0^1(0,1)} + \frac{2C}{\nu} \|M\|_{L^\infty(0,1)}^2 \int_0^1 u^2 dx \\ &\leq \frac{C}{\nu} \|f\|_{H^{-1}(0,1)}^2 + \frac{\nu}{4} \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{2C}{\nu} \|M\|_{L^\infty(0,1)}^2 \int_0^1 u^2 dx. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Pelo Teorema de Morrey, tem-se

$$\|M\|_{L^\infty(0,1)} \leq \|M\|_{H^1(0,1)} \leq \|M\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))} \leq \|M\|_{Y_{1/4}}.$$

Logo, substituindo a desigualdade acima em (2.37) obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (2-x) u^2 dx + \frac{\nu}{2} \|u_x|_{x=1}\|^2 + \frac{\nu}{4} \int_0^1 u_x^2 dx &\leq \\ &\leq \frac{C}{\nu} \|f\|_{H^{-1}(0,1)}^2 + \frac{2C}{\nu} \|M\|_{Y_{1/4}}^2 \int_0^1 u^2 dx \\ &\leq \tilde{C} \|f\|_{H^{-1}(0,1)}^2 + \frac{\tilde{C}}{2} \int_0^1 (2-x) u^2 dx, \end{aligned}$$

onde $\tilde{C} = \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu)$. Assim,

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (e^{\tilde{C}t} \int_0^1 (2-x) u^2 dx) + \frac{\nu}{4} e^{\tilde{C}t} \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\nu}{2} e^{\tilde{C}t} \|u_x|_{x=1}\|^2 \leq e^{\tilde{C}t} \|f\|_{H^{-1}(0,1)}^2. \quad (2.38)$$

De (2.38) e pelo mesmo argumento usado em (2.19) – (2.23), obtém-se

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu) \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))} \quad (2.39)$$

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} \leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu) \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))} \quad (2.40)$$

$$\|u_x|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu) \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))}. \quad (2.41)$$

Finalmente, somando as desigualdades (2.39), (2.40) e (2.41) deduzimos a desigualdade (2.31). □

2.2 Estimativas de ganho de regularidade, para o caso $M=0$

Nesta seção demonstramos um resultado de regularidade para o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -u_t - \nu u_{xxx} = g & \text{em } (0, T) \times (0, 1) \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = u_x|_{x=0} = 0 & \text{em } (0, T) \\ u|_{t=T} = 0 & \text{em } (0, 1) \end{cases} \quad (2.42)$$

Inicialmente, introduzimos os seguintes espaços funcionais

$$X_0 = L^2(0, T; H^{-2}(0, 1)); \quad X_1 = L^2(0, T; H_0^2(0, 1)); \quad \tilde{X}_0 = L^2(0, T; H^{-1}(0, 1))$$

$$\tilde{X}_1 = L^1(0, T; (H^3 \cap H_0^2)(0, 1)) \quad ; \quad Y_0 = L^2(0, T; L^2(0, 1)) \cap C^0([0, T]; H^{-1}(0, 1))$$

e

$$Y_1 = L^2(0, T; H^4(0, 1)) \cap C^0([0, T]; H^3(0, 1)).$$

Consideraremos os espaços X_0 e X_1 munidos das normas usuais, enquanto que em Y_0 e Y_1 as normas serão dadas, respectivamente, por

$$\|u\|_{Y_0} := \nu^{1/2} \|u\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))} + \|u\|_{L^\infty(0, T; H^{-1}(0, 1))}$$

e

$$\|u\|_{Y_1} := \nu^{1/2} \|u\|_{L^2(0, T; H^4(0, 1))} + \|u\|_{L^\infty(0, T; H^3(0, 1))}.$$

Lema 6. *Seja $g \in L^2(0, T; H_0^2(0, 1)) \cup L^1(0, T; (H^3 \cap H_0^2)(0, 1))$. Então, existe uma única solução de (2.42) em Y_1 , tal que*

$$\|u\|_{Y_1} + \nu^{-1/2} \|u_x|_{x=1}\|_{H^1(0, T)} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \|g\|_{L^2(0, T; H^2(0, 1))} \quad (2.43)$$

e

$$\|u\|_{Y_1} + \nu^{-1/2} \|u_x|_{x=1}\|_{H^1(0, T)} \leq C \|g\|_{L^1(0, T; H^3(0, 1))} \quad (2.44)$$

para alguma constante positiva C .

Demonstração. Vamos supor que $g \in C^\infty([0, T] \times [0, 1])$ com $g|_{x=0} = g|_{x=1} = g_x|_{x=0} = g_x|_{x=1} = 0$. Novamente, a conclusão dos casos $g \in L^2(0, T; H_0^2(0, 1))$ e $g \in L^1(0, T; (H^3 \cap H_0^2)(0, 1))$ resulta de argumentos de aproximação e densidade.

Inicialmente, aplicamos o operador $P_1 = \partial_{xxx}$ à equação (2.42):

$$(P_1 u)_t + \nu P_1^2 u = -P_1 g \quad \text{em } (0, T) \times (0, 1). \quad (2.45)$$

Multiplicando a equação acima por $-(1-x)P_1 u$ e integrando em $(0, 1)$, obtemos

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (1-x) |P_1 u|^2 dx - \nu \int_0^1 (1-x) P_1^2 u P_1 u dx = \int_0^1 (1-x) P_1 u P_1 g dx. \quad (2.46)$$

Pelos dados de contorno e pela escolha da função g obtemos de (2.42) que

$$u_{3x}(t, 0) = u_{3x}(t, 1) = u_{4x}(t, 0) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\nu \int_0^1 (1-x) P_1 u P_1^2 u dx &= -\nu \int_0^1 (1-x) u_{6x} u_{3x} dx \\ &= -\nu \left(((1-x) u_{5x} u_{3x}) \Big|_0^1 - \int_0^1 u_{5x} ((1-x) u_{4x} - u_{3x}) dx \right) \\ &= \nu \int_0^1 u_{4x} ((1-x) u_{4x} - u_{3x}) dx \\ &= \nu \left((u_{5x} ((1-x) u_{4x} - u_{3x})) \Big|_0^1 + \int_0^1 u_{4x} (2u_{4x} - (1-x) u_{5x}) dx \right) \\ &= \nu \int_0^1 u_{4x} (2u_{4x} - (1-x) u_{5x}) dx \\ &= 2\nu \int_0^1 |u_{4x}|^2 dx - \nu \int_0^1 u_{4x} (1-x) u_{5x} dx \\ &= 2\nu \int_0^1 |u_{4x}|^2 dx - \frac{\nu}{2} \int_0^1 (1-x) (|u_{4x}|^2)_x dx \\ &= 2\nu \int_0^1 |u_{4x}|^2 dx - \frac{\nu}{2} \left(((1-x) u_{4x}) \Big|_0^1 + \int_0^1 |u_{4x}|^2 dx \right) \\ &= 2\nu \int_0^1 |u_{4x}|^2 dx - \frac{\nu}{2} \int_0^1 |u_{4x}|^2 dx = \frac{3\nu}{2} \int_0^1 |u_{4x}|^2 dx \\ &= \frac{3\nu}{2} \int_0^1 |P_1 u_x|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Multiplicando a equação (2.45) por $-P_1 u$ e integrando em $(0, 1)$ obtemos

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |P_1 u|^2 dx - \nu \int_0^1 P_1 u P_1^2 u dx = \int_0^1 P_1 u P_1 g dx. \quad (2.48)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
-\nu \int_0^1 P_1 u P_1^2 u dx &= -\nu \int_0^1 u_{6x} u_{3x} dx = -\nu \left((u_{5x} u_{3x}) \Big|_0^1 - \int_0^1 u_{5x} u_{4x} dx \right) \\
&= \nu \int_0^1 u_{5x} u_{4x} dx = \frac{\nu}{2} \int_0^1 \frac{d}{dx} |u_{4x}|^2 dx \\
&= \frac{\nu}{2} \int_0^1 \frac{d}{dx} |P_1 u_x|^2 dx = \frac{\nu}{2} |P_1 u_x(t, 1)|^2 \\
&= \frac{\nu}{2} \left(-\frac{1}{\nu} (g_x(t, 0) + u_{xt}|_{x=1}) \right)^2 = \frac{1}{2\nu} |u_{xt}|_{x=1}|^2. \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Substituindo (2.47) em (2.46) e (2.49) em (2.48) obtém-se, respectivamente,

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (1-x) |P_1 u|^2 dx + \frac{3\nu}{2} \int_0^1 |P_1 u_x|^2 dx = \int_0^1 (1-x) P_1 u P_1 g dx$$

e

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |P_1 u|^2 dx + \frac{1}{2\nu} |u_{xt}|_{x=1}|^2 = \int_0^1 P_1 u P_1 g dx.$$

Somando as identidades acima segue que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (2-x) |P_1 u|^2 dx + \frac{3\nu}{2} \int_0^1 |P_1 u_x|^2 dx + \frac{1}{2\nu} |u_{xt}|_{x=1}|^2 &= \\
&= \int_0^1 (2-x) P_1 u P_1 g dx. \tag{2.50}
\end{aligned}$$

Como $P_1 u|_{t=T} = 0$, integrando a igualdade acima de t até T obtemos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^1 (2-x) |P_1 u|^2(t) dx + \frac{3\nu}{2} \int_t^T \int_0^1 |P_1 u_x(s, x)|^2 dx ds + \frac{1}{2\nu} \int_t^T |u_{xt}(s, 1)|^2 ds &= \\
&= \int_t^T \int_0^1 (2-x) P_1 u P_1 g dx ds. \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Vamos estimar o lado direito de (2.51). Consideraremos dois casos:

Primeiro caso: $g \in L^2(0, T : H_0^2(0, 1))$.

Como $P_1 u|_{x=0,1} = 0$, obtêm-se

$$\int_0^1 (2-x)P_1 u P_1 g dx = \int_0^1 g_{xx}(u_{3x} - (2-x)u_{4x}) dx = \int_0^1 g_{xx}(P_1 u - (2-x)P_1 u_x) dx.$$

A identidade acima juntamente com as desigualdades de Hölder e Cauchy-Schwarz nos garantem que

$$\begin{aligned} \left| \int_t^T \int_0^1 (2-x)P_1 u P_1 g dx ds \right| &\leq \int_t^T \left(\int_0^1 g_{xx}(2|P_1 u| + 2|P_1 u_x|) dx \right) ds \\ &\leq 2 \int_t^T \left(\int_0^1 |g_{xx}| |P_1 u_x| dx + \int_0^1 |g_{xx}| |P_1 u| dx \right) ds \\ &\leq 2 \int_t^T \|g_{xx}\|_{L^2(0,1)} (\|P_1 u_x\|_{L^2(0,1)} + \|P_1 u\|_{L^2(0,1)}) ds \\ &\leq C \left(\int_t^T (\|P_1 u_x\|_{L^2(0,1)} + \|P_1 u\|_{L^2(0,1)})^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_t^T \|g_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\int_t^T (\|P_1 u_x\|_{L^2(0,1)}^2 + \|P_1 u\|_{L^2(0,1)}^2) ds \right)^{1/2} \|g_{xx}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\ &\leq C \|P_1 u\|_{L^2(t,T;H^1(0,1))} \|g_{xx}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\ &\leq \frac{\nu}{2} \|P_1 u\|_{L^2(t,T;H^1(0,1))}^2 + \frac{C}{\nu} \|g_{xx}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Segundo caso: $g \in L^1(0, T : (H^3 \cap H_0^2)(0, 1))$.

Procedemos como no caso anterior:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_0^1 (2-x)P_1 u P_1 g, dx ds \right| &\leq 2 \int_0^T \left(\int_0^1 |P_1 u| |P_1 u_x| dx \right) ds \\ &\leq 2 \int_0^T \|P_1 u\|_{L^2(0,1)} \|P_1 g\|_{L^2(0,1)} ds \\ &\leq 2 \|P_1 u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \|P_1 g\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))} \\ &\leq \frac{1}{4} \|P_1 u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}^2 + 4 \|P_1 g\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}^2, \end{aligned} \quad (2.53)$$

o que conclui as estimativas do lado direito de (2.51).

Inicialmente, de (2.51) e (2.52) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 (2-x) |P_1 u|^2(t) dx + \nu \int_t^T \int_0^1 |P_1 u_x(s, x)|^2 dx ds &\leq \\ &\leq \frac{\nu}{2} \int_t^T \int_0^1 |P_1 u|^2 dx ds + \frac{C}{\nu} \int_0^T \|g_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 ds, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 |P_1 u|^2(t) dx &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 (2-x) |P_1 u|^2(t) dx + \nu \int_t^T \int_0^1 |P_1 u_x(s, x)|^2 dx ds \\ &\leq \frac{\nu}{2} \int_t^T \int_0^1 |P_1 u|^2 dx ds + \frac{C}{\nu} \int_0^T \|g_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 ds. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Logo,

$$\|P_1 u(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \nu \int_t^T \|P_1 u(s)\|_{L^2(0,1)}^2 ds + \frac{C}{\nu} \int_0^T \|g_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 ds \quad (2.55)$$

e, pela desigualdade de Gronwall, concluimos que

$$\begin{aligned} \|P_1 u(t)\|_{L^2(0,1)}^2 &\leq \frac{C}{\nu} \left(\int_0^T \|g_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 ds \right) e^{\nu(T-t)} \leq \frac{C}{\nu} \left(\int_0^T \|g_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 ds \right) e^T \\ &\leq \frac{C}{\nu} \int_0^T \|g_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 ds. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Da desigualdade de Poincaré e de (2.56), obtêm-se

$$\|u(t)\|_{H^3(0,1)} \leq C \|P_1 u(t)\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \left(\int_0^T \|g_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 ds \right)^{1/2} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \|g\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}, \quad (2.57)$$

e, da desigualdade (2.57), segue a estimativa

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^3(0,1))} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \|g\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}. \quad (2.58)$$

Para estimar o termo de fronteira $u_x|_{x=1}$, inicialmente fazemos $t \rightarrow 0$ em (2.51) e (2.52) :

$$\frac{1}{2\nu} \int_0^T |u_{xt}(s, 1)|^2 ds \leq \frac{\nu}{2} \int_0^T \int_0^1 |P_1 u|^2 dx ds + \frac{C}{\nu} \int_0^T \|g_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 ds. \quad (2.59)$$

Da desigualdade (2.56) integrado desde 0 até T :

$$\int_0^T \|P_1 u(s)\|_{L^2(0,1)}^2 ds \leq \frac{C}{\nu} \int_0^T \|g_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 ds \leq \frac{C}{\nu^2} \int_0^T \|g_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 ds \quad (2.60)$$

Logo, de (2.59) e (2.60), segue que

$$\frac{1}{2\nu} \int_0^T |u_{xt}(s, 1)|^2 ds \leq \frac{C}{\nu} \int_0^T \|g_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 ds \leq \frac{C}{\nu} \|g\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}^2, \quad (2.61)$$

ou seja,

$$\nu^{-1/2} \|u_x|_{x=1}\|_{H_0^1(0,T)} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \|g\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}. \quad (2.62)$$

Agora, fazendo $t \rightarrow 0$ em (2.54), pela desigualdade (2.60) obtém-se

$$\begin{aligned} \nu \int_0^T \int_0^1 |P_1 u_x(s, x)|^2 dx ds &\leq \frac{\nu}{2} \int_0^T \int_0^1 |P_1 u|^2 dx ds + \frac{C}{\nu} \int_0^T \|g_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 ds \\ &\leq \frac{C}{\nu} \int_0^T \|g_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 ds \leq \frac{C}{\nu} \|g\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\nu^{1/2} \|P_1 u\|_{L^2(0,T;H_0^1(0,1))} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \|g\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))} \quad (2.63)$$

e pela desigualdade de Poincaré obtemos uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$\nu^{1/2} \|u\|_{L^2(0,T;H^4(0,1))} \leq C \nu^{1/2} \|P_1 u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \|g\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}. \quad (2.64)$$

Finalmente, somando as desigualdades (2.58), (2.62) e (2.64) obtém-se (2.43).

Para provar a estimativa (2.44), inicialmente combinamos (2.51) e (2.53):

$$\frac{1}{2} \|P_1 u(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{1}{4} \|P_1 u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}^2 + 4 \|P_1 g\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}^2,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \|P_1 u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}^2 \leq \frac{1}{4} \|P_1 u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}^2 + 4 \|P_1 g\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}^2.$$

Assim,

$$\|P_1 u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \leq C \|P_1 g\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))} \leq C \|g\|_{L^1(0,T;H^3(0,1))}. \quad (2.65)$$

Novamente, pela desigualdade de Poincaré, obtém-se

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^3(0,1))} \leq C \|P_1 u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \leq C \|g\|_{L^1(0,T;H^3(0,1))}, \quad (2.66)$$

isto é,

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^3(0,1))} \leq C \|g\|_{L^1(0,T;H^3(0,1))}. \quad (2.67)$$

De (2.51), (2.53) e (2.65) segue-se a seguinte estimativa

$$\frac{3\nu}{2} \int_t^T \int_0^1 |P_1 u_x(s, x)|^2 dx ds \leq C \|g\|_{L^1(0,T;H^3(0,1))}^2 \quad (2.68)$$

donde concluímos que

$$\nu^{1/2} \|P_1 u\|_{L^2(0,T;H_0^1(0,1))} \leq C \|g\|_{L^1(0,T;H^3(0,1))}, \quad (2.69)$$

quando $t \rightarrow 0$. Aplicando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\nu^{1/2} \|u\|_{L^2(0,T;H^4(0,1))} \leq C \nu^{1/2} \|P_1 u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} \leq C \|g\|_{L^1(0,T;H^3(0,1))}. \quad (2.70)$$

Para estimar o termo de fronteira $u_x|_{x=1}$, fazemos $t \rightarrow 0$ em (2.51), usando a desigualdade (2.53):

$$\frac{1}{2\nu} \|u_x|_{x=1}\|_{H_0^1(0,T)}^2 \leq \frac{1}{4} \|P_1 u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}^2 + 4 \|P_1 g\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}^2. \quad (2.71)$$

Logo, pela desigualdade (2.65) resulta que

$$\nu^{-1/2} \|u_x|_{x=1}\|_{H_0^1(0,T)} \leq C \|g\|_{L^1(0,T;H^3(0,1))} \quad (2.72)$$

Finalmente, somando as desigualdades (2.67), (2.70) e (2.72) obtemos (2.44). \square

2.3 Estimativas dos termos de fronteira para o caso $M = 0$

2.3.1 Argumentos de interpolação

Introduzimos os espaços funcionais

$$\begin{aligned}
X_{1/4} &= L^2(0, T; H^{-1}(0, 1)) \quad ; \quad \tilde{X}_{1/4} = L^1(0, T; L^2(0, 1)) \\
X_\theta &= (X_1, X_{1/4})_{[\theta]} = L^2(0, T; H^{2-3\theta}(0, 1)) \\
\tilde{X}_\theta &= (\tilde{X}_1, \tilde{X}_{1/4})_{[\theta]} = L^1(0, T; H^{3(1-\theta)} \cap H_0^{2(1-\theta)}(0, 1)) \\
Y_{1/4} &= L^2(0, T; H^1(0, 1)) \cap C^0([0, T]; L^2(0, 1))
\end{aligned} \tag{2.73}$$

e

$$Y_\theta = (Y_1, Y_{1/4})_{[\theta]} = L^2(0, T; H^{4-3\theta}(0, 1)) \cap C^0([0, T]; H^{3(1-\theta)}(0, 1)) \tag{2.74}$$

para todo $\theta \in [0, 1]$.

Consideraremos os espaços $X_{1/4}$ e $\tilde{X}_{1/4}$ munido das normas usuais, em quanto que em $Y_{1/4}$ a norma será dada por

$$\|u\|_{Y_{1/4}} = \|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, 1))} + \nu^{1/2} \|u\|_{L^2(0, T; H^1(0, 1))}.$$

Definimos a seguinte aplicação linear

$$A : g \longmapsto u$$

onde u e g são dadas em (2.42). Pelos Lemas 4 e 6 temos que A aplica de maneira contínua $X_{1/4}$ em $Y_{1/4}$ e X_1 em Y_1 . Além disso, existe uma constante positiva C , tal que

$$\|Ag\|_{Y_{1/4}} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \|g\|_{X_{1/4}} \quad ; \quad \|Ag\|_{Y_1} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \|g\|_{X_1}.$$

Então, $A \in \mathcal{L}(X_{1/4}; Y_{1/4}) \cap \mathcal{L}(X_1; Y_1)$ e

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X_{1/4}; Y_{1/4})} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \quad ; \quad \|A\|_{\mathcal{L}(X_1; Y_1)} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}. \tag{2.75}$$

Analogamente, obtém-se que A aplica de maneira contínua $\tilde{X}_{1/4}$ em $Y_{1/4}$ e \tilde{X}_1 em Y_1 . Além disso, existe uma constante positiva C , tal que

$$\|Ag\|_{Y_{1/4}} \leq C \|g\|_{\tilde{X}_{1/4}} \quad ; \quad \|Ag\|_{Y_1} \leq C \|g\|_{\tilde{X}_1}.$$

Então, $A \in \mathcal{L}(\tilde{X}_{1/4}; Y_{1/4}) \cap \mathcal{L}(\tilde{X}_1; Y_1)$ e

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_{1/4}; Y_{1/4})} \leq C \quad ; \quad \|A\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_1; Y_1)} \leq C. \tag{2.76}$$

Utilizando argumentos clássicos de interpolação, obtemos de (2.75) e (2.76) que A aplica de maneira contínua X_θ e \tilde{X}_θ em Y_θ , para todo $\theta \in [0, 1]$, respectivamente. Além disso, a norma do operador A satisfaz

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X_\theta; Y_\theta)} \leq C \|A\|_{\mathcal{L}(X_1; Y_1)}^{1-\theta} \|A\|_{\mathcal{L}(X_{1/4}; Y_{1/4})}^\theta \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \quad (2.77)$$

e

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_\theta; Y_\theta)} \leq C \|A\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_1; Y_1)}^{1-\theta} \|A\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_{1/4}; Y_{1/4})}^\theta \leq C, \quad (2.78)$$

para todo $\theta \in [0, 1]$.

Consideremos agora a seguinte aplicação linear

$$B : g \longmapsto u_x|_{x=1}.$$

Novamente, pelos Lemas 4 e 6 temos que B aplica de maneira contínua $X_{1/4}$ em $L^2(0, T)$ e X_1 em $H^1(0, T)$, respectivamente. Além disso, existe uma constante positiva C , tal que

$$\|Bg\|_{L^2(0, T)} \leq \frac{C}{\nu} \|g\|_{X_{1/4}} \quad ; \quad \|Bg\|_{H^1(0, T)} \leq C \|g\|_{X_1}.$$

Então, $B \in \mathcal{L}(X_{1/4}; L^2(0, T)) \cap \mathcal{L}(X_1; H^1(0, T))$ e

$$\|B\|_{\mathcal{L}(X_{1/4}; L^2(0, T))} \leq \frac{C}{\nu} \quad ; \quad \|B\|_{\mathcal{L}(X_1; H^1(0, T))} \leq C. \quad (2.79)$$

Da mesma maneira, B aplica de maneira contínua $X_{1/4}$ em $L^2(0, T)$ e X_1 em $H^1(0, T)$. Além disso, existe uma constante positiva C , tal que

$$\|Bg\|_{L^2(0, T)} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \|g\|_{\tilde{X}_{1/4}} \quad ; \quad \|Bg\|_{H^1(0, T)} \leq C\nu^{1/2} \|g\|_{\tilde{X}_1}.$$

Logo, $B \in \mathcal{L}(\tilde{X}_{1/4}; L^2(0, T)) \cap \mathcal{L}(\tilde{X}_1; H^1(0, T))$ e

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_{1/4}; L^2(0, T))} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \quad ; \quad \|B\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_1; H^1(0, T))} \leq C\nu^{1/2}. \quad (2.80)$$

Por argumentos de interpolação, de (2.79) e (2.80) obtemos que B aplica de maneira contínua X_θ e \tilde{X}_θ em $H^{1-\theta}(0, T)$ para todo $\theta \in [0, 1]$. Além disso, existe uma constante positiva C , tal que

$$\|B\|_{\mathcal{L}(X_\theta; H^{1-\theta}(0, T))} \leq C \|B\|_{\mathcal{L}(X_1; H^1(0, T))}^{1-\theta} \|B\|_{\mathcal{L}(X_{1/4}; L^2(0, T))}^\theta \leq C\nu^{-\theta} \quad (2.81)$$

e

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_\theta; H^{1-\theta}(0,T))} \leq C \|B\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_1; H^1(0,T))}^{1-\theta} \|B\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_{1/4}; L^2(0,T))}^\theta \leq C\nu^{(1-2\theta)/2}, \quad (2.82)$$

para todo $\theta \in [0, 1]$.

2.3.2 Estimativas dos termos de fronteira

Nesta seção vamos obter estimativas para os termos de fronteira $u|_{t=0}$, $u_x|_{x=1}$, $u_{xx}|_{x=0}$ e $u_{xx}|_{x=1}$. Começamos provando o seguinte resultado:

Lema 7. *Seja $g \in L^2(0, T; L^2(0, 1)) \cup L^1(0, T; H_0^1(0, 1))$. Então, existe uma constante positiva C , tal que*

$$\begin{aligned} \|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)} + \nu^{1/6} \|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,1)} + \nu^{1/2} \|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)} + \nu^{1/2} \|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} &\leq \\ &\leq \begin{cases} C\nu^{-1/2} \|g\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\ C \|g\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.83)$$

onde u é solução de (2.42).

Demonstração. Para $\theta = 2/3$ em (2.73), tem-se que $g \in X_{2/3} = L^2(0, T; L^2(0, 1))$. Logo, na desigualdade (2.77) obtemos

$$A \in \mathcal{L}(X_{2/3}; Y_{2/3}) \quad \text{e} \quad \|A\|_{\mathcal{L}(X_{2/3}; Y_{2/3})} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}.$$

Portanto

$$\|u\|_{Y_{2/3}} = \|Ag\|_{Y_{2/3}} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X_{2/3}; Y_{2/3})} \|g\|_{X_{2/3}} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \|g\|_{X_{2/3}}. \quad (2.84)$$

Em (2.81), para $\theta = 2/3$, tem-se que

$$B \in \mathcal{L}(X_{2/3}; H^{1/3}(0, T)) \quad \text{e} \quad \|B\|_{\mathcal{L}(X_{2/3}; H^{1/3}(0,T))} \leq C\nu^{-2/3}.$$

Assim,

$$\|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,T)} = \|Bg\|_{H^{1/3}(0,T)} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(X_{2/3}; H^{1/3}(0,T))} \|g\|_{X_{2/3}} \leq C\nu^{-2/3} \|g\|_{X_{2/3}}. \quad (2.85)$$

Seja $\widehat{X}_{2/3} = L^1(0, T; H_0^1(0, 1))$. Como $H_0^1(0, 1) \hookrightarrow H^1(0, 1) \cap H_0^{2/3}(0, 1)$, obtemos que

$$\widehat{X}_{2/3} = L^1(0, T; H_0^1(0, 1)) \hookrightarrow L^1(0, T; H^1(0, 1) \cap H_0^{2/3}(0, 1)) = \tilde{X}_{2/3}.$$

Então, para $\theta = 2/3$, em (2.78) obtém-se

$$A \in \mathcal{L}(\tilde{X}_{2/3}; Y_{2/3}) \quad \text{e} \quad \|A\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_{2/3}; Y_{2/3})} \leq C,$$

donde

$$\|u\|_{Y_{2/3}} = \|Ag\|_{Y_{2/3}} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_{2/3}; Y_{2/3})} \|g\|_{\tilde{X}_{2/3}} \leq C \|g\|_{\hat{X}_{2/3}}. \quad (2.86)$$

Analogamente, tem-se em (2.82) que $B \in \mathcal{L}(\tilde{X}_{2/3}; H^{1/3}(0, T))$ e

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_{2/3}; H^{1/3}(0, T))} \leq C\nu^{-1/6}.$$

Assim,

$$\|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0, T)} = \|Bg\|_{H^{1/3}(0, T)} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(\tilde{X}_{2/3}; H^{1/3}(0, T))} \|g\|_{\tilde{X}_{2/3}} \leq C\nu^{-1/6} \|g\|_{\hat{X}_{2/3}}. \quad (2.87)$$

Como $\|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)} \leq C\|u\|_{Y_{2/3}}$, resulta das desigualdades (2.84) e (2.86) que

$$\|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)} \leq \begin{cases} \frac{C}{\nu^{1/2}} \|g\|_{X_{2/3}} \\ C \|g\|_{\hat{X}_{2/3}}. \end{cases} \quad (2.88)$$

De (2.85) e (2.87) obtemos

$$\|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0, T)} \leq \begin{cases} C\nu^{-2/3} \|g\|_{X_{2/3}} \\ C\nu^{-1/6} \|g\|_{\hat{X}_{2/3}}. \end{cases} \quad (2.89)$$

Resta apenas provar que $u_{xx}|_{x=1}, u_{xx}|_{x=0} \in L^2(0, T)$. Provaremos uma estimativa para $u_{xx}|_{x=0}$ (o mesmo pode ser feito para $u_{xx}|_{x=1}$). Vamos a introduzir uma função $\rho \in C^3([0, 1])$ que satisfaz $\rho|_{[0, 1/2]} = 1$, $\rho|_{[3/4, 1]} = 0$ e consideremos

$$\hat{u} = \rho u.$$

A função \hat{u} satisfaz

$$\begin{aligned} \hat{u}_t + \nu \hat{u}_{xxx} &= \nu(3\rho_x u_{xx} + 3\rho_{xx} u_x + \rho_{xxx} u) + \rho(u_t + \nu u_{xxx}) \\ &= \nu(3\rho_x u_{xx} + 3\rho_{xx} u_x + \rho_{xxx} u) - \rho g. \end{aligned}$$

Multiplicando a igualdade acima por $-\hat{u}_{xx}$, integrando em $(0, 1)$ e observando que

$$-\int_0^1 \hat{u}_{xxx} \hat{u}_{xx} dx = -\frac{1}{2} |\hat{u}_{xx}|_0^2 = \frac{1}{2} |u_{xx}|_{x=0}|^2$$

e

$$-\int_0^1 \widehat{u}_t \widehat{u}_{xx} dx = \int_0^1 \widehat{u}_x \widehat{u}_{tx} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |\widehat{u}_x|^2 dx$$

obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |\widehat{u}_x|^2 dx + \frac{\nu}{2} |u_{xx}|_{x=0}|^2 = - \int_0^1 \nu (3\rho_x u_{xx} + 3\rho_{xx} u_x + \rho_{xxx} u) \widehat{u}_{xx} + \int_0^1 \rho g \widehat{u}_{xx} dx. \quad (2.90)$$

Como ρ , ρ_x e ρ_{xx} são limitadas, segue que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_0^1 \nu (3\rho_x u_{xx} + 3\rho_{xx} u_x + \rho_{xxx} u) (\rho_{xx} u + 2\rho_x u_x + \rho u_{xx}) dx ds \right| \leq \\ & \leq C\nu \left\{ \int_0^T \int_0^1 (|u_{xx}|^2 + |u_x|^2 + |u|^2) dx ds + \int_0^T \int_0^1 (|uu_x| + |u_x u_{xx}| + |u u_{xx}|) dx ds \right\} \\ & \leq C\nu \int_0^T \int_0^1 (|u_{xx}|^2 + |u_x|^2 + |u|^2) dx ds = C\nu \|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}^2 \end{aligned} \quad (2.91)$$

e

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^1 |\widehat{u}_x|^2 dx ds &= -\frac{1}{2} \int_0^1 (|\widehat{u}_x(T, x)|^2 - |\widehat{u}_x(0, x)|^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 |\widehat{u}_x(0, x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 |\rho_x u(0, x) + \rho u_x(0, x)|^2 dx \\ &\leq C \int_0^1 (|u(0, x)|^2 + |u_x(0, x)|^2) dx \\ &\leq C \sup_{t \in [0, T]} \left\{ \int_0^1 (|u(t, x)|^2 + |u_x(t, x)|^2) dx \right\} = \\ &= C \|u\|_{L^\infty(0, T; H^1(0, 1))}^2. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Assim, integrando (2.90) de 0 a T e usando (2.91) e (2.92) obtemos

$$\frac{\nu}{2} \int_0^T |u_{xx}|_{x=0}|^2 ds \leq C(\nu \|u\|_{L^2(0, T; H^2(0, 1))}^2 + \|u\|_{L^\infty(0, T; H^1(0, 1))}^2) + \left| \int_0^T \int_0^1 \rho g \widehat{u}_{xx} dx ds \right|. \quad (2.93)$$

Na sequência, estimaremos o último termo da desigualdade de (2.93). Consideremos dois casos:

Primeiro caso: $g \in X_{2/3}$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 |g\widehat{u}_{xx}| dx ds = \int_0^T \int_0^1 |g(\rho_{xx}u + 2\rho_x u_x + \rho u_{xx})| dx ds \\
& \leq C \int_0^T \int_0^1 (|gu| + |gu_x| + |gu_{xx}|) dx ds \\
& = C \int_0^T \int_0^1 \frac{\nu^{1/2}}{\nu^{1/2}} (|gu| + |gu_x| + |gu_{xx}|) dx ds \\
& \leq C \int_0^T \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\nu^{-1}|g|^2 + \nu|u|^2}{2} \right) + \left(\frac{\nu^{-1}|g|^2 + \nu|u_x|^2}{2} \right) + \left(\frac{\nu^{-1}|g|^2 + \nu|u_{xx}|^2}{2} \right) \right\} dx ds \\
& = C(\nu^{-1}\|g\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 + \nu\|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}^2). \tag{2.94}
\end{aligned}$$

Segundo caso: $g \in \widehat{X}_{2/3}$.

Como

$$0 = \int_0^T \rho g \widehat{u}_x|_0^1 ds = \int_0^T \int_0^1 \rho g \widehat{u}_{xx} dx ds + \int_0^T \int_0^1 (\rho_x g + \rho g_x) \widehat{u}_x dx ds,$$

obtem-se

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^T \int_0^1 \rho g \widehat{u}_{xx} dx ds \right| = \left| \int_0^T \int_0^1 (\rho_x g + \rho g_x) \widehat{u}_x dx ds \right| \\
& = \left| \int_0^T \int_0^1 (\rho_x g + \rho g_x) (\rho_x u + \rho u_x) dx ds \right| \\
& \leq C \int_0^T \left(\int_0^1 (|gu| + |g_x u| + |gu_x| + |g_x u_x|) dx \right) ds
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|g\|_{L^2(0,1)} \|u\|_{L^2(0,1)} ds &\leq \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_{L^2(0,1)} \int_0^T \|g\|_{L^2(0,1)} ds \\
&\leq C \left\{ \left(\sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_{L^2(0,1)} \right)^2 + \left(\int_0^T \|g\|_{L^2(0,1)} ds \right)^2 \right\} \\
&\leq C \left\{ \|u\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}^2 + \|g\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|g_x\|_{L^2(0,1)} \|u\|_{L^2(0,1)} ds &\leq C \left\{ \left(\sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_{L^2(0,1)} \right)^2 + \left(\int_0^T \|g_x\|_{L^2(0,1)} ds \right)^2 \right\} \\
&\leq C \left\{ \|u\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}^2 + \|g\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}^2 \right\}
\end{aligned}$$

e

$$\int_0^T \|g_x\|_{L^2(0,1)} \|u_x\|_{L^2(0,1)} ds \leq C \left\{ \|u\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}^2 + \|g\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}^2 \right\}.$$

Portanto,

$$\left| \int_0^T \int_0^1 \rho g \widehat{u}_{xx} dx ds \right| \leq C \left\{ \|u\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}^2 + \|g\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}^2 \right\}. \quad (2.95)$$

Das desigualdades (2.93), (2.94) e (2.95) obtemos duas estimativas:

$$\begin{aligned}
\frac{\nu}{2} \|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)}^2 &\leq C(\nu \|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}^2 + \|u\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}^2) + \\
&\quad + \left\{ C \left(\nu^{-1} \|g\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 + \nu \|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}^2 \right) \right. \\
&\quad \left. C \left\{ \|u\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}^2 + \|g\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}^2 \right\} \right\}, \quad (2.96)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)}^2 &\leq C\|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}^2 + C\nu^{-1}\|u\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}^2 + \\ &+ \begin{cases} C\nu^{-2}\|g\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \\ \frac{C}{\nu}\|g\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Introduzindo a seguinte norma em $Y_{2/3}$

$$\|u\|_{Y_{2/3}} := \nu^{1/2}\|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))} + \|u\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}$$

obtemos

$$\|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)}^2 \leq C\nu^{-1}\|u\|_{Y_{2/3}}^2 + \begin{cases} C\nu^{-2}\|g\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \\ C\nu^{-1}\|g\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}^2 \end{cases} \quad (2.98)$$

Por outro lado, das desigualdes (2.84) e (2.86) tem-se

$$C\nu^{-1}\|u\|_{Y_{1/2}}^2 \leq \begin{cases} C\nu^{-2}\|g\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \\ C\nu^{-1}\|g\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}^2 \end{cases},$$

o que nos garante que

$$\|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)}^2 \leq \begin{cases} C\nu^{-2}\|g\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \\ C\nu^{-1}\|g\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}^2 \end{cases} \quad (2.99)$$

Para estimar o termo $u_{xx}|_{x=1}$ procedemos de maneira análoga e obtemos

$$\|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)}^2 \leq \begin{cases} C\nu^{-2}\|g\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \\ C\nu^{-1}\|g\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}^2 \end{cases} \quad (2.100)$$

Finalmente, das desigualdades (2.88), (2.89), (2.99) e (2.100) temos

$$\begin{aligned} & \|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)} + \nu^{1/6}\|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,T)} + \nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)} + \nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq \\ & \leq \begin{cases} C\nu^{-1/2}\|g\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\ C\|g\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}. \end{cases} \end{aligned}$$

□

2.3.3 Algumas conclusões: existência de solução e sua dependência em relação às condições iniciais e termos de fronteira

Observe que a solução u do sistema (2.3) resolve o sistema (2.42) quando

$$g := f - M(t, x)u_x.$$

Se $f \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, pelos Lemas 4 e 5 resulta que $u_x \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$. Portanto, $g = f - M(t, x)u_x \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$. Logo, da desigualdade (2.83) obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} & \|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)} + \nu^{1/6}\|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,1)} + \nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)} + \nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq \\ & \leq C\nu^{-1/2}\|f - Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Agora, se $f \in L^1(0, T; H_0^1(0, 1))$, podemos considerar u solução de (2.3) como $u = u_1 + u_2$ sendo u_1 solução de (2.42) com $g_1 = f$ e u_2 solução de (2.42) com $g_2 = -M(t, x)u_x \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$. Usando as estimativas em (2.83) e a desigualdade triangular segue que

$$\begin{aligned} & \|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)} + \nu^{1/6}\|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,1)} + \nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)} + \nu^{1/2}\|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq \\ & \leq C\nu^{-1/2}\|g_2\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + C\|g_1\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))} \\ & = C\nu^{-1/2}\|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + C\|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Vamos estimar o lado direito de (2.101) e (2.102). Consideremos dois casos:

Primeiro caso: M é constante

Se $f \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, então pelo Lema 4 obtém-se

$$\|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \leq C\nu^{-1/2}\|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}. \quad (2.103)$$

Substituindo (2.103) em (2.101) concluimos que

$$\begin{aligned}
& \|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)} + \nu^{1/6} \|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,1)} + \nu^{1/2} \|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)} + \nu^{1/2} \|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq \\
& \leq C\nu^{-1/2} \|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + C\nu^{-1/2} \|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\
& \leq C\nu^{-1} \|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}. \tag{2.104}
\end{aligned}$$

Seja agora $f \in L^1(0, T; H_0^1(0, 1))$. Novamente, pelo Lema 4 obtemos a seguinte desigualdade

$$\|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \leq C\nu^{-1/2} \|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}. \tag{2.105}$$

Consequentemente, por (2.102) temos

$$\begin{aligned}
& \|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)} + \nu^{1/6} \|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,1)} + \nu^{1/2} \|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)} + \nu^{1/2} \|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \leq \\
& \leq C\nu^{-1} \|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))} + C \|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))} \\
& \leq C\nu^{-1} \|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}. \tag{2.106}
\end{aligned}$$

Segundo caso: M é variável

Por argumentos clássicos de interpolação obtemos o seguinte espaço:

$$L^2(0, T; H^{7/4}(0, 1)) = [L^2(0, T; H^2(0, 1)), L^2(0, T; H^1(0, 1))]_{[1/4]},$$

tal que

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^{7/4}(0,1))}^2 \leq C \|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}^{3/2} \|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))}^{1/2}. \tag{2.107}$$

Dado $\delta > 0$, de (2.107) e pela desigualdade de Young obtemos uma constante positiva C_δ satisfazendo

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(0,T;H^{7/4}(0,1))} & \leq \sqrt{\delta^2 \|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}^2 + C_\delta^2 \|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))}^2} \\
& \leq \delta \|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))} + C_\delta \|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))}. \tag{2.108}
\end{aligned}$$

Seja $f \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, então pela desigualdade (2.84) obtém-se

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))} & \leq C\nu^{-1/2} \|g\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} = C\nu^{-1/2} \|f - Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\
& \leq C\nu^{-1/2} (\|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + \|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}). \tag{2.109}
\end{aligned}$$

Das desigualdades (2.108) e (2.109) segue que

$$\begin{aligned}
\|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} &\leq \|M\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \|u_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\
&\leq C \|M\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} \\
&\leq C \|M\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \|u\|_{L^2(0,T;H^{7/4}(0,1))} \\
&\leq C \|M\|_{Y_{1/4}} \left\{ \delta C \nu^{-1/2} (\|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + \|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}) + C_\delta \|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} \right\} \\
&\leq \tilde{C} \delta \|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + \tilde{C} \delta \|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + \tilde{C} C_\delta \|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))}, \tag{2.110}
\end{aligned}$$

onde $\tilde{C} = \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu)$.

Considerando $\delta > 0$, tal que $1 - \tilde{C} \delta > 0$, pelo Lema 5 obtém-se uma constante positiva $\tilde{C} = \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu)$ que satisfaz

$$\|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu) \|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}. \tag{2.111}$$

Assim, das desigualdades (2.101) e (2.111) segue que

$$\begin{aligned}
\|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)} + \|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,1)} + \|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)} + \|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} &\leq \\
&\leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu) \|f - Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\
&\leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu) \|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}. \tag{2.112}
\end{aligned}$$

Se $f \in L^1(0, T; H_0^1(0, 1))$, pela desigualdade (2.86) e pelo Lema 5 obtemos duas estimativas:

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))} \leq C \|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))} \tag{2.113}$$

e

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} \leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu) \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))} \leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu) \|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))} \tag{2.114}$$

Portanto, combinando (2.103), (2.113) e (2.114) obtêm-se

$$\begin{aligned}
\|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} &\leq \|M\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \|u_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \\
&\leq C \|M\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} \\
&\leq C \|M\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \|u\|_{L^2(0,T;H^{7/4}(0,1))} \\
&\leq C \|M\|_{Y_{1/4}} \{ \delta \|u\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))} + C_\delta \|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} \} \\
&\leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu) \|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}.
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Das desigualdades (2.102) e (2.115) concluímos que

$$\begin{aligned}
\|u|_{t=0}\|_{H^1(0,1)} + \|u_x|_{x=1}\|_{H^{1/3}(0,1)} + \|u_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)} + \|u_{xx}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} &\leq \\
&\leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu) \|Mu_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu) \|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))} \\
&\leq \tilde{C}(\|M\|_{Y_{1/4}}, \nu) \|f\|_{L^1(0,T;H^1(0,1))}.
\end{aligned} \tag{2.116}$$

Finalmente, as seguintes proposições são consequência do Teorema de Riesz. De fato, o lado direito de (2.2) define um funcional linear contínuo que associa $f \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$ ao valor correspondente em \mathcal{R} . Pelos resultados provados anteriormente, esse funcional é contínuo em $L^2(0, T; L^2(0, 1))$, $L^1(0, T; H_0^1(0, 1))$. Logo, pelo Teorema de Riesz, temos:

Proposição 18. *Suponhamos que M seja uma constante. Sejam $y_0 \in H^{-1}(0, 1)$, $v_1 \in L^2(0, T)$, $v_2 \in L^2(0, T)$ e $v_3 \in H^{-1/3}(0, T)$. Então, existe uma única solução $y \in Y_0$ do sistema (2.1), tal que*

$$\|y\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \leq \frac{C}{\nu} (\|y_0\|_{H^{-1}(0,1)} + \|v_1\|_{L^2(0,T)} + \|v_2\|_{L^2(0,T)} + \|v_3\|_{H^{-1/3}(0,T)}), \tag{2.117}$$

e

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(0,1))} \leq \frac{C}{\nu} (\|y_0\|_{H^{-1}(0,1)} + \|v_1\|_{L^2(0,T)} + \|v_2\|_{L^2(0,T)} + \|v_3\|_{H^{-1/3}(0,T)}), \tag{2.118}$$

para alguma constante positiva C independente de y_0 , v_1 , v_2 e v_3 .

Além disso:

Proposição 19. *Consideremos $M \in Y_{1/4}$. Sejam $y_0 \in H^{-1}(0, 1)$, $v_1 \in L^2(0, T)$, $v_2 \in L^2(0, T)$ e $v_3 \in H^{-1/3}(0, T)$. Então, existe uma única solução $y \in Y_0$ do sistema (2.1), tal que*

$$\|y\|_{Y_0} \leq C(\|y_0\|_{H^{-1}(0,1)} + \|v_1\|_{L^2(0,T)} + \|v_2\|_{L^2(0,T)} + \|v_3\|_{H^{-1/3}(0,T)}), \quad (2.119)$$

para alguma constante positiva C dependendo de ν e $\|M\|_{Y_{1/4}}$, mas independente de y_0 , v_1 , v_2 e v_3 .

Capítulo 3

Teoremas principais

3.1 Desigualdade de Carleman

Seja M uma constante. Consideremos o seguinte sistema adjunto associado ao sistema (2.1)

$$\begin{cases} -\varphi_t - \nu\varphi_{xxx} - M\varphi_x = 0 & \text{em } (0, T) \times (0, 1) \\ \varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=1} = \varphi_x|_{x=0} = 0 & \text{em } (0, T) \\ \varphi|_{t=T} = \varphi_0 & \text{em } (0, 1). \end{cases} \quad (3.1)$$

Fazendo a mudança de variável $t \rightarrow \nu t$, o sistema (3.1) pode ser escrito como

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xxx} - \frac{M}{\nu}\varphi_x = 0 & \text{em } (0, T_0) \times (0, 1) = Q_0 \\ \varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=1} = \varphi_x|_{x=0} = 0 & \text{em } (0, T_0) \\ \varphi|_{t=T_0} = \varphi_0 & \text{em } (0, 1). \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $T_0 = \nu T$. Trabalhamos com esta equação para que a desigualdade de Carleman seja mais clara. Antes de enunciar o próximo resultado, consideremos a função peso

$$\alpha(t, x) = \frac{100 + 4x - x^2}{t^{1/2}(T_0 - t)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{para todo } (t, x) \in Q_0.$$

As funções dessa classe foram introduzidas pela primeira vez por Fursikov e Imanuvilov em [14]. Denotamos

$$\tilde{\alpha}(t) := \min_{x \in [0,1]} \{\alpha(t, x)\} = \alpha(t, 0) \quad \text{e} \quad \hat{\alpha}(t) := \max_{x \in [0,1]} \{\alpha(t, x)\} = \alpha(t, 1).$$

Observe que a função α satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} C \leq T_0\alpha, \quad C_0\alpha \leq \alpha_x \leq C_1\alpha, \quad C_0\alpha \leq -\alpha_{xx} \leq C_1\alpha \quad \text{em } (0, T_0) \times (0, 1) \\ |\alpha_t| + |\alpha_{xt}| + |\alpha_{xxt}| \leq CT_0\alpha^3, \quad \text{em } (0, T_0) \times (0, 1) \\ |\alpha_{tt}| \leq C(T_0^2\alpha^5 + \alpha^3) \leq CT_0^2\alpha^5 \quad \text{em } (0, T_0) \times (0, 1) \end{aligned}$$

e

$$64\tilde{\alpha} - 62\hat{\alpha} = \frac{14}{(t(T_0 - t))^2} > 0,$$

onde C , C_0 e C_1 são constantes positivas independentes de T_0 . Vamos usar a seguinte proposição, que não será provada:

Proposição 20. *Existe uma constante positiva C , independente de T_0 , ν e M , tal que, para cada $\varphi_0 \in L^2(0, 1)$ a solução φ de (3.2) satisfaz*

$$\iint_{Q_0} \alpha e^{-2s\alpha} (|\varphi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2 |\varphi_x|^2 + s^4\alpha^4 |\varphi|^2) dx dt \leq C \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0} e^{-2s\alpha|_{x=0}} |\varphi_{xx}|_{x=0}|^2 dt, \quad (3.3)$$

para todo $s \geq C(T_0 + T_0^{\frac{1}{2}} + T_0 |M|^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}})$.

3.2 Resultados Principais

Seja $\nu > 0$ fixo. O seguinte teorema é um resultado de controlabilidade nula para a equação (2.1), quando M é constante.

Teorema 15. *Seja M uma constante e $\nu > 0$ fixo. Então, para cada $y_0 \in H^{-1}(0, 1)$, existe $v_1 \in L^2(0, T)$, tal que a solução $y \in Y_0$ de (2.1) com dados $v_2 = v_3 = 0$ satisfaz $y|_{t=T} = 0$ em $(0, 1)$. Além disso, para cada $\nu \in (0, 1)$, existe $C^* > 0$, tal que*

$$\|v_1\|_{L^2(0, T)} \leq \frac{C^*}{\nu} \|y_0\|_{H^{-1}(0, 1)}. \quad (3.4)$$

Por outro lado, para ν suficientemente pequeno (em termos de M somente), obtemos

$$C^* = \exp \left\{ \frac{\tilde{C}|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}} \right) \right\}, \quad (3.5)$$

onde \tilde{C} é uma constante independente de M , ν e y_0 .

Demonstração. Primeiro, vamos deduzir uma desigualdade de observabilidade utilizando a desigualdade de Carleman (3.3).

Seja φ solução de (3.1). Fazendo a mudança de variável $t \rightarrow \nu t$ (lembramos que $T_0 = \nu T$), podemos considerar uma solução de (3.2) e aplicar a desigualdade (3.3) como segue:

$$s^2 \iint_{Q_0} \alpha^3 e^{-2s\alpha} |\varphi_x|^2 dx dt \leq C \int_0^{T_0} \alpha(t, 0) e^{-2s\alpha(t, 0)} |\varphi_{xx}(t, 0)|^2 dt, \quad (3.6)$$

para alguma constante positiva C independente de T_0 , ν e M . Pela definição de α segue que

$$\frac{s^2}{T_0^3} e^{-C_2 s/T_0} \iint_{\tilde{Q}_0} |\varphi_x|^2 dx dt \leq \frac{C_3}{T_0} e^{-C_3 s/T_0} \int_0^{T_0} |\varphi_{xx}(t, 0)|^2 dt, \quad (3.7)$$

onde \tilde{Q}_0 é um intervalo compacto contido em Q_0 , C_2 e C_3 são constantes positivas. Com efeito, $\tilde{\alpha}$ e $\hat{\alpha}$ atingem mínimo em $T_0/2$, $\max_{x \in [T_0/3, 2T_0/3]} \{\hat{\alpha}(t)\} = \hat{\alpha}(T_0/3) = C_2^*/T_0$, onde $C_2^* > 200$. Logo,

$$400/T_0 \leq 2\tilde{\alpha}(t) \leq 2\alpha(t, x) \leq 2\hat{\alpha}(t) \leq 2C_2^*/T_0 = C_2/T_0$$

para todo $(t, x) \in [\frac{T_0}{3}, \frac{2T_0}{3}] \times [0, 1]$. Assim,

$$\frac{(400)^3}{T_0^3} s^2 e^{-C_2/T_0} \int_{\frac{T_0}{3}}^{\frac{2T_0}{3}} \int_0^1 |\varphi_x|^2 dx dt \leq s^2 \iint_{Q_0} \alpha^3 e^{-2s\alpha} |\varphi_x|^2 dx dt. \quad (3.8)$$

Definimos $f(t) = \alpha(t, 0) e^{-2s\alpha(t, 0)}$ em $(0, T_0)$. Então, f atinge o máximo em $T_0/2$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \alpha(t, 0) e^{-2s\alpha(t, 0)} |\varphi_{xx}(t, 0)|^2 dt &\leq \int_0^{T_0} f\left(\frac{T_0}{2}\right) |\varphi_{xx}(t, 0)|^2 dt \\ &= \frac{(200)}{T_0} e^{-400s/T_0} \int_0^{T_0} |\varphi_{xx}(t, 0)|^2 dt. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Combinando as desigualdades (3.6), (3.8) e (3.9) obtemos (3.7).

Afirmção: Existe $C > 0$, tal que

$$\int_0^1 |\varphi_x(t_1, x)|^2 dx \leq \frac{C}{\nu^{4/3}} \int_0^1 |\varphi_x(t_2, x)|^2 dx, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T. \quad (3.10)$$

De fato, como φ é solução de (3.2), da desigualdade (2.19) (com $f = 0$) obtemos

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (e^{Ct} \int_0^1 (2-x)\varphi^2 dx) \leq 0.$$

Integrando a desigualdade acima de t_1 a t_2 segue que

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\varphi(t_1, x)|^2 dx &\leq e^{Ct_1} \int_0^1 (2-x)\varphi^2(t_1, x) dx \leq e^{Ct_2} \int_0^1 (2-x)\varphi^2(t_2, x) dx \\ &\leq 2e^{CT} \int_0^1 \varphi^2(t_2, x) dx \\ &\leq C \int_0^1 |\varphi(t_2, x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Definimos o operador $P_2 := \nu \partial_{xxx} + M \partial_x$. Como

$$\frac{d}{dt} |P_2 \varphi|^2 = 2(\nu \varphi_{3x} + M \varphi_x)(\nu \varphi_{3xt} + M \varphi_{xt}), \quad (3.12)$$

multiplicando à equação (3.1) por $-P_2 \varphi_t$ obtemos a seguinte igualdade:

$$\varphi_t(\nu \varphi_{3xt} + M \varphi_{xt}) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |P_2 \varphi|^2 = 0. \quad (3.13)$$

Observe que

$$\nu \int_0^1 \varphi_t \varphi_{3xt} dx = -\nu \int_0^1 \varphi_{xt} \varphi_{xxt} dx = \frac{-\nu}{2} \int_0^1 |\varphi_{xt}|_x^2 dx = \frac{-\nu}{2} |\varphi_{xt}|^2(t, 1), \quad (3.14)$$

e

$$M \int_0^1 \varphi_t \varphi_{xt} dx = \frac{M}{2} \int_0^1 |\varphi_t|_x^2 dx = \frac{1}{2} |\varphi_t|_0^1 = 0. \quad (3.15)$$

Integrando (3.13) com respeito a x e usando a identidades (3.14) e (3.15) temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |P_2 \varphi|^2 dx = \frac{\nu}{2} |\varphi_{xt}(t, 1)|^2. \quad (3.16)$$

Consequentemente,

$$\int_0^1 |P_2 \varphi(t_1, x)|^2 dx \leq \int_0^1 |P_2 \varphi(t_2, x)|^2 dx. \quad (3.17)$$

Portanto, pela definição do operador P_2 segue a estimativa

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\nu \varphi_{3x}(t_1, x)|^2 dx &= \int_0^1 |P_2 \varphi(t_1, x) - M \varphi_x(t_1, x)|^2 dx \\ &\leq 2 \int_0^1 |P_2 \varphi(t_1, x)|^2 + 2 \int_0^1 |M \varphi_x(t_1, x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Agora, usando o teorema das derivadas intermediárias, obtemos uma constante positiva C satisfazendo

$$\int_0^1 |M\varphi_x(t_1, x)|^2 dx \leq \frac{\nu^2}{4} \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_1, x)|^2 dx + \frac{C}{\nu^2} \int_0^1 |\varphi(t_1, x)|^2 dx. \quad (3.19)$$

Como $\varphi(t_2, \cdot) \in \mathcal{S} = \{u \in H^3(0, 1) : u(0) = u(1) = u_x(0) = 0\}$, pela desigualdade de Poincaré segue que

$$\|\varphi(t_2, \cdot)\|_{H^3(0,1)} \leq C \|\varphi_{3x}(t_2, \cdot)\|_{L^2(0,1)}. \quad (3.20)$$

Logo,

$$\int_0^1 |\varphi(t_2, x)|^2 dx \leq C \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_2, x)|^2 dx \quad ; \quad \int_0^1 |\varphi_x(t_2, x)|^2 dx \leq C \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_2, x)|^2 dx. \quad (3.21)$$

Portanto, da definição do operador P_2 e pela desigualdade (3.21) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 |P_2\varphi(t_2, x)|^2 dx &\leq 2\nu^2 \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_2, x)|^2 dx + 2 \int_0^1 |\varphi_x(t_2, x)|^2 dx \\ &\leq C \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_2, x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Combinando as desigualdades (3.17), (3.18) e (3.19) resulta que

$$\frac{\nu^2}{2} \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_1, x)|^2 dx \leq 2 \int_0^1 |P_2\varphi(t_2, x)|^2 dx + \frac{C}{\nu^2} \int_0^1 |\varphi(t_1, x)|^2 dx \quad (3.23)$$

Por outro lado, das desigualdades (3.11), (3.21) e (3.22) obtemos na desigualdade acima a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \frac{\nu^2}{2} \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_1, x)|^2 dx &\leq C \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_2, x)|^2 dx + \frac{C}{\nu^2} \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_2, x)|^2 dx \\ &\leq \frac{C}{\nu^2} \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_2, x)|^2 dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^1 |\varphi_{3x}(t_1, x)|^2 dx \leq \frac{C}{\nu^4} \int_0^1 |\varphi_{3x}(t_2, x)|^2 dx. \quad (3.24)$$

Para concluir a demonstração de (3.10), definimos a seguinte aplicação

$$A : \varphi(t_2, \cdot) \longmapsto \varphi(t_1, \cdot)$$

Resulta da desigualdade (3.11) que $A \in \mathcal{L}(L^2(0, 1); L^2(0, 1))$ e

$$\|A\|_{\mathcal{L}(L^2(0,1);L^2(0,1))} \leq C. \quad (3.25)$$

Como $\varphi(t_1, \cdot) \in \mathcal{S} = \{u \in H^3(0, 1) : u(0) = u(1) = u_x(0) = 0\}$, pela desigualdade de Poincaré e pela desigualdade (3.24) segue que

$$\|\varphi(t_1, \cdot)\|_{H^3(0,1)} \leq C \|\varphi_{3x}(t_1, \cdot)\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{C}{\nu^2} \|\varphi_{3x}(t_2, \cdot)\|_{L^2(0,1)}. \quad (3.26)$$

Logo, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{S}; \mathcal{S})$ e

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{S};\mathcal{S})} \leq \frac{C}{\nu^2}. \quad (3.27)$$

Por argumentos clássicos de interpolação temos que

$$A \in \mathcal{L}((\mathcal{S}, L^2(0, 1))_{[\theta]}; (\mathcal{S}, L^2(0, 1))_{[\theta]}),$$

e

$$\|A\|_{\mathcal{L}((\mathcal{S}, L^2(0,1))_{[\theta]}; (\mathcal{S}, L^2(0,1))_{[\theta]})} \leq C \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{S};\mathcal{S})}^{1-\theta} \|A\|_{\mathcal{L}(L^2(0,1);L^2(0,1))}^{\theta}$$

para todo $\theta \in [0, 1]$. Em particular, para $\theta = \frac{2}{3}$ resulta que $A \in \mathcal{L}(H_0^1(0, 1), H_0^1(0, 1))$ e pelas desigualdades (3.25) e (3.27) obtemos a seguinte estimativa:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H_0^1(0,1), H_0^1(0,1))} \leq C \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{S};\mathcal{S})}^{1/3} \|A\|_{\mathcal{L}(L^2(0,1);L^2(0,1))}^{2/3} \leq \frac{C}{\nu^{2/3}}. \quad (3.28)$$

Logo,

$$\|A\varphi(t_2, \cdot)\|_{H_0^1(0,1)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H_0^1(0,1), H_0^1(0,1))} \|\varphi(t_2, \cdot)\|_{H_0^1(0,1)} \leq \frac{C}{\nu^{2/3}} \|\varphi(t_2, \cdot)\|_{H_0^1(0,1)}, \quad (3.29)$$

o que nos garante que

$$\int_0^1 |\varphi_x(t_1, x)|^2 dx \leq \frac{C}{\nu^{4/3}} \int_0^1 |\varphi_x(t_2, x)|^2 dx, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T,$$

demonstrando a desigualdade (3.10).

Vamos supor que

$$\int_0^1 |\varphi_x(0, x)|^2 dx \leq C^* \int_0^T |\varphi_{xx}(t, 0)|^2 dt, \quad (3.30)$$

onde

$$C^* = \exp \left\{ \frac{\tilde{C}|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}} \right) \right\} \quad (3.31)$$

para alguma constante positiva \tilde{C} , que depende de T , com ν suficientemente pequeno em termos de M .

Seja φ solução do problema adjunto (3.1). Multiplicando a equação (2.1) por φ e integrando por partes em $(0, T) \times (0, 1)$, obtemos

$$\int_0^1 (y(T, x)\varphi_0 - y_0\varphi_1) dx - \nu \int_0^T v_1\varphi_{xx}(t, 0) dt = 0, \quad (3.32)$$

onde $\varphi_1 = \varphi(0, \cdot) \in H_0^1(0, 1)$ e $v_1 \in L^2(0, T)$. Essa identidade nos diz que o dado inicial $y_0 \in H^{-1}(0, 1)$ e controlável a zero; ou seja; $y(T, x) = 0$ em $(0, 1)$ se, e somente se, existe $v_1 \in L^2(0, T)$, tal que

$$\int_0^1 y_0\varphi_1 dx + \nu \int_0^T v_1\varphi_{xx}(t, 0) dt = 0. \quad (3.33)$$

Consideremos o funcional linear

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : H_0^1(0, 1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{J}(\varphi_1) &= \frac{\nu}{2} \int_0^T |\varphi_{xx}(t, 0)|^2 dt + \int_0^1 y_0\varphi_1 dx. \end{aligned}$$

Se o funcional \mathcal{J} atinge seu valor mínimo em φ_1 , então

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{J}(\varphi_1 + h\psi_1) - \mathcal{J}(\varphi_1))}{h} = \int_0^1 y_0\psi_1 dx + \nu \int_0^T \varphi_{xx}(t, 0)\psi_{xx}(t, 0) dt, \quad (3.34)$$

para todo $\psi_1 = \psi(0, \cdot) \in H_0^1(0, 1)$ onde ψ é solução de (3.1). Logo, tomando $v_1 = \varphi_{xx}(\cdot, 0)$, temos que (3.33) se verifica e y_0 é controlável a zero.

Para mostrar a existência de um mínimo basta verificar que o funcional \mathcal{J} é convexo, contínuo e coercivo em $H_0^1(0, 1)$. O fato de ser convexo e contínuo é trivial. Basta verificar que \mathcal{J} é coercivo. De fato, pela desigualdade (3.30) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\varphi_1) &\geq \frac{\nu}{2C^*} \int_0^1 |\varphi_x(0, x)|^2 dx - \|y_0\|_{H^{-1}(0,1)} \|\varphi_1\|_{H_0^1(0,1)} \\ &= \frac{\nu}{2C^*} \|\varphi_1\|_{H_0^1(0,1)}^2 - \|y_0\|_{H^{-1}(0,1)} \|\varphi_1\|_{H_0^1(0,1)}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Assim, $\lim_{\|\varphi_1\|_{H_0^1(0,1)} \rightarrow +\infty} \mathcal{J}(\varphi_1) = \infty$; ou seja; \mathcal{J} é coerciva. Além disso, tomando $v_1 = \varphi_{xx}(\cdot, 0) \in L^2(0, T)$ na identidade (3.33) e aplicando a desigualdade (3.30) obtemos

$$\begin{aligned} \nu \int_0^T |v_1|^2 dt &= - \int_0^1 y_0 \varphi_1 dx \leq \|y_0\|_{H^{-1}(0,1)} \|\varphi_1\|_{H_0^1(0,1)} \\ &\leq \|y_0\|_{H^{-1}(0,1)} \left(C^* \int_0^T |\varphi_{xx}(t, 0)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \|y_0\|_{H^{-1}(0,1)} \left(C^* \int_0^T |v_1|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|v_1\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{C^*}{\nu} \|y_0\|_{H^{-1}(0,1)}. \quad (3.36)$$

Para concluir a demonstração do Teorema 15 só falta verificar a desigualdade (3.30). Da desigualdade (3.7) obtemos uma constante positiva C , tal que

$$\int_{\frac{T_0}{3}}^{\frac{2T_0}{3}} \int_0^1 |\varphi_x|^2 dx dt \leq \frac{CT_0^2}{s^2} e^{Cs/T_0} \int_0^{T_0} |\varphi_{xx}(t, 0)|^2 dt. \quad (3.37)$$

De (3.10) segue que

$$\int_0^1 |\varphi_x(0, x)|^2 dx \leq \frac{C}{\nu^{4/3}} \int_0^1 |\varphi_x(t, x)|^2 dx. \quad (3.38)$$

Combinando as desigualdades (3.37) e (3.38), temos que

$$\int_0^1 |\varphi_x(0, x)|^2 dx \leq \frac{C}{\nu^{4/3} T_0} \left(\frac{T_0}{s} \right)^2 e^{Cs/T_0} \int_0^{T_0} |\varphi_{xx}(t, 0)|^2 dt. \quad (3.39)$$

Em (3.3), consideremos $s = C(T_0 + T_0^{\frac{1}{2}} + T_0 |M|^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}})$. Assim, $\left(\frac{T_0}{s} \right)^2 \leq T_0$, donde

$$\int_0^1 |\varphi_x(0, x)|^2 dx \leq \frac{C}{\nu^{4/3}} e^{Cs/T_0} \int_0^{T_0} |\varphi_{xx}(t, 0)|^2 dt. \quad (3.40)$$

Como $\frac{s}{T_0} = \left\{ \frac{C|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}} \right) + C \right\}$, para $\nu = \nu(|M|)$ suficiente pequeno, tal que $\left(\frac{|M|}{\nu} \right)^{1/2}$ seja suficientemente grande, obtemos que

$$C \leq \frac{C|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}} \right).$$

Logo, existe uma constante positiva C_4 , independente de ν , $|M|$ e y_0 tal que

$$\frac{Cs}{T_0} \leq \frac{C_4|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}} \right).$$

Portanto, em (3.40) segue que

$$\int_0^1 |\varphi_x(0, x)|^2 dx \leq \frac{C}{\nu^{4/3}} e^{\frac{C_4|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}} \right)} \int_0^{T_0} |\varphi_{xx}(t, 0)|^2 dt. \quad (3.41)$$

Além disso, existe uma constante positiva C_4^* tal que

$$\frac{1}{\nu^{4/3}} e^{\frac{C_4|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}} \right)} \leq e^{\frac{C_4^*|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{T^{1/2}|M|^{1/2}} \right)}. \quad (3.42)$$

Finalmente, combinando (3.41) e (3.42) obtém-se (3.30). □

O seguinte teorema é um resultado de controlabilidade exacta para o sistema (2.1) onde M é uma constante.

Teorema 16. *Seja M uma constante e $\nu > 0$ fixo. Então, para cada $y_0, y_1 \in L^2(0, 1)$, existem v_1 e v_2 em $L^2(0, T)$, tal que a solução $y \in Y_0$ de (2.1) com $v_3 = 0$ satisfaz $y|_{t=T} = y_1$ em $(0, 1)$.*

Demonstração. Como $y_1 \in L^2(0, 1)$ temos que $y_{1,x} \in H^{-1}(0, 1)$. Seja agora $h \in Y_0$ solução do sistema

$$\begin{cases} h_t + \nu h_{xxx} + Mh_x = 0 & \text{em } (0, T) \times (0, 1) \\ h|_{x=0} = h|_{x=1} = h_x|_{x=0} = 0 & \text{em } (0, T) \\ h|_{t=T} = y_{1,x} & \text{em } (0, 1). \end{cases} \quad (3.43)$$

A existência e regularidade de h são dadas pela Proposição 18. Definimos

$$z(t, x) = \int_0^x h(t, s) ds.$$

Como $z_x(t, x) = h(t, x) \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, então $z \in L^2(0, T; H^1(0, 1))$. Pela desigualdade de Hölder obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_{L^2(0,1)}^2 &= \int_0^1 \left| \int_0^x h(t, s) ds \right|^2 dx \leq \int_0^1 \left| \left(\int_0^x |h(t, s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^x ds \right)^{1/2} \right|^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^x |h(t, s)|^2 ds \right) \left(\int_0^x ds \right) dx \leq \|h(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \int_0^1 x dx \\ &\leq \|h(t)\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Assim, $z \in C^0([0, T]; L^2(0, 1))$. Logo $z \in Y_{1/4}$. Definimos

$$\begin{cases} c := z_t + \nu z_{xxx} + Mz_x & \text{em } \mathcal{D}'((0, T) \times (0, 1)) \\ d := y_1 - z|_{t=T}, & \text{em } L^2(0, 1). \end{cases} \quad (3.44)$$

Logo, pela equação (3.43) resulta que

$$c_x = h_t + \nu h_{xxx} + Mh_x = 0 \quad ; \quad d_x = y_{1,x} - z_x|_{t=T} = y_{1,x} - h|_{t=T} = 0, \quad (3.45)$$

e, portanto, $c(t, x) = c(t)$ em $\mathcal{D}'((0, T) \times (0, 1))$ e $d = \text{constante}$.

Como $z_x(t, x) = h(t, x) \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, pelas imersões $L^2(0, T; L^2(0, 1)) \hookrightarrow L^2(0, T; H^{-1}(0, 1)) \hookrightarrow L^2(0, T; H^{-2}(0, 1)) \hookrightarrow L^2(0, T; H^{-3}(0, 1))$, obtemos que

$$\begin{cases} z_{xx} = h_x & \in L^2(0, T; H^{-1}(0, 1)), \\ z_{xxx} = h_{xx} & \in L^2(0, T; H^{-2}(0, 1)), \\ h_{xxx} & \in L^2(0, T; H^{-3}(0, 1)). \end{cases} \quad (3.46)$$

Logo,

$$\begin{cases} h_t = -\nu h_{xxx} - Mh_x & \in L^2(0, T; H^{-3}(0, 1)), \\ z_{xxx} = h_{xx} & \in L^2(0, T; H^{-2}(0, 1)), \\ z_t = \int_0^x h_t(t, s) ds & \in L^2(0, T; H^{-2}(0, 1)), \\ c = z_t + \nu h_{xx} + Mh & \in L^2(0, T; H^{-2}(0, 1)). \end{cases} \quad (3.47)$$

Como c só depende do tempo, temos que $c \in L^2(0, T)$. Introduzimos

$$g(t) = d + \int_t^T c(s) ds, \quad (3.48)$$

e pela desigualdade de Hölder tem-se a seguinte estimativa:

$$|g(t)| \leq |d| + T^{1/2} \|c\|_{L^2(t, T)}, \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Assim, $g \in C^0[0, T]$. Novamente, pela desigualdade de Hölder, concluímos que

$$\int_0^T |g(t)|^2 dt \leq 2d^2 T + 2T \int_0^T \left(\int_t^T |c(s)| ds \right)^2 dt \leq 2d^2 T + 2T^2 \|c\|_{L^2(0, T)}^2. \quad (3.49)$$

Logo,

$$g \in L^2(0, T; H^1(0, 1)) \cap C^0([0, T]; L^2(0, 1)) = Y_{1/4}.$$

Definindo

$$\tilde{y} = z + g \in Y_{1/4},$$

de (3.43), (3.44) e (3.46) obtém-se

$$\tilde{y}_x = z_x = h \quad ; \quad \tilde{y}_{xxx} = h_{xx} \quad ; \quad \tilde{y}_x|_{x=1} = h(t, 1) = 0 \quad ; \quad (3.50)$$

$$\tilde{y}_t = z_t + g_t = z_t - c = -\nu z_{xxx} - Mz_x = -\nu h_{xx} - Mh = -\nu \tilde{y}_{xxx} - M\tilde{y}_x \quad (3.51)$$

$$\tilde{y}|_{t=0} = \tilde{y}_0, \quad \text{onde} \quad \tilde{y}_0 = z|_{t=0} - g(0) \in L^2(0, 1). \quad (3.52)$$

Como

$$\int_0^T |z(t, 1)|^2 dt \leq \int_0^T \left(\int_0^1 |h(t, s)| ds \right)^2 dt \leq \|h\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2, \quad (3.53)$$

então

$$\tilde{v}_1 := \tilde{y}|_{x=0} = z|_{x=0} + g = g \in L^2(0, T) \quad (3.54)$$

e

$$\tilde{v}_2 := \tilde{y}|_{x=1} = z|_{x=1} + g \in L^2(0, T). \quad (3.55)$$

Além disso, de (3.44) temos a seguinte igualdade:

$$\tilde{y}(T, x) = z(T, x) + g(T) = z(T, x) + d = z(T, x) + y_1(x) - z(T, x) = y_1(x). \quad (3.56)$$

Portanto, de (3.50), (3.51), (3.52), (3.54), (3.55) e (3.56) existem $\tilde{y}_0 \in L^2(0, 1)$ e controles $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in L^2(0, T)$, tal que a solução $\tilde{y} \in Y_{1/4}$ de

$$\begin{cases} \tilde{y}_t + \nu \tilde{y}_{xxx} + M\tilde{y}_x = 0 & \text{em } (0, T) \times (0, 1) \\ \tilde{y}|_{x=0} = \tilde{v}_1, \quad \tilde{y}|_{x=1} = \tilde{v}_2, \quad \tilde{y}_x|_{x=1} = 0 & \text{em } (0, T) \\ \tilde{y}|_{t=0} = \tilde{y}_0 & \text{em } (0, 1), \end{cases} \quad (3.57)$$

satisfaz

$$\tilde{y}(T, x) = y_1(x).$$

Como $\tilde{y}_0 - y_0 \in L^2(0, 1)$ então, pelo Teorema 15, existe um controle $\hat{v}_1 \in L^2(0, T)$, tal que a solução $\hat{y} \in Y_0$ de

$$\begin{cases} \hat{y}_t + \nu \hat{y}_{xxx} + M\hat{y}_x = 0 & \text{em } (0, T) \times (0, 1) \\ \hat{y}|_{x=0} = \hat{v}_1, \quad \hat{y}|_{x=1} = \hat{y}_x|_{x=1} = 0 & \text{em } (0, T) \\ \hat{y}|_{t=0} = \hat{y}_0 := \tilde{y}_0 - y_0 & \text{em } (0, 1), \end{cases} \quad (3.58)$$

satisfaz

$$\widehat{y}|_{t=T} = 0 \quad \text{em} \quad (0, 1).$$

Definimos

$$y = \tilde{y} - \widehat{y} \in Y_0.$$

Finalmente, de (3.57) e (3.58) temos que para cada $y_0, y_1 \in L^2(0, 1)$, existem $v_1 = \tilde{v}_1 - \widehat{v}_1$ e $v_2 = \tilde{v}_2$ em $L^2(0, T)$, tal que a solução $y \in Y_0$ de

$$\begin{cases} y_t + \nu y_{xxx} + My_x = 0 & \text{em } (0, T) \times (0, 1) \\ y|_{x=0} = v_1, \quad y|_{x=1} = v_2, \quad y_x|_{x=1} = 0 & \text{em } (0, T) \\ y|_{t=0} = \tilde{y}_0 - \widehat{y}_0 = y_0 & \text{em } (0, 1), \end{cases} \quad (3.59)$$

satisfaz

$$y|_{t=T} = (\tilde{y} - \widehat{y})|_{t=T} = y_1 \quad \text{em} \quad (0, 1).$$

□

O resultado principal desse capítulo é o seguinte:

Teorema 17. *Existe uma constante positiva K_0 com a seguinte propriedade: para cada constante negativa M , existe $\nu_0 > 0$, tal que para cada $T \geq \frac{K_0}{|M|}$, cada $y_0 \in W^{1,\infty}(0, 1)$ e cada $\nu \in (0, \nu_0)$, existem v_1^ν, v_2^ν e v_3^ν em $L^2(0, T)$, tais que a solução $y \in Y_0$ de (2.1) satisfaz $y|_{t=T} = 0$ em $(0, 1)$. Além disso, os controles são uniformes no seguinte sentido:*

$$\|v_1^\nu\|_{L^2(0,T)} + \|v_2^\nu\|_{L^2(0,T)} + \|v_3^\nu\|_{L^2(0,T)} \leq K_1 \|y_0\|_{W^{1,\infty}(0,1)}, \quad (3.60)$$

para alguma constante positiva K_1 independente de ν e y_0 .

Demonstração. Podemos supor que o dado inicial tem traço nulo em $x = 0$ e $x = 1$. De fato, para cada $\eta > 0$ introduzimos o operador extensão contínuo e linear Π_2

$$\begin{aligned} \Pi_2 : \quad W^{1,\infty}(0, 1) &\longrightarrow W_0^{1,\infty}(-\eta, 1 + \eta) \\ y_0 &\longmapsto \Pi_2(y_0), \end{aligned}$$

tal que

$$\Pi_2(-\eta) = \Pi_2(1 + \eta) = 0.$$

Consideremos o problema

$$\begin{cases} y_t + \nu y_{xxx} + My_x = 0 & \text{em } (0, T) \times (-\eta, 1 + \eta) \\ y|_{x=-\eta} = v_1, \quad y|_{x=1+\eta} = v_2, \quad y_x|_{x=1+\eta} = v_3 & \text{em } (0, T) \\ y|_{t=0} = \Pi_2(y_0) & \text{em } (-\eta, 1 + \eta). \end{cases} \quad (3.61)$$

Claramente, definindo $v(t, x) = y(t, (1 + 2\eta)x - \eta)$, este problema é equivalente a

$$\begin{cases} v_t + \frac{\nu}{(1 + 2\eta)^3} v_{xxx} + \frac{M}{1 + 2\eta} v_x = 0 & \text{em } (0, T) \times (0, 1) \\ v|_{x=0} = v_1, \quad v|_{x=1} = v_2, \quad v_x|_{x=1} = (1 + 2\eta)v_3 & \text{em } (0, T) \\ v|_{t=0} = y|_{t=0} = \Pi_2(y_0) = y_0 & \text{em } (0, 1). \end{cases}$$

Assim, aumentando K_0 , diminuindo ν_0 se for necessário e tomando ν suficientemente pequeno, podemos ver que é suficiente resolver o problema com dados iniciais em $W_0^{1,\infty}(0, 1)$. No que segue, vamos supor que $y_0 \in W_0^{1,\infty}(0, 1)$.

A prova do Teorema 17 vai ser feita em duas etapas. Primeiro vamos conduzir o estado inicial a um estado pequeno e, em seguida, dirigí-lo exatamente a 0.

• **Condução do estado inicial para um estado “pequeno”**

Neste parágrafo, conduziremos o estado inicial $y_0 \in W_0^{1,\infty}(0, 1)$ a algum estado "pequeno". Isto só é possível por causa da presença do termo de transporte, mais precisamente, quando $M < 0$. Introduzimos o seguinte estado inicial associado a y_0 definido em todo \mathbb{R} :

$$u_0(x) = \begin{cases} y_0 & x \in (0, 1) \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus (0, 1). \end{cases} \quad (3.62)$$

A ideia é considerar a solução u de nosso sistema associado a u_0 em \mathbb{R} e provar que u é "pequena" no intervalo $x \in (0, 1)$ quando $t > 1/|M|$. Finalmente, é suficiente tomar os controles como os correspondentes traços de u .

Proposição 21. *Consideremos $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ como em (3.62). Seja $M < 0$ e seja u solução de*

$$\begin{cases} u_t + \nu u_{xxx} + M u_x = 0 & \text{em } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{em } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.63)$$

Então, para $t > 1/|M|$, a função u satisfaz

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(0,1)} \lesssim \frac{\|u_0\|_\infty}{(\nu t)^{1/3}} \exp\left(-\frac{2(-Mt - 1)^{3/2}}{3\sqrt{3\nu t}}\right). \quad (3.64)$$

Além disso,

$$\|u_x(\cdot, 1)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \lesssim \|u_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R})}. \quad (3.65)$$

Demonstração. Fazendo a mudança e variável

$$v(t, x) := u(t, x + Mt),$$

obtemos a seguinte equação

$$v_t + \nu v_{xxx} = 0 \tag{3.66}$$

com solução fundamental

$$G(t, x) = \frac{1}{(3\nu t)^{1/3}} Ai \left(\frac{x}{(3\nu t)^{1/3}} \right),$$

onde Ai é a função de Airy

$$Ai(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{Im(\xi)=\eta>0} \exp \left[i \left(x\xi + \frac{\xi^3}{3} \right) \right] d\xi.$$

Segue que, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{\mathbb{R}} u_0(z) \frac{1}{(3\nu t)^{1/3}} Ai \left(\frac{x - Mt - z}{(3\nu t)^{1/3}} \right) dz \\ &= \int_0^1 y_0(z) \frac{1}{(3\nu t)^{1/3}} Ai \left(\frac{x - Mt - z}{(3\nu t)^{1/3}} \right) dz. \end{aligned} \tag{3.67}$$

A função Airy satisfaz a seguinte estimativa: para $x \geq 0$ existe uma constante positiva C , tal que

$$0 \leq Ai(x) \leq C \exp \left(-\frac{2}{3} x^{3/2} \right). \tag{3.68}$$

Agora, voltando para a estimativa de $u(t, x)$, para $x \geq 0$, $t \geq 1/|M|$ e para $z \in [0, 1]$ tem-se que

$$z \leq 1 \leq -Mt.$$

Como

$$0 \leq x - Mt - 1 \leq x - Mt - z,$$

obtemos

$$-\frac{2}{3}(x - Mt - z)^{3/2} \leq -\frac{2}{3}(x - Mt - 1)^{3/2}$$

Assim, de (3.67) e (3.68) resulta que

$$\begin{aligned}
|u(t, x)| &\leq \frac{\|y_0\|_\infty}{(3\nu t)^{1/3}} \int_0^1 Ai\left(\frac{x - Mt - z}{(3\nu t)^{1/3}}\right) dz \\
&\leq \frac{C\|y_0\|_\infty}{(3\nu t)^{1/3}} \int_0^1 \exp\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{x - Mt - z}{(3\nu t)^{1/3}}\right)^{3/2}\right] dz \\
&\leq \frac{C\|y_0\|_\infty}{(3\nu t)^{1/3}} \int_0^1 \exp\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{x - Mt - 1}{(3\nu t)^{1/3}}\right)^{3/2}\right] dz \\
&= \frac{C\|u_0\|_\infty}{(3\nu t)^{1/3}} \exp\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{x - Mt - 1}{(3\nu t)^{1/3}}\right)^{3/2}\right]
\end{aligned}$$

obtendo (3.59).

Para obter a estimativa (3.60), primeiro derivamos (3.67) com respeito a x . Observe que (3.67) é uma convolução e, nesse caso,

$$\partial_x u(t, x) = \left[\frac{1}{(3\nu t)^{1/3}} Ai\left(\frac{\cdot - Mt}{(3\nu t)^{1/3}}\right) * (u_0)_x \right] (x). \quad (3.69)$$

Como $\text{supp}(u_0) \subset [0, 1]$ (lembrar que $M < 0$), temos que

$$\partial_x u(t, x) = \left[\frac{1}{(3\nu t)^{1/3}} (Ai \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+})\left(\frac{\cdot - Mt}{(3\nu t)^{1/3}}\right) * (u_0)_x \right] (x).$$

Denotemos $Ai^+ := Ai \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$. Como $Ai(x) \geq 0$, para $x \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
|\partial_x u(t, 1)| &\leq \left[\frac{1}{(3\nu t)^{1/3}} Ai^+\left(\frac{\cdot - Mt}{(3\nu t)^{1/3}}\right) * |(u_0)_x| \right] (1) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(3\nu t)^{1/3}} Ai^+\left(\frac{y - Mt}{(3\nu t)^{1/3}}\right) |(u_0)_x(1 - y)| dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(3\nu t)^{1/3}} Ai^+\left(\frac{z}{(3\nu t)^{1/3}}\right) |(u_0)_x(1 - Mt - z)| dz \quad (3.70)
\end{aligned}$$

Como $Ai^+ \in L^1(\mathbb{R})$ e

$$\left\| \frac{1}{(3\nu t)^{1/3}} Ai^+ \left(\frac{\cdot}{(3\nu t)^{1/3}} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(3\nu t)^{1/3}} \left| Ai^+ \left(\frac{z}{(3\nu t)^{1/3}} \right) \right| dz = \|Ai^+\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad (3.71)$$

para todo $t > 0$, concluimos de (3.65) e da Desigualdade de Holder, que

$$\begin{aligned} |\partial_x u(t, 1)| &\leq \left\| \frac{1}{(3\nu t)^{1/3}} Ai^+ \left(\frac{\cdot}{(3\nu t)^{1/3}} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \|(u_0)_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leq \|Ai^+\|_{L^1(\mathbb{R})} \|(u_0)_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|Ai^+\|_{L^1(\mathbb{R})} \|(u_0)_x\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Portanto, obtém-se

$$\|u_x(\cdot, 1)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \lesssim \|(u_0)_x\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R})}$$

independente de ν .

□

• Controlabilidade nula

Consideremos $y_0 \in W_0^{1,\infty}(0, 1)$ e $M < 0$. A demonstração será feita em três passos.

1. Seja $T_1 \in (1/|M|, T)$ que será escolhido posteriormente. Se sabe que a solução u de (3.63) satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Assim, aplicando o Teorema de Rellich-Kondrachov, tem-se

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, 0)\|_{L^2(0, T_1)}^2 &\leq C \int_0^{T_1} \sup_{t \in [0, 1]} |u(t, \cdot)|^2 dt \leq C \int_0^{T_1} \|u(t, \cdot)\|_{H^1(0, 1)}^2 dt \\ &\leq CT_1 \sup_{t \in [0, T_1]} \|u(t, \cdot)\|_{H^1(0, 1)}^2 \\ &\leq C \sup_{t \geq 0} \|u(t, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \leq C \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Logo, $u(\cdot, 0) \in L^2(0, T_1)$. Analogamente, $u(\cdot, 1) \in L^2(0, T_1)$ e

$$\|u(\cdot, 1)\|_{L^2(0, T_1)} \leq C \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Pela Proposição 21 temos que $u_x(\cdot, 1) \in L^\infty(0, T_1)$, e pelas imersões de Sobolev

$$L^\infty(0, T_1) \hookrightarrow L^2(0, T_1) \hookrightarrow H^{-1/3}(0, T_1)$$

obtemos, $u_x(\cdot, 1) \in H^{-1/3}(0, T_1)$.

Definimos $y_1 = u$ em $(0, T_1) \times (0, 1)$. Pelas Proposições 18 e 19, tem-se que $y_1 \in L^2(0, T_1; L^2(0, 1)) \cap C^0([0, T_1]; H^{-1}(0, 1))$. Além disso, y_1 satisfaz

$$\begin{cases} y_{1,t} + \nu y_{1,xxx} + M y_{1,x} = 0 & \text{em } (0, T_1) \times (0, 1), \\ y_1|_{x=0} = u|_{x=0}, \quad y_1|_{x=1} = u|_{x=1}, \quad y_{1,x}|_{x=1} = u_x|_{x=1} & \text{em } (0, T_1), \\ y_1|_{t=0} = y_0 & \text{em } (0, 1). \end{cases} \quad (3.72)$$

Como $T_1 > 1/|M|$, pela desigualdad (3.64) tem-se

$$\|y_1(T_1, \cdot)\|_{L^\infty(0,1)} = \|u(T_1, \cdot)\|_{L^\infty(0,1)} \lesssim \frac{\|u_0\|_\infty}{(\nu T_1)^{1/3}} \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{(-MT_1 - 1)^{3/2}}{\sqrt{3\nu T_1}}\right). \quad (3.73)$$

2. Considere inicialmente $0 \leq t \leq T - T_1$. Nesse caso, podemos aplicar o Teorema 15 para a condição inicial $y^1 = y_1(T_1, \cdot) \in H^{-1}(0, 1)$ (em lugar de y_0). Então, existe $w \in L^2(0, T - T_1)$ tal que a solução

$$u \in L^2(0, T - T_1; L^2(0, 1)) \cap C^0([0, T - T_1]; H^{-1}(0, 1))$$

de

$$\begin{cases} u_t + \nu u_{xxx} + M u_x = 0 & \text{em } (0, T - T_1) \times (0, 1), \\ u|_{x=0} = w, \quad u|_{x=1} = u_x|_{x=1} = 0 & \text{em } (0, T - T_1), \\ u|_{t=0} = y^1 & \text{em } (0, 1), \end{cases} \quad (3.74)$$

satisfaz

$$u(T - T_1, \cdot) = 0 \quad \text{em } (0, 1).$$

Além disso,

$$\|w\|_{L^2(0, T - T_1)} \leq \frac{C^*}{\nu} \|y^1\|_{H^{-1}(0,1)},$$

onde C^* é a constante da estimativa (3.5), com $T - T_1$ no lugar de T .

Seja $T_1 \leq t \leq T$ e consideremos $y_2(t, x) = u(t - T_1, x)$. Então, a solução

$$y_2 \in L^2(T_1, T; L^2(0, 1)) \cap C^0([T_1, T]; H^{-1}(0, 1))$$

de

$$\begin{cases} y_{2,t} + \nu y_{2,xxx} + M y_{2,x} = 0 & \text{em } (T_1, T) \times (0, 1), \\ y_2|_{x=0} = v, \quad y_2|_{x=1} = y_{2,x}|_{x=1} = 0 & \text{em } (T_1, T), \\ y_2|_{t=T_1} = y^1 & \text{em } (0, 1). \end{cases} \quad (3.75)$$

satisfaz

$$y_2(T, \cdot) = u(T - T_1, \cdot) = 0 \quad \text{em } (0, 1)$$

e

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(T_1, T)}^2 &\leq \frac{1}{\nu^2} \exp \left\{ \frac{\tilde{C}|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{(|M|(T - T_1))^{1/2}} \right) \right\} \|y(T_1, \cdot)\|_{H^{-1}(0,1)}^2 \\ &\leq \exp \left\{ \frac{C_7|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{(|M|(T - T_1))^{1/2}} \right) \right\} \|y(T_1, \cdot)\|_{H^{-1}(0,1)}^2 \end{aligned} \quad (3.76)$$

para $\nu \in (0, \nu_0)$ e alguma constante $C_7 > 0$. Além disso, de (3.73) tem-se

$$\begin{aligned} &\|v\|_{L^2(T_1, T)}^2 \\ &\leq \frac{C_8}{T_1^{2/3}} \exp \left\{ \frac{1}{\nu^{1/2}} \left(C_8|M|^{1/2} \left(1 + \frac{1}{(|M|(T - T_1))^{1/2}} \right) - \frac{4}{3\sqrt{3}T_1^{1/2}} (-MT_1 - 1)^{3/2} \right) \right\} \|y_0\|_\infty^2 \end{aligned}$$

para $\nu \in (0, \nu_0)$.

Assim, tomando $T_1 = 2K/|M|$, com K suficientemente grande, tal que $T - T_1 > K/|M|$, obtemos na desigualdade acima

$$\|v\|_{L^2(T_1, T)}^2 \leq \exp \left\{ \frac{-C|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}} \right\} \|y_0\|_\infty^2, \quad \text{para algum } C > 0, \quad (3.77)$$

quando $\nu \in (0, \nu_0)$.

3. Para concluir a demonstração do Teorema 17, consideremos a função definida por

$$y = \begin{cases} y_1 & \text{em } [0, T_1] \times [0, 1] \\ y_2 & \text{em } [T_1, T] \times [0, 1]. \end{cases}$$

Então, é claro que $y \in Y_0$ é solução de

$$\begin{cases} y_t + \nu y_{xxx} + My_x = 0 & \text{em } (0, T) \times (0, 1) \\ y|_{x=0} = v_1', \quad y|_{x=1} = v_2', \quad y_x|_{x=1} = v_3' & \text{em } (0, T) \\ y|_{t=0} = y_0 & \text{em } (0, 1). \end{cases}$$

Além disso, obtemos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
\|v_1^\nu\|_{L^2(0,T)}^2 &= \|u(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T_1)}^2 + \|v\|_{L^2(T_1,T)}^2 \leq C\|y_0\|_{H^1(0,1)}^2 + \exp\left\{\frac{-C|M|^{1/2}}{\nu^{1/2}}\right\} \|y_0\|_\infty^2 \\
&\leq C\|y_0\|_{H^1(0,1)}^2 + C\|y_0\|_\infty^2 \leq C(\|y_0\|_\infty^2 + \|y_{0,x}\|_\infty^2) + C\|y_0\|_\infty^2 \\
&\leq 2C(\|y_0\|_\infty + \|y_{0,x}\|_\infty)^2 + C\|y_0\|_{W^{1,\infty}(0,1)}^2 \\
&= 2C\|y_0\|_{W^{1,\infty}(0,1)}^2 + C\|y_0\|_{W^{1,\infty}(0,1)}^2 \leq C\|y_0\|_{W^{1,\infty}(0,1)}^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|v_1^\nu\|_{L^2(0,T)} \leq C\|y_0\|_{W^{1,\infty}(0,1)}. \quad (3.78)$$

Analogamente,

$$\|v_2^\nu\|_{L^2(0,T)} = \|u(\cdot, 1)\|_{L^2(0,T_1)} \leq C\|y_0\|_{W^{1,\infty}(0,1)}, \quad (3.79)$$

e, pela, Proposição 21,

$$\|v_3^\nu\|_{L^2(0,T)} = \|u_x(\cdot, 1)\|_{L^2(0,T_1)} \leq C\|u_x(\cdot, 1)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq C\|u_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R})} = C\|y_0\|_{W^{1,\infty}(0,1)}. \quad (3.80)$$

Somando as desigualdades (3.78), (3.79) e (3.80) obtemos (3.60). □

Referências Bibliográficas

- [1] G. B. Airy, *Tides and waves*. Encyclopedia Metropolitana 5 1841.
- [2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Mason Paris, 1983
- [3] J. Bona, S.M. Sun and B. Y. Zhang, *A nonhomogeneous boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain*, Comm. Partial Differential Equations 28(7-8)(2003), 1391-1436.
- [4] J. V. Boussinesq, *Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire*.
- [5] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No 223. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [6] M. Cavalcanti, V. Cavalcanti, A. Faminskii and F. Natali, *Decay of solutions to Damped Korteweg-de Vries Type Equation*, Appl. Math Optim 65:221-251, 2011.
- [7] E. Cerpa, *Exact controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation on a critical spatial domain*, SIAM J. Control Optim. 46(2007), 877-899.
- [8] E. Cerpa and E. Crépeau, *Boundary controllability for the non linear Korteweg-de Vries de Vries equation on any critical domain*, Preprint, 2007 (to appear in Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire).
- [9] J.M. Coron, *Control and Nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society 136, 2007.
- [10] J.M. Coron and E. Crépeau, *Exact boundary controllability of a nonlinear KdV equation with a critical length*. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 6 (2004), 367-398.
- [11] S. Dolecki and D. L. Russell, *A general theory of observation and control*. SIAM J. Control Optim. 15 (1977), 185-220.
- [12] A.V. Faminskii, *Cauchy problem for the Korteweg-de-Vries equation and its generalizations*, English transl. in J. Soviet Math. 50, 1381-1420, 1990.
- [13] A. V. Faminskii, *On two initial boundary value problems for the generalized Kdv equation*, Nonlinear Boundary Problems 14(2004), 58-71.

- [14] A. Fursikov and O. Y. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes, No. 34, Seoul National University, Korea, 1996.
- [15] C. S. Gardner and G. K. Morikawa, *Technical report. Courant Institute of Mathematical Sciences*. New York University. Report No. NYU 9082, 1960.
- [16] O. Glass and S. Guerrero, *On the uniform controllability of the Burgers equation*, SIAM J. Control Optim. 46(4)(2007), 1211-1238.
- [17] O. Glass and S. Guerrero, *Some exact controllability results for the linear KdV equation and uniform controllability in the zero-dispersion limit*. Asymptot. Anal. 60 (2008), 61–100.
- [18] A.M. Gomes, *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de evolução*, Textos de Metodos Matemáticos IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.
- [19] S. Guerrero and G. Lebeau, *Singular optimal control for a transport-difusion equation*, Comm. Partial Differential Equations 32(12)(2007),1813-1836.
- [20] J. Holmer, *The initial-boundary value problem for the Korteweg- de Vries equation*, Comm. Partial Differential Equations 31(7-9)(2006), 1151–1190.
- [21] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I. Distribution Theory and Fourier Analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 256, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [22] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III. Pseudo-Differential Operators*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 274, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2007.
- [23] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*. Collection RMA, vol. 36, Masson–John Wiley, Paris–Chicester, 1994.
- [24] D. J. Korteweg and G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*. Philos. Mag. 39 (1895), 422–443.
- [25] S.N. Kruzhkov and A.V. Faminskii, *Generalized solutions of the Cauchy problem for the Korteweg-de-Vries equation*, English transl.in Sb.Math,48, 391-421, 1984.
- [26] F. Linares and G. Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Springer, Rio de Janeiro and Santa Barbara, 2008.
- [27] J-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*. Tome 1, vol. 8 of Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Masson, Paris, 1988.
- [28] J-L. Lions, *Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems*. SIAM Rev. 30 (1988), 1–68.

- [29] J-L. Lions and E. Magenes, *Probléms aux limites non homogènes et applications*. Vol 1, Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17, Dunod, Paris, 1968.
- [30] L.A. Medeiros e M.M.A. Milla, *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, n 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.
- [31] L.A. Medeiros e P.H. Rivera, *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, n 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.
- [32] J.M. Muñoz, *Estabilização de Semigrupos e Aplicaciones*, Série de Métodos Matemáticos, Rio de Janeiro, 2008.
- [33] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [34] Rayleigh, (Strutt. J.W.) *On waves*. Phil. Mag. 1 (1976), 257-271.
- [35] L. Rosier, *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain*. ESAIM Control Optim. Cal. Var. 2 (1997), 33–55.
- [36] L. Rosier, *Control of the surface of a fluid by a wavemaker*. ESAIM Control Optim. Cal. Var. 10 (2004), 346–380.
- [37] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, 2da edição, 1974(tradução ao espanhol, Alabama 1979).
- [38] J. S. Russell, *Report on waves*. Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1844.
- [39] D. L. Russell and B. Y. Zhang, *Controllability and stabilizability of the third-order linear dispersion equation on a periodic domain*, SIAM J. Control Optim. 31(3)(1993),659-676.
- [40] D. L. Russell and B. Y. Zhang, *Exact controllability and stabilizability of the Korteweg-de Vries equation*, Trans.Amer. Math. Soc. 348(9)(1996), 3643-3672.
- [41] A. Sidi, C. Sulem and P.L.Sulem, *On the Long Time behaviour of a Generalized KdV Equation*, Acta Applicandae Mathematicae 7 (1986), 35-47. D. Reidel Publishing Company, 1986.
- [42] G. G. Stokes, *On the theory of oscillatory waves*. Trans. Camb. Philos. Soc 1 (1847), 441–55.
- [43] J. Zabczyk, *Mathematical control theory: an introduction*. Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.

- [44] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*. Phys. Rev. Lett. 15 (1965), 240–243.
- [45] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A, Linear Monotone Operators*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [46] E. Zuazua, *Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods*. SIAM Rev. 47 (2000), 197–243.