

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE ENGENHARIA, MODELAGEM E CIÊNCIAS SOCIAIS
APLICADAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Lenin Lee Huaman Valdivia

**ESTABILIDADE E COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM
TUBO VISCOELÁSTICO DESCARREGANDO FLUIDO
INTERNO**

Santo André, SP

2023

Lenin Lee Huaman Valdivia

**ESTABILIDADE E COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM
TUBO VISCOELÁSTICO DESCARREGANDO FLUIDO
INTERNO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade Federal do ABC, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos.
Orientador: Prof. Dr. Juan Pablo Julca Avila.

Santo André, SP

2023

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

HUAMAN VALDIVIA, LENIN LEE
ESTABILIDADE E COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM
TUBO VISCOELÁSTICO DESCARREGANDO FLUIDO
INTERNO / LENIN LEE HUAMAN VALDIVIA. — 2023.

128 fls. : il.

Orientador: JUAN PABLO JULCA AVILA

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Santo André, 2023.

1. estabilidade dinâmica de tubos. 2. modelo viscoelástico de
Kelvin-Voigt. 3. método de Galerkin. 4. resposta dinâmica. 5.
vibrações. I. JULCA AVILA, JUAN PABLO. II. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Mecânica, 2023. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).

Santo André , 22 de 03 de 2023 .

LENIN LEE HUAMAN VALDIVIA

Nome completo e Assinatura do(a) autor(a)

Juan Pablo Julca Avila

Nome completo e Assinatura do(a) (co)orientador(a)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

Ata de Defesa de Dissertação de Mestrado

No dia 07 de Março de 2023 às 10h00, Sala 302A do Bloco B do Campus Santo André da Universidade Federal do ABC, realizou-se a Defesa de Dissertação de Mestrado, que constou da apresentação do trabalho intitulado “**ESTABILIDADE E COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UMTUBO VISCOELÁSTICO DESCARREGANDO FLUIDOINTERNO**” de autoria do candidato, **LENIN LEE HUAMAN VALDIVIA**, RA nº 21202010228, discente do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da UFABC. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o candidato foi considerado Aprovado pela Banca Examinadora.

E, para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Banca.

Prof.(a) FABRICIO CESAR LOBATO DE ALMEIDA
- Membro Titular

Prof.(a) REYOLANDO MANOEL LOPES REBELLO DA FONSECA BRASIL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Membro Titular

Prof.(a) KARL PETER BURR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Membro Suplente

Prof.(a) JUAN PABLO JULCA AVILA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

“Dedico este trabalho aos meus pais, Fanny e Marcelino, aos meus irmãos, Leslie e Jimmy, pelo apoio em momentos difíceis”.

AGRADECIMENTOS

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, POSMEC, pela oportunidade de desenvolver minha área de pesquisa. Quero agradecer de forma especial ao Professor Dr. Juan Pablo Julca, pela orientação baseada na sua experiência acadêmica, por encaminhar no desenvolvimento da pesquisa, e pela paciência e constante dedicação nas revisões ao longo do programa de mestrado.

RESUMO

Neste trabalho de mestrado, aborda-se a estabilidade e o comportamento dinâmico de um tubo viscoelástico na vertical, engastado no topo e livre no extremo inferior, descarregando fluido interno. O sistema é não conservativo devido ao escoamento, que atua como uma fonte fornecedora de energia. O tubo é visto como uma estrutura esbelta com pequenas deflexões, de modo que a teoria de vigas de Euler-Bernoulli é adotada. O material viscoelástico do tubo se comporta de acordo com o modelo de dissipação de energia de Kelvin-Voigt. O paradoxo de perda de estabilidade por amortecimento, um tema de interesse científico, é abordado. O escoamento interno é estacionário, incompressível e uniforme, com velocidade constante. A equação diferencial de movimento do sistema é obtida pela abordagem Newtoniana, através do equilíbrio dinâmico dos elementos de tubo e fluido, e é adimensionalizada introduzindo os parâmetros adimensionais de massa, velocidade do fluido, viscoelasticidade, viscosidade do meio externo e gravidade. A equação de movimento é discretizada pelo método de Galerkin, assumindo como solução aproximada o somatório dos produtos de duas funções, uma espacial e outra temporal. As funções espaciais são os modos de vibração livre de um tubo engastado e as funções temporais são harmônicas que definem a amplitude da vibração do tubo. Aborda-se a análise de estabilidade pelo estudo das frequências naturais, obtidas a partir da solução da equação característica do sistema, as quais são apresentadas no diagrama de Argand onde é possível identificar as regiões de instabilidade, a velocidade crítica e prever o tipo de movimento do tubo. Conduziu-se um estudo de sensibilidade à velocidade crítica, variando os parâmetros adimensionais que caracterizam o sistema. Os resultados indicam que a viscoelasticidade aumenta ligeiramente a velocidade crítica em sistemas de baixa relação de massa. No entanto, o parâmetro de gravidade é o fator mais influente na estabilidade do sistema. A viscosidade do meio externo não impacta significativamente a velocidade crítica, mas controla o período de transição para a perda de estabilidade. Finalmente, apresenta-se a resposta dinâmica do sistema obtida pela transformada de Laplace, para casos específicos de interesse.

Palavras-chaves: estabilidade dinâmica de tubos; modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt; método de Galerkin; resposta dinâmica; vibrações.

ABSTRACT

In this master's work, the stability and dynamic behavior of a vertical viscoelastic tube, fixed at the top and free at the bottom end, discharging internal fluid. The system is non-conservative because the flow acts as a source of energy. The tube is seen as a slender structure with small deflections, so the Euler-Bernoulli beam theory is adopted. The viscoelastic material of the tube behaves according to the Kelvin-Voigt internal dissipation model. Here, the paradox of loss of stability due to damping is addressed, a topic of scientific interest. The internal flow is stationary, incompressible, and uniform at constant velocity. The differential equation of motion of the system is obtained by the Newtonian approach, through the dynamic equilibrium of the tube and fluid elements, and it is dimensionless by introducing the dimensionless parameters of mass, fluid velocity, viscoelasticity, viscosity of the external medium and gravity. The motion equation is discretized by the Galerkin method, assuming as an approximate solution a series of the products of two functions, one spatial and the other temporal, the spatial functions are the modes of vibration free of the cantilever pipe, and the temporal functions are harmonics that define the amplitude of vibration of the pipe. The stability analysis is approached by studying the natural frequencies, obtained from the solution of the characteristic equation of the system, which are presented in the Argand diagram where it is possible to identify the regions of instability, the critical velocity and predict the type of movement of the pipe. A critical velocity sensitivity study was conducted, varying the dimensionless parameters that characterize the system. The results indicated that the viscoelasticity increases slightly at critical velocity in systems of low mass ratio. However, the gravity parameter is the most influential factor in the stability of the system. The viscosity of the external medium does not significantly affect the critical velocity, but it controls the transition period for loss of stability. Finally, the dynamic response of the system obtained by the Laplace transform is presented, for specific cases of interest.

Keywords: dynamic stability of pipes, Kelvin-Voigt viscoelastic model, Galerkin method, dynamic response; vibrations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – (a) Injeção de fluido em poços de petróleo. (b) Injeção de fluido em poços de petróleo em águas ultra profundas. (c) Injeção de combustível em alta velocidade em um motor de combustão interna. (d) Reabastecimento de combustível de aeronaves em voo.	18
Figura 1.2 – Modelo simplificado do problema a ser estudado.....	19
Figura 1.3 – (a) Sistema de impulso (b) forma assimétrica que adota a corda produto da direção de rotação (c) forma adota a corda depois de ser aplicado uma força no extremo inferior.	20
Figura 1.4 – Tapiline - Tubulação transarábica.....	21
Figura 1.5 – Sistema de dois graus de liberdade	22
Figura 1.6 – Tubo flexível na vertical: (a) flambagem (b) flambagem com velocidade de escoamento relativamente alta (c) flutter perto da velocidade crítica (d) flutter no seu terceiro modo.....	24
Figura 2.1 – Representação esquemática do elemento mola-elástica (a) sem deformar (b) deformada.	30
Figura 2.2 – Curva característica de fluência da mola elástica.	31
Figura 2.3 – Representação esquemática do elemento amortecedor viscoso: (a) sem deformar (b) deformado.	31
Figura 2.4 – Curva característica de fluência do amortecedor.	32
Figura 2.5 – Modelo de Kelvin Voigt: (a) sem deformar (b) deformado.....	33
Figura 2.6– Viga engastada-livre de Euler-Bernoulli.....	37
Figura 2.7 – Modos de vibração livre de uma viga engastada-livre.....	39
Figura 2.9 – Diagrama de Argand ou mapa de estabilidade.....	43
Figura 2.10 – Diagrama de Collar	44
Figura 2.11 – Identificação da divergência no diagrama do Argand.....	45
Figura 2.12 – Identificação do flutter no diagrama de Argand	46
Figura 3.1 – Representação esquemática do tubo viscoelástico, engastado no topo e descarregando fluido interno.	48
Figura 3.2 – Curva de deflexão do tubo	50
Figura 3.3 – Elemento de fluido no tubo	51
Figura 3.4 – Diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal de tubo.	55

Figura 3.5 – Diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal de fluido.....	58
Figura 4.1 – Velocidade críticas u_{cr} versus N	71
Figura 4.2 – Frequência críticas ω_{cr} , variando N	72
Figura 4.3 – Solução gráfica da equação transcendental da viga engastada-livre.....	73
Figura 4.4 – Fluxo de cálculo para a obtenção do diagrama de Argand	78
Figura 4.5: Fluxo de cálculo para a obtenção da curva de estabilidade	80
Figura 5.1 – Diagrama de Argand das frequências para um tubo elástico disposto na vertical, engastado em seu topo, descarregando fluido interno, com $\beta = 0,5$ e $\alpha = \gamma = 0$.	86
Figura 5.2 – Parte imaginária da frequência, $Im(\omega)$, como função da velocidade do fluido, u , para o tubo elástico; com $N = 6$, $\beta = 0,5$; $\alpha = \gamma = 0$.	88
Figura 5.3 – Parte real da frequência adimensional, $Re(\omega)$, como função da velocidade do fluido, u , para o tubo elástico com: $N = 6$; $\beta = 0,5$; $\alpha = \gamma = 0$.	89
Figura 5.4 – Tubo descarregando fluido interno com $\beta = 0,65$ e $\gamma = 10$: tubo elástico $\alpha =$ 0 , e para o viscoelástico $\alpha = 0,0189$.	91
Figura 5.5 – Diagrama de Argand para um tubo disposto na vertical, engastado em seu topo, descarregando fluido, com $\beta = 0,65$ e $\gamma = 10$: (a) tubo elástico, $\alpha = 0$; (b) tubo viscoelástico, $\alpha = 0,0189$	92
Figura 5.6 – Parte real da frequência em função da velocidade, para o tubo com $\beta = 0,65$ e $\gamma = 10$, (a) tubo elástico, $\alpha = 0$, (b) tubo viscoelástico $\alpha = 0,0189$.	95
Figura 5.7 – Parte imaginária da frequência como função da velocidade do fluido com $\beta =$ $0,65$ e $\gamma = 10$ (a) tubo elástico, $\alpha = 0$ (b) tubo viscoelástico, $\alpha = 0,0189$.	96
Figura 5.8 – Curva de velocidade crítica, u_{cr} , versus parâmetro de massa β , para um tubo elástico vertical, engastado no topo, descarregando fluido interno, com $N = 6$, $\alpha =$ $\gamma = 0$.	97
Figura 5.9 – Diagrama de Argand para o tubo disposto na vertical, engastado em seu topo, descarregando fluido; com $\beta = 0,9$ e $\alpha = \gamma = 0$. Considera-se seis termos na aproximação de Galerkin	99
Figura 5.10 – Velocidade crítica vs. parâmetro de massa, para um tubo elástico vertical engastado em seu topo, descarregando fluido, com $\alpha = \gamma = 0$, e para diferentes números de termos da série de Galerkin.	101
Figura 5.11 – Velocidade crítica, u_{cr} , versus parâmetro de massa, β , para diferentes valores da constante de viscoelasticidade α , para um tubo vertical, engastado em seu topo, descarregando fluido, $\gamma = 10$. Resultado obtido com $N = 6$.	103

Figura 5.12 – Velocidades críticas, u_{cr} , de um tubo vertical engastado em seu topo, descarregando fluido, em função de β , para distintos valores do parâmetro de gravidade γ , com $N = 6$ e $\alpha = 0$.	105
Figura 5.13 – Velocidade crítica, u_{cr} , de um tubo vertical engastado em seu topo, descarregando fluido em função do parâmetro de massa β , com $N = 6$, $\alpha = \gamma = 0$, variando o parâmetro viscoso: $-\sigma = 0$; $-\sigma = 0,23$; $-\sigma = 1,42$.	107
Figura 6.1 – Variação através do tempo da coordenada generalizada, $q_1(\tau)$, para diferentes valores do parâmetro de amortecimento viscoso, σ , para o sistema com $\beta = 0,2$, $\alpha = \gamma = 0$.	111
Figura 6.2 – Resposta dinâmica para o Caso 1 da Tabela 6.1, com velocidade igual à velocidade crítica $u_{cr} = 9,868$: (a) Deslocamento lateral $w(\xi, \tau)$ em diferentes posições; (b) configuração do tubo em regime permanente.	113
Figura 6.3 – Resposta dinâmica do sistema, definido pelos parâmetros do Caso 2 da Tabela 6.1, com velocidade de descarrega $u = 5$: (a) Deslocamento lateral $w(\xi, \tau)$; (b) configuração do tubo	114
Figura 6.4 – Resposta dinâmica do sistema definido pelos parâmetros $\beta = 0,8$; $\gamma = 10$ para: (a) Tubo elástico com $\alpha = 0$ e (b) tubo viscoelástico com $\alpha = 0,01$	115
Figura 6.5 – Resposta dinâmica do tubo com velocidade de descarrega, abaixo da sua velocidade crítica $u = 5$	116
Figura 6.6 – Amplitude adimensional de vibração do extremo livre do tubo viscoelástico descarregando fluido vs. a frequência da força de excitação, com parâmetros do Caso 1 da Tabela 6.1.	117

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Velocidades críticas u_{cr} variando N	70
Tabela 4.2 – Cálculo da frequência crítica variando N , com $\beta = 0,5$ e $\alpha = \gamma = 0$	71
Tabela 4.3 – Autovalores λ_r	74
Tabela 4.4 – Valores do coeficiente σ_r	74
Tabela 4.5 – Variáveis usadas na implementação do código computacional.....	77
Tabela 5.1 – Primeiras quatro frequências naturais para diferentes velocidade do fluido . i . interno, com $\beta = 0,5$; $\alpha = \gamma = 0$	85
Tabela 5.2 – Intervalos dos parâmetros de massa críticos β_r	98
Tabela 5.3 – Velocidades críticas para o sistema com $\beta = 0,9$ e $\alpha = \gamma = 0$	99
Tabela 6.1 – Parâmetros estruturais do sistema e frequência da força de excitação	112
Tabela B.1 – Primeiras quatro frequências do sistema com $\beta = 0,65$, $\gamma = 10$ e $\alpha = 0$	127
Tabela B.2 – Primeiras quatro frequências do sistema com $\beta = 0,65$ e $\gamma = 10$ e $\alpha = 0,0189$	128

LISTA DE SÍMBOLOS

ε	Deformação
σ	Tensão
E	Módulo de Young
t	Tempo
σ_0	Tensão inicial
η	Constante viscoelástica newtoniana
I	Momento de inercia da seção transversal do tubo
$\varepsilon(t)$	Deformação em função do tempo
u	Solução exata para o deslocamento lateral do tubo
\tilde{u}	Solução aproximada para o deslocamento lateral do tubo
R	Resíduo da solução aproximada em relação da solução exata
$\psi_k(x)$	k -ésima função de ponderação
ρ	Densidade do material do tubo
$w(x, t)$	Pequeno deslocamento transversal do tubo
$\phi(x)$	Função espacial
$\eta(t)$	Função temporal
$\lambda_r L$	r -ésimo valor próprio da viga engastada-livre
σ_r	r -ésima constante do modo próprio da viga engastada-livre
$[M]$	Matriz de massa
$[C]$	Matriz de amortecimento
$[K]$	Matriz de rigidez
$\{q(\tau)\}$	Vetor das coordenadas generalizadas
$\{f\}$	Vetor força de excitação
f_N	Intensidade da N -ésima força de excitação
s_1	Primeira raiz da equação de movimento
s_2	Segunda raiz da equação de movimento (conjugada de s_1)
$Re(s)$	Parte real da raiz s
$Im(s)$	Parte imaginária da raiz s
$\omega_{s,r}$	Frequência associada à s -ésima modo e r -ésima velocidade

u_r	r -ésima velocidade
u_{cr}	Velocidade crítica
L	Comprimento do tubo
\vec{i}	Vetor na direção das ordenadas
\vec{j}	Vetor na direção das abscissas
d	Diâmetro externo do tubo
p	Pressão interna do tubo
$u_{cr,n}$	r -ésima velocidade crítica
u_{cr}^N	Velocidade crítica calculada com N termos da série de Galerkin
$w(x, t)$	Deflexão transversal
ρ	Densidade do fluido
M	Massa por unidade de comprimento do tubo
E	Módulo de Young
EI	Rigidez à flexão
A	Área transversal do tubo
m	Massa do tubo por unidade de comprimento
U	Velocidade axial do fluido
S	Perímetro da secção transversal do tubo
$(\dot{ })$	Primeira derivada respeito do tempo
a_r	r -ésima constante
$\phi_r(x)$	r -ésimo modo normal de vibrar da viga engastada-livre
$\eta_r(t)$	r -ésima coordenada generalizada
$V(x)$	Esforço cortante
$M(x)$	Momento fletor
β	Parâmetro adimensional de massa
β_{cr}	Parâmetro adimensional de massa crítico
E^*	Coefficiente de dissipação viscoelástica Kelvin-Voigt
α	Parâmetro adimensional de dissipação viscoelástico
γ	Parâmetro adimensional de gravidade
N	Número de termos da série de Galerkin
$w(\xi, \tau)$	Deslocamento adimensional
ω	Frequência adimensional

ω_{cr}	Frequência crítica adimensional
Ω	Frequência circular
σ_r	r -ésima constante da viga engastada-livre
θ	Ângulo de rotação do tubo
M_o	Momento em relação ao centro o
Q	Força de cisalhamento
\mathcal{M}	Momento fletor
c	Coefficiente da força de amortecimento linear
T	Força de tração longitudinal
qS	Força de atrito
δ_{rs}	Função delta de Kronecker

SUMARIO

1 Introdução	17
1.1 Justificativa e definição do problema	17
1.2 Revisão bibliográfica	20
1.3 Objetivos.....	25
1.4 Estrutura da dissertação	26
2 Conceitos fundamentais	29
2.1 Viscoelasticidade	29
2.2 Mola elástica e amortecedor viscoso	29
2.3 Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt	33
2.4 Método de Galerkin	35
2.5 Vibração livre de uma viga engastada-livre	37
2.6 Sistema com N graus de liberdade	39
2.7 Mapa de estabilidade: diagrama de Argand	40
2.8 Análise de estabilidade de sistemas com N graus de liberdade	42
2.9 Tipos de instabilidade.....	44
2.9.1 Divergência.....	45
2.9.2 Flutter	46
3 Modelagem matemática	47
3.1 Definição do problema e hipóteses.....	47
3.2 Curvatura do tubo	49
3.3 Aceleração absoluta de um elemento de fluido	50
3.4 Equação de diferenças pela abordagem Newtoniana	54
3.4.1 Elemento infinitesimal de tubo.....	54
3.4.2 Elemento infinitesimal de fluido	57
3.5 Equação de movimento	59
4 Método numérico.....	61
4.1 Forma adimensional da equação de movimento.....	61
4.2 Discretização da equação de movimento.....	63
4.3 Equação de movimento na forma matricial padrão	68
4.4 Freqüências naturais e estabilidade dinâmica.....	68

4.5	Influência de número de termos da série de Galerkin na acurácia da determinação de ω_{cr} e u_{cr}	70
4.6	Implementação numérica.....	72
4.6.1	Vibração livre de uma viga engastada-livre	72
4.6.2	Cálculo das matrizes da equação de movimento discretizada.....	75
4.7	Fluxo de cálculo	77
4.7.1	Diagrama de Argand.....	78
4.7.2	Velocidade crítica vs. Parâmetro de massa	80
5 Resultados e discussões		83
5.1	Estabilidade dinâmica de um tubo elástico descarregando fluido interno.....	83
5.1.1	Verificação de resultados.....	90
5.2	Estudo comparativo de estabilidade: tubo elástico vs. viscoelástico.....	90
5.2.1	Efeito da viscoelasticidade sobre as frequências	95
5.2.2	Efeito da viscoelasticidade no amortecimento	96
5.3	Velocidade crítica vs. parâmetro de massa.....	96
5.4	Efeito do número de termos da série de Galerkin sobre a Estimativa da velocidade crítica	100
5.5	Efeito do coeficiente de dissipação viscoelástica	102
5.6	Efeito da gravidade sobre a velocidade crítica	104
5.7	Efeito da viscosidade externa	106
6 Dinâmica.....		109
6.1	Solução da equação de movimento pela transformada de Laplace	109
6.2	Efeito do parâmetro viscoso do meio externo na resposta do sistema	111
6.3	História de resposta	112
6.3.1	Resposta do sistema: Caso 1.....	112
6.3.2	Resposta do sistema: Caso 2.....	113
6.3.3	Efeito da viscoelasticidade do material na resposta	114
6.4	Ressonância	116
7 Conclusões.....		119
7.1	Conclusões.....	119
7.2	Trabalhos futuros.....	120
Bibliografia.....		121
Apêndice		124

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho de mestrado aborda o estudo de estabilidade e dinâmica de um tubo viscoelástico descarregando fluido interno com velocidade constante, um problema de interação fluido-estrutura, IFE, que trata sobre o comportamento dinâmico de estruturas em contato com fluido. A importância de realizar a análise deste tipo problemas de IFE é por questões de segurança, confiabilidade e durabilidade dos sistemas mecânico, Sirgrist (2015). Tubos viscoelásticos têm sido amplamente usados na atualidade para dissipar as vibrações induzidas pelo escoamento interno.

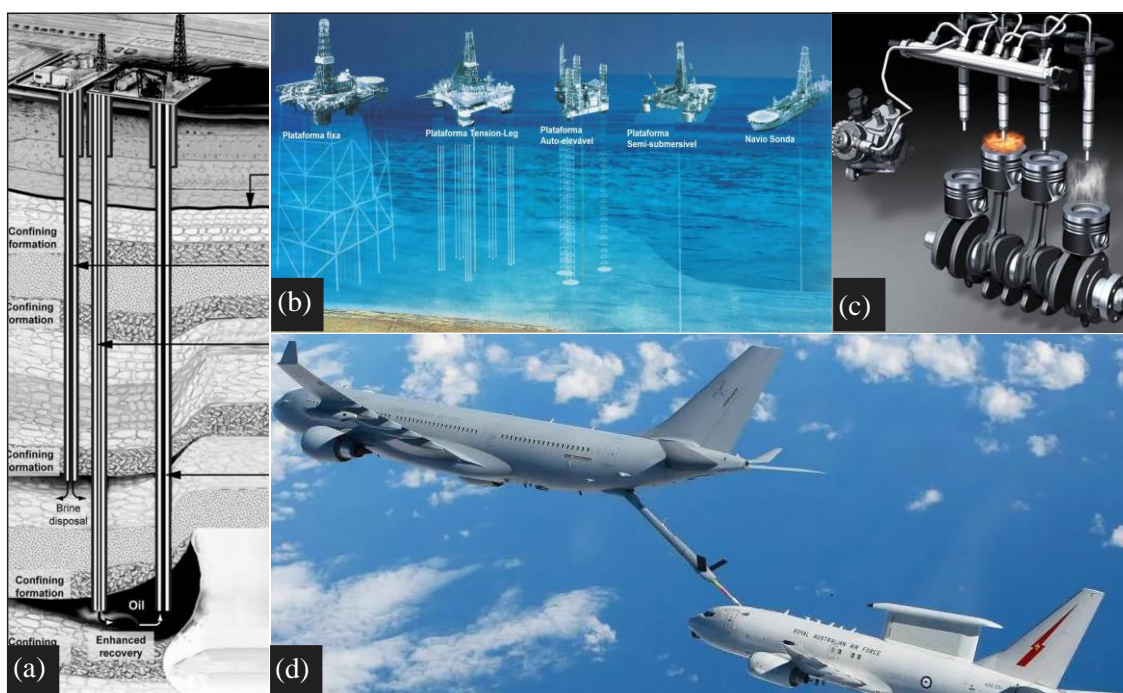
1.1 Justificativa e definição do problema

Problemas de interação fluido-estrutura (IFE) podem ser observados na vida cotidiana e em muitas aplicações de engenharia. O caso de uma mangueira contra incêndio, com alta taxa de descarrega, o bombeiro civil precisa segurá-la com firmeza para neutralizar as amplitudes das oscilações (movimentos serpenteais) induzidas pelo escoamento interno. Na engenharia mecânica, civil, aeronáutica, naval e até biomédica, soluções tecnológicas são propostas e projetadas para lidar com o problema de vibrações induzidas pelo escoamento interno monofásico ou multifásico.

Estruturas tubulares são frequentemente usadas para transportar fluidos, na maioria das vezes em altas velocidades. Se a velocidade é suficientemente alta podem causar movimentos oscilatórios que acabaram desestabilizando e danificando a estrutura. Apresenta-se na Figura 1.1 algumas aplicações onde ocorre a interação do fluido com a estrutura.

A Figura 1.1 mostra diversas aplicações de estruturas tubulares: (a) na indústria petrolífera, no processo de recuperação secundária, para a injeção controlada de fluidos (por exemplo água, gás ou dióxido de carbono) com elevadas vazões volumétricas; (b) na indústria offshore de extração de petróleo e gás em águas ultra profundas; (c) na indústria automobilística para a injeção de combustível no motor de combustão interna, onde gera-se um jato do combustível de alta velocidade, nota-se a robustez do injetor que permite diminuir as vibrações induzidas pelo escoamento em altas velocidades; (d) em aviões cisternas com capacidade de reabastecer de combustível a outras aeronaves menores e com altas vazões de até 4.500 litros por minuto, através de um tubo rígido ou flexível, em uma manobra que envolve risco à tripulação.

Figura 1.1 – (a) Injeção de fluido em poços de petróleo. (b) Injeção de fluido em poços de petróleo em águas ultra profundas. (c) Injeção de combustível em alta velocidade em um motor de combustão interna. (d) Reabastecimento de combustível de aeronaves em voo.



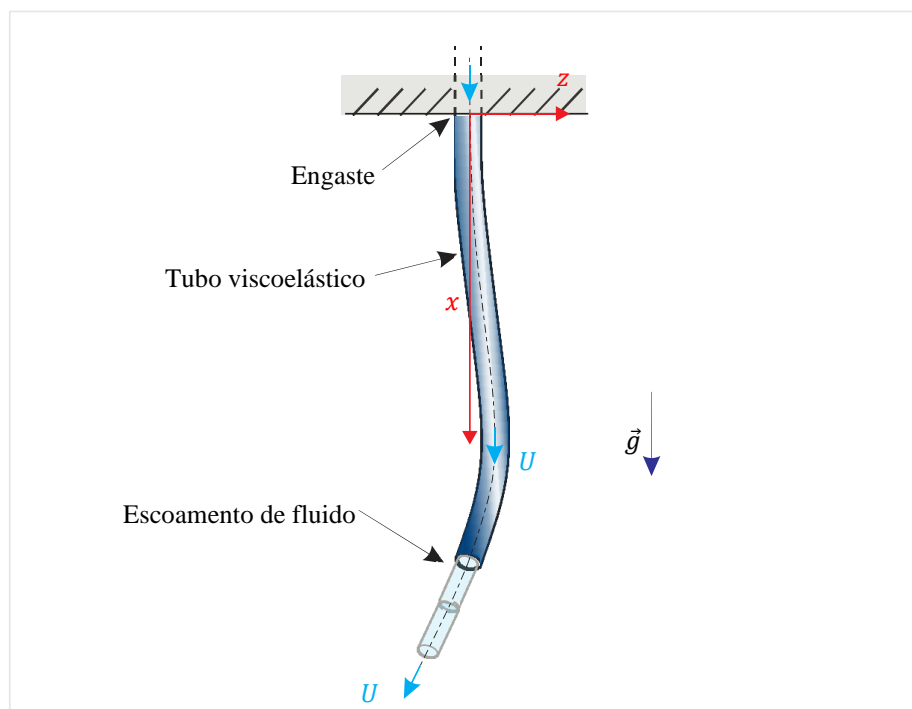
Fonte: (a) <http://bit.ly/3Z9cCXi> (b) <http://bit.ly/3JEDetw> (c) bit.ly/3TFx00N (d) bit.ly/3JEEqwW

Novos materiais modernos, como ligas de aço, polímeros de alto desempenho, materiais cerâmicos avançados e materiais compósitos, apresentam menor peso e maior ou igual resistência que os materiais convencionais são de comportamento viscoelástico e são amplamente utilizados na fabricação de tubos de engenharia devido à sua durabilidade e

manobrabilidade. No entanto, tubos verticais que descarregam fluidos com essas características fazem parte de sistemas complexos e, quando submetidos a condições extremas, apresentam um alto risco de falhas. Essas falhas podem levar à paralisação da operação, perdas econômicas e riscos à vida humana. É, portanto, necessário compreender as características vibratórias desses tubos que transportam fluido interno em altas velocidades.

Nesse contexto, o presente trabalho de mestrado aborda numericamente o estudo da estabilidade e comportamento dinâmico de um sistema não conservativo, composto por um tubo flexível fixado verticalmente no topo e livre na extremidade inferior, feito de material viscoelástico, que descarrega um fluido interno monofásico, como mostra-se na Figura 1.2. Esse sistema é não conservativo porque o escoamento atua como uma fonte infinita de energia.

Figura 1.2 – Modelo simplificado do problema a ser estudado



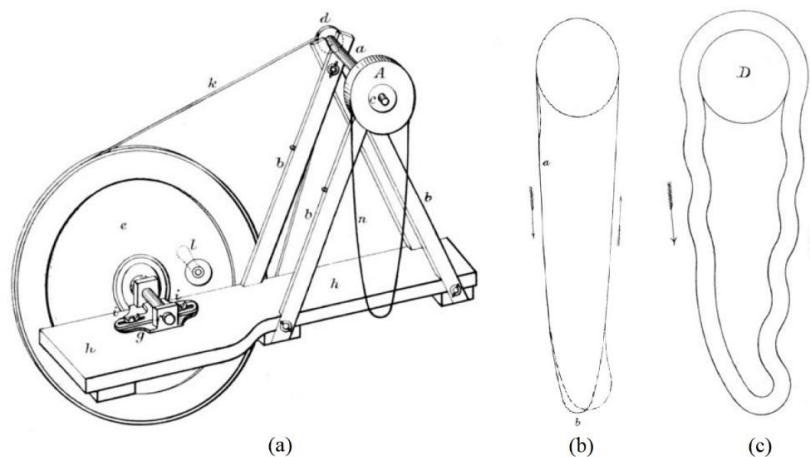
O tubo viscoelástico é visto como uma estrutura longa com diâmetro bem menor que seu comprimento. O material do tubo está sujeito a uma dissipação interna do tipo Kelvin-Voigt. O escoamento interno é incompressível e monofásico, com velocidade uniforme. Considera-se o efeito da gravidade na estabilidade do sistema. O tubo é submetido a pequenos deslocamentos e deformações de forma que a teoria de vigas de Euler-Bernoulli é usada.

1.2 Revisão bibliográfica

Tentando preencher melhor o conhecimento da força centrípeta, Aitken (1878) realizou uma série de experimentos usando cordas impulsionadas por um sistema de polias, ver Figura 1.3 (a). Os experimentos foram realizados com o objetivo de acrescentar o conhecimento sobre a força centrífuga e não limitar sua ação em relação ao centro de rotação, embora que o termo centrípeta significa “voar desde o centro”. A Figura 1.3 (b) mostra o estado inicial da corda impulsionada pela polia, na parte inferior há uma leve assimetria devido a uma pequena diferença das tensões na corda, deslocando o centro de rotação inferior levemente para um lado.

Na Figura 1.3 (c) mostra-se a mesma corda inicialmente em movimento imediatamente após ser perturbada na sua parte livre, adotando uma nova configuração ondulada, no entanto na parte inferior esquerda há um trecho da corda que não se ondula nem se deforma sendo mais rígida, concluindo-se que a força centrípeta tem um efeito sobre a rigidez da corda. Os resultados experimentais mostram o equilíbrio entre a força de tração induzida pelo movimento e as forças centrífugas no sistema. Aitken apresentou uma expressão matematicamente que mostre a relação da rigidez com a força centrípeta.

Figura 1.3 – (a) Sistema de impulso (b) forma assimétrica que adota a corda produto da direção de rotação (c) forma adota a corda depois de ser aplicado uma força no extremo inferior.

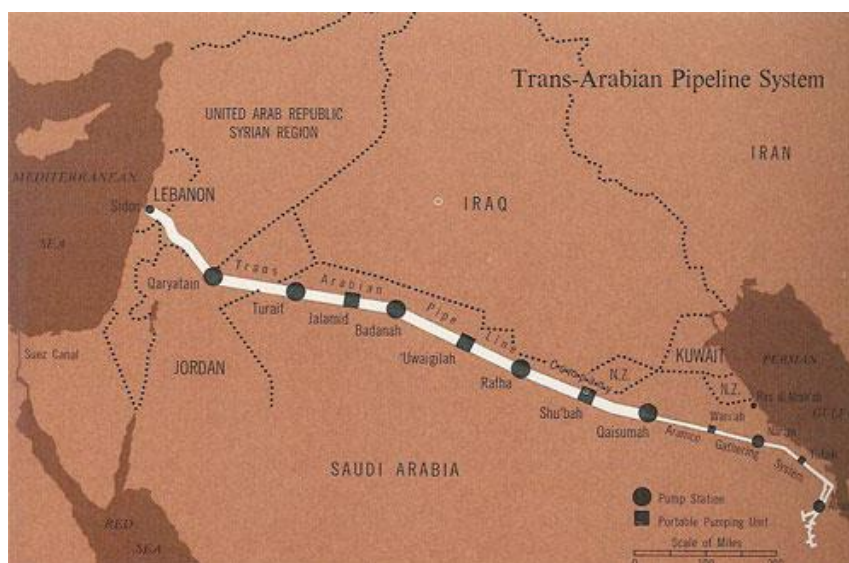


Fonte: Aitken (1878)

Bourrières (1939) realizou o primeiro estudo sobre a dinâmica de tubos com escoamento fluido, determinando a maioria das características do fenômeno e obteve notáveis conclusões sobre sua estabilidade. Ele determinou a equação diferencial de movimento corretamente e seu trabalho foi publicado próximo à segunda guerra mundial e desafortunadamente perdido, passando despercebido nas décadas seguintes. O trabalho de Bourrières foi redescoberto duas décadas depois em um seminário na França em 1973 pelo professor A. Fortier na universidade de Paris.

Ashley e Haviland (1950) estudaram as vibrações livres da *tubulação transarábica*, também conhecida como “*Tapiline*” nos anos 50, que naquela época foi a tubulação mais longa do mundo com 1.648 quilômetros que começa em Abqaiq no Golfo Pérsico e se estende até o porto de Sidón no mediterrâneo do Líbano (ver Figura 1.4). dita tubulação de transporte de fluido foi submetida a vibrações induzidas por rajadas de ventos. As vibrações observadas foram de pequena amplitude com tendência a amortecer-se. Eles suspeitaram da presença de um fator que amortece as vibrações e propuseram sua relação com a força de cisalhamento perpendicular as paredes do tubo produzida pelo escoamento interno, atuando como uma força amortecedora. Os resultados foram limitados a mostrar uma diminuição das frequências naturais com o aumento da força de cisalhamento.

Figura 1.4 – Tapiline - Tubulação transarábica.



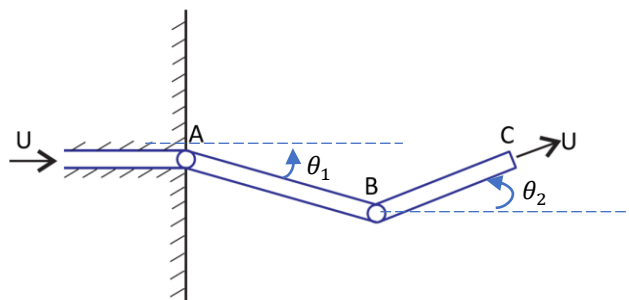
Fonte: <https://www.aramcoexpats.com/articles/dear-folks-chapter-10/>

Feodos'ev (1951), Housner (1952) e Niordson (1953) estudaram na mesma época pela primeira vez a dinâmica de tubos simplesmente apoiados com escoamento, deduzindo a equação linear de movimento de distintas formas e chegando a conclusões similares. Feodos'ev (1951) e Housner (1952) usaram o método de Galerkin para obter as frequências do sistema variando a velocidade do fluido interno. Niordson (1953) publica o livro “*Vibration of a cylindrical tube containing flowing fluid*”, onde de forma elegante e geral em relação às pesquisas anteriores, desenvolve a equação de movimento de tubos simplesmente apoiados com fluido interno.

Long (1955) e Dodds et al. (1965) conduziram os primeiros estudos experimentais de dinâmica de tubos com escoamento interno visando a avaliação de flambagem para velocidades acima da velocidade crítica. Eles observaram a diminuição das frequências com o incremento da velocidade do fluido. Tais pesquisas experimentais desprezaram os efeitos da pressurização do fluido na descarga. Long (1955) realizou experimentos com tubos de aço simplesmente suportados em onde um extremo foi fixo por uma abraçadeira e o outro extremo repousou sobre rodilhos, considerando baixas velocidades de fluido devido às limitações tecnológicas da época.

Benjamin (1961a) estudou analiticamente, pela primeira vez, a estabilidade de dois tubos rígidos articulados, como mostra a Figura 1.5. Ele calculou as frequências do sistema, números complexos, em função da velocidade do fluido e as apresentou no diagrama de Argand. A equação de movimento foi obtida usando corretamente o princípio de Hamilton, considerando um sistema aberto, no sentido que o escoamento interno de vazão constante entra e sai pelo tubo. O sistema não é conservativo, pelo fato de que o escoamento interno é uma fonte de energia infinita que transfere parte desta ao tubo.

Figura 1.5 – Sistema de dois graus de liberdade



Benjamin (1961 b), também estudou experimentalmente um sistema de três tubos rígidos articulados, ou seja, com três graus de liberdade. Identificou diferentes tipos de instabilidades provocadas pelo escoamento interno. Observou flambagem para o sistema disposta na vertical e flutter para sistema na horizontal. Ele concluiu que em um sistema composto de um número considerável de tubos articulados, seu comportamento global poderia aproximar-se ao de um tubo contínuo de infinitos graus de liberdade.

Gregory e Païdoussis (1966a) desenvolveram a equação de movimento de um tubo disposto na vertical, engastado no topo e livre no extremo inferior, pelo enfoque Newtoniano. Eles obtiveram as frequências naturais para diferentes velocidades do fluido pelo método de Galerkin, as quais foram plotadas no diagrama de Argand para certos sistemas particulares. Também, apresentaram a curva de velocidades críticas em função da relação de massa. A interpretação física do fenômeno de instabilidade não foi explicada, eles consideraram apenas a relação de massa como característica principal do sistema e não outros parâmetros, tais como os fatores de gravidade e de amortecimento do tubo.

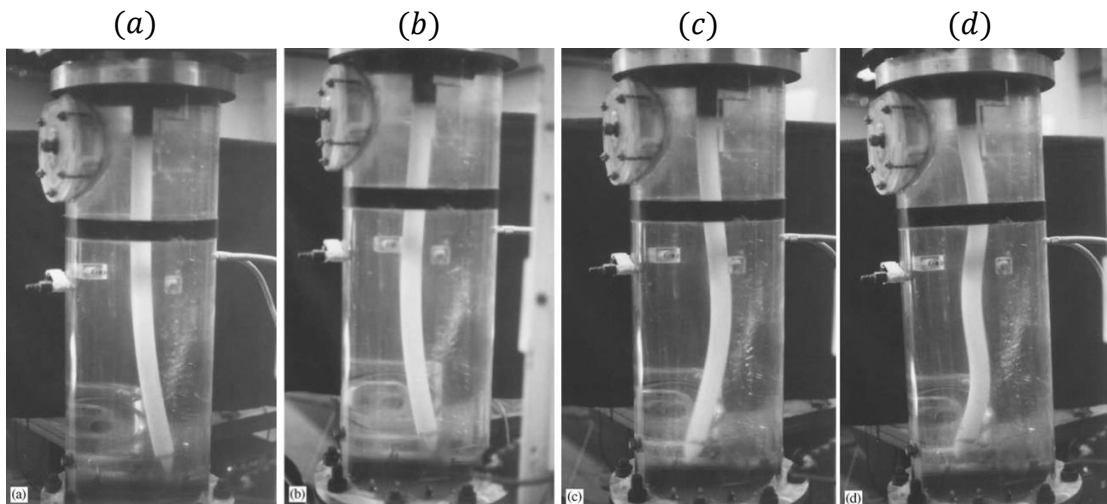
Os mesmos autores, Gregory e Païdoussis (1966b), conduziram estudos experimentais para validar seus resultados teóricos, obtendo-se qualitativamente uma boa coerência. A diferença no resultado quantitativo, deve-se ao material do tubo, o qual era de um polímero com fator de amortecimento não considerado na modelagem matemática.

Païdoussis (1970) estudou o efeito da gravidade na estabilidade de um tubo com escoamento interno, adicionando à equação de movimento um termo distribuído. A pesquisa concluiu que a força de gravidade, para tubos dispostos na vertical, aumenta a velocidade crítica, porém, para um tubo disposto na horizontal, a velocidade diminui.

Païdoussis e Issid (1974) consideraram pela primeira vez na equação de movimento do sistema, a dissipação de energia pelo material viscoelástico do tubo. Eles usaram dois modelos de comportamento de matérias viscoelásticos, Kelvin-Voigt e Histerese. Eles validaram seus resultados teóricos com os obtidos experimentalmente usando tubos poliméricos de comportamento viscoelástico. Porém, não explicam a perda de estabilidade por dissipação de energia.

Païdoussis et al. (2002) observaram experimentalmente a dinâmica de tubos em vertical, engastados em seu topo, feitos de elastômeros com fluido sendo descarregado desde a perspectiva bidimensional como também tridimensional, concluindo que são qualitativamente semelhantes. Seus resultados obtidos a partir da equação linear de movimento do sistema mostraram uma boa concordância com os dados experimentais. A Figura 1.6 mostram fotografias instantâneas dos tubos experimentando os fenômenos de flambagem e flutter.

Figura 1.6 – Tubo flexível na vertical: (a) flambagem (b) flambagem com velocidade de escoamento relativamente alta (c) flutter perto da velocidade crítica (d) flutter no seu terceiro modo.



Fonte: Païdoussis et al. (2002).

O problema de um tubo engastado em seu topo e descarregando fluido interno tornou-se um paradoxo da dinâmica estrutural, similar ao problema de uma coluna submetida a uma força axial de compressão, conhecido como o problema de Beck ou paradoxo de Nicolai estudado por Ziegler (1968), Herrmann and Nemat-Nasser (1967), Nemat-Nasser et al. (1966), Herrmann (1967), que as mesmas características essenciais da força de compressão do problema em estudo. Païdoussis e Li (1993) abordaram este problema em analogia com a coluna de Beck.

Em dinâmica existe uma categoria fascinante de sistemas mecânicos com comportamento paradoxais, Crandall (1995), sistemas que na sua configuração inicial representados por modelos de comportamento elástico sem amortecimento sempre são estáveis, porém tornam-se instáveis ao introduzir no modelo um mínima contribuição de amortecimento. O paradoxo surge ao saber que em geral as forças de amortecimento absorvem energia, mas pode acontecer que

existem outras forças que permaneçam inativas até a introdução de amortecimento. A força de amortecimento atua imperfeitamente na dissipação de energia e em certas condições até podem fornecer energia ao sistema.

Semler et al. (1998) estudaram a perda de estabilidade de um tubo na vertical descarregando fluido interno, a qual foi produzida por um pequeno amortecimento associado ao material do tubo. Explicaram os saltos na curva de estabilidade que foram produzidos pelo incremento do número de coordenadas generalizadas e suprimidos com o incremento do fator de amortecimento. Analisaram desde uma perspectiva física o impacto do fator de dissipação viscoelástica de Kelvin-Voigt.

A solução da equação de movimento de um tubo que transporta fluido interno permitiu desenvolver novos métodos e técnicas numéricas a fim de melhorar a eficiência computacional. O método de elementos finitos foi usado por Edelstein et al. (1986), Sällström, J.H. e Åkesson (1990), Stangl et al. (2009), entre outros. Outras técnicas mais são: o método de transformação diferencial (MTD) aplicado por Ni et al. (2011), método de densidade espectral e variância da resposta dinâmica por Sazesh and Shams (2019).

1.3 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho de mestrado é conduzir um estudo de vibrações livres e analisar a estabilidade dinâmica de um tubo viscoelástico disposto na vertical, engastado em seu topo e livre no extremo inferior, descarregando fluido interno. Tubos viscoelásticos tem sido usados como nova alternativa para dissipar as vibrações, portanto, considera-se na modelagem matemática o fator dissipativo do tubo viscoelástico, para isso adotou o modelo de dissipação viscoelástica de Kelvin-Voigt.

Seguem os objetivos específicos.

1. Revisão da demonstração em detalhe da equação de movimento pela abordagem newtoniana, a partir do equilíbrio dos elementos de tubo e do fluido interno, discretização pelo método de Galerkin e implementação de código computacional para sua solução numérica.

2. Determinação das velocidades crítica de descarga, identificação do tipo de instabilidade, realizar um estudo de sensibilidade dos parâmetros estruturais e o efeito na estabilidade do sistema.
3. Determinação da resposta dinâmica do tubo para casos particulares de interesse, a partir da solução da equação de movimento pela técnica da transformada de Laplace.

1.4 Estrutura da dissertação

O trabalho está organizado da seguinte forma.

No Capítulo 1 apresenta-se a introdução deste trabalho onde contextualiza-se sua motivação e justificativa e definem-se os objetivos da pesquisa. Realiza-se a revisão bibliográfica das pesquisas científicas relevantes relacionadas ao tema enfocando o fenômeno de perda de estabilidade por dissipação de energia.

No Capítulo 2 apresentam-se os conceitos matemáticos e físicos necessários para a abordagem do problema. São introduzidos o modelo viscoelástico de Kelvin Voigt, a técnica de solução de equações diferenciais pelo método de Galerkin, os modos fundamentais de vibração livre da viga engastada-livre de acordo com a teoria de Euler-Bernoulli, a declaração de estabilidade de Païdoussis e, finalmente, a análise das frequências usando o diagrama de Argand e os tipos de instabilidade.

No Capítulo 3 desenvolvem-se a equação de movimento pela abordagem Newtoniana.

No Capítulo 4 se traz a adimensionalização da equação de movimento introduzindo os parâmetros adimensionais de velocidade, viscoelasticidade, gravidade e viscosidade do meio externo. Em seguida, a equação é discretizada pelo método de Galerkin, obtendo-se um conjunto de equações diferenciais que descrevem o comportamento do tubo, as quais são expressas na forma matricial. Explica-se a obtenção das frequências naturais a partir da solução da equação característica do sistema.

No Capítulo 5, são apresentados os resultados obtidos a partir da reprodução de artigos científicos, partindo do caso mais simples e gradualmente adicionando a complexidade do

modelo teórico. Esses resultados são apresentados por meio de um diagrama de Argand, uma curva que relaciona as velocidades críticas com o parâmetro de massa, além de um estudo de sensibilidade dos parâmetros de viscoelasticidade, gravidade e viscosidade do meio externo em relação à velocidade crítica.

No Capítulo 6, apresentam-se os resultados do estudo dinâmico do sistema e as configurações que adota o tubo para certos casos específicos.

Finalmente no Capítulo 7, são dadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Conceitos fundamentais

Em este capítulo apresenta-se uma recompilação de conceitos fundamentais necessários para o desenvolvimento deste trabalho de mestrado. Definem-se a viscoelasticidade e o modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt, o método de Galerkin e, finalmente, abordam-se a estabilidade de sistemas dinâmicos, tipos de instabilidade em concordância com solução proposta por Païdoussis.

2.1 Viscoelasticidade

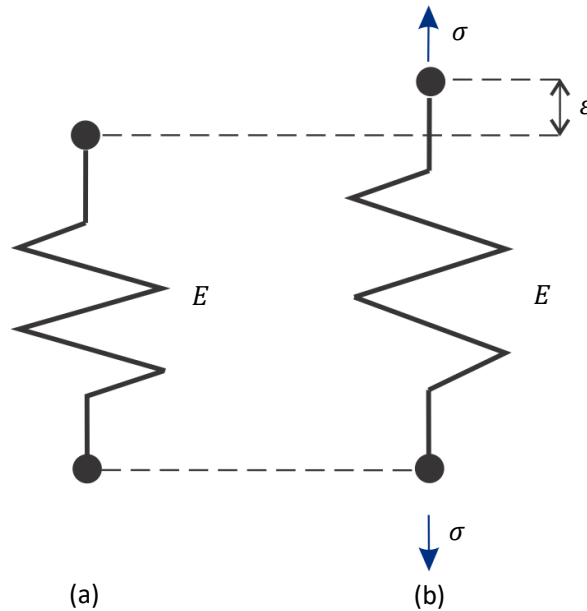
A viscoelasticidade é a característica intermediária dos materiais, situada entre os comportamentos perfeitamente elástico e perfeitamente viscoso quando são deformados. A característica mais importante dos materiais viscoelásticos é sua dependência no temporal das propriedades físicas, a deformação desses materiais não depende apenas da magnitude da tensão aplicada, também da taxa temporal com que a tensão é aplicada.

Os polímeros e metais suaves (por exemplo, o chumbo) possuem alta capacidade de amortecimento e de dissipação de energia de deformação, propriedades físicas que são aproveitadas para amortecer as vibrações.

2.2 Mola elástica e amortecedor viscoso

A Figura 2.1 mostra uma mola elástica, onde ε é a deformação, E o módulo de elasticidade e σ a tensão aplicada.

Figura 2.1 – Representação esquemática do elemento mola-elástica (a) sem deformar (b) deformada.



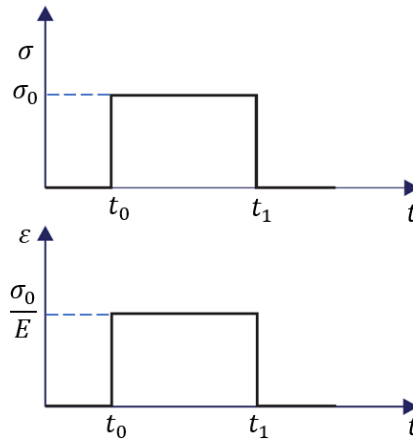
Fonte: Elaboração do próprio autor

Quando uma tensão é aplicada à mola, esta imediatamente se deforma. Se a tensão é removida, a mola recupera imediatamente seu comprimento inicial. O comportamento mecânico da mola elástica é definido pela lei de Hooke,

$$\sigma = \varepsilon E \quad (2.1)$$

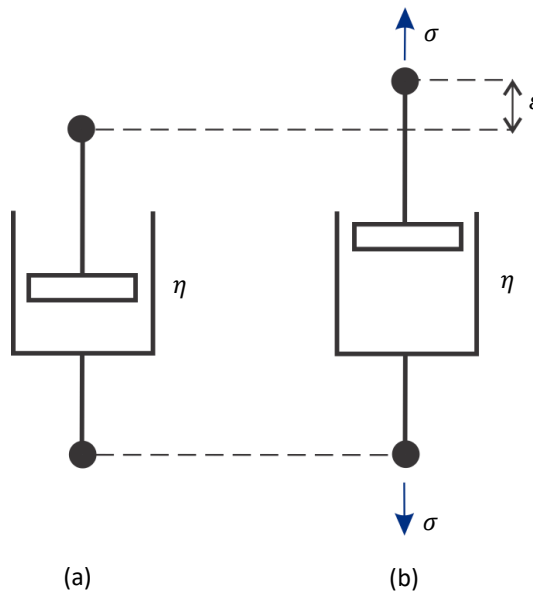
Como mostra-se na Figura 2.2, ao aplicar um degrau de tensão σ_0 no intervalo de t_0 a t_1 produz um degrau de deformação nesse intervalo, proporcional à tensão aplicada. A deformação elástica não é permanente, portanto, a mola elástica retorna à sua configuração inicial imediatamente após a tensão em t_1 ser removida.

Figura 2.2 – Curva característica de fluência da mola elástica.



Segue a definição do amortecedor viscoso o qual é mostrado na Figura 2.3. A deformação é dependente do tempo e sua configuração inicial não é reversível ou recuperável.

Figura 2.3 – Representação esquemática do elemento amortecedor viscoso: (a) sem deformar (b) deformado.



Fonte: Elaboração do próprio autor

A tensão aplicada no amortecedor é proporcional à taxa de deformação de acordo com a lei de viscosidade de Newton,

$$\sigma = \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (2.2)$$

onde,

σ : tensão aplicada,

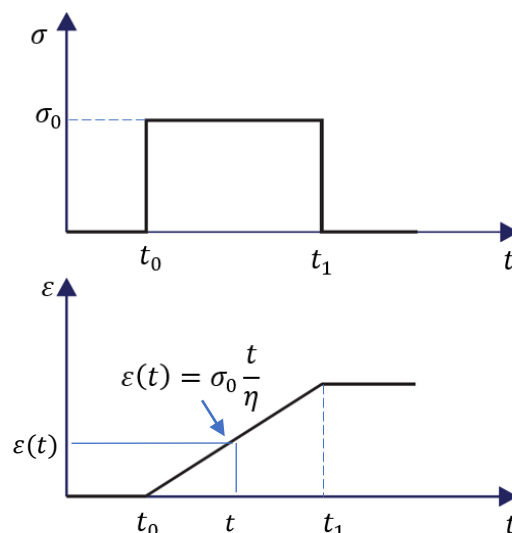
η : viscosidade Newtoniana,

t : tempo,

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$: velocidade (ou taxa) de deformação.

A curva característica de fluência é mostrada na Figura 2.4 para este amortecedor. Aplica-se um degrau de tensão σ no intervalo de t_0 até t_1 , produzindo uma variação da deformação ao longo do tempo. Conforme observa-se, o amortecedor não se deforma de imediato, ao aplicar a tensão, se deforma com crescimento linear e, quando a tensão é removida, a deformação permanece por um longo período.

Figura 2.4 – Curva característica de fluência do amortecedor.



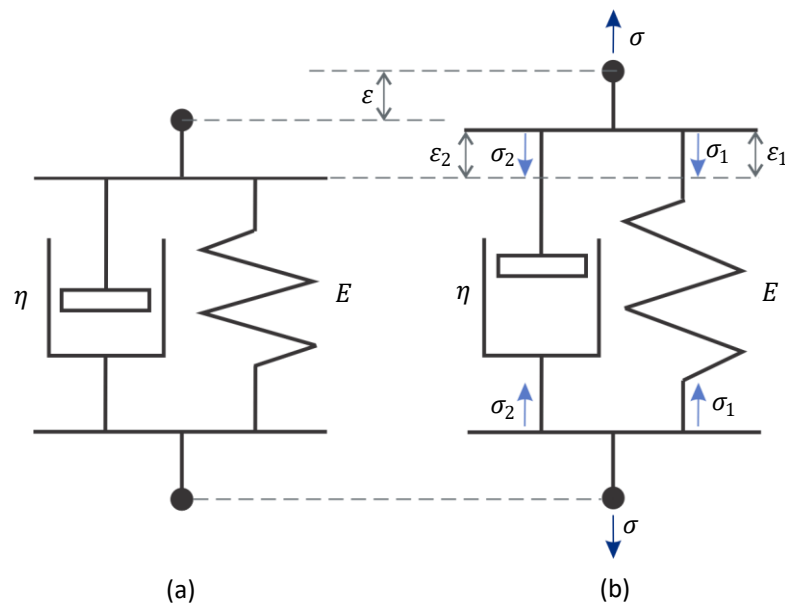
Fonte: Elaboração do próprio autor

A deformação $\varepsilon(t)$, Figura 2.4, é obtida integrando a Equação (2.2).

2.3 Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt

O modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt é usado frequentemente para descrever o comportamento de materiais viscoelásticos, tais como polímeros e borrachas, sob ação de tensões uniaxiais. Esse modelo é representado pela associação em paralelo de um amortecedor viscoso e uma mola elástica, como mostra-se na Figura 2.5. Usado amplamente em estudos de mecânica dos materiais e dinâmica estrutural, como é o caso de tubos viscoelásticos. Ele é usado para representar um material que sofre deformação viscoelástica parcialmente reversível, ou seja, o material retorna parcialmente à sua forma original após a força de tensão ser removida. Segue a definição das quantidades envolvidas,

Figura 2.5 – Modelo de Kelvin Voigt: (a) sem deformar (b) deformado.



Fonte: Elaboração do próprio autor

- σ_1 : tensão do elemento elástico,
- σ_2 : tensão do elemento viscoso,
- ϵ_1 : deformação do elemento elástico,
- ϵ_2 : deformação do elemento viscoso,
- E : módulo de Young,
- η : viscosidade Newtoniana.

O elemento elástico da Figura 2.5, segue a lei de Hooke, que estabelece a proporcionalidade entre a tensão aplicada e a deformação,

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 \quad (2.3)$$

O elemento viscoso da Figura 2.5 obedece a lei de viscosidade de Newton, que estabelece a proporcionalidade entre a tensão aplicada e a velocidade da deformação,

$$\sigma_2 = \eta \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} \quad (2.4)$$

e como tais elementos estão montados em paralelo, apresentam iguais deformações, portanto,

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (2.5)$$

Tem-se que, as tensões desses elementos mecânicos são aditivas,

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (2.6)$$

Substituindo as Equações (2.4) e (2.5) na Equação (2.6), resulta a expressão geral do modelo de Kelvin-Voigt,

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (2.7)$$

Para um material elástico a tensão aplicada está dada por $\sigma = E\varepsilon$; embora, para materiais viscoelástico é dada pela Equação (2.7), que adiciona o diferencial $\eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ devido ao comportamento dissipativo do material viscoelástico. Portanto, matérias viscoelásticos têm um módulo de viscoelasticidade próprio, que captura o comportamento elástico e viscoso. O módulo viscoelásticos equivalente, E' , é ditado pela aproximação feita por Stoker (1968) e Ward e Hadley (1995):

$$E' \rightarrow E + E^* \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.8)$$

onde E é o módulo de elasticidade, E^* a constante de viscoelástica de Kelvin-Voigt que representa a taxa de dissipação da energia do material viscoelástico, em conjunto, o “módulo de viscoelasticidade” equivalente, Equação (2.8), permite modelar corretamente o comportamento de matérias viscoelástico ao serem desformados.

2.4 Método de Galerkin

O método de Galerkin é um caso particular do método de resíduos ponderados, que consiste em assumir uma solução próxima à solução exata para resolver uma equação diferencial.

Em geral, a equação diferencial de um problema físico no domínio V é dada por,

$$Du - f = 0 \quad (2.9)$$

onde $D[]$ é um operador diferencial, $u = u(x)$ a variável dependente e f uma fonte de excitação externa. Considera-se uma solução aproximada \tilde{u} que satisfaça as condições de contorno do problema.

Substituindo \tilde{u} na Equação (2.9) gera-se um resíduo $R(\tilde{u})$, no domínio residual V , em relação à solução exata,

$$D\tilde{u} - f = R(\tilde{u}) \quad (2.10)$$

Em vibrações, a solução da equação de vibração pode ser uma soma funções independentes y ponderadas. Por consequência, \tilde{u} pode ser uma combinação de N funções independentes,

$$\tilde{u} = q_1\phi_1(x) + q_2\phi_2(x) + \dots + q_i\phi_i(x) + \dots + q_N\phi_N(x) \quad (2.11)$$

ou,

$$\tilde{u} = [\phi_1(x) \ \phi_2(x) \ \dots \ \phi_N(x)] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

onde $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, ..., $\phi_N(x)$ são os modos normais de vibração e q_1 , q_2 , ..., q_N são coeficiente a serem determinados. A Equação (2.12) é substituída na equação (2.10) e desprezando a força de excitação externa, $f = 0$, obtém-se,

$$D[\phi_1(x) \phi_1(x) \dots q_N] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} = R(\tilde{u}) \quad (2.13)$$

Para determinar os coeficientes da Equação (2.13), o resíduo $R(\tilde{u})$ é multiplicado pelas funções espaciais, sugere-se que sejam funções normais, $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$, e integrado no domínio V , o resultado é igualado a zero Meirovitch (2000), isto é,

$$\int \phi_i R(\tilde{u}) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.14)$$

onde a função ϕ_i desempenha o papel da função de ponderação do método de resíduos ponderados, porém, o método de Galerkin escolhe como funções de ponderação as funções normais, aproveitando que o resíduo é ortogonal às funções normais.

Substituindo a Equação (2.13) na Equação (2.14) e avaliando i desde 1 até N , gera-se o seguinte sistema de equações,

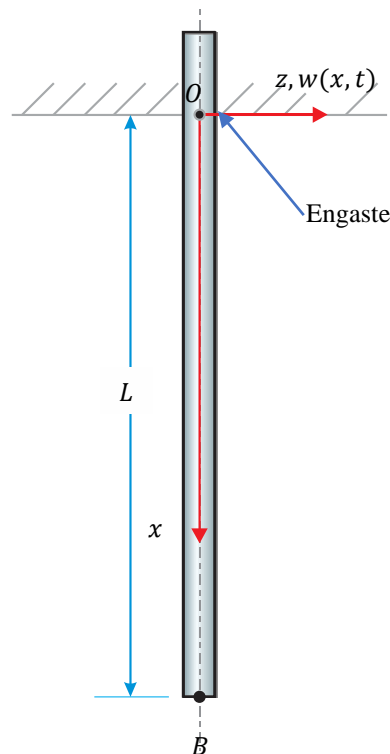
$$\begin{aligned} \int \phi_1 D[\phi_1(x) \phi_1(x) \dots q_N] dx \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} &= 0, \text{ para } i = 1 \\ \int \phi_2 D[\phi_2(x) \phi_2(x) \dots q_N] dx \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} &= 0, \text{ para } i = 2 \\ &\vdots \\ \int \phi_N D[\phi_1(x) \phi_1(x) \dots q_N] dx \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} &= 0, \text{ para } i = N \end{aligned} \quad (2.15)$$

O último sistema de N equações lineares, de incógnitas q_1, q_2, \dots, q_N , é facilmente resolvido.

2.5 Vibração livre de uma viga engastada-livre

A viga de Euler-Bernoulli engastada no topo e livre no extremo inferior mostrada na Figura 2.6, tem comprimento L , rigidez à flexão EI , densidade de material ρ e área de seção transversal constante A .

Figura 2.6– Viga engastada-livre de Euler-Bernoulli



Fonte: Elaboração do próprio autor

A deflexão da viga na posição x e no instante de tempo t é denotada por $w(x, t)$. A equação de vibração livre da viga engastada-livre uniforme, obtida a partir do equilíbrio de forças e momentos de um elemento diferencial de viga, é

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (2.16)$$

A equação (2.16) é uma equação diferencial parcial que pode ser resolvida usando o método de separação de variáveis, considerando a solução da forma,

$$w(x, t) = \phi(x)q(t) \quad (2.17)$$

onde $\phi(x)$ é uma função espacial e $q(t)$ a amplitude dependente do tempo, considerando as condições de contornos da viga, no seu extremo engastado, em $x = 0$, a deflexão e inclinação são iguais a zero,

$$\phi(0) = \phi'(0) = 0, \quad (2.18)$$

e no extremo livre da viga, em $x = L$, a força cisalhamento e momento fletor são iguais a zero,

$$EI\phi'''(L) = EI\phi''(L) = 0 \quad (2.19)$$

O desenvolvimento da equação característica e dos modos normais de vibrar é apresentado no livro de Clough e Penzien (1993).

A equação de frequências é dada por,

$$\cos(\lambda_r L) + \left(\frac{1}{\cosh(\lambda_r L)} \right) = 0 \quad (2.20)$$

a qual é satisfeita para um número infinito de raízes $\lambda_r L$, com $r = 1, 2, \dots, \infty$. Cada valor de $\lambda_r L$ é um autovalor do sistema, chamado de frequência natural.

O r -ésimo modo normal de vibrar da viga engastada-livre, corresponde à r -ésima frequência natural $\lambda_r L$, e é dado por,

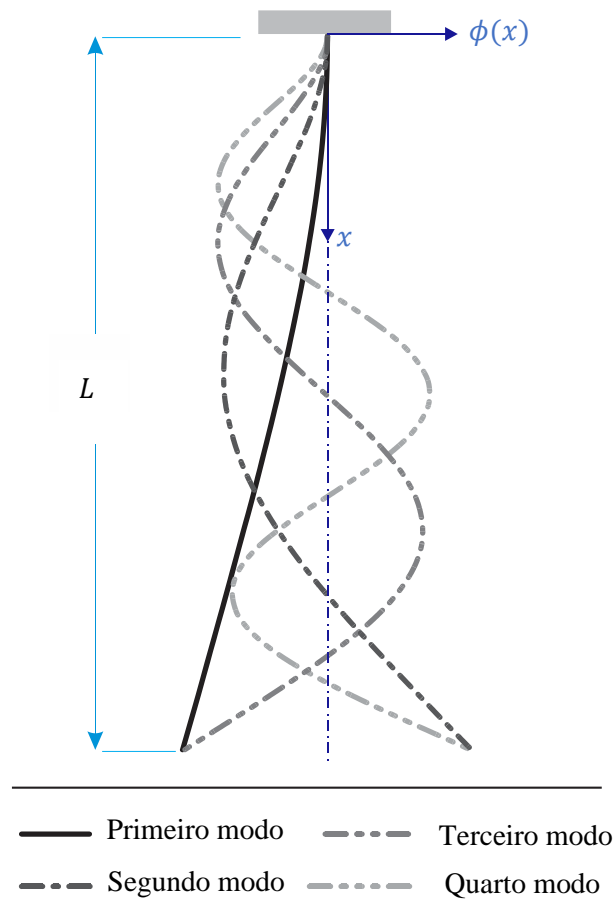
$$\phi_r(x) = A_1 [\cos(\lambda_r L) - \cosh(\lambda_r L) - \sigma_r (\sin(\lambda_r L) - \sinh(\lambda_r L))] \quad (2.21)$$

onde A_1 é uma constante arbitrária e σ_r um coeficiente definido por,

$$\sigma_r = \frac{(\cos(\lambda_r L) + \cosh(\lambda_r L))}{(\sin(\lambda_r L) + \sinh(\lambda_r L))} \quad (2.22)$$

Na Figura 2.7 são apresentados os quatro primeiros modos de vibrar de uma viga engastada-livre.

Figura 2.7 – Modos de vibração livre de uma viga engastada-livre.



Fonte: Elaboração do próprio autor

2.6 Sistema com N graus de liberdade

Sistemas contínuos podem ser aproximados por sistemas discretos com múltiplos graus de liberdade. Um método simples consiste em substituir a massa do sistema contínuo por N massas concentradas ligadas entre si por molas e amortecedores os quais são desprovidos de massa. São necessárias N coordenadas generalizadas dependente do tempo τ para descrever as posições das massas em relação às posições do equilíbrio estático. A análise do sistema requer a solução simultânea de um conjunto de N equações diferenciais ordinárias acopladas de segundo ordem, sem considerar as forças de excitação, podem ser expressas na forma matricial como,

$$[M]\{\ddot{q}(\tau)\} + [C]\{\dot{q}(\tau)\} + [K]\{q(\tau)\} = \{0\} \quad (2.23)$$

onde $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são matrizes quadradas de ordem N denominadas de matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, $\{\ddot{q}(\tau)\}$ e $\{\dot{q}(\tau)\}$ são a segunda e primeira derivada em reação ao tempo do vetor de coordenadas generalizadas, $\{q(\tau)\}$, dado por,

$$\{q(\tau)\} = \begin{Bmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \\ \vdots \\ q_N(\tau) \end{Bmatrix}. \quad (2.24)$$

2.7 Mapa de estabilidade: diagrama de Argand

A equação linear de vibração livre para um sistema com um grau de liberdade e pequenos deslocamentos é dada por,

$$\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad (2.25)$$

onde c e k são parâmetros do sistema e $x(t)$ o deslocamento em relação ao ponto de equilíbrio estático. Para estudar o comportamento do sistema Meirovitch (2000) propõe a solução da Equação (2.25) da forma exponencial,

$$x(t) = Ae^{st} \quad (2.26)$$

onde A é uma constante e s um número complexo a ser determinado. A Equação (2.26) é substituída na Equação (2.25) para obter a equação característica do sistema. As raízes da equação característica são s_1 e s_2 , números complexos conjugados da forma $s_1 = a + ib$ e $s_2 = a - ib$. A resposta $x(t)$ é controlada pelas raízes, a amplitude da oscilação é controlada pela parte real da raiz, $Re(s)$, e a frequência de oscilação pela parte imaginária da raiz $Im(s)$.

As raízes s_1 e s_2 podem ser plotadas no diagrama de Argand, um plano de números complexos, para o estudo de estabilidade do sistema. No diagrama, Figura 2.8 (a), a região de estabilidade é definida em azul claro e a região de instabilidade em amarelo. O sistema será estável se a parte real das raízes são números negativos, ou seja, as raízes estão localizadas na região estável, por conseguinte a resposta oscilatória decairá no tempo. O sistema será instável se a parte real de pelo menos uma raiz for um número positivo, ou seja, se pelo menos uma raiz

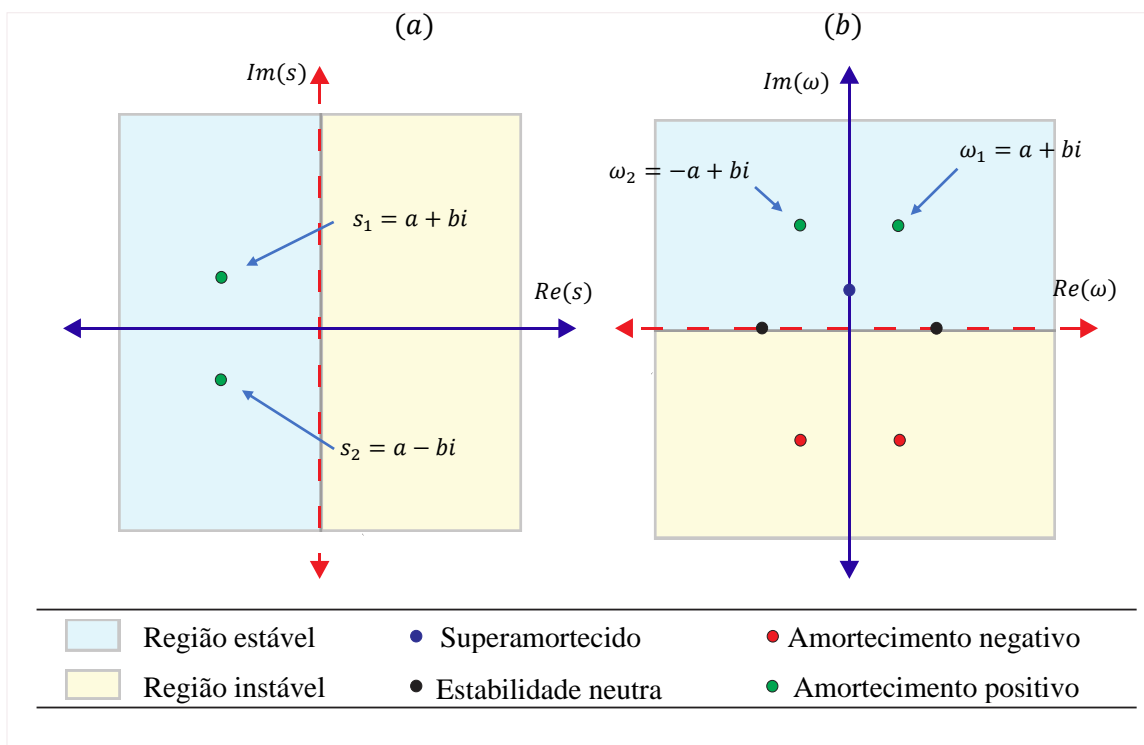
estiver localizada na região de instabilidade, e por conseguinte a amplitude da resposta aumentará a cada ciclo. O sistema terá estabilidade neutra quando tenha uma raiz puramente real, ou seja, uma raiz se localiza na fronteira de estabilidade (eixo das ordenadas) e as outras não se localizem na região de instabilidade, por conseguinte a resposta oscilatória seja permanente. Além disso, é importante notar que o eixo das abscissas no diagrama de Argand, Figura 2.8 (a), age como um espelho para as raízes plotadas.

Païdoussis (1971) a fim de alterar as regiões de estabilidade definidas por Meirovitch (1960) para se ver como na Figura 2.8 (b), assume a solução da forma,

$$x(t) = Ae^{i\omega t}, \tag{2.27}$$

onde $i = \sqrt{-1}$, A é uma constante e ω é um número complexo a ser determinado. Substituindo a Equação (2.27) na Equação (2.25) obtém-se como raízes dois números complexos conjugados opostos, $\omega_1 = a + ib$ e $\omega_2 = -a + ib$. As raízes ω_1 e ω_2 são plotadas no diagrama de Argand, como pontos de cor verde conforme mostrados na Figura 2.8 (b).

Figura 2.8 – Diagrama de estabilidade de Argand, usado por: (a) Meirovitch e (b) Païdoussis



Agora, a amplitude de movimento do sistema é controlada pela parte imaginária da raiz, $Im(\omega)$, e a frequência de oscilação pela parte real, $Re(\omega)$. Essencialmente, a parte imaginária

controla o amortecimento da resposta no tempo. No diagrama de Argand da Figura 2.8 (b), o eixo das ordenadas comporta-se como um espelho para o par de raízes. Portanto, a análise de estabilidade é reduzida à observação das raízes plotadas no primeiro e quarto quadrante.

No presente trabalho de mestrado, a equação de vibração livre do sistema, Equação (2.23), é resolvida assumindo a solução proposta por Païdoussis, Equação (2.27), a fim de obter a equação característica. As raízes da equação característica são as frequências do sistema, e cada par apresenta-se como um par conjugados oposto que define as características da resposta vibratória do sistema. É importante ressaltar que a frequência r -ésima está associada com a r -ésima coordenada generalizada usada para descrever o movimento.

Para sistemas de múltiplos graus de liberdade, a partir da equação característica obtém-se um par de frequências por cada grau de liberdade. As frequências contribuem independentemente com certo grau de amortecimento ao sistema. De acordo com o Figura 2.8b, considerando a e b números positivos, a frequência da forma $\omega = a + bi$ representada pelo ponto verde (\bullet) na região azul clara no primeiro quadrante, contribui com amortecimento positivo; a frequência da forma $\omega = a - bi$, ponto vermelho (\bullet) na região amarela no quarto quadrante, contribui com amortecimento negativo; a frequência puramente real representada pelo ponto preto (\bullet) na fronteira de estabilidade, não contribui com amortecimento; a frequência puramente imaginária, ponto azul (\bullet) no eixo das ordenadas, em conjunto contribuem com superamortecimento.

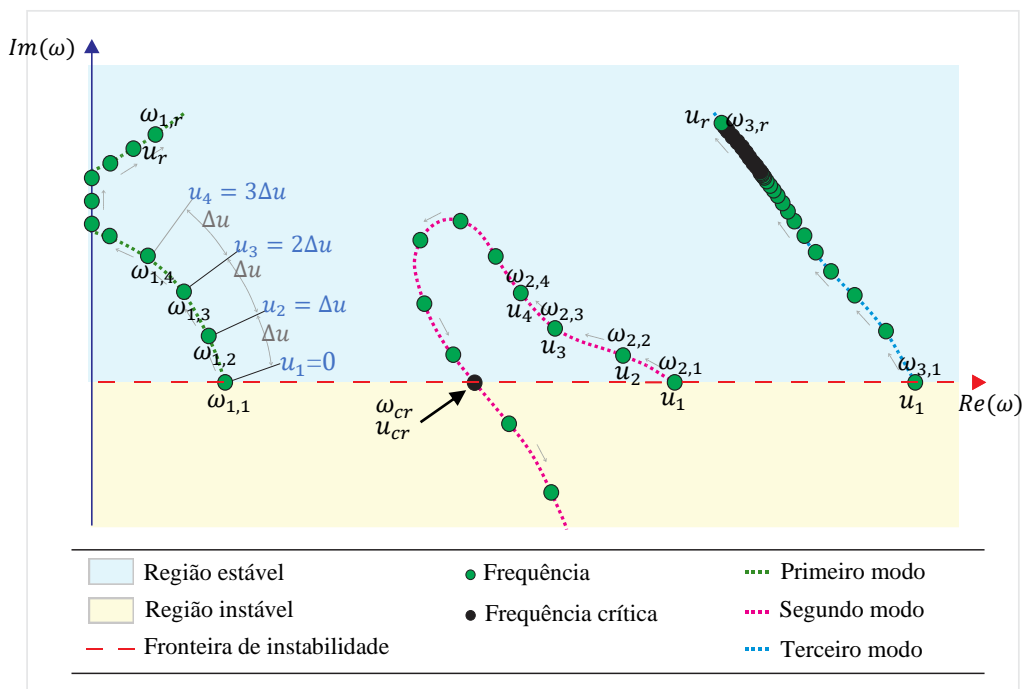
2.8 Análise de estabilidade de sistemas com N graus de liberdade

A equação diferencial da vibração de um tubo descarregando fluido interno, que será desenvolvida no Capítulo 3, é expressa em função da velocidade de descarga u . Tal equação é discretizada pelo método de Galerkin obtendo-se um conjunto de N equações diferenciais acopladas, as quais podem ser expressas na forma matricial, forma padrão da Equação (2.23), usando as matrizes de massa, rigidez e amortecimento. Sua equação característica é determinada usando a solução proposta por Païdoussis, Equação (2.27).

A equação característica do sistema é resolvida para diferentes velocidades de descarga u , as quais aumentam gradativamente com incrementos de velocidade Δu . As velocidades a

serem testadas são $u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_r$, sendo u_i a i -ésima velocidade de teste, calculada como $u_i = u_1 + (i - 1)\Delta u$, com $i = 1, 2, \dots, r$ onde r é o número máximo de velocidades de testes. Para cada velocidade, é obtido um conjunto de frequências ω que são plotadas no diagrama de Argand como pontos, de cor verde como mostra-se na Figura 2.9, para analisar as características vibratórias do sistema.

Figura 2.9 – Diagrama de Argand ou mapa de estabilidade



As frequências plotadas na Figura 2.9 estão agrupadas em três curvas, cada curva de frequências está associada com um modo normal de vibração livre. Na primeira curva de frequências, a primeira frequência é denotada por $\omega_{1,1}$, onde o primeiro subscrito indica o primeiro modo de vibração ou modo fundamental e o segundo a velocidade u_1 . A última frequência é denotada por $\omega_{1,r}$, onde o primeiro subscrito indica o primeiro modo de vibração e o segundo a r -ésima velocidade de teste u_r . Dessa forma, cada curva de frequências contém as frequências associadas a um modo de vibrar para diferentes velocidades, que aumentam gradativamente.

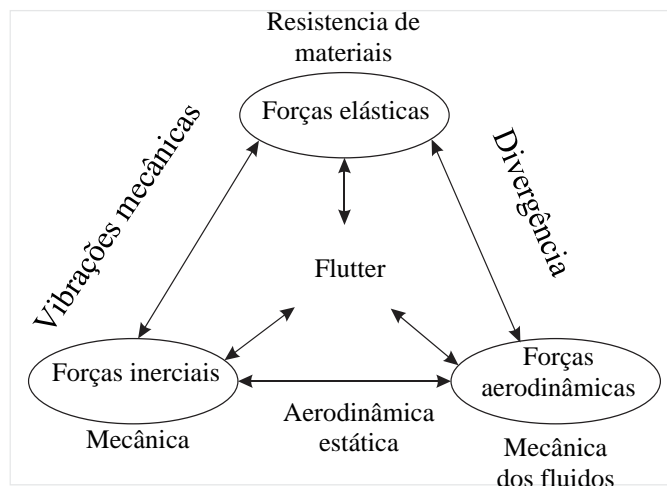
O estudo de estabilidade do sistema analisa as curvas de suas frequências, buscando identificar a partir de qual velocidade a frequência contribui com amortecimento negativo e o

modo associado, no qual o tubo apresenta movimento oscilatório com amplitudes que aumentam a cada ciclo, tornando ao sistema instável. Na Figura 2.9 observa-se que a segunda curva de frequências correspondente ao segundo modo atravessa a fronteira de instabilidade definindo-se a velocidade crítica u_{cr} do sistema e a frequência crítica ω_{cr} . O sistema estável para $u < u_{cr}$ e instável para $u > u_{cr}$.

2.9 Tipos de instabilidade

A aerolasticidade é a ciência que estuda as vibrações induzidas pelo escoamento, seja este interno ou externo, em estruturas flexíveis. As vibrações surgem da interação entre as forças inerciais, elásticas e aerodinâmicas. As estruturas são estáveis se as amplitudes diminuïrem ao longo do tempo até chegar eventualmente ao seu estado de equilíbrio estático. Caso contrário, se a amplitudes das vibrações aumentam ao longo do tempo, ocasionando deformações contínuas até o colapso, a estrutura é instável.

Figura 2.10 – Diagrama de Collar



Fonte: Collar 1946, adaptado.

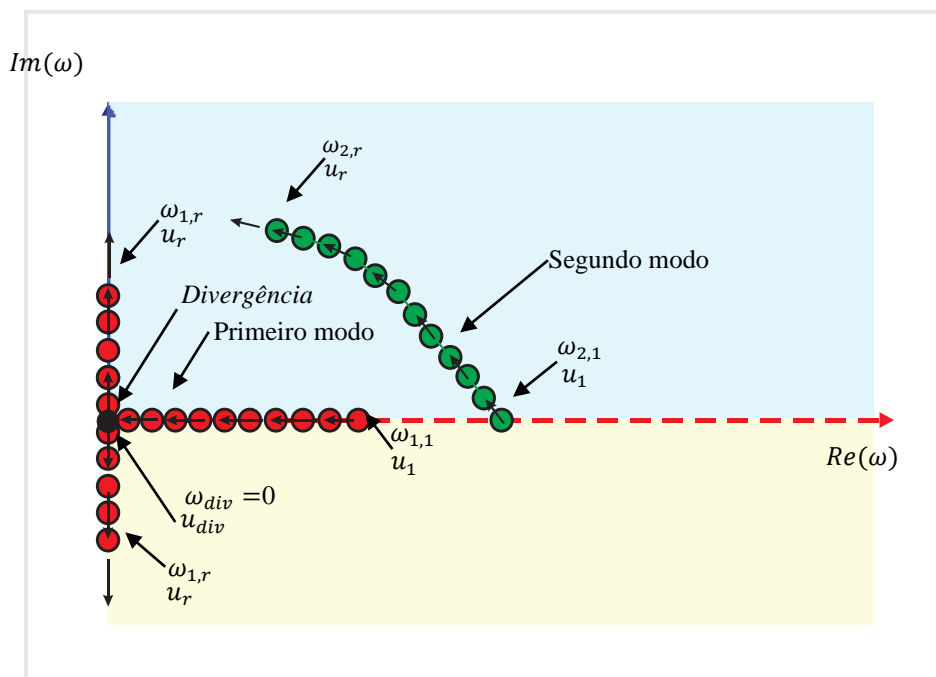
Na Figura 2.10 mostra graficamente a ligação entre as forças inerciais, elásticas e aerodinâmicas, e os fenômenos indesejáveis que ocorrem na estrutura em certas condições críticas: i) a interação entre as forças elásticas e inerciais gera vibrações mecânicas, ii) a interação entre as forças inerciais e forças aerodinâmicas gera aerodinâmica estática, iii) a

interação entre as forças elásticas e aerodinâmicas gera divergência; e iv) a interação entre as três forças de forma simultânea gera flutter.

2.9.1 Divergência

A divergência é um tipo de instabilidade estática, ocasionada pela interação das forças aerodinâmicas e elásticas. Esse fenômeno é observado quando a estrutura sofre um excessivo deslocamento e pode resultar em falha estrutural.

Figura 2.11 – Identificação da divergência no diagrama do Argand



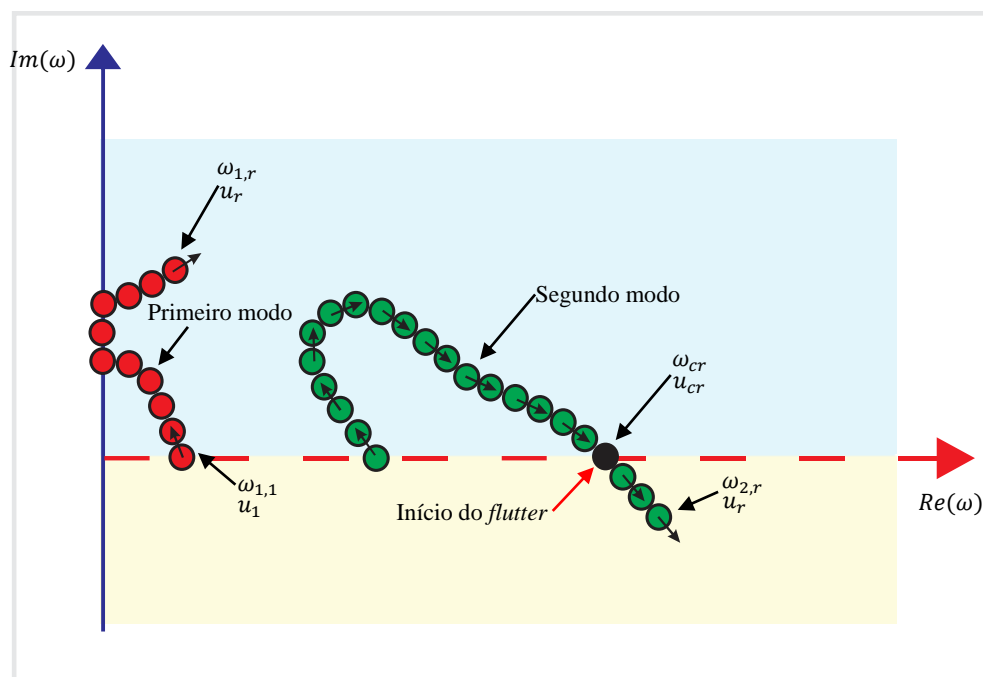
Fonte: Elaboração do próprio autor

De acordo com a Figura 2.11, a curva de frequências associadas ao primeiro modo, representada pela curva em vermelho, mostra que a frequência de oscilação diminui com o aumento da velocidade até chegar a zero. A frequência de divergência, $\omega_{div} = 0$, é representada por um ponto em negrito (•) localizado na origem do sistema de coordenadas, que define a velocidade de divergência $u > u_{div}$.

2.9.2 Flutter

O flutter é um tipo de instabilidade dinâmica, fenômeno vibratório indesejável que apresenta nas estruturas flexíveis em certas condições críticas. Isso ocorre pela interação entre as forças aerodinâmicas, inerciais e elásticas. A estrutura realiza movimentos oscilatórios com amplitudes que aumentam em cada ciclo ao longo do tempo. As oscilações são auto-excitadas e realimentadas pela interação do escoamento com a estrutura. Neste caso, o amortecimento é negativo e funciona como uma fonte de excitação.

Figura 2.12 – Identificação do flutter no diagrama de Argand



Fonte: Elaboração do próprio autor

Observa-se na Figura 2.12 as frequências associadas ao segundo modo, representadas pela curva verde. Com o aumento da velocidade, as frequências aproximam-se à fronteira de estabilidade. A frequência na intersecção entre a curva de frequências e a fronteira de estabilidade é a frequência crítica ω_{cr} corresponde à velocidade crítica u_{cr} , representada por um ponto em negrito (•). Esses valores indicam o início da instabilidade por flutter. Para velocidades acima da velocidade crítica $u > u_{cr}$, o sistema é instável devido à contribuição de amortecimento negativo da frequência associada ao terceiro modo.

Capítulo 3

Modelagem matemática

Neste capítulo, o problema objeto de estudo é descrito e as hipóteses são definidas. A equação de movimento do sistema é desenvolvida pela abordagem Newtoniana, a partir da análise do equilíbrio de forças dos elementos diferenciais do tubo e do fluido.

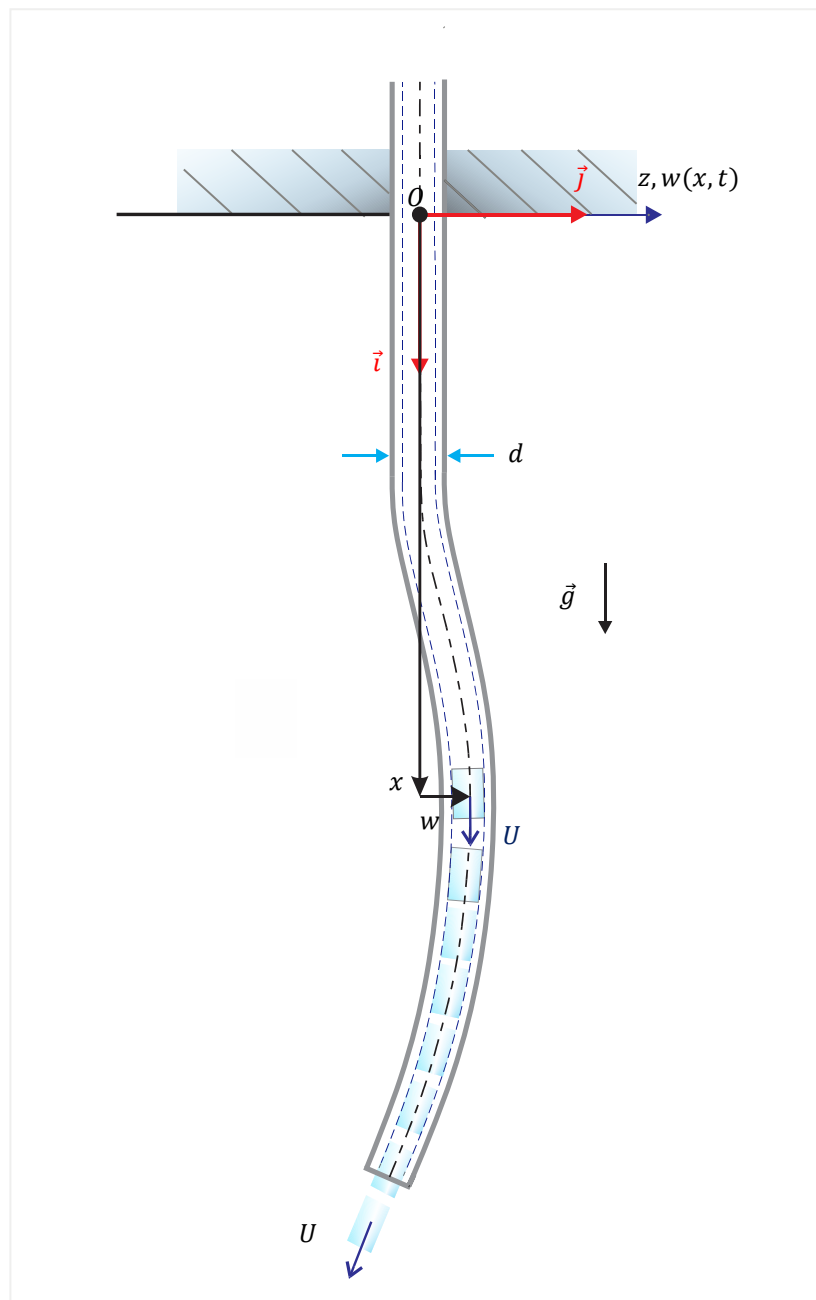
3.1 Definição do problema e hipóteses

O tubo da Figura 3.2 tem comprimento L , diâmetro exterior d , área de secção transversal vazada A , massa por unidade de comprimento m , módulo de elasticidade E , coeficiente de dissipação viscoelástica E^* e momento de inércia de seção transversal constante I . O tubo engastado no topo e livre no extremo inferior, sua deflexão transversal é definida pela variável $w(x, t)$. No interior do tubo escoam um fluido com velocidade axial constante U , densidade ρ , de massa por unidade de comprimento M e pressão interna p .

Consideram-se as seguintes hipóteses.

- O tubo é submetido a pequenos deslocamentos transversais e seu comportamento é descrito pela teoria de vigas de Euler – Bernoulli.
- Não são considerados os deslocamentos axiais, de forma que o tubo é inextensível.
- O tubo é uma estrutura flexível, de parede finas, com diâmetro é muito menor que o comprimento e feito de um material de comportamento viscoelástico.
- O escoamento é uniforme, de regime permanente e incompressível.
- A pressão interna do fluido é devida ao próprio peso e pressão externa é zero.

Figura 3.1 – Representação esquemática do tubo viscoelástico, engastado no topo e descarregando fluido interno.



Fonte: Elaboração do próprio autor

Consideram-se as seguintes hipóteses.

- O tubo é submetido a pequenos deslocamentos transversais e seu comportamento é descrito pela teoria de vigas de Euler – Bernoulli.
- Não são considerados os deslocamentos axiais, de forma que o tubo é inextensível.

- O tubo é uma estrutura flexível, de parede finas, com diâmetro é muito menor que o comprimento e feito de um material de comportamento viscoelástico.
- O escoamento é uniforme, de regime permanente e incompressível.
- A pressão interna do fluido é devida ao próprio peso e pressão externa é zero.

3.2 Curvatura do tubo

A Figura 3.2 mostra um elemento diferencial de tubo em sua configuração defletida. Considerando que s é a coordenada curvilínea, a curvatura $1/\rho$ é dada pela relação da variação da inclinação do tubo θ com a variação da coordenada curvilínea,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}. \quad (3.1)$$

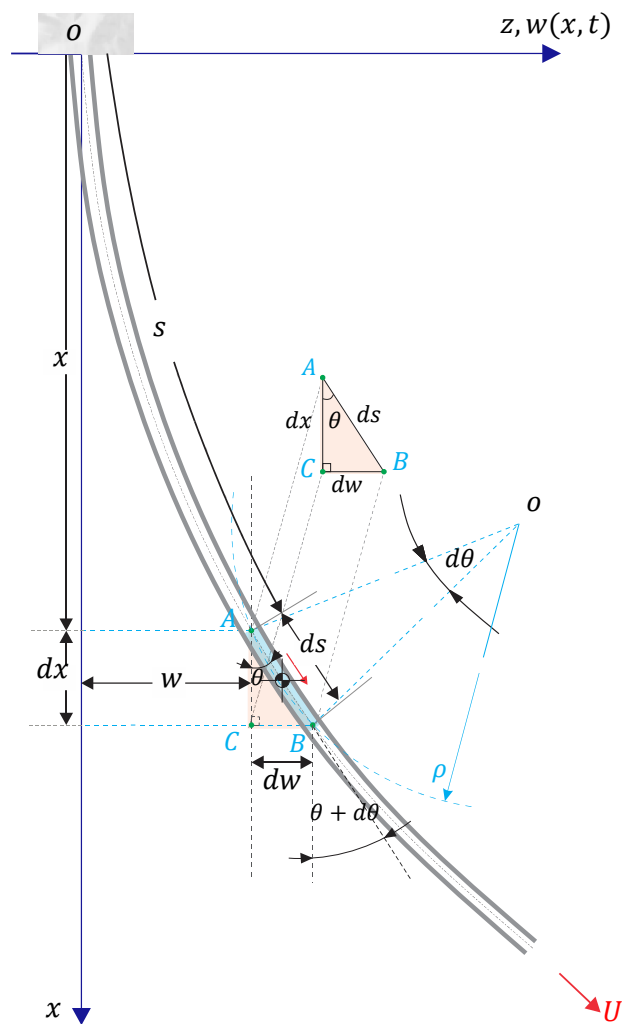
A expressão da curvatura em coordenadas cartesianas é,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (3.2)$$

A rotação θ do tubo é obtida do triângulo ABC da Figura (3.2): $\tan(\theta) = \frac{dw}{dx}$. Como θ é um ângulo muito pequeno, então, $\tan(\theta) \approx \theta$. A Equação (3.2) é simplificada considerando que $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \approx 0$,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3.3)$$

Figura 3.2 – Curva de deflexão do tubo

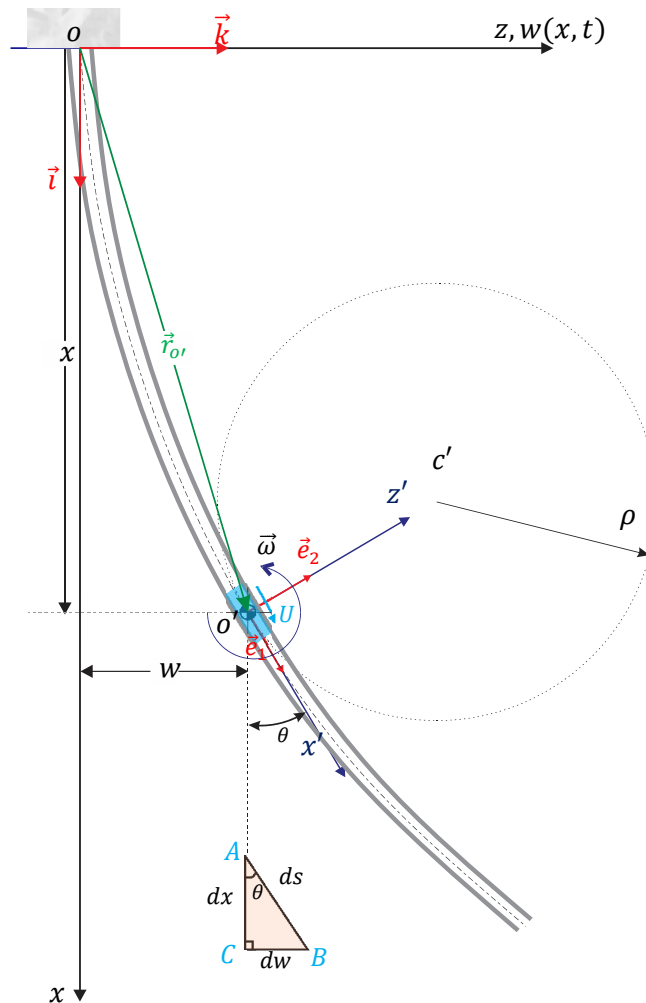


Fonte: Elaboração do próprio autor

3.3 Aceleração absoluta de um elemento de fluido

Nesta seção, define-se a aceleração absoluta de um elemento infinitesimal de fluido movendo-se ao longo do tubo, como se vê na Figura (3.3). O escoamento de fluido é semelhante a pistões escoando no interior de um tubo com velocidade axial constante. Atribui-se um sistema referencial inercial oxz cuja origem coincide com o topo do tubo, e um sistema de referencial móvel $o'x'z'$ fixo ao tubo que se move como corpo rígido. O centro da partícula de fluido no instante de tempo t coincide com a origem do referencial móvel, como mostra-se na Figura (3.3). Sejam os vetores unitários, \vec{i} e \vec{k} , associados ao referencial inercial e, \vec{e}_1 e \vec{e}_2 ao referencial móvel. A posição da partícula de fluido em relação ao referencial inercial, no instante de tempo t é $w(x, z)$

Figura 3.3 – Elemento de fluido no tubo



Fonte: Elaboração do próprio autor

O vetor aceleração absoluta da partícula de fluido \vec{a}_F é, como é descrito em Meriam (1975),

$$\vec{a}_F = \vec{a}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{F/o'} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{F/o'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{F/o'}) + \vec{a}_{F/o'} \quad (3.4)$$

onde,

$\vec{a}_{o'}$: aceleração da origem do referencial móvel $o'x'z'$ em relação ao referencial inercial oxz ,

$\vec{\omega}$: velocidade angular do referencial móvel $o'x'z'$,

$\vec{\omega}$: aceleração angular do referencial móvel $o'x'z'$,

$\vec{V}_{F/o'}$: velocidade do elemento de fluido em relação ao referencial móvel $o'x'z'$,

$\vec{r}_{F/o'}$: vetor posição do elemento de fluido em relação ao referencial móvel $o'x'z'$,

$\vec{a}_{F/o'}$: aceleração do elemento de fluido em relação ao referencial móvel $o'x'z'$.

Na Equação (3.4), o segundo termo é a aceleração tangencial em relação ao referencial móvel, o terceiro termo é a aceleração de Coriolis e o quarto termo a aceleração centrípeta.

No instante de tempo t , o centro do elemento de elemento de fluido coincide com a origem do referencial móvel $o'x'z'$ fixo ao tubo. Portanto, o vetor posição do elemento em relação ao referencial móvel é dado por,

$$\vec{r}_{F/o'} = 0. \quad (3.5)$$

A aceleração linear do referencial móvel $o'x'z'$ é obtida pela segunda derivada da posição da sua origem em relação ao tempo. Assim, temos,

$$\vec{a}_{o'} = \frac{d^2(\vec{r}_{o'})}{dt^2}, \quad (3.6)$$

ou,

$$\vec{a}_{o'} = \frac{d^2(x\vec{i} + w\vec{k})}{dt^2}. \quad (3.7)$$

Como a dinâmica axial do tubo não é considerada, então $\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} = 0$, e,

$$\vec{a}_{o'} = \frac{d^2w}{dt^2}\vec{k}. \quad (3.8)$$

A velocidade do elemento de fluido em relação ao referencial móvel $o'x'z'$ é constante e na direção do vetor unitário tangencial \vec{e}_1 , isto é,

$$\vec{V}_{F/o'} = U\vec{e}_1, \quad (3.9)$$

ou, referido ao sistema inercial de coordenadas,

$$\vec{V}_{F/o'} = U(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{k}). \quad (3.10)$$

A última equação é simplificada considerando que θ é um ângulo pequeno. Portanto, temos que $\sin(\theta) \approx \frac{dw}{dx}$ e $\cos(\theta) \approx 1$, assim a equação pode ser escrita como,

$$\vec{V}_{F/o'} = U\vec{i} + U \frac{dw}{dx} \vec{k}. \quad (3.11)$$

A velocidade angular $\vec{\omega}$ do referencial móvel $o'x'z'$ em torno de um eixo normal ao plano do papel é dada pela taxa de variação temporal do ângulo de rotação do tubo, $\theta = \frac{dw}{dx}$, portanto,

$$\vec{\omega} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{dw}{dx} \right) \vec{j} \quad (3.12)$$

No instante de tempo t na Figura (3.2), o elemento de fluido descreve um movimento circunferencial, e sua aceleração em relação ao referencial móvel $o'x'z'$ é,

$$\vec{a}_{F/o'} = \frac{dU}{dt} \vec{e}_1 + \frac{U^2}{\rho} \vec{e}_2 \quad (3.13)$$

onde \vec{e}_1 e \vec{e}_2 , como foi dito, são os vetores unitários associados ao referencial móvel. Na Equação (3.13) o primeiro termo representa a aceleração tangencial e o segundo termo a aceleração centrípeta. Além, com U é constante, o primeiro termo é cancelado, e o segundo termo pode ser expresso nos vetores unitários \vec{i} e \vec{j} , assim,

$$\vec{a}_{F/o'} = -\frac{U^2}{\rho} \sin(\theta) \vec{i} + \frac{U^2}{\rho} \cos(\theta) \vec{k}. \quad (3.14)$$

Substituindo na última equação o raio de curvatura, Equação (3.3), e as aproximações para pequenos ângulos de rotação θ , $\sin(\theta) \approx \frac{dw}{dx}$ e $\cos(\theta) \approx 1$, obtém-se,

$$\vec{a}_{F/o'} = U^2 \frac{d^2w}{dx^2} \vec{k}. \quad (3.15)$$

Na equação da aceleração absoluta do elemento de fluido, Equação (3.4), o segundo termo pode ser desprezado por ser de ordem superior, derivada da velocidade de rotação, e o quarto termo pode ser negligenciado por ser o produto da velocidade de rotação consigo mesma, que é muito pequena. Substituindo as Equações (3.5), (3.8), (3.11), (3.12) e (3.15) obtém-se,

$$\vec{a}_F = \frac{d^2w}{dx^2} \vec{k} + 2 \frac{dU}{dt} \left(\frac{dw}{dx} \right) \vec{k} + U^2 \frac{d^2w}{dx^2} \vec{k} \quad (3.16)$$

ou,

$$\vec{a}_F = \left(\frac{d}{dt} + U \frac{d}{dx} \right)^2 w \vec{k}. \quad (3.17)$$

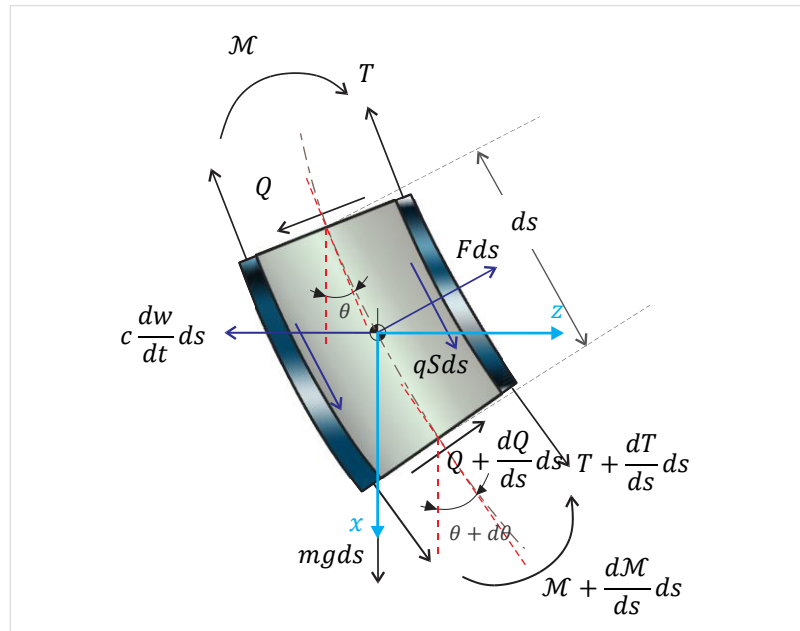
3.4 Equação de diferenças pela abordagem Newtoniana

Considera-se sistema composto de um elemento infinitesimal de tubo que envolve a um elemento de fluido de massa, ambos de comprimento ds . O perímetro interno do tubo é S , a área transversal do fluido A , a massa do tubo e o fluido por unidade de comprimento são, respectivamente, m e M . As análises dos diagramas de corpo livre de tais elementos são apresentados nas Figuras 3.4 e 3.5, respectivamente, por separado.

3.4.1 Elemento infinitesimal de tubo

Mostra-se na Figura (3.4) o diagrama de corpo livre do tubo. As forças que atuam sobre o elemento tubo são: (1) força de reação do fluido no sentido perpendicular à parede interno do tubo, Fds ; (2) força de atrito na superfície de contato entre o tubo e o fluido, $qSdx$, onde q é a constante de atrito; (3) força de tração axial, T ; (4) força de cisalhamento Q através da secção transversal do tubo; (4) momento fletor, \mathcal{M} ; (5) força de gravidade, $mgdx$; (6) força de amortecimento do meio externo, $c \frac{dw}{dt}$, contraria ao movimento transversal, onde c o coeficiente de viscoso do meio externo; e (7) a força de inercial do elemento de tubo $ma_{T_x}ds$ e $ma_{T_z}ds$ nas direções dos eixos x e z , respectivamente, onde a_{T_x} e a_{T_z} são as acelerações do tubo na direção do eixo x e z , respectivamente.

Figura 3.4 – Diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal de tubo.



Fonte: Elaboração do próprio autor

Aplicando a segunda Lei de Newton na direção do eixo z,

$$\begin{aligned}
 -T \sin(\theta) + \left(T + \frac{dT}{ds} ds\right) \sin(\theta + d\theta) + F ds \cos(\theta) + q S ds \cos(\theta) - Q \cos(\theta) \\
 + \left(Q + \frac{dQ}{ds} ds\right) \cos(\theta + d\theta) - c \frac{dw}{dt} ds = m a_{Tz} ds.
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Substituindo as aproximações para pequenos ângulos de rotação θ , $\sin(\theta) \approx \frac{dw}{dx}$, $\cos(\theta) \approx 1$ e $ds \approx dx$, a Equação (3.18) é reduzida para,

$$\begin{aligned}
 T \frac{d^2 w}{dx^2} dx + \frac{dT}{dx} \frac{dw}{dx} dx + \frac{dT}{dx} \frac{d^2 w}{dx^2} (dx)^2 + F dx + q S dx + \frac{dQ}{dx} dx - c \frac{dw}{dt} ds \\
 = m a_{Tz} dx.
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Omitindo o terceiro termo do lado esquerdo da Equação (3.19), por ser de segundo ordem, e introduzindo a aceleração transversal como a segunda derivado do deslocamento, $a_{Tz} = \frac{d^2 w}{dt^2}$, obtém-se,

$$\frac{d}{dx} \left(T \frac{dw}{dx} \right) + F + qS + \frac{dQ}{dx} - c \frac{dw}{dt} = m \frac{d^2w}{dt^2}. \quad (3.20)$$

Agora, ao aplicar a segunda lei de Newton na direção do eixo x , obtém-se,

$$\begin{aligned} T \cos(\theta) - \left(T + \frac{dT}{ds} ds \right) \cos(\theta + \partial\theta) + F ds \sin(\theta) - qS ds \cos(\theta) - Q \sin(\theta) \\ + \left(Q + \frac{dQ}{ds} ds \right) \sin(\theta + d\theta) - mg ds = ma_{Tx} ds \end{aligned} \quad (3.21)$$

Analogamente, a última equação é simplificada considerando pequenos ângulos de rotação θ e a aceleração do tubo na direção do eixo x , $a_{Tx} = 0$,

$$\begin{aligned} -\frac{dT}{dx} dx + F dx \frac{dw}{dx} - qS dx + Q \frac{d^2w}{dx^2} dx + \frac{dw}{dx} \frac{dQ}{dx} dx + \frac{d^2w}{dx^2} \frac{dQ}{dx} (dx)^2 - mg ds \\ = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Desprezando o quarto, quinto e sexto termo da última Equação (3.22) e, considerando a força de cisalhamento que é muito pequena e estar multiplicada por uma quantidade diferencial, o resultado é dividido por $ds \approx dx$, obtém-se,

$$\frac{dT}{dx} - F \frac{dw}{dx} + qS + mg = 0 \quad (3.23)$$

A partir do equilíbrio de momentos do elemento, tem-se que,

$$Q \frac{ds}{2} + \left(Q - \frac{dQ}{ds} ds \right) \frac{ds}{2} - M + \left(M + \frac{dM}{ds} ds \right) = 0 \quad (3.24)$$

A qual é simplificada considerando pequenos ângulos de rotação θ ,

$$Q = -\frac{dM}{dx}. \quad (3.25)$$

Na resistência dos materiais, tem-se a relação entre o momento fletor e a curvatura,

$$\frac{M}{E'I} = \frac{1}{\rho}. \quad (3.26)$$

A qual, ao ser introduzida na Equação (3.25) e usando a Equação (3.3), obtém-se,

$$Q = -E'I \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (3.27)$$

onde E' é o módulo de viscoelasticidade do material e I o momento de inercia da seção transversal do tubo.

Neste ponto, é introduzida a propriedade viscoelástica do material. O módulo de elasticidade é substituído pelo módulo equivalente de viscoelasticidade, que descreve a deformação de acordo com o modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt vista na Seção 2.3. Assim, substituindo a Equação (2.8) na Equação (3.27), obtém-se,

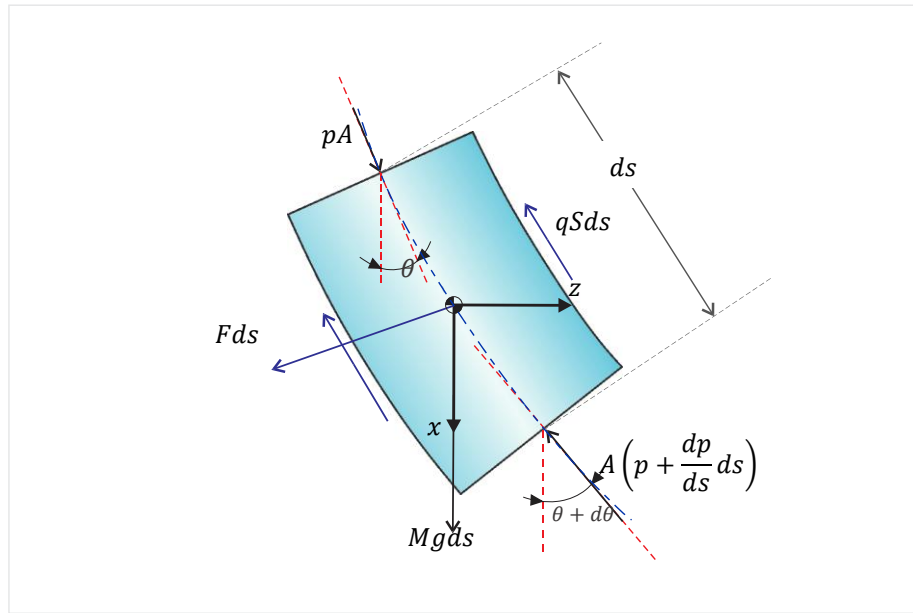
$$Q = -\left(E + E^* \frac{d}{dt}\right) I \frac{d^3 w}{dx^3}, \quad (3.28)$$

onde E^* é a constante de dissipação viscoelástica e $\frac{d}{dt}$ a taxa de dissipação.

3.4.2 Elemento infinitesimal de fluido

Mostra-se na Figura (3.5) as forças que atuam sobre o elemento de fluido, de massa M , comprimento ds , superfície lateral S e área transversal A : (1) a força de reação do tubo Fds , normal à superfície de contato entre o tubo e o fluido; (2) a força de atrito $qSds$, sobre dita superfície de contato; (3) a força de pressão pA ; (4) a força da gravidade do elemento de fluido $Mgds$; e (5) as forças inerciais $Ma_{Fx}dx$ e $Ma_{Fz}dx$ que atuam nas direções dos eixos x e z , respectivamente, onde a_{Fx} e a_{Fz} são as acelerações na direção do eixo x e z , respectivamente.

Figura 3.5 – Diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal de fluido.



Fonte: Elaboração do próprio autor

Aplica-se a segunda Lei de Newton na direção do eixo z,

$$pA \sin(\theta) - A \left(p + \frac{dp}{ds} ds \right) \sin(\theta + d\theta) + qS ds \sin(\theta) - F ds \cos(\theta) = Ma_{Fz} dx. \quad (3.29)$$

Novamente, introduzindo as aproximações para pequenos ângulos de rotação θ , $\sin(\theta) \approx \frac{dw}{dx}$, $\cos(\theta) \approx 1$ e $ds \approx dx$, na Equação (3.29), resulta,

$$pA \frac{dw}{dx} - A \left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) \left(\frac{dw}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} dx \right) - qS dx \frac{dw}{dx} - F dx = Ma_{Fz} dx \quad (3.30)$$

Substituindo a aceleração do fluido a_{Fz} , Equação (3.17), na Equação (3.30) e cancelando os termos de segunda ordem, obtém-se,

$$-A \frac{d}{dx} \left(p \frac{dw}{dx} \right) - qS \frac{dw}{dx} - F = M \left(\frac{d}{dt} + U \frac{d}{dx} \right)^2 w \quad (3.31)$$

Agora, aplicando a segunda Lei de Newton na direção do eixo x,

$$\begin{aligned}
pA \cos(\theta) - A \left(p + \frac{dp}{dx} s \right) \cos(\theta) + Mgds - Fds \sin(\theta) - qSds \cos(\theta) \\
= Ma_{Fx} dx.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

A última equação é simplificada de forma análoga para obter a Equação 3.31, considerando que a aceleração axial do fluido é $a_{Fx} = 0$,

$$-A \frac{dp}{dx} + Mg - F \frac{dw}{dx} - qS = 0. \tag{3.33}$$

3.5 Equação de movimento

A equação de movimento do tubo é obtida pela combinação das equações diferenciais obtidas a partir dos diagramas de corpo livre dos elementos infinitesimais de tubo e fluido, vistas nas Seções 3.4.1 e 3.4.2.

Subtraindo a Equação (3.29) da (3.31) e, em seguida, substituindo na Equação (3.28), obtém-se,

$$\begin{aligned}
\left(E + E^* \frac{d}{dt} \right) I \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{d}{dx} \left[(T - pA) \frac{dw}{dx} \right] + c \frac{dw}{dt} + m \frac{d^2 w}{dt^2} + M \left(\frac{d}{dt} + U \frac{d}{dx} \right)^2 w \\
= 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

O segundo termo da Equação (3.34) permite introduzir os efeitos da pressão, p , e força de tração, T , na equação de vibração do tubo. Para tal propósito, somam-se as Equações (3.23) e (3.33), obtendo-se,

$$\frac{d}{dx} (T - pA) = -(M + m)g. \tag{3.35}$$

Na última equação é importante notar que a força de tração T é devida ao próprio peso do tubo e fluido, porém existe uma força de sentido oposto que se gera pela pressão interna p . Integrando a Equação (3.35) desde a x até L , obtém-se,

$$\int_x^L d(T - pA) = - \int_x^L (M + m)g, \tag{3.36}$$

ou,

$$(T - pA)|_L - (T - pA)|_x = -(M + m)g(L - x). \quad (3.37)$$

No extremo livre do tubo, $x = L$, devem ser feitas duas observações: (1) Como a força axial, T , atuante numa seção de corte do tubo é devido ao próprio peso do tubo e fluido e, além disso, atua na mesma direção o atrito do fluido, portanto, T no extremo livre é zero; (2) a pressão na descarga é igual a zero. Portanto, a Equação (3.41) é simplificada,

$$T - pA = (M + m)(L - x)g. \quad (3.38)$$

Substituindo a Equação (3.38) na Equação (3.34), obtém-se a expressão final da equação diferencial de vibração do tubo como,

$$\begin{aligned} E^* I \frac{d^5 w}{dx^4 dt} + EI \frac{d^4 w}{dx^4} + [MU^2 - (M + m)(L - x)g] \frac{d^2 w}{dx^2} + 2MU \frac{d^2 w}{dx dt} + c \frac{dw}{dt} \\ + (m + M) \frac{d^2 w}{dt^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

O primeiro termo na Equação (3.39) é associado com a dissipação viscoelástica de energia, o segundo termo com as forças de restauração, o terceiro termo com a força centrípeta do fluido, o quarto termo com a força de Coriolis do fluido, o quinto termo com o amortecimento viscoso do meio externo, e o último termo com as forças de inerciais do tubo e fluido.

Capítulo 4

Método numérico

Neste capítulo, apresenta-se a metodologia usada para resolver a equação de vibração livre de um tubo viscoelástico descarregando fluido interno. Tal equação é escrita em sua forma adimensional, em função de um conjunto de parâmetros adimensionais independentes, o que permite compreender os fenômenos físicos e as forças envolvidas. A equação é discretizada pelo método de Galerkin, assumindo uma solução aproximada, e é expressa na forma matricial de um sistema dinâmico padrão. Por último, apresenta-se o algoritmo computacional para a análise de estabilidade do sistema.

4.1 Forma adimensional da equação de movimento

Os parâmetros dimensionais independentes são definidos em Païdoussis (2013), o processo da obtenção dos parâmetros é detalhado no anexo A.

A coordenada longitudinal x e o deslocamento w são divididos pelo comprimento de referência L para serem adimensionalizados, isto é,

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad (4.1)$$

$$\eta = \frac{w}{L}, \quad (4.2)$$

onde ξ e η são a coordenada longitudinal e o deslocamento transversal, respectivamente, ambas adimensionais.

O tempo adimensional τ é dado por,

$$\tau = \left(\frac{EI}{M + m} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{t}{L^2}. \quad (4.3)$$

A velocidade adimensional do fluido, u , é um parâmetro o qual é variado gradativamente para identificar a instabilidade do sistema, é definido como,

$$u = \left(\frac{M}{EI} \right)^{\frac{1}{2}} UL. \quad (4.4)$$

Experimentalmente, a velocidade do fluido é aumentada gradualmente até que o tubo realize movimentos oscilatórios com amplitudes crescentes em cada ciclo de oscilação. A velocidade de ocorrência desse fenômeno é a velocidade crítica u_{cr} . Quando $u = u_{cr}$, o sistema tem estabilidade neutra. Para velocidades menores que a velocidade crítica, $u < u_{cr}$, o sistema é estável; e para velocidades maiores que a crítica $u > u_{cr}$, o sistema é instável.

O parâmetro adimensional de massa, β , a característica principal do sistema e é definido como a razão entre a massa do fluido e a massa do sistema, ambas por unidade de comprimento,

$$\beta = \frac{M}{M + m}, \quad (4.5)$$

onde β está no intervalo de 0 a 1. Para sistemas com $\beta = 0$, o tubo pode não conter fluido no interior. Para baixíssimos valores do parâmetro de massa, $\beta \approx 0$, o fluido interno é um gás. Para valores intermediários de β , por exemplo $\beta = 0,7$, a massa do fluido representa o 70% da massa do sistema. No caso em que $\beta = 1$, a barra sólida está sendo transportada com velocidade axial constante.

O parâmetro adimensional da viscoelasticidade, α , definida pela relação,

$$\alpha = \left[\frac{I}{E(M + m)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{E^*}{L^2}. \quad (4.6)$$

O parâmetro adimensional da gravidade, γ , torna-se um fator relevante na estabilidade dinâmica de tubos longos e com baixos módulos de elasticidade,

$$\gamma = \frac{M + m}{EI} L^3 g. \quad (4.7)$$

O parâmetro adimensional de amortecimento viscoso considera a resistência que o meio oferece ao movimento lateral do tubo e é definido como,

$$\sigma = \frac{cL^2}{\sqrt{EI(M + m)}}. \quad (4.8)$$

A equação (3.39) é expressa em sua forma adimensional usando os parâmetros adimensionais dados pelas Equações (4.1) a (4.8),

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d^5 \eta}{d\xi^4 d\tau} + \frac{d^4 \eta}{d\xi^4} + [u^2 - \gamma(1 - \xi)] \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + 2\beta^{\frac{1}{2}} u \frac{d^2 \eta}{d\xi d\tau} + \gamma \frac{d\eta}{d\xi} + \sigma \frac{d\eta}{d\tau} + \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} \\ = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde ξ e η são, respectivamente, a coordenada longitudinal no intervalo $0 \leq \xi \leq 1$ e o deslocamento lateral do tubo, ambas adimensionais.

4.2 Discretização da equação de movimento

A Equação (4.9) é discretizada pelo método de Galerkin. Como discutido na Seção 2.4, o método consiste em assumir uma solução aproximada que satisfaça as condições de contorno do problema. Tal solução é baseada na superposição dos modos normais de vibrar de uma viga engastada-livre. Baseando-se na abordagem de separação de variáveis, a solução é dada pela seguinte série infinita, Païdoussis (2013),

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(\xi) q_r(\tau) \quad (4.10)$$

onde $\phi_r(\xi)$ é o r -ésimo modo de vibrar da viga engastada-livre vista na Seção 2.5 e, $q_r(\tau)$ é a r -ésima coordenada generalizada do sistema discretizado que representa a amplitude da oscilação. Substituindo a Equação (4.10), truncada para N - termos, na Equação (4.9), obtém-se,

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=1}^N \left\{ \alpha \phi_r^{iv}(\xi) \dot{q}_r(\tau) + \phi_r^{iv}(\xi) q_r(\tau) + (u^2 - \gamma) \phi_r''(\xi) q_r(\tau) + \phi_r''(\xi) q_r(\tau) \right. \\
 + \gamma \xi \phi_r''(\xi) q_r(\tau) + \phi_r''(\xi) q_r(\tau) + \gamma \xi \phi_r''(\xi) q_r(\tau) \\
 + 2u\beta^{\frac{1}{2}} \phi_r'(\xi) \dot{q}_r(\tau) + \gamma \phi_r'(\xi) q_r(\tau) + \sigma \phi_r(\xi) \dot{q}_r(\tau) \\
 \left. + \phi_r(\xi) \ddot{q}_r(\tau) \right\} = R(\eta(\xi, \tau)), \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

onde, ϕ_r' , ϕ_r'' e ϕ_r^{iv} representam, respectivamente, a primeira, segunda e quarta derivada do r -ésimo modo de vibrar ϕ_r em relação a ξ , \dot{q}_r e \ddot{q}_r representam, respectivamente, a primeira e segunda derivada da r -ésima coordenada generalizada em relação a τ , e $R(\eta(\xi, \tau))$ representa o resíduo gerado ao introduzir tal solução aproximada, Meirovitch (1960). A Equação (4.11) representa um conjunto de N equações diferenciais acopladas, que deve ser resolvido simultaneamente.

Seguindo com o processo de discretização, a Equação (4.11) é multiplicada pelo s -ésimo modo de vibrar, $\phi_s(\xi)$, fazendo o papel de uma função de ponderação, e em seguida integrada sobre o domínio de $0 \leq \xi \leq 1$, obtendo-se,

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=1}^N \left\{ \alpha \int_0^1 \phi_s(\xi) \phi_r^{iv}(\xi) d\xi \dot{q}_r(\tau) + \int_0^1 \phi_s(\xi) \phi_r^{iv}(\xi) d\xi q_r(\tau) + (u^2 \right. \\
 - \gamma) \int_0^1 \phi_s(\xi) \phi_r''(\xi) d\xi q_r(\tau) \\
 + \gamma \int_0^1 \phi_s(\xi) \xi \phi_r''(\xi) d\xi q_r(\tau) + 2\beta^{\frac{1}{2}} u \int_0^1 \phi_s(\xi) \phi_r'(\xi) d\xi \dot{q}_r(\tau) \\
 + \gamma \int_0^1 \phi_s(\xi) \phi_r'(\xi) d\xi q_r(\tau) + \sigma \int_0^1 \phi_s(\xi) \phi_r(\xi) d\xi \dot{q}_r(\tau) \\
 \left. + \int_0^1 \phi_s(\xi) \phi_r(\xi) d\xi \ddot{q}_r(\tau) \right\} = \int_0^1 \phi_s(\xi) R(\eta(\xi, \tau)) d\xi, \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

para $s = 1, 2, 3, \dots, N$,

sendo o termo da direita é igual a zero, isto é, pelo resíduo ponderado Equação (2.14).

Com o objetivo de diminuir a ordem das derivadas da Equação (4.12), usam-se as propriedades de ortogonalidade dos modos normais de vibração. O produto de dois modos normais de uma viga engastada-livre é, Meirovitch (2000),

$$\phi_s(\xi)\phi_r(\xi) = \delta_{sr} \quad \text{para } s, r = 1, 2, \dots, N, \quad (4.13)$$

onde, δ_{sr} é a função delta Kronecker definida como,

$$\delta_{sr} = \begin{cases} 0 & s \neq r, \\ 1 & s = r. \end{cases} \quad (4.14)$$

Além disso, a seguinte igualdade pode ser verificada, tal como foi utilizado por Païdoussis (2013),

$$\phi_r^{iv}(\xi) = \lambda_r^4 \phi_r(\xi), \quad (4.15)$$

onde λ_r é o r -ésimo autovalor associado ao r -ésimo modo ϕ_r (ver Seção 2.5). Essa igualdade será usada posteriormente para simplificar a equação de movimento do tubo.

Substituindo as Equações (4.13) e (4.15) na Equação (4.12) e considerando que a integral do resíduo ponderado é nula como foi dito acima, obtém-se,

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^N \left\{ \alpha \lambda_r^4 \int_0^1 \phi_s(\xi)\phi_r(\xi)d\xi \dot{q}_r(\tau) + \lambda_r^4 \int_0^1 \phi_s(\xi)\phi_r(\xi)d\xi q_r(\tau) \right. \\ + (u^2 - \gamma) \int_0^1 \phi_s(\xi)\phi_r''(\xi)d\xi q_r(\tau) + \gamma \int_0^1 \phi_s(\xi)\xi\phi_r''(\xi)d\xi q_r(\tau) \\ + 2\beta^{\frac{1}{2}}u \int_0^1 \phi_s(\xi)\phi_r'(\xi)d\xi \dot{q}_r(\tau) + \gamma \int_0^1 \phi_s(\xi)\phi_r'(\xi)d\xi q_r(\tau) \\ \left. + \sigma \int_0^1 \phi_s(\xi)\phi_r(\xi)d\xi \dot{q}_r(\tau) + \int_0^1 \phi_s(\xi)\phi_r(\xi)d\xi \ddot{q}_r(\tau) \right\} = \{0\}; \end{aligned} \quad (4.16)$$

para $s = 1, 2, 3, \dots, N$.

Na Equação (4.16), as expressões integrais são determinadas a priori, as quais são constantes numéricas definidas pelas Equações (4.17) a (4.20),

$$\delta_{sr} = \int_0^1 \phi_s(\xi) \phi_r(\xi) d\xi, \quad (4.17)$$

$$b_{sr} = \int_0^1 \phi_s(\xi) \phi_r'(\xi) d\xi, \quad (4.18)$$

$$g_{sr} = \int_0^1 \phi_s(\xi) \phi_r''(\xi) d\xi, \quad (4.19)$$

$$d_{sr} = \int_0^1 \phi_s(\xi) \xi \phi_r''(\xi) d\xi. \quad (4.20)$$

Tais constantes e a função delta de Kronecker, Equação (4.14), são introduzidas na Equações (4.16), resultando,

$$\sum_{r=1}^N \left\{ \alpha \delta_{sr} \lambda_r^4 \dot{q}_r(\tau) + \delta_{sr} \lambda_r^4 q_r(\tau) + (u^2 - \gamma) c_{sr} q_r(\tau) + \gamma d_{sr} q_r(\tau) + 2\beta^{\frac{1}{2}} u b_{sr} \dot{q}_r(\tau) + \gamma b_{sr} q_r(\tau) + \sigma \delta_{sr} \dot{q}_r(\tau) + \delta_{sr} \ddot{q}_r(\tau) \right\} = \{0\}; \quad (4.21)$$

para $s = 1, 2, 3, \dots, N$.

Rearranjando os termos da última equação, obtém-se,

$$\sum_{r=1}^N \left\{ \delta_{sr} \ddot{q}_r(\tau) + \left(\alpha \lambda_r^4 \delta_{sr} + 2\beta^{\frac{1}{2}} u b_{sr} + \sigma \delta_{sr} \right) \dot{q}_r(\tau) + [\lambda_r^4 \delta_{sr} + (u^2 - \gamma) g_{sr} + \gamma d_{sr} + \gamma b_{sr}] q_r(\tau) \right\} = \{0\}; \quad (4.22)$$

para $s = 1, 2, 3, \dots, N$.

a qual é expressa na forma matricial como,

$$\begin{aligned} & \{\ddot{q}(\tau)\} + (\alpha[\Gamma] + \sigma[I] + 2u\sqrt{\beta}[B])\{\dot{q}(\tau)\} \\ & + [[\Gamma] + (u^2 - \gamma)[G] + \gamma[D] + \gamma[B]]\{q(\tau)\} = \{0\}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde,

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \lambda_1^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N^4 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NN} \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \dots & g_{NN} \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1N} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N1} & d_{N2} & \dots & d_{NN} \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

sendo $[\Gamma]$ e $[I]$ matrizes diagonais, $[B]$, $[C]$ e $[D]$ matrizes não simétricas, todas matrizes quadradas de tamanho N , e o vetor de coordenadas generalizadas, dado por,

$$\{q_r(\tau)\} = \begin{Bmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \\ \vdots \\ q_N(\tau) \end{Bmatrix}. \quad (4.29)$$

4.3 Equação de movimento na forma matricial padrão

A Equação (4.23) é escrita na forma padrão de um sistema de N graus de liberdade, como,

$$[M]\{\ddot{q}(\tau)\} + [C]\{\dot{q}(\tau)\} + [K]\{q(\tau)\} = \{0\}, \quad (4.30)$$

onde $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são as matrizes de massa, dissipação e rigidez, respectivamente, as quais são matrizes quadradas de tamanho N . Tais matrizes são definidas em função dos parâmetros estruturais e das matrizes numéricas como,

$$[M] = [I], \quad (4.31)$$

$$[C] = \alpha[\Gamma] + \sigma[I] + 2u\sqrt{\beta}[B], \quad (4.32)$$

$$[K] = [\Gamma] + \gamma[B] + (u^2 - \gamma)[G] + \gamma[D]. \quad (4.33)$$

4.4 Frequências naturais e estabilidade dinâmica

A análise de estabilidade do sistema em estudo é feita a partir das frequências naturais, as quais controlam a amplitude de oscilação. Considera-se que as coordenadas generalizadas, $q_r(\tau)$, são funções harmônicas, isto é, Païdoussis (2013),

$$q_r(\tau) = a_r e^{i\omega\tau}, \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad (4.34)$$

onde a_r é uma constante arbitrária e ω , a frequência natural, um número complexo a ser determinado. O comportamento do sistema é ditado pelos valores que toma ω . A frequência adimensional ω é definida como, Païdoussis (2013),

$$\omega = \left(\frac{M + m}{EI} \right)^{1/2} \Omega L^2, \quad (4.35)$$

onde Ω é a frequência circular da oscilação, novamente, L é o comprimento do tubo, m e M são as massas do fluido e tubo por unidade de comprimento, respectivamente, e EI a rigidez à flexão.

A equação de movimento, Equação (4.30), é resolvida introduzindo a solução harmônica dada pela Equação (4.34), obtendo-se,

$$-\omega^2 e^{i\omega\tau} [M] \{a\} + i\omega e^{i\omega\tau} [C] \{a\} + e^{i\omega\tau} [K] \{a\} = \{0\}, \quad (4.36)$$

onde $\{a\} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_r]^T$ é o vetor de amplitudes das coordenadas generalizadas. Introduzindo as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, Equações de (4.31) a (4.33), na Equação (4.36), e cancelando $e^{i\omega\tau}$, resulta,

$$[H] \{a\} = \{0\}, \quad (4.37)$$

onde,

$$[H] = i\omega\alpha[\Gamma] - (\omega^4 - \sigma)[I] + [\Gamma] + (u^2 - \gamma)[G] + \gamma[D] + \left(2\beta^{\frac{1}{2}}ui\omega + \gamma\right)[B]. \quad (4.38)$$

A solução não trivial da Equação (4.37) é dada pelo determinante da matriz $[H]$ igualada a zero. Portanto, a equação de frequências ou equação característica do sistema é,

$$\det [H] = 0. \quad (4.39)$$

A Equação (4.39) é um polinômio de ordem $2N$ e a partir de sua solução obtém-se $2N$ raízes, as quais são as frequências do sistema. Conforme mencionado na Seção (2.7), cada par de frequências são números complexos conjugados opostos.

A estabilidade do sistema depende dos valores das frequências ω , conforme discutindo nas Seções (2.8) e (2.9), três casos de estabilidade são definidos de acordo com Païdoussis.

- Caso I: o sistema é estável quando a parte imaginária de todas as frequências são todas quantidades positivas, $Im(\omega) > 0$.
- Caso II: o sistema tem estabilidade neutra quando a parte imaginária de pelo menos uma frequência é zero, $Im(\omega) = 0$, e a parte imaginária das frequências restantes positivas.
- Caso III: o sistema é instável, quando a parte imaginária de pelo menos uma frequência é negativa, $Im(\omega) < 0$.

4.5 Influência de número de termos da série de Galerkin na acurácia da determinação de ω_{cr} e u_{cr}

A solução da equação característica, Equação (4.39), fornece um conjunto de $2N$ raízes as quais são as frequências do sistema. A primeira frequência puramente real, $Im(\omega) = 0$, dentro do conjunto de frequências, define a frequência crítica ω_{cr} e sua correspondente velocidade crítica u_{cr} . Também é possível afirmar que, quando a velocidade de escoamento é igual à velocidade crítica $u = u_{cr}$, uma das frequências é puramente real, ou seja, sua parte imaginária é igual a zero.

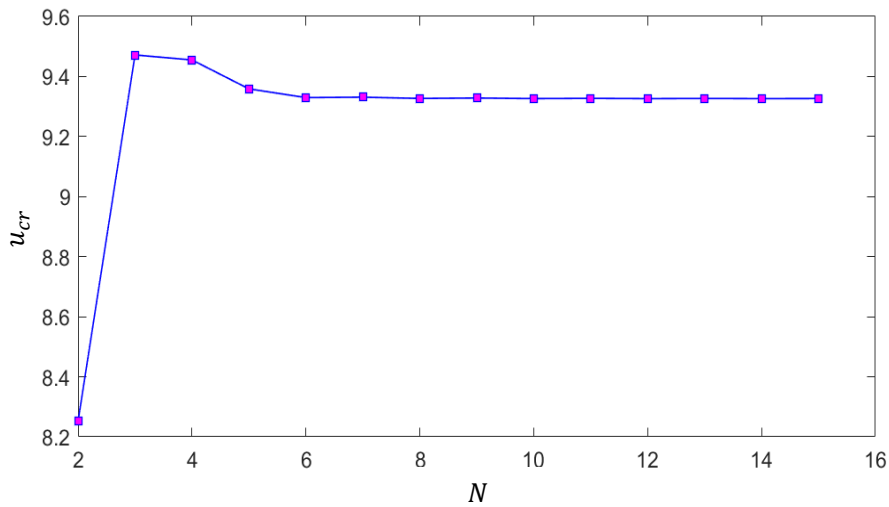
Na Tabela 4.1 são apresentadas as velocidades críticas obtidas a partir da solução da Equação (4.39), variando o número de termos da série de Galerkin, N , desde 2 a 15. Assume-se como valor exato de velocidade crítica, $u_{cr}^{N=15}$, aquele calculado com $N = 15$. O erro percentual é calculado comparando a velocidade crítica u_{cr}^N , avaliada com N termos, em relação a $u_{cr}^{N=15}$.

Tabela 4.1 – Velocidades críticas u_{cr} variando N

N	u_{cr}	Taxa de erro $\left(\frac{u_{cr}^N - u_{cr}^{N=15}}{u_{cr}^{N=15}}\right)\%$
2	8.2520	11.5218
3	9.4718	1.5568
4	9.4551	1.3777
5	9.3588	0.3452
6	9.3297	0.0332
7	9.3311	0.0482
8	9.3269	0.0032
9	9.3283	0.0182
10	9.3264	0.0021
11	9.3272	0.0064
12	9.3263	0.0032
13	9.3268	0.0021
14	9.3263	0.0032
15	9.3266	0.0000

A Figura 4.1 mostra a convergência de u_{cr} com o incremento de N . Observa-se que, a partir de $N = 6$ em diante a velocidade crítica se estabiliza e permanece praticamente inalterada.

Figura 4.1 – Velocidade críticas u_{cr} versus N

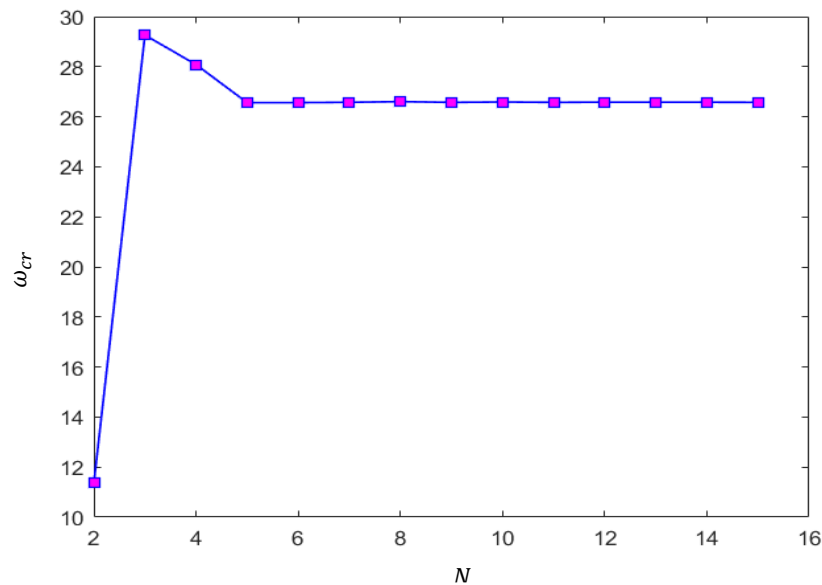


Na Tabela 4.2 são apresentadas as frequências críticas correspondentes às velocidades críticas da Tabela 4.1. O erro percentual calculado comparado a frequência crítica ω_{cr}^N , avaliada com N termos, em relação a $\omega_{cr}^{N=15}$.

Tabela 4.2 – Cálculo da frequência crítica variando N , com $\beta = 0,5$ e $\alpha = \gamma = 0$

N	ω_{cr}	Taxa de erro $\left(\frac{\omega_{cr}^r - \omega_{cr}^{N=15}}{\omega_{cr}^{N=15}}\right)\%$
2	11,3623	57,2447
3	29,2617	10,1090
4	28,0828	5,6729
5	26,5638	0,0428
6	26,5638	0,3740
7	26,4758	0,1072
8	26,6037	0,0067
9	26,5734	0,0452
10	26,5875	0,0413
11	26,5741	0,0004
12	26,5814	0,0233
13	26,5784	0,0120
14	26,5789	0,0139
15	26,5752	0,0000

Tais resultados são mostrados na Figura 4.2. Observa-se que a partir de $N = 6$ a frequência crítica estabiliza-se e permanece praticamente inalteradas.

Figura 4.2 – Frequência críticas ω_{cr} , variando N 

Ao analisar as Figura (4.1) e (4.2), verifica-se que com $N = 6$ a acurácia das aproximações para u_{cr} e ω_{cr} é razoável e confiável. De acordo com a Tabela 4.1 e 4.2, os erros percentuais de u_{cr} e ω_{cr} calculados com $N = 6$ são 0,0332% e 0,3740%, respectivamente, em relação aos calculados com $N = 15$, erros que são considerados toleráveis. Portanto, neste trabalho de mestrado, optou-se por usar $N = 6$ na solução dos problemas de autovalores.

4.6 Implementação numérica

Esta seção apresenta o algoritmo computacional implementado para resolver a equação característica, Equação (4.39).

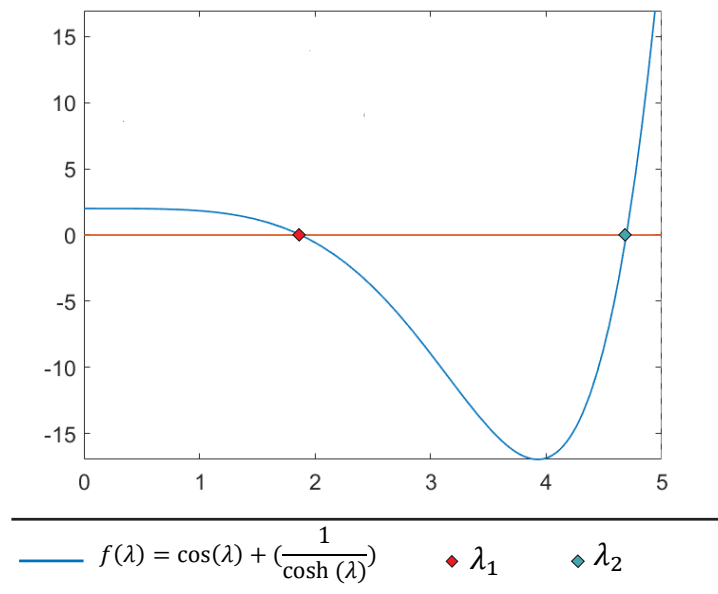
4.6.1 Vibração livre de uma viga engastada-livre

A solução da equação transcendental da viga engastada-livre, Equação (2.20), vista na Seção (2.4), fornece um conjunto de r autovalores, $\lambda_r L$. Ao fazer $L = 1$ na Equação (2.20), tem-se que,

$$\cos(\lambda_r) + \left(\frac{1}{\cosh(\lambda_r)}\right) = 0 \quad (4.40)$$

A Figura 4.3 mostra a solução gráfica da Equação (4.40), na qual as duas primeiras intersecções da função $f(\lambda)$ com o eixo das abscissas correspondem aos dois primeiros autovalores, λ_1 e λ_2 .

Figura 4.3 – Solução gráfica da equação transcendental da viga engastada-livre.



Na Tabela 4.3, são apresentados os primeiros quinze autovalores da viga engastada-livre, obtidos pelo método gráfico explicado acima.

Calcula-se o r -ésimo coeficiente σ_r associado ao r -ésimo modo de vibração livre da viga engastada-livre usando a Equação (2.22), substituindo o r -ésimo autovalor λ_r apresentado na Tabela 4.3 e considerando o comprimento unitário, $L = 1$. Como resultado na Tabela 4.4, são apresentados os quinze primeiros coeficientes σ_r ,

Tabela 4.3 – Autovalores λ_r .

r	λ_r
1	1.8751
2	4.6940
3	7.8547
4	10.9955
5	14.1371
6	17.2787
7	23.5619
8	26.7035
9	29.8451
10	32.9867
11	36.1283
12	39.2699
13	42.4115
14	45.5530
15	48.6946

Fonte: Dados do próprio autor

Tabela 4.4 – Valores do coeficiente σ_r .

r	σ_r
1	0,7340
2	1,0184
3	0,9992
4	1,0000
5	0,9999
6	1,0000
7	1.0000
8	0.9999
9	1.0000
10	0.9999
11	1.0000
12	1.0000
13	1.0000
14	1.0000
15	1.0000

Fonte: Dados do próprio autor

4.6.2 Cálculo das matrizes da equação de movimento discretizada

Os elementos b_{sr} , g_{sr} e d_{sr} das matrizes $[B]$, $[G]$ e $[D]$ dadas, respectivamente, pelas Equações (4.26) a (4.27), podem ser expressos em função dos coeficientes λ_r e σ_r , Païdoussis (2013). Tais matrizes são calculadas para $N = 6$, conforme explicado na Seção 4.5, que trata do truncamento da série de Galerkin.

Então os elementos da matriz $[B]$, $[G]$ e $[D]$ também podem ser expressos como,

$$b_{sr} = \begin{cases} \frac{4}{\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_r}\right)^2 + (-1)^{s+r}} & s \neq r, \\ 2 & s = r. \end{cases} \quad (4.41)$$

$$g_{sr} = \begin{cases} \frac{4(\lambda_r\sigma_r - \lambda_s\sigma_s)}{(-1)^{r+s} - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_r}\right)^2} & s \neq r, \\ \lambda_r\sigma_r(2 - \lambda_r\sigma_r) & s = r. \end{cases} \quad (4.42)$$

$$d_{sr} = \begin{cases} \frac{4(\lambda_r\sigma_r - \lambda_s\sigma_s + 2)}{1 - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_r}\right)^4} (-1)^{r+s} - \frac{3 + \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_r}\right)^4}{1 - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_r}\right)^4} b_{rs} & s \neq r, \\ \frac{1}{2} c_{rr} & s = r. \end{cases} \quad (4.43)$$

As Tabelas 4.3 e 4.4 fornecem os valores dos coeficientes λ_r e σ_r , sendo $r = 1, \dots, N$. Esses valores são substituídos nas Equações (4.41), (4.42) e (4.43) para obter as matrizes $[B]$, $[G]$ e $[D]$, respectivamente, resultando,

$$[B] = \begin{bmatrix} 2.0000 & -4.7595 & 3.784 & -4.1198 & 3.9308 & -4.0477 \\ 0.7595 & 2.0000 & -6.2222 & 3.3834 & -4.4956 & 3.7251 \\ 0.2157 & 2.2222 & 2.0000 & -8.1684 & 3.0565 & -5.0419 \\ 0.1198 & 0.6166 & 4.1684 & 2.0000 & -10.1249 & 2.8471 \\ 0.0692 & 0.4956 & 0.9435 & 6.1249 & 2.0000 & -12.1000 \\ 0.0477 & 0.2749 & 1.0419 & 1.1529 & 8.1000 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0.8582 & -4.7595 & 27.4531 & -37.3903 & 51.9566 & -62.8686 \\ 1.8739 & -13.2943 & -9.0422 & 30.4012 & -33.7091 & 53.9755 \\ 1.5645 & 3.2293 & -45.9042 & -98.9182 & 36.3866 & -31.2604 \\ 1.0874 & 5.5406 & 4.2536 & -98.9182 & -7.8290 & 42.2345 \\ 0.9140 & 3.7164 & 11.2326 & 4.7360 & -171.5847 & -7.5274 \\ 0.7404 & 3.9836 & 6.4600 & 17.1031 & 5.0390 & -263.9980 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 0.4291 & -7.4061 & 27.4531 & -37.3903 & 51.9566 & -62.8686 \\ 0.6921 & -6.6471 & -0.9300 & 30.4012 & -33.7091 & 53.9755 \\ 0.2768 & 2.8972 & -22.9521 & -98.9182 & 36.3866 & -31.2604 \\ 0.0944 & 1.2806 & 8.4235 & -98.9182 & -7.8290 & 42.2345 \\ 0.0826 & 0.1580 & 3.1480 & 4.7360 & -171.5847 & -7.5274 \\ 0.0400 & 0.5109 & -0.0980 & 17.1031 & 5.0390 & -263.9980 \end{bmatrix}$$

A matriz diagonal $[G]$ é obtida substituindo os autovalores da Tabela (4.3) na Equação (4.24), resultando,

$$[G] = \begin{bmatrix} 0,00123 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,04855 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,38065 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,46172 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,99438 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8,91354 \end{bmatrix} \times 10^4.$$

Uma vez conhecidas as matrizes $[B]$, $[G]$, $[D]$ e $[G]$, e dando valores aos parâmetros adimensionais α , β , e γ que caracterizam o sistema, as frequências do sistema podem ser calculadas resolvendo a Equação (4.39).

4.7 Fluxo de cálculo

Esta seção apresenta os fluxos de cálculo para identificar a velocidade crítica e traçar a curva de velocidades críticas como função do parâmetro de massa β . Para um sistema em particular, caracterizado pelos parâmetros estruturais adimensionais α, β e γ , são obtidas as frequências para diferentes velocidades de fluido. Tais frequências são plotadas no diagrama de Argand para a análise de estabilidade. Na Tabela 4.5 são definidas as variáveis usadas na implementação computacional.

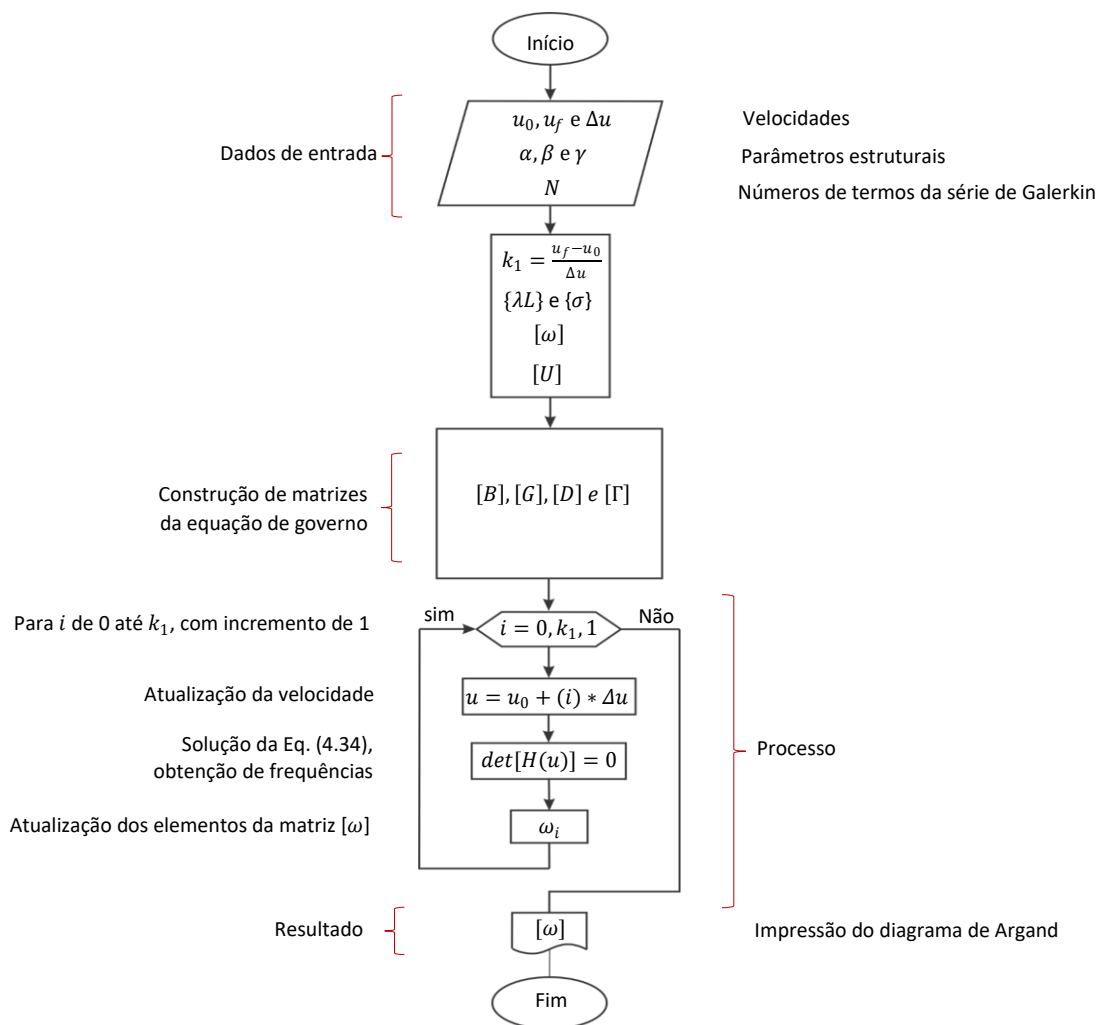
Tabela 4.5 – Variáveis usadas na implementação do código computacional

Símbolo	Descrição	Equação	Valor numérico
u_1	Velocidade inicial do fluido	-	0
u_r	Velocidade final do fluido	-	Indeterminado
Δu	Incremento de velocidade	-	10^{-3}
α	Constante de dissipação viscoelástica	Eq. (4.6)	Propriedade do material
β	Parâmetro adimensional de massa	Eq. (4.5)	-
β_1	Parâmetro adimensional de massa inicial	-	0
$\Delta\beta$	Incremento de β	-	10^{-2}
σ	Parâmetro adimensional amortecimento viscoso	Eq. (4.8)	Propriedade
γ	Parâmetro adimensional de gravidade	Eq. (4.7)	Propriedade
N	Número de termos da série de Galerkin	-	6
k_1	Número de incrementos Δu	$(u_f - u_0)/\Delta u$	-
k_2	Número de incrementos $\Delta\beta$	$1/\Delta\beta$	-
$\{\lambda\}$	Vetor de frequências de vibração	Eq. (4.40)	Tabela (4.3)
$\{\sigma\}$	Vetor de constantes	Eq. (4.41)	Tabela (4.4)
tol	Tolerância numérica	-	10^{-4}
$[B]$	Matriz $[B]$	Eq. (4.18)	-
$[G]$	Matriz $[G]$	Eq. (4.19)	-
$[D]$	Matriz $[D]$	Eq. (4.20)	-
$[F]$	Matriz $[F]$	Eq. (4.24)	-
$[H]$	Matriz de frequência	Eq. (4.38)	-
$[I]$	Matriz identidade	Eq. (4.25)	-
$[\omega]$	Matriz de armazenamento de frequências	-	-
$[V]$	Matriz de armazenamento de velocidades críticas	-	-

4.7.1 Diagrama de Argand

A Figura 4.4 mostra o diagrama de blocos para a obtenção do diagrama de Argand, no qual são plotadas as frequências naturais do sistema.

Figura 4.4 – Fluxo de cálculo para a obtenção do diagrama de Argand



Inicialmente, os dados de entrada são lidos, os parâmetros estruturais α, β e γ , a velocidade inicial de teste, $u_1 = 0$, o incremento de velocidade, Δu , e o número de termos da série de Galerkin. Em seguida, o número de incrementos k_1 é calcula-se de velocidade e os vetores $\{\lambda\}$ e $\{\sigma\}$ são gerados, e a matriz $[U]$ contendo as velocidades de teste,

$$[U] = [0 \quad \Delta u \quad 2\Delta u \quad \dots \quad N\Delta u]. \quad (4.44)$$

Cria-se uma matriz de armazenamento das frequências $[\omega]$; construíam-se as matrizes $[B]$, $[G]$, $[D]$ e $[\Gamma]$; resolve-se a equação característica, Equação (4.39), para cada velocidade de teste desde $u_1 = 0$ até $u_f = N\Delta u$, com incrementos de velocidade Δu . Cada conjunto de soluções da Equação (4.39) são as frequências do sistema para uma determinada velocidade e é definido pelo vetor $[\omega_1^{u_{k1}}, \dots, \omega_{2N}^{u_{k1}}]^T$. Como resultado, tem-se a matriz de armazenagem das frequências,

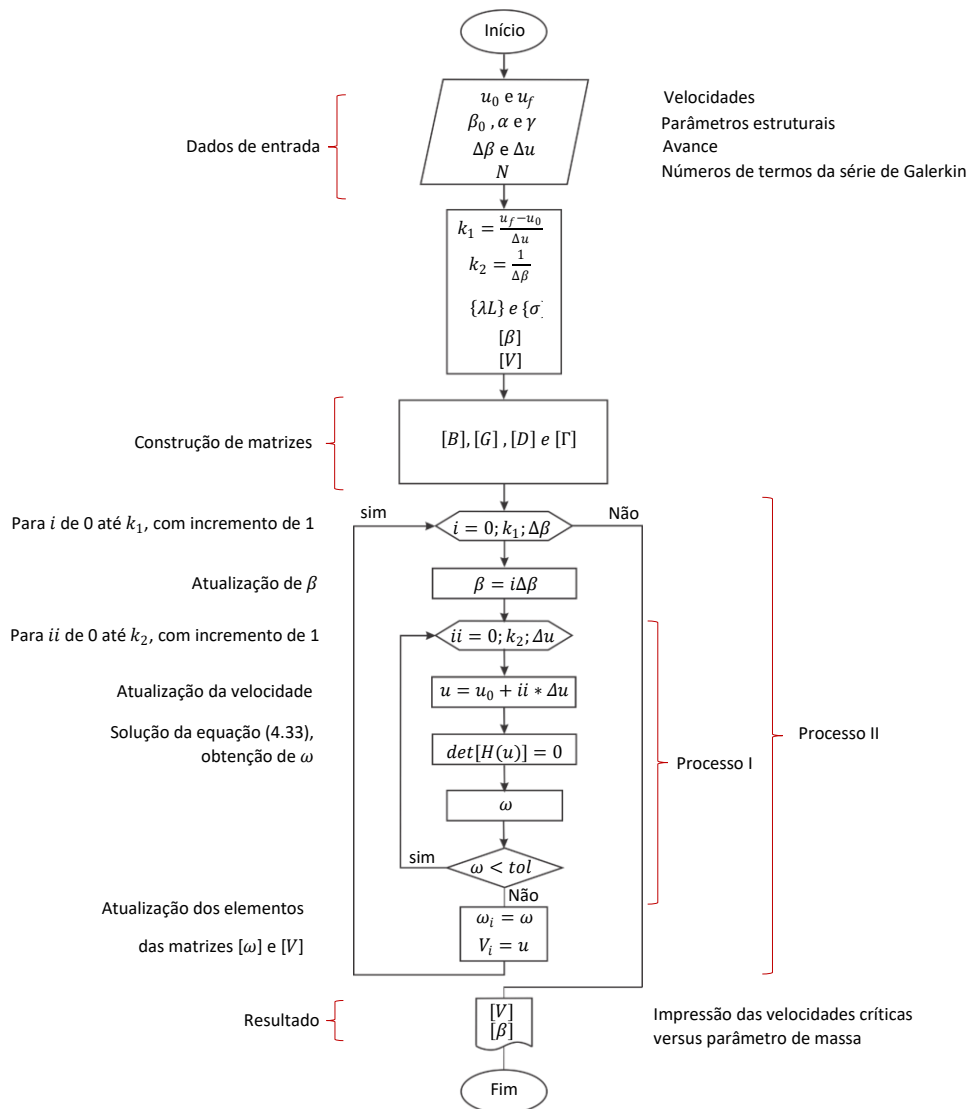
$$[\omega] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{bmatrix} \omega_1^{u_1} \\ \vdots \\ \omega_{2N}^{u_1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \omega_1^{u_1+\Delta u} \\ \vdots \\ \omega_{2N}^{u_1+\Delta u} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \omega_1^{u_1+2\Delta u} \\ \vdots \\ \omega_{2N}^{u_1+2\Delta u} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \omega_1^{u_f} \\ \vdots \\ \omega_{2N}^{u_f} \end{bmatrix} \end{array} \right]_{2N \times k_2+1} \quad (4.45)$$

Por exemplo, a primeira coluna da última matriz armazena as $2N$ frequências correspondentes à primeira velocidade de teste u_1 . Finalmente, os elementos da matriz $[\omega]$ são plotadas no diagrama de Argand.

4.7.2 Velocidade crítica vs. Parâmetro de massa

A Figura 4.5 mostra o diagrama de blocos para obter a curva de estabilidade que relaciona as velocidades críticas u_{cr} com o parâmetro de massa β . As velocidades críticas são identificadas ao variar gradativamente β .

Figura 4.5: Fluxo de cálculo para a obtenção da curva de estabilidade



Fonte: Elaboração do próprio autor

Inicialmente, os dados de entradas são lidos: as velocidades, os parâmetros estruturais, os incrementos Δu e $\Delta \beta$, e o número de termos da série de Galerkin. Em seguida, calculam-se os

números de incrementos k_1 e k_2 de velocidade e massa, respectivamente; são gerados vetores $\{\lambda L\}$ e $\{\sigma\}$ contendo as constantes numéricas $\lambda_r L$ e σ_r , respectivamente; e gera-se a matriz $[\beta]$ com os valores dos parâmetros de massa testados,

$$[\beta] = [\beta_1 \quad \beta_1 + \Delta\beta \quad \beta_1 + 2\Delta\beta \quad \dots \quad \beta_f], \quad (4.46)$$

Cria-se a matriz de armazenamento das velocidades críticas $[V]$; construa-se as matrizes numéricas $[B]$, $[G]$, $[D]$ e $[\Gamma]$; o processo é repetido variando a velocidade u até que seja interrompido quando uma frequência é próxima de zero $\omega \approx 0$, ou menor que a tolerância permitida, $\omega < 10^{-4}$. Dessa forma, a matriz de velocidades críticas é preenchida,

$$[V] = [V_0^{\beta_1=0} \quad V_0^{\beta_0+\Delta\beta} \quad V_0^{\beta_0+2\Delta\beta} \quad \dots \quad V_0^{\beta_r=1}], \quad (4.47)$$

onde, o primeiro elemento armazenado $V_0^{\beta_1=0}$, corresponde à velocidade crítica do sistema quando $\beta_1 \approx 0$. O processo é repetido para cada valor incremental do parâmetro de massa, até alcançar $\beta = 1$. Finalmente, são plotadas as velocidades críticas versus o parâmetro de massa.

Capítulo 5

Resultados e discussões

Neste capítulo, apresentam-se os resultados da resolução da equação característica do sistema usando algoritmos computacionais desenvolvidos na Seção 4.7. As frequências naturais do sistema são apresentadas no diagrama de Argand e as velocidades críticas na curva de estabilidade. A reprodução de artigos científicos segue a linha temporal dos diferentes experimentos realizados, aumentando suas características até chegar a um sistema mais complexo. Inicialmente, um sistema simplificado é analisado para identificar as principais forças envolvidas, considerando apenas a velocidade do fluido e a massa do sistema. Em seguida, realiza-se um estudo de sensibilidade dos parâmetros adimensionais de massa (β), viscoelasticidade (α) e gravidade (γ) o parâmetro da viscosidade do meio externo (ν), sobre a velocidade crítica. Esse último permite identificar o início da perda de estabilidade do sistema.

5.1 Estabilidade dinâmica de um tubo elástico descarregando fluido interno

Aqui estuda-se um caso simples de um tubo descarregando fluido interno, com o intuito de introduzir a metodologia de análise de estabilidade. Considera-se um tubo disposto na vertical, engastado em seu topo e livre no extremo inferior, similar ao sistema mostrado na Figura 3.1. O tubo é feito de um material com comportamento puramente elástico e o efeito da gravidade é desprezável, ou seja, $E^* = 0$ e $g = 0$. Tais condições são introduzidas na Equação (3.39) a qual é simplificada para,

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (MU^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2MU \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (m + M) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5.1)$$

onde, novamente, EI é a rigidez de flexão, M e m são, respetivamente, a massa do fluido e do tubo por unidade de comprimento, w o deslocamento lateral, x a posição axial e t o tempo.

A Equação (5.1) é semelhante à equação de movimento de uma coluna engastada submetida a uma força axial de compressão P no extremo livre, dada por,

$$EI \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + P \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (5.2)$$

onde EI é a rigidez de flexão e m a massa da coluna por unidade de comprimento. Quando se compara o segundo termo da Equação (5.1), a força centrípeta, com o segundo termo da Equação (5.2), proporcional à força axial P , concluiu-se que a força centrípeta atua como uma força de compressão que tende a desestabilizar o tubo, Païdoussis e Li (1993), ao aumentar a velocidade do fluido interno U . Por outro lado, ao aumentar a velocidade do fluido interno U também aumenta a força de Coriolis, o terceiro termo a Equação (5.1), força que se opõe ao movimento, que atua como uma força “estabilizadora” do sistema.

As forças centrípeta e de Coriolis tem efeitos opostos no movimento do tubo e ambas aumentam com a velocidade do fluido interno. Analisando a equação de movimento, Equação (5.1), a força centrípeta cresce quadraticamente, enquanto a força de Coriolis cresce linearmente, com o incremento da velocidade do fluido U . Portanto, para baixas velocidades do fluido, a força de Coriolis é maior que a força centrípeta. No entanto, para altas velocidades, a força centrípeta supera a força de Coriolis.

Na Equação (5.1), a força de rigidez e de Coriolis são forças estabilizadoras, enquanto a força centrípeta é desestabilizadora. Surge a necessidade de determinar a velocidade de descarga do fluido para a qual a força desestabilizadora é maior do que as forças estabilizadoras. O estudo de estabilidade depende do valor dessas forças, determinando se a amplitude da oscilação será amortecida, constante ou crescente ao longo do tempo.

As frequências naturais do tubo descarregando fluido interno foram calculadas, para um sistema em específico definido pelo parâmetro de massa $\beta = 0,5$, ou seja, a massa do fluido representa o 50% da massa total do sistema por unidade de comprimento, desprezando-se o comportamento viscoelástico do tubo e o efeito da gravidade ($\alpha = \gamma = 0$). Apresentam-se na Tabela 5.1, as primeiras quatro frequências naturais do sistema, determinadas a partir da solução da Equação (4.39) e considerando seis termos da série de Galerkin $N = 6$. Cada coluna

contém as frequências para diferentes velocidades adimensionais do fluido interno, no intervalo de 0 a 14 com incremento de 1, as quais estão associadas com um modo de vibração livre.

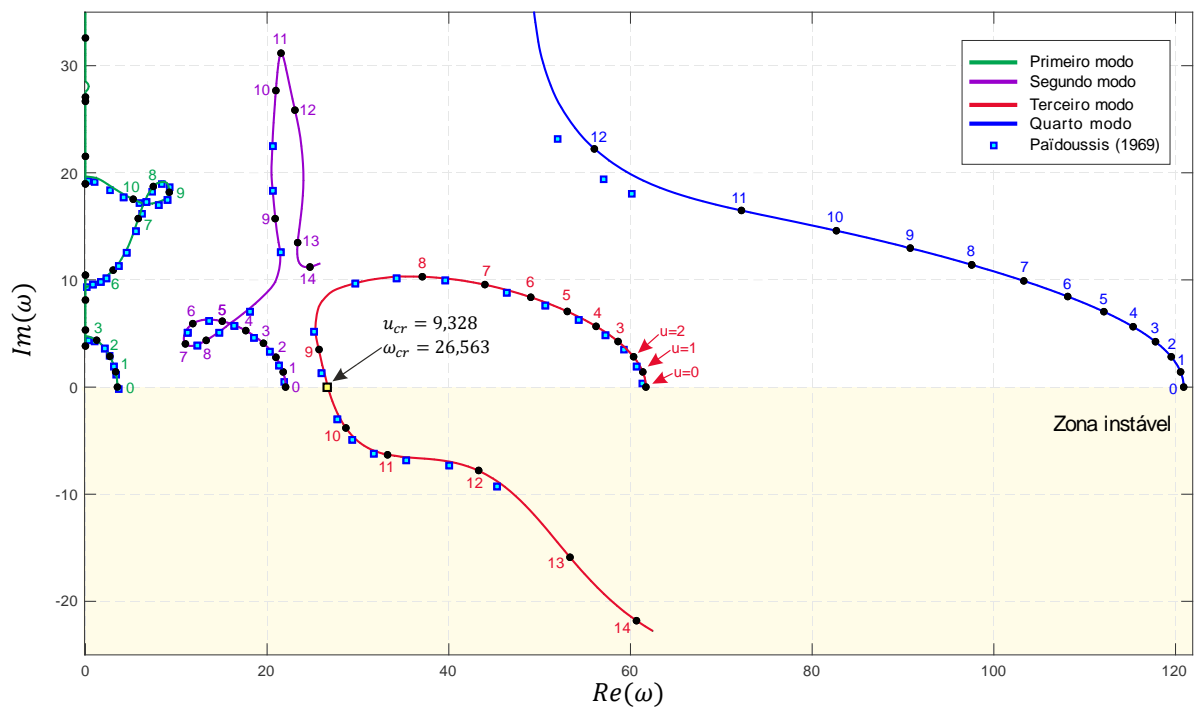
Tabela 5.1 – Primeiras quatro frequências naturais para diferentes velocidade do fluido interno, com $\beta = 0,5$; $\alpha = \gamma = 0$

u	Frequência (ω)			
	1° modo	2° modo	3° modo	4° modo
0	3,516	22,034	61,697	120,901
1	3,323+1,417i	21,765+1,409i	61,359+1,416i	120,560+1,420i
2	2,691+2,859i	20,955+2,786i	60,3420+2,833i	119,530+2,830i
3	1,123 + 4,356i	19,591 + 4,093i	58,635 + 4,251i	117,983 + 4,233i
4	3,830i 8,114i	17,646 + 5,267i	56,219 + 5,665i	115,340 + 5,633i
5	5,315i 10,435i	15,060 + 6,149i	53,048 + 7,056i	112,128 + 7,03i
6	3,049 + 10,913i	11,819 + 5,922i	49,033 + 8,385i	108,128 + 8,461i
7	5.8141 + 15.728i	11.0036 + 4.034i	43.956 + 9.559i	103,295 + 9,917i
8	7.474 + 18.722i	13.287 + 4.358i	37.109 + 10.298i	97,563 + 11,419i
9	9,231 + 18,185i	20,886 + 15,7174i	25,714 + 3,496i	97,563 + 11,419i
10	5,260 + 17,532i	20,960 + 27,659i	28,667 – 3,822i	82,673 + 14,601i
11	18,965i 21,531i	21,519 + 31,164i	33,248 – 6,320i	72,216 + 16,485i
12	26,685i 27,065i	23,061 + 25,842i	43,286 – 7,792i	56,022 + 22,237i
13	32,582i 38,252i	23.357 + 13,479i	53,337 – 15,889i	49,132 + 39,625i
14	4,388 + 40,285i	24.711 + 11.220i	60,657 – 21,813i	49,182 + 47,982i

As frequências da Tabela 5.1 são plotadas no diagrama de Argand, como pontos em negrito (●) na Figura 5.1. Além disso, são plotadas as frequências para uma grande quantidade de velocidade, $0 < u < 14$, as quais aparecem formando uma curva contínua, os pontos das

frequências agrupam-se em quatro curvas chamadas de modos, cada uma associada a um modo de vibração.

Figura 5.1 – Diagrama de Argand das frequências para um tubo elástico disposto na vertical, engastado em seu topo, descarregando fluido interno, com $\beta = 0,5$ e $\alpha = \gamma = 0$



Fonte: Elaboração do próprio autor

Na Figura 5.1, a curva vermelha representa o terceiro modo, inicia com a primeira frequência $\omega = 61,7$ correspondente à velocidade do fluido $u = 0$, representada pelo primeiro ponto em negrito sobre a curva. A frequência $\omega = 61,3 + 1,41i$ corresponde à velocidade do fluido $u = 1$ e é representada pelo segundo ponto em negrito sobre a curva.

Observa-se que para baixas velocidades do fluido no intervalo de $0 < u < 4,24$, as frequências associadas a cada um dos modos aproximam-se ao eixo das ordenadas. Fisicamente, a frequência de oscilação do tubo diminui com o incremento da velocidade do fluido. Para baixas velocidades, como foi dito antes, a força de Coriolis é maior que a força centrípeta. Portanto, o tubo apresenta oscilações amortecidas neste intervalo de velocidades, dado que a força de Coriolis funciona como uma força de arrasto.

As frequências de oscilação correspondentes ao primeiro modo permanecem sobre o eixo das ordenadas no intervalo de velocidades de $3,24 < u < 5,62$, onde a parte real da frequência é zero $Re(\omega) = 0$. Neste intervalo de velocidades, o tubo não oscila, mas apresenta um movimento superamortecido devido a que a força de Coriolis estabiliza fortemente ao sistema.

A estabilidade do sistema é definida pelo valor da parte imaginária da frequência, como descrito na Seção 2.7. O sistema é instável quando a parte imaginária de uma ou mais frequências é negativa. Observa-se na Figura 5.1 que um trecho da curva das frequências do terceiro modo localizam-se no quarto quadrante, zona de instabilidade, onde a parte imaginária dessas frequências é negativa. O ponto que resulta da interseção da curva do terceiro modo com o eixo das abscissas define o início da instabilidade do sistema, onde a frequência e a velocidade são chamadas de frequência crítica, ω_{cr} , e velocidade crítica u_{cr} . Portanto, no diagrama de Argand, conforme mostrado na Figura 5.1 a velocidade crítica é $u_{cr} = 9.328$ e a frequência crítica, $\omega_{cr} = 26.563$.

O sistema é estável para velocidades abaixo da sua velocidade crítica $u < u_{cr}$, ou seja, o tubo possui um movimento amortecido podendo ser periódico ou aperiódico. O sistema experimenta estabilidade neutra para a velocidade do fluido igual a seu valor crítico, $u = u_{cr}$, onde as amplitudes de oscilação do tubo são constantes. Por último, o sistema é instável para velocidades acima da sua velocidade crítica, $u > u_{cr}$, e experimenta o fenômeno de *flutter*, ou seja, as amplitudes de oscilação do tubo aumentam a cada ciclo de vibração.

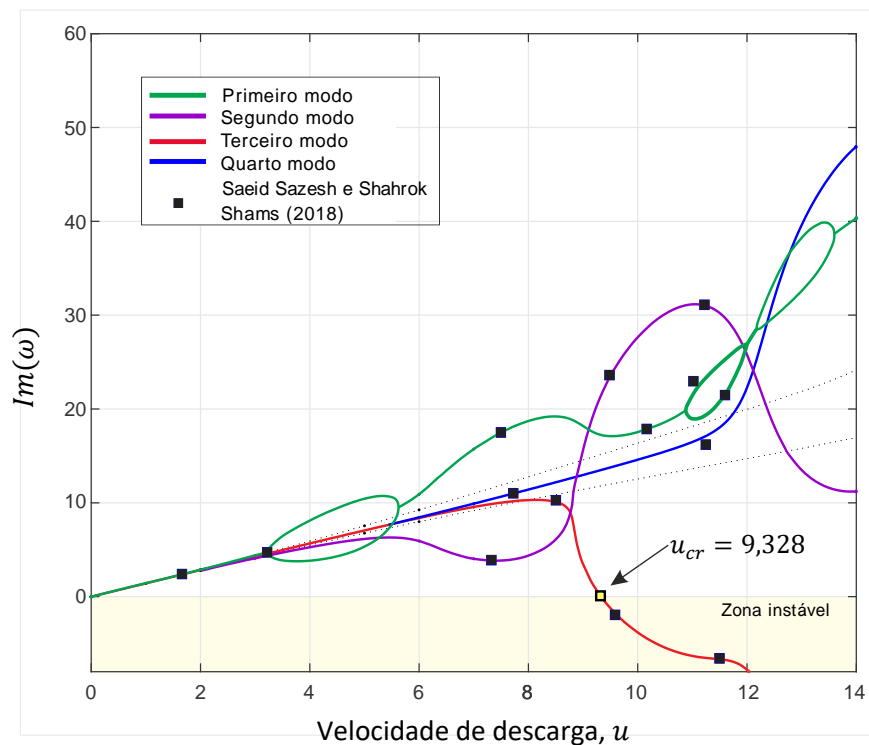
A partir do diagrama de Argand, pode-se analisar a estabilidade do sistema. A curva das frequências associadas ao terceiro modo, intercepta a fronteira de estabilidade no ponto onde a velocidade é a velocidade crítica, $u_{cr} = 9,328$.

As frequências são números complexos, portanto, é possível plotar a parte real e a parte imaginária separadamente em função da velocidade do fluido, permitindo uma análise independente da frequência natural e do grau de amortecimento.

Apresenta-se na Figura 5.2 a parte imaginária da frequência em função da velocidade do fluido. A parte imaginária da frequência está relacionada ao amortecimento do sistema, de novo: se $Im(\omega) > 0$, o sistema é amortecido; se $Im(\omega) < 0$, as amplitudes de oscilação

incrementam-se no tempo até o sistema tornar-se instável. O aumento indeterminado das amplitudes de oscilação do tubo pelo escoamento interno é um fenômeno chamado de *flutter*.

Figura 5.2 – Parte imaginária da frequência, $Im(\omega)$, como função da velocidade do fluido, u , para o tubo elástico; com $N = 6$, $\beta = 0,5$; $\alpha = \gamma = 0$.



Fonte: Elaboração do próprio autor

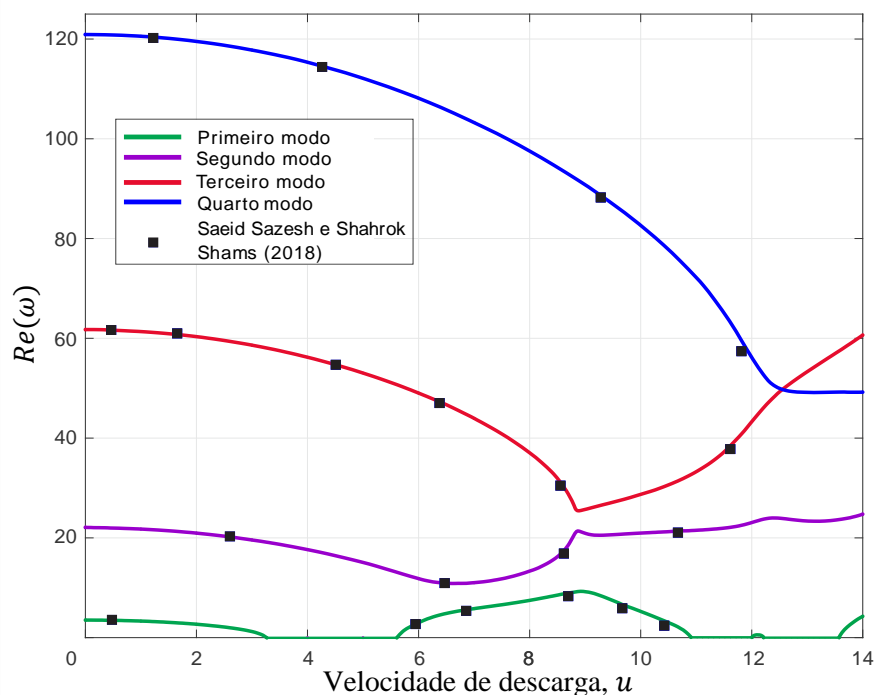
Observa-se na Figura 5.2 que para baixas velocidades de descarrega do fluido, $u < 3,24$, a parte imaginária da frequência aumenta linearmente para os quatro primeiros modos, sendo o sistema estável. As oscilações nessa faixa de velocidade são amortecidas. No seguinte intervalo de velocidades seguinte, $3,24 < u < 5,62$, o primeiro modo sofre uma bifurcação, onde o efeito amortecedor da força de Coriolis é muito maior do que a força centrípeta, resultando em uma oscilação do tubo superamortecida.

No intervalo de velocidades de $5,62 < u < 9,328$, a força centrípeta incrementa-se em maior grau que a força de Coriolis. As forças desestabilizadoras são iguais às forças estabilizadoras quando a velocidade de descarrega é a crítica $u_{cr} = 9,328$. Para esta velocidade, o tubo oscila harmonicamente com amplitudes constantes em cada ciclo ao logo do tempo. Este é o estado de estabilidade neutra e o tubo apresenta uma resposta oscilatória

permanente. O sistema perde estabilidade devido ao seu terceiro modo para velocidades acima da velocidade crítica, $u > 9,328$, nas quais o tubo experimenta *flutter* com oscilações de amplitudes crescentes a cada ciclo.

Apresenta-se na Figura 5.3 a parte real das frequências versus velocidade do fluido interno.

Figura 5.3 – Parte real da frequência adimensional, $Re(\omega)$, como função da velocidade do fluido, u , para o tubo elástico com: $N = 6$; $\beta = 0,5$; $\alpha = \gamma = 0$.



Fonte: Elaboração do próprio autor

Na Figura 5.3, observa-se para baixas velocidades de descarga do fluido, $u < 3,24$, as frequências de oscilação dos primeiros quatro modos têm uma relação inversa entre a frequência do sistema e a velocidade do fluido. Neste intervalo, com o incremento da velocidade do fluido a força estabilizadora de Coriolis aumenta em maior grau que a força centrípeta, portanto, o sistema ganha estabilidade e o tubo realiza movimentos oscilatórios periódicos e amortecidos.

No intervalo de velocidades de $3,24 < u < 5,62$, a força de Coriolis extingue as frequências do primeiro modo de vibração, enquanto as frequências dos modos restantes continuam diminuindo, como pode-se observar na Figura 5.3. Neste intervalo de velocidades, o tubo tem um movimento sobreamortecido.

No intervalo de velocidades do fluido de $5,62 < u < 9,328$, a força centrípeta, que é desestabilizadora, começa a aumentar em maior medida do que a força de Coriolis, até neutralizar o efeito amortecedor desta última. Ocorre um aumento das frequências do primeiro modo de vibração e parte do segundo modo. Para velocidades do fluido de $u > 8,86$, as frequências do terceiro modo muda sua tendência de decrescente para crescente.

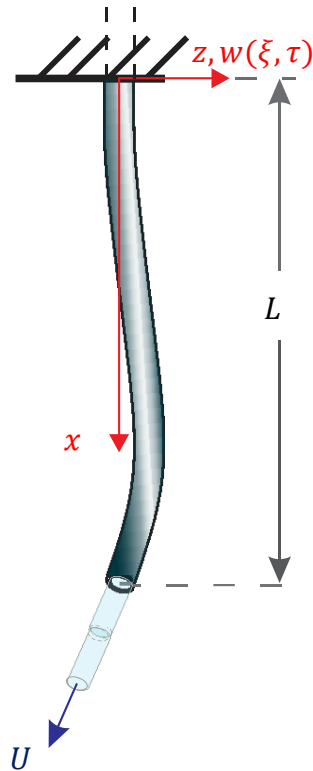
5.1.1 Verificação de resultados

O diagrama de Argand mostrado na Figura 5.1 também exhibe os resultados obtidos por Païdoussis (1969), na forma de pontos discretos de frequências. Observa-se uma boa coerência de resultados para todos os modos, exceto para o quarto, no qual as frequências complexas, apesar de seguirem a mesma tendência estão ligeiramente fora da curva de Païdoussis (1969). Em vista disso, comparou-se os resultados obtidos neste trabalho com os de outro autor. As Figuras 5.2 e 5.3 mostram os resultados obtidos por Sazões e Shams (2019), onde pode-se observar uma excelente coerência de resultados para os quatro modos, validando, assim, os resultados numéricos obtidos neste trabalho de mestrado.

5.2 Estudo comparativo de estabilidade: tubo elástico vs. viscoelástico

Esta seção aborda um estudo comparativo entre dois sistemas. Ambos os tubos de comprimento L dispostos como se mostra na Figura 5.4, são caracterizados pelos mesmos parâmetros adimensionais de massa, $\beta = 0,65$, e de gravidade, $\gamma = 10$. A diferença entre eles é material do tubo, um é feito de metal e o outro de polímero. Dessa forma, o primeiro possui comportamento elástico e o segundo viscoelástico. Considera-se para o caso do tubo de metal o parâmetro viscoelasticidade $\alpha = 0$, enquanto para o de tubo viscoelástico $\alpha = 0,0189$. O objetivo do estudo é analisar o efeito da dissipação de energia pelo material viscoelástico e como influi na estabilidade do sistema.

Figura 5.4 – Tubo descarregando fluido interno com $\beta = 0,65$ e $\gamma = 10$: tubo elástico $\alpha = 0$, e para o viscoelástico $\alpha = 0,0189$.

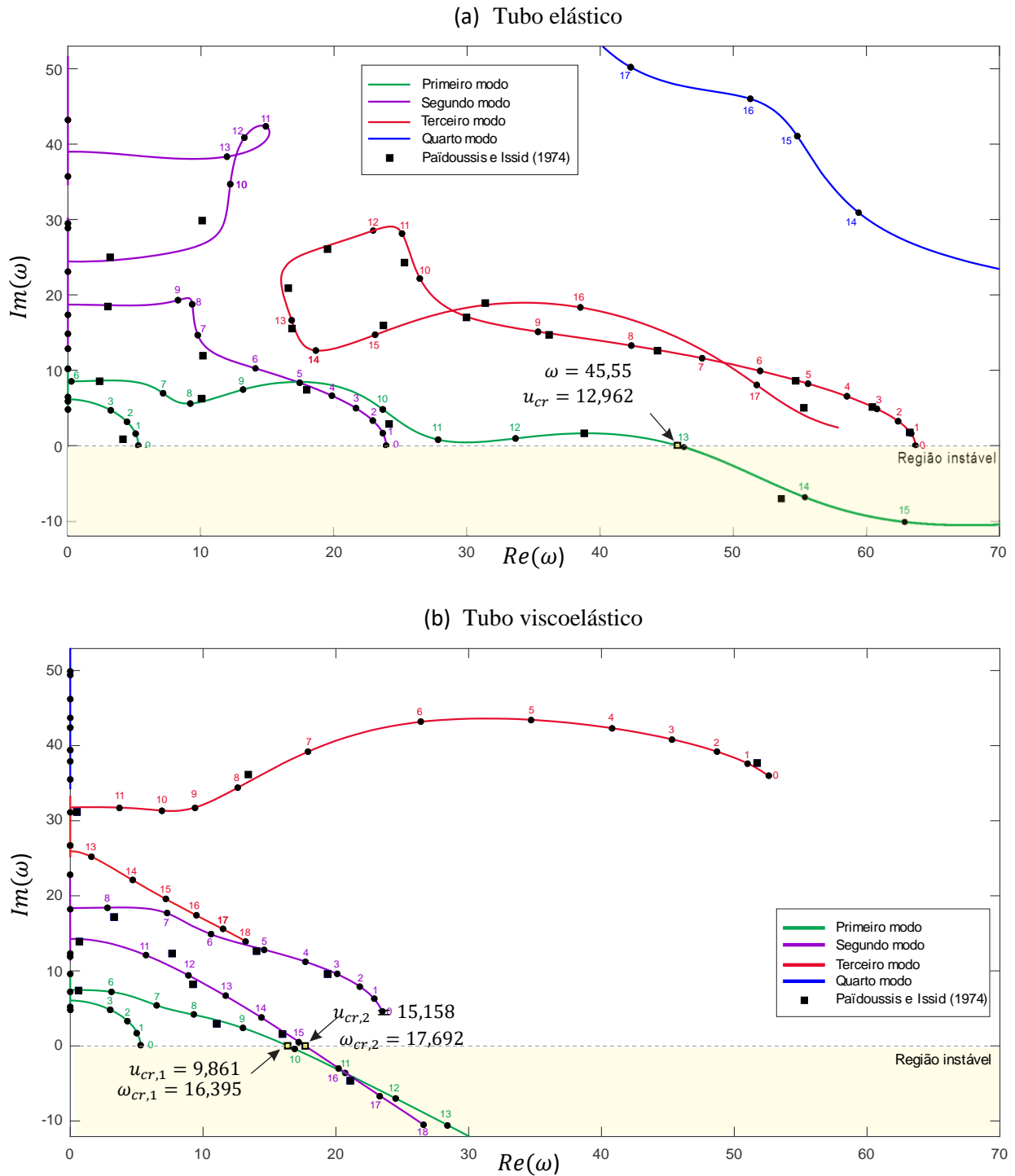


Fonte: Elaboração do próprio autor

A Figura 5.5 apresenta o diagrama de Argand para os dois sistemas, a parte (a) corresponde ao tubo de metal, enquanto a parte (b) ao tubo viscoelástico. As frequências plotadas nesses diagramas foram obtidas através da solução da Equação (4.39), considerando seis termos da série de Galerkin, $N = 6$, e variando a velocidade do fluido interno de 0 até 18.

Os pontos discretos em negrito (●) na Figura (5.5) representam as frequências para as velocidades de valor inteiro para o tubo elástico e viscoelástico, e os valores numéricos correspondentes podem ser encontrados na Tabela B.1 e B.2, respectivamente, para o tubo elástico e viscoelástico, no Apêndice B. O quadrado amarelo (■) indica a velocidade crítica do sistema. Para validar os resultados, também foram plotadas as frequências calculadas por Gregory e Issid (1974), representadas por pequenos quadrados em negrito (■), verificou-se uma boa concordância entre resultados.

Figura 5.5 – Diagrama de Argand para um tubo disposto na vertical, engastado em seu topo, descarregando fluido, com $\beta = 0,65$ e $\gamma = 10$: (a) tubo elástico, $\alpha = 0$; (b) tubo viscoelástico, $\alpha = 0,0189$



O diagrama de Argand para o sistema elástico, Figura 5.5 (a), mostra a curva de frequências de cor verde do primeiro modo atravessando a fronteira de estabilidade no ponto $\omega = 45,55$, o que define a velocidade crítica $u_{cr} = 12,96$ do sistema. A introdução o efeito

viscoelástico do material, as frequências do sistema são alteradas, resultando o diagrama de Argand apresentado na Figura 5.5 (b). Agora, é possível observar duas curvas que atravessam a fronteira de estabilidade: a curva de cor verde associada ao primeiro modo no ponto $\omega_{cr,1} = 16,395$, que define a primeira velocidade crítica $u_{cr,1} = 9,861$; e a segunda de roxo associada ao segundo modo no ponto $\omega_{cr,2} = 17,692$ que define a segunda velocidade crítica $u_{cr,2} = 15,158$.

Ambos os sistemas se tornam instáveis a partir da sua primeira velocidade crítica, pela bifurcação simples de Hopf de seu primeiro modo como vê-se na Figura 5.5 (a) e (b). Para velocidades acima da velocidade crítica, os tubos experimentam o fenômeno de flutter, ou seja, realizam movimentos oscilatório periódico com amplitudes que aumentam a cada ciclo ao longo do tempo.

Observa-se a Figura 5.5 (a) para o tubo elástico para baixas velocidades, $0 < u < 3,99$, que todos os modos se aproximam ao eixo das ordenadas, ou seja, a parte real da frequência diminui com o aumento da velocidade do fluido. Fisicamente, nesse intervalo de velocidades a força de Coriolis é maior que a força centrípeta. Portanto, como já foi dito, o tubo apresenta um movimento oscilatório periódico e amortecido, devido a que a força de Coriolis funciona como uma força de arrasto.

As frequências do primeiro modo do tubo elástico, como mostra na Figura 5.5 (a), permanecem sobre o eixo das ordenadas no intervalo de velocidades de $3,99 < u < 5,99$, onde a parte real da frequência é zero. Portanto, o tubo não oscila, realiza um movimento superamortecido. As frequências do segundo modo também permanecem sobre o eixo das ordenadas no intervalo de velocidades de $9,79 < u < 12,25$. No entanto, nesse último intervalo o tubo realiza movimentos oscilatórios amortecidos, devido ao fato de que o primeiro modo dita o tipo de movimento do tubo e o segundo modo contribui com um amortecimento desprezável.

Em relação ao tubo viscoelástico, Figura 5.5 (b), suas frequências para baixas velocidades do fluido no intervalo de $0 < u < 3,89$, os primeiros três modos aproximam-se do eixo das ordenadas, a parte real das frequências diminui com o aumento da velocidade do fluido. Observa-se uma relação inversa entre a frequência e a velocidade. Nesse intervalo de

velocidades, a força de Coriolis é maior que a força centrípeta, adicionalmente o sistema dissipa energia devido à característica viscoelástica do tubo, o que contribui à estabilidade do sistema. O movimento do tubo, ditado pelas frequências do primeiro modo, portanto, é oscilatório e amortecido.

A parte real das frequências do tubo viscoelástico é zero no primeiro modo na faixa de velocidades de $3,89 < u < 5,61$, no segundo modo na faixa de $8,16 < u < 10,25$, e no terceiro modo na faixa de $11,34 < u < 12,77$. As frequências reais contribuem com amortecimento ao sistema em maior a menor medida, embora a característica do movimento do tubo seja ditada pela frequência do primeiro modo. Por conseguinte, o tubo realiza um movimento superamortecido na faixa de $3,89 < u < 5,61$.

Observa-se as mudanças nas curvas de frequências da Figura 5.5 (b) em relação à Figura 5.5 (a), devido à dissipação viscoelástica do material do tubo. Tal dissipação de energia eliminou a influência do quarto modo na estabilidade do sistema. Além disso, o segundo modo passa a contribuir com amortecimento negativo, desestabilizando o sistema e contribuindo com uma segunda velocidade crítica, $u_{cr,2} = 15,158$. Também é importante notar que a velocidade crítica do sistema viscoelástico é menor que a do sistema elástico $u_{cr,1} < u_{cr}$. Surge aqui a questão sobre se a dissipação de energia pelo material tem um efeito desestabilizador para qualquer sistema ou apenas neste caso específico, que levou à instabilidade ao sistema. Essa questão que é analisada e discutida em detalhe na Seção 5.2.2.

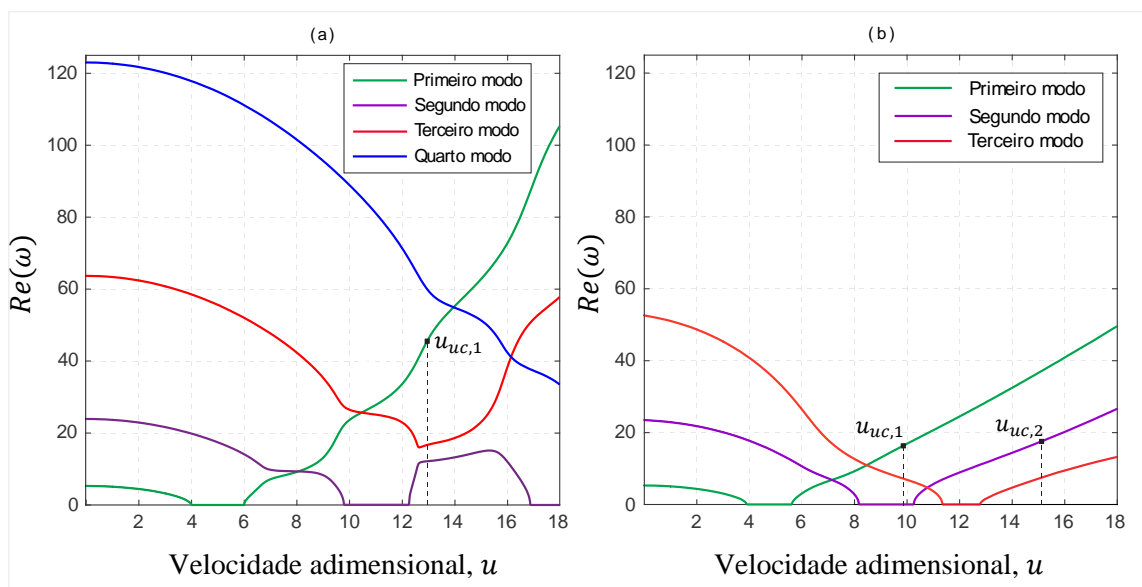
Os diagramas de Argand mostrados na Figura 5.5 também apresentam alguns pontos discretos de frequências do artigo de Païdoussis e Issid (1974) representados por pequenos quadrados em negrito (■), os quais, em sua maioria, estão sobre as curvas de frequências calculadas neste trabalho de mestrado, o que confirma a validade dos resultados obtidos.

Apresenta-se nas Seções 5.2.1 e 5.2.2 a parte real e imaginária das frequências em função da velocidade do fluido, separadamente, para analisar o efeito da viscoelasticidade do material na dinâmica do tubo.

5.2.1 Efeito da viscoelasticidade sobre as frequências

Apresenta-se na Figura 5.6, a parte real das frequências em função da velocidade, a fim de estudar o efeito do aporte viscoelástico do material sobre as frequências de oscilação do tubo.

Figura 5.6 – Parte real da frequência em função da velocidade, para o tubo com $\beta = 0,65$ e $\gamma = 10$, (a) tubo elástico, $\alpha = 0$, (b) tubo viscoelástico $\alpha = 0,0189$



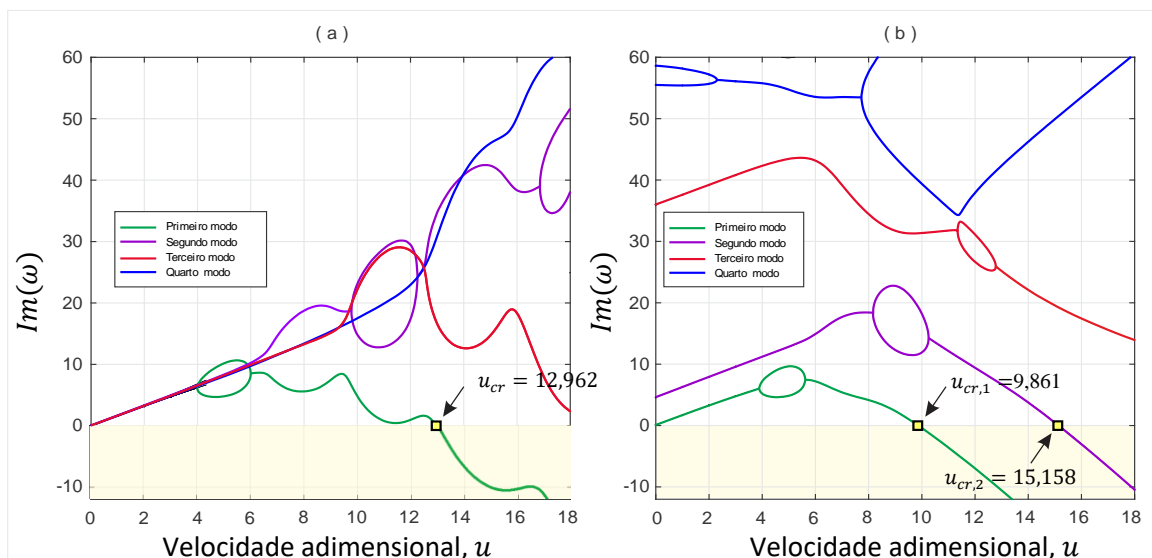
Observa-se que para baixas velocidades do fluido, $u < 3,89$, a parte real das frequências dos primeiros três modos diminui com o aumento da velocidade do fluido, tanto com o tubo elástico como o viscoelástico. Nesse intervalo de velocidades, a força de Coriolis aumenta mais do que a força centrípeta, tornando o sistema estável e o movimento do tubo amortecido. Além de disso, observa-se que o material viscoelástico contribui para a extinção das frequências do quarto modo na faixa de velocidade de 0 até 18, e diminui as frequências do terceiro modo por um montante dado entre 18 e 30%.

A dissipação não apresenta uma tendência de redução da oscilação em todos os modos, embora continue a reduzir a frequência para velocidade acima da velocidade crítica, tendência que se observa no primeiro e terceiro modo, comparando a Figura 5.6 as partes (b) e (a).

5.2.2 Efeito da viscoelasticidade no amortecimento

Apresenta-se na Figura 5.7 a parte imaginária das frequências em função da velocidade do fluido para os tubos elástico e viscoelástico.

Figura 5.7 – Parte imaginária da frequência como função da velocidade do fluido com $\beta = 0,65$ e $\gamma = 10$ (a) tubo elástico, $\alpha = 0$ (b) tubo viscoelástico, $\alpha = 0,0189$.



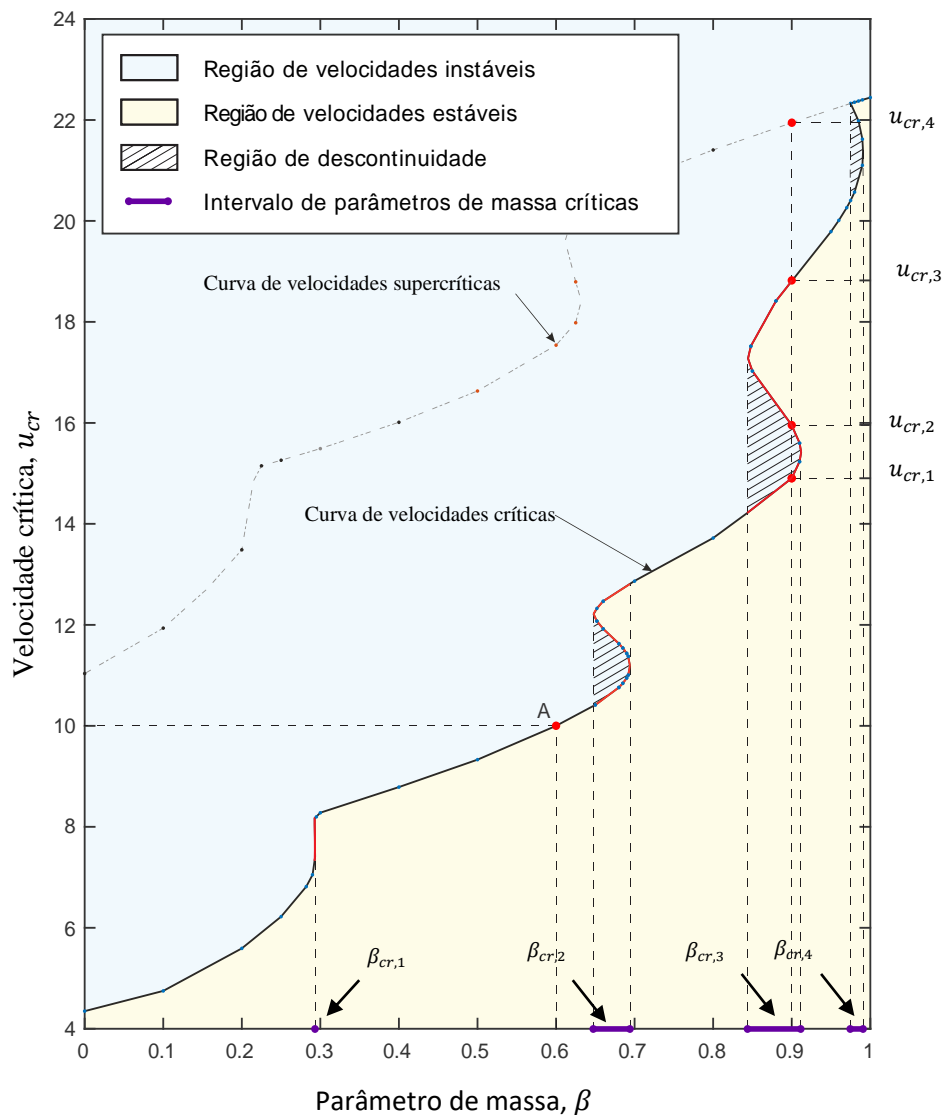
Da Figura 5.7 (a), conclui-se que o sistema do tubo elástico se torna instável via bifurcação simples de Hopf pelo primeiro modo com $u_{cr} = 12,962$, e acima dessa velocidade o tubo experimenta *flutter*. Na Figura 5.7 (b), tubo viscoelástico, são identificadas duas velocidades críticas. O sistema instável via bifurcação simples de Hopf pelo primeiro modo a partir da sua primeira velocidade crítica $u_{cr,1} = 9,861$. A viscoelasticidade altera a característica do segundo modo que passando de um efeito amortecedor para desestabilizado e, além, fornece de uma segunda velocidade crítica $u_{cr,2} = 15,158$. Para velocidades superiores à segunda velocidade crítica $u > u_{cr,2}$, tanto o primeiro quanto o segundo modo contribuem simultaneamente com amortecimento negativo ao sistema.

5.3 Velocidade crítica vs. parâmetro de massa

A curva de velocidades críticas versus parâmetro de massa, também chamadas de curva de estabilidade, permite conhecer diretamente a velocidade crítica para qualquer sistema a partir

do parâmetro de massa. A curva de estabilidade, mostrada na Figura 5.8, foi obtida utilizando o algoritmo computacional apresentado na Seção 4.6.2. Por exemplo, para o sistema definido pelo parâmetro de massa $\beta = 0,6$, sua velocidade crítica é $u_{cr}=10$, representada pelo ponto “A”.

Figura 5.8 – Curva de velocidade crítica, u_{cr} , versus parâmetro de massa β , para um tubo elástico vertical, engastado no topo, descarregando fluido interno, com $N = 6$, $\alpha = \gamma = 0$



Observa-se na curva de estabilidade que os sistemas nem sempre possuem uma única velocidade crítica. Por exemplo, o sistema definido por $\beta = 0,9$ apresenta três velocidades críticas: $u_{cr,1} = 14,903$, $u_{cr,2} = 15,955$ e $u_{cr,3} = 18,807$. O sistema perde estabilidade com sua primeira velocidade crítica, $u_{cr,1}$, e permanece instável até atingir sua segunda velocidade,

$u_{cr,2}$, também chamada de velocidade de reestabilização, porque o sistema retorna à estabilidade, mas a perde definitivamente para velocidades acima de sua terceira velocidade crítica.

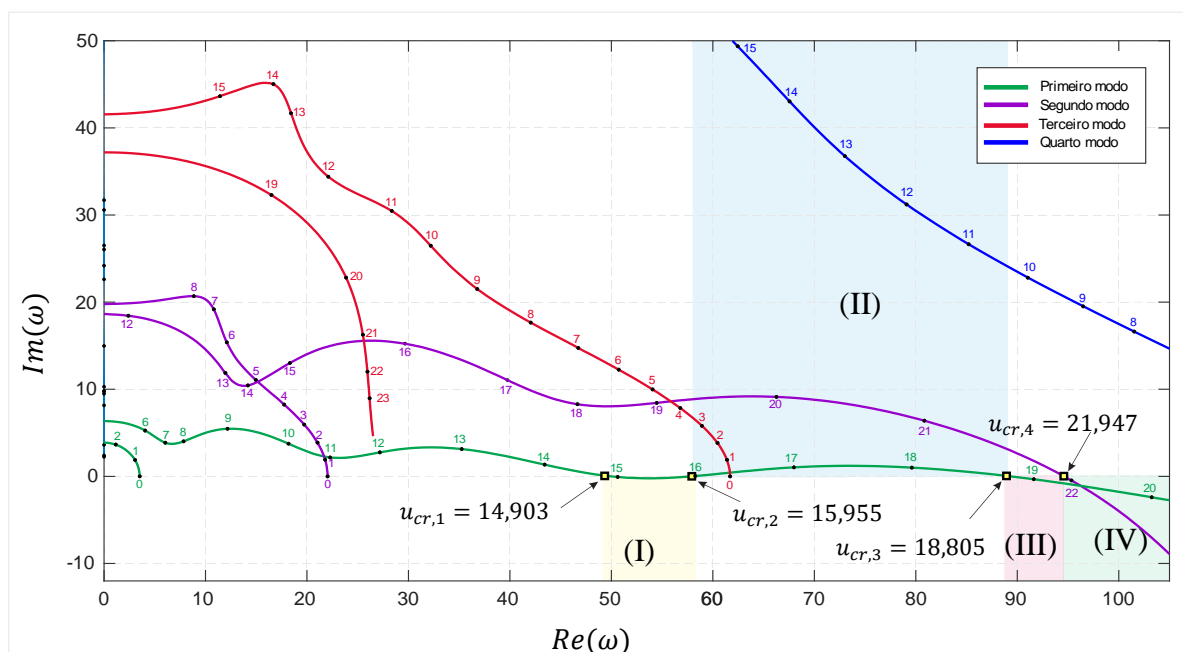
Os trechos da curva de estabilidade com forma de “S”, apresentados como linhas de cor vermelho, são chamados na literatura científica de “saltos” ou “curvas S”, e representam sistemas com mais de uma velocidade crítica. Esses sistemas podem ser agrupados e especificados pelo parâmetro de massa crítico, β_{cr} . Na Tabela 5.2 são apresentados os intervalos de parâmetros críticos definidos pelas projeções das curvas S sobre o eixo das abscissas.

Tabela 5.2 – Intervalos dos parâmetros de massa críticos β_{cr} .

Parâmetro de massa crítico	Intervalo
$\beta_{cr,1}$	0,295
$\beta_{cr,2}$	{0,652 - 0,692}
$\beta_{cr,3}$	{0,848 - 0,910}
$\beta_{cr,4}$	{0,975 - 0,990}

Para analisar a estabilidade de um sistema com parâmetro de massa crítico, por exemplo, com $\beta_{cr} = 0,9$ que está incluído no terceiro intervalo da Tabela 5.2 e tem mais de uma velocidade crítica como observa-se na Figura 5.8, é necessário complementar a análise com o diagrama de Argand apresentado na Figura 5.9. Isto permite entender o “salto” na curva de estabilidade da Figura 5.8.

Figura 5.9 – Diagrama de Argand para o tubo disposto na vertical, engastado em seu topo, descarregando fluido; com $\beta = 0,9$ e $\alpha = \gamma = 0$. Considera-se seis termos na aproximação de Galerkin



No diagrama de Argand da Figura 5.9, a curva de frequências correspondente ao primeiro modo contém as três primeiras velocidades críticas, $u_{cr,1}$, $u_{cr,2}$ e $u_{cr,3}$, definidas pelos pontos de interseção com a fronteira de estabilidade, o eixo das abscissas. Além disso, a curva de frequências do segundo modo apresenta uma quarta velocidade crítica, $u_{cr,4}$, que é definida pela sua intersecção com a fronteira de estabilidade. As quatro velocidades críticas resultantes do sistema são apresentadas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Velocidades críticas para o sistema com $\beta = 0,9$ e $\alpha = \gamma = 0$.

u_{cr}	Primeiro modo	Segundo modo
$u_{cr,1}$	14,905	
$u_{cr,2}$	15,955	
$u_{cr,3}$	18,805	
$u_{cr,4}$		21,945

O diagrama de Argand da Figura 5.9 permite uma análise por regiões: na região I, o sistema é instável na faixa de velocidades de $u_{cr,1} < u < u_{cr,2}$ pelo primeiro modo; na região

II, o sistema é estável na faixa de velocidade de $u_{cr,2} < u < u_{cr,3}$. Nessa região, o sistema retorna à estabilidade com a velocidade de reestabilização $u_{cr,2}$, mas a perde novamente com a terceira velocidade crítica, $u_{cr,3}$. Nas regiões zona III e IV, o sistema apresenta instabilidade pelo primeiro modo por flutter para velocidades acima de sua terceira velocidade crítica, $u > u_{cr,3}$. Na região IV, para velocidades acima da quarta velocidade crítica, $u > u_{cr,4}$, o sistema é instável tanto pelo primeiro quanto pelo segundo modo, ambos os modos contribuindo simultaneamente com amortecimento negativo ao sistema. A quarta velocidade crítica $u_{cr,4}$ pertence à curva de velocidades supercríticas, como observado na Figura 5.8 em linha tracejada.

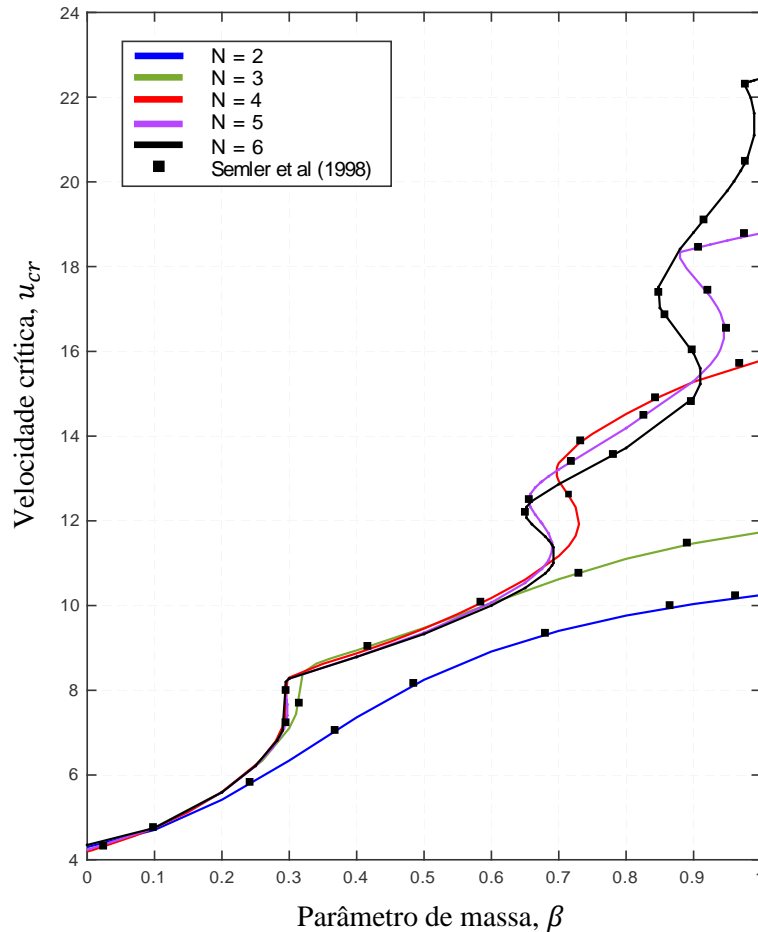
Os dois diagramas, o de Argand e a curva de estabilidade, se complementam e permitem uma análise completa da estabilidade do sistema. Enquanto o diagrama de Argand mostra as velocidades críticas para um sistema em específico e o tipo de movimento que o tubo realiza em diferentes faixas de velocidades, e a curva de estabilidade fornece informação sobre as velocidades críticas para qualquer parâmetro de massa.

5.4 Efeito do número de termos da série de Galerkin sobre a Estimativa da velocidade crítica

Para analisar o impacto do número de termos da série de Galerkin, N , na estimativa da velocidade crítica do sistema, são plotadas as velocidades críticas em função do parâmetro de massa, variando N desde 2 até 6. Lembrando que N também representa o número de coordenadas generalizadas usadas descrever o movimento do sistema. Através desse gráfico, é possível avaliar como a precisão da estimativa da velocidade crítica é afetada pelo número de termos incluídos na série de Galerkin e determinar qual valor de N é necessário para obter uma estimativa aceitável da velocidade crítica do sistema.

Desconsiderando os efeitos da gravidade e da viscoelasticidade do material, $\alpha = \gamma = 0$, a Figura 5.10 apresenta as curvas de estabilidade obtidas variando N . Para fins de comparação, alguns pontos de velocidade obtida por Semler et al. (1998) são plotados como pequenos quadrados em negrito, mostrando uma boa coerência de resultados.

Figura 5.10 – Velocidade crítica vs. parâmetro de massa, para um tubo elástico vertical engastado em seu topo, descarregando fluido, com $\alpha = \gamma = 0$, e para diferentes números de termos da série de Galerkin.



Os trechos em forma de “S” que aparecem nas curvas de estabilidade da Figura 5.10 estão relacionados com o número de equações diferenciais usadas para descrever o comportamento dinâmico do sistema, ou seja, com o número de coordenadas generalizadas $q(\tau)$. Ao aumentar o número de coordenadas generalizadas, os saltos começam a surgir. O primeiro salto, $\beta_{jump,1} = 0,295$, surge somente com a terceira coordenada generalizada $q_3(\tau)$; o segundo salto, $\beta_{jump,2} = 0,692$, surge com a quarta coordenada generalizada $q_4(\tau)$. A curva em negrito foi obtida com seis termos da série de Galerkin, ou seja, com seis coordenadas generalizadas, permitindo determinar as velocidades críticas de forma correta para a faixa completa de parâmetros de massa β .

O número adequado de termos da série de Galerkin para o cálculo correto das velocidades críticas do sistema deve ser escolhido em função do parâmetro de massa. Para um sistema de

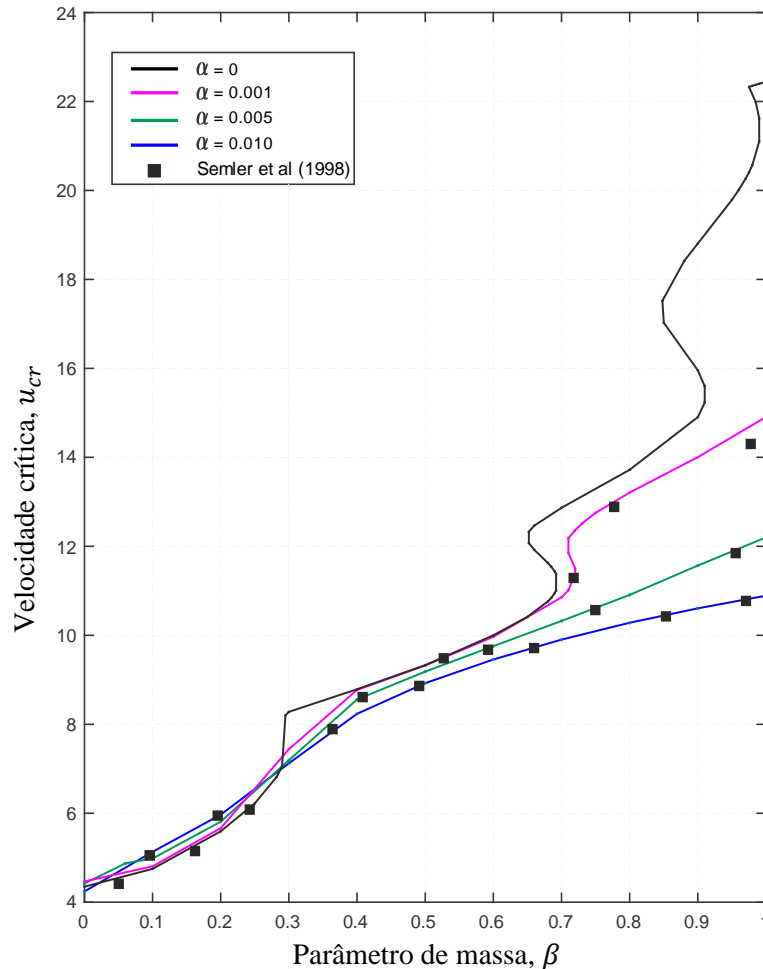
baixo parâmetro de massa, $\beta \leq 0,15$, é adequado considerar pelo menos dois termos; para sistemas com $0,15 < \beta \leq 0,3$ deve-se considerar pelo menos três termos; para sistemas com $0,3 < \beta \leq 0,65$ deve-se considerar pelo menos quatro termos; e para sistemas com $0,65 < \beta \leq 1$, um número maior ou igual a seis termos da série de Galerkin.

5.5 Efeito do coeficiente de dissipação viscoelástica

Sistemas que estão em constante interação com seu meio e submetidos a forças externas, absorvem parte da energia do meio, o que pode prejudicar o sistema. Como solução, são utilizados elementos amortecedores para dissipar parte dessa energia, mas também pode-se usar materiais com propriedades dissipativas para garantir a estabilidade da estrutura. Deve-se levar em consideração que nem toda capacidade dissipativa de energia é benéfica; pode-se dar o caso em que a perda de energia por dissipação precipite o sistema dinamicamente estável para o instável, é importante notar que essa última afirmação aparentemente é um paradoxo, indo contra a lógica comum. O efeito desestabilizador por amortecimento é bem conhecido e foi estudado de forma geral por Den Hartogs (1956), Crandall (1995) e Thomson e Tait (1879).

Na Figura 5.11 são apresentadas diferentes curvas de estabilidade para valores distintos do parâmetro de dissipação viscoelástica: $\alpha = 0$, $\alpha = 10^{-2}$, $\alpha = 10^3$ e $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$. A fim de analisar o efeito dissipativo do material viscoelástico sobre a velocidade crítica, a equação característica do sistema foi resolvida para diferentes valores de α previamente citados, obtendo-se, assim, diferentes curvas de estabilidade. Todas as curvas de estabilidade foram obtidas considerando seis termos da série de Galerkin. Para fins de validação de resultados, algumas velocidades críticas foram plotadas como pequenos quadrados em negrito, determinadas por Semler et al. (1998), mostrando uma boa coerência de resultados.

Figura 5.11 – Velocidade crítica, u_{cr} , versus parâmetro de massa, β , para diferentes valores da constante de viscoelasticidade α , para um tubo vertical, engastado em seu topo, descarregando fluido, $\gamma = 10$. Resultado obtido com $N = 6$.



De acordo com a Figura 5.11, para sistemas com baixos parâmetros de massa, $\beta < 0,29$, a constante de dissipação viscoelástica tem um leve efeito estabilizador, ou seja, incrementa ligeiramente a velocidade crítica. Para sistemas com parâmetros de massa médios, $0,29 < \beta < 0,65$, o efeito é ligeiramente desestabilizador, diminuindo a velocidade crítica. Diferentemente, para sistemas com altos parâmetros de massa, $\beta > 0,65$, o efeito é desestabilizador, diminuindo consideravelmente a velocidade crítica.

Observa-se que a curva de estabilidade de cor roxo com $\alpha = 0,001$ elimina o primeiro salto localizado em $\beta \approx 0,29$; a curva de cor verde para $\alpha = 0,005$ elimina o segundo e o terceiro salto localizados em $\beta \approx 0,7$ e $\beta \approx 0,9$, respectivamente. Portanto, um maior aporte dissipativo do material viscoelástico tende a suprimir os saltos, diminuindo os intervalos dos

parâmetros de massa crítica β_{cr} e eliminando as regiões de descontinuidade de velocidades críticas. O parâmetro adimensional de dissipação viscoelástica tem um efeito suavizador sobre a curva de velocidades críticas vs. parâmetro de massa, efeito contrário ao de aumentar o número de coordenadas generalizadas que controlam o aparecimento dos saltos.

5.6 Efeito da gravidade sobre a velocidade crítica

Os estudos experimentais conduzido pela comunidade científica para validar os modelos teóricos de tubos com fluido interno geralmente consideram tubos de material polimérico de comportamento viscoelástico, de baixo módulo de elasticidade e menor peso em relação aos metais. Nesse tipo de tubos, o efeito da gravidade é importante. Por conveniência, segue novamente a definição do parâmetro adimensional de gravidade γ , Equação 4.5,

$$\gamma = \frac{(M + m)gL^3}{EI}, \quad (5.3)$$

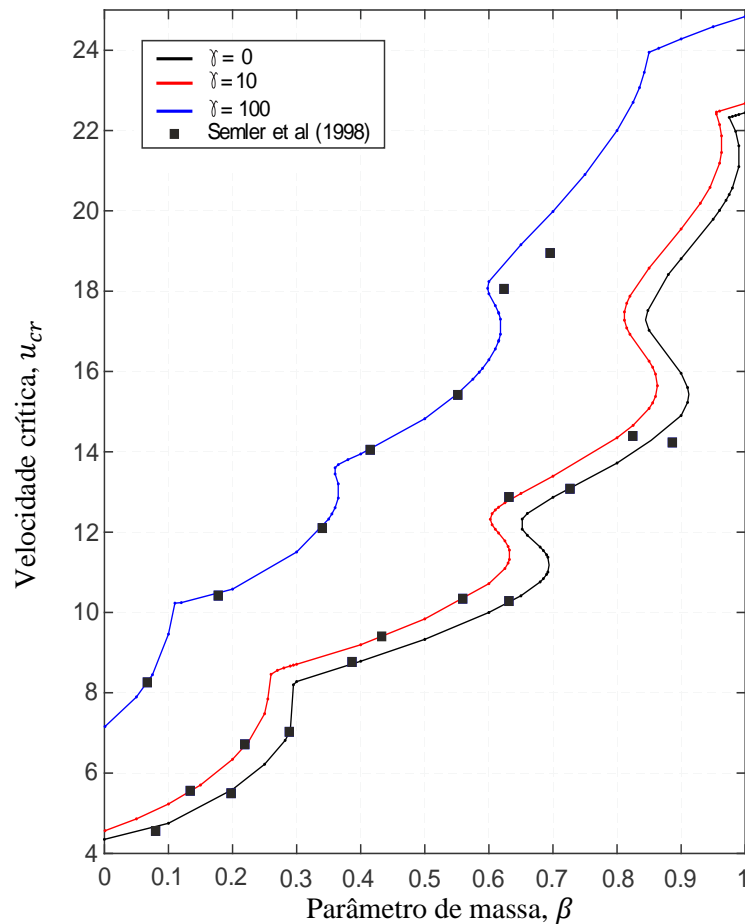
onde M e m são, respectivamente, as massas do fluido e tubo por unidade de comprimento, g a gravidade, L o comprimento do tubo e EI a rigidez à flexão. O parâmetro de gravidade é proporcional ao cubo do comprimento L do tubo e inversamente proporcional ao módulo de elasticidade E . Portanto, como o tubo objeto de estudo no presente trabalho de mestrado é longo e tem um baixo módulo de elasticidade, torna-se relevante analisar o efeito do parâmetro, γ , na estabilidade do tubo.

Ao analisar o terceiro termo da equação de movimento na forma adimensional, Equação (4.8), que é $[u^2 - \gamma(1 - \xi)] \frac{d^2\eta}{d\xi^2}$, onde η é o deslocamento e ξ a posição, é possível notar que esse termo é função da velocidade do fluido u e do parâmetro de gravidade γ . Além disso, o coeficiente $(1 - \xi)$ sempre tem um valor positivo, como ξ toma valores de entre 0 e 1. Sabe-se que a força centrípeta aumenta quadraticamente com a velocidade do fluido e atua como uma força de compressão axial no extremo livre do tubo, desestabilizando o sistema, olhando para o termo em questão, o parâmetro de gravidade representa uma força de tração devido ao seu sinal negativo, o que torna uma força estabilizadora.

Apresenta-se na Figura 5.12 as curvas de velocidades críticas versus o parâmetro de massa para diferentes valores de parâmetro de gravidade. A fim de validar os resultados são

plotadas as velocidades críticas, pequenos quadrados em negrito, determinadas por Semler et al. (1998), mostrando uma boa concordância com os resultados obtidos.

Figura 5.12 – Velocidades críticas, u_{cr} , de um tubo vertical engastado em seu topo, descarregando fluido, em função de β , para distintos valores do parâmetro de gravidade γ , com $N = 6$ e $\alpha = 0$.



Observa-se na Figura 5.12 o efeito do parâmetro adimensional de gravidade γ sobre as velocidades críticas. Os saltos em forma de “S” são mantidos e levemente suavizados, embora haja um deslocamento para a esquerda e uma redução nos intervalos dos parâmetros de massa críticos β_{cr} . Em geral, a curva de velocidades críticas é deslocada para acima e para a esquerda.

Concluía-se, ao aumentar o parâmetro de gravidade, o sistema tende a melhorar sua estabilidade, aumentando a velocidade crítica, como observado na Figura 5.12. Isto está de acordo com o que se discutiu previamente no início desta seção.

5.7 Efeito da viscosidade externa

As forças viscosas causadas pelo meio externo têm um efeito amortecedor sobre o movimento lateral do tubo. A intensidade dessas forças é determinada pelo parâmetro adimensional de amortecimento viscoso, σ . A força externa viscosa F_d que é proporcional à velocidade do deslocamento do tubo é dada por, Blevins (2003),

$$F_d = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{S}}\right)\Omega\rho A \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (5.4)$$

onde Ω é a frequência circular do tubo, ρ a densidade do fluido externo, A a área da seção externa do tubo, e $S = \Omega \frac{R_0^2}{\nu}$, onde R_0 o diâmetro externo do tubo.

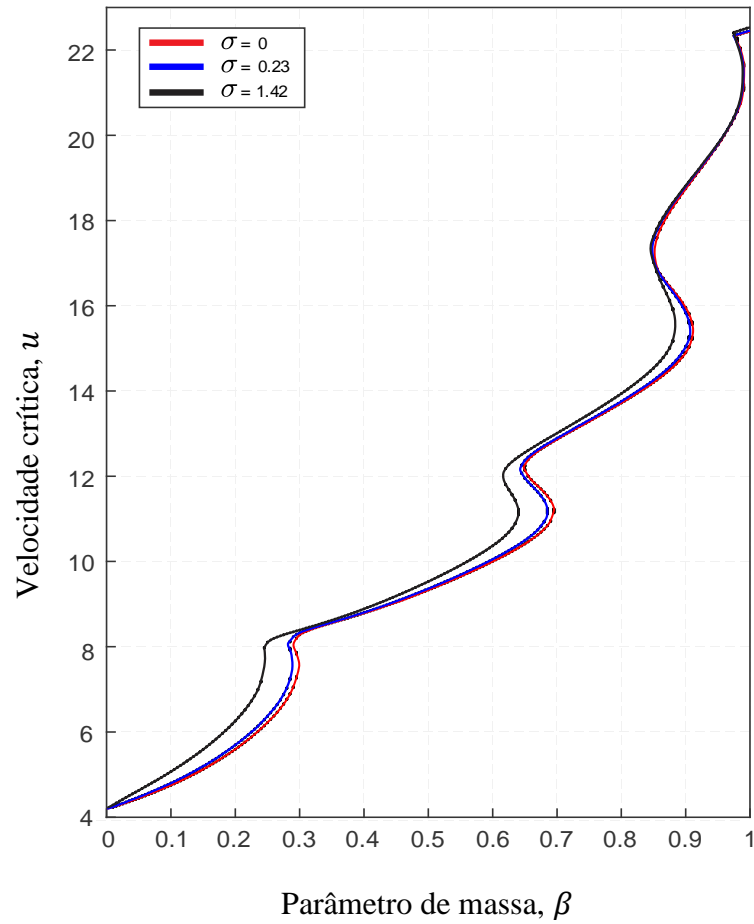
A Figura 5.13 apresenta a curva de estabilidade para distintos valores do parâmetro de viscosidade externa, a fim de analisar seu efeito sobre a velocidade crítica.

Observa-se que, em sistemas com $\beta < 0,85$, o parâmetro de viscosidade, σ , tem um efeito ligeiramente estabilizador. Isso significa que, à medida que σ aumenta, a velocidade crítica do sistema também aumenta, porém de forma leve. Para sistemas com parâmetro de massa alto, $\beta > 0,85$, o efeito de σ pode ser desprezado.

Por outro lado, é importante destacar que o efeito do parâmetro de viscosidade externa não é significativo para tubos que descarregam fluido interno. Em contraste, os parâmetros estruturais de massa, dissipação viscoelástica e gravidade, que foram analisados nas Seções 5.3, 5.4 e 5.5, respectivamente, têm um impacto significativo na estabilidade do sistema.

O resultado obtido, ligeiro incremento da velocidade crítica, está de acordo com o esperado, pois a instabilidade do sistema é causada pelo fenômeno de flutter, aumento da amplitude a cada ciclo de oscilação devido à auto-excitada do sistema pela interação do fluido com a estrutura em altas taxas de descarga do fluido. Embora a viscosidade do meio externo atue como uma força retardadora do crescimento das amplitudes, sua influência na estabilidade do sistema é mínima.

Figura 5.13 – Velocidade crítica, u_{cr} , de um tubo vertical engastado em seu topo, descarregando fluido em função do parâmetro de massa β , com $N = 6$, $\alpha = \gamma = 0$, variando o parâmetro viscoso: $-\sigma = 0$; $-\sigma = 0,23$; $-\sigma = 1,42$.



Capítulo 6

Dinâmica

Este capítulo apresenta a resposta do sistema em estudo quando submetido a uma força de excitação harmônica senoidal. Inicialmente, explica-se o método da transformada de Laplace para resolver a equação de movimento. Realiza-se a análise do efeito do parâmetro da viscosidade do meio externo sobre a resposta do tubo para velocidades acima da crítica. Finalmente, apresenta-se o histórico das configurações adotadas pelo tubo ao longo do tempo para distintos casos de interesse.

6.1 Solução da equação de movimento pela transformada de Laplace

A equação linear de movimento para um sistema de N graus de liberdade é escrita da seguinte forma,

$$[M]\{\ddot{q}(\tau)\} + [C]\{\dot{q}(\tau)\} + [K]\{q(\tau)\} = \{f(\tau)\} \quad (6.1)$$

onde, $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, as quais são quadradas de tamanho N , $\{q(\tau)\}$ o vetor de coordenadas generalizadas, e $\{f(\tau)\}$ o vetor das forças de excitação dado por,

$$\{f(\tau)\} = \sin(\omega_f \tau) k \{A_r\} \text{ com } r = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (6.2)$$

onde ω_f é a frequência da força de excitação, k é o fator de conversão adimensional e A_r é a r -ésima amplitude de oscilação da força. Quando a frequência natural do sistema, ω , coincide com a frequência da força de excitação, $\omega = \omega_f$, a resposta tem grandes amplitudes, condição denominada como ressonância, fenômeno indesejável que causa a falha do sistema, Rao (2004).

O método da transformada de Laplace é utilizado para obter a resposta de sistemas dinâmicos lineares. A transformada de Laplace da função $q(\tau)$ é $\mathcal{L}(q(\tau))$, e é dada pela integral,

$$\mathcal{L}(q(\tau)) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} q(\tau) d\tau \quad (6.3)$$

onde s é uma quantidade complexa denominada variável subsidiária e $e^{-s\tau}$ é uma função exponencial denominada de núcleo da transformada. A transformada de Laplace é comumente representada em letra maiúscula, $Q(s) = \mathcal{L}(q(\tau))$.

Aplicando a transformada de Laplace à Equação (6.1), obtém-se,

$$(s^2[M] + s[C] + [K]) \{Q(s)\} - (s[M] + [C])\{Q(0)\} - [M]\{\dot{Q}(0)\} = \{F(s)\} \quad (6.4)$$

onde, $Q(s)$ e $F(s)$ são, respectivamente, a transformada de Laplace do vetor de coordenadas generalizadas, e de forças. Se as condições iniciais são: $\{q(0)\} = \{\dot{q}(0)\} = 0$; a Equação (6.4) é reduzida para,

$$Z(s)\{Q(s)\} = \{F(s)\}, \quad (6.5)$$

onde a matriz $Z(s)$ é chamada de matriz de impedância generalizada do sistema,

$$Z(s) = s^2[M] + s[C] + [K]. \quad (6.6)$$

A Equação (6.5) ao ser multiplicada por $Z(s)^{-1}$, resulta

$$\{Q(s)\} = Z(s)^{-1}\{F(s)\}, \quad (6.7)$$

onde $Z(s)^{-1}$ é denominada de função admitância ou, função transferência do sistema dinâmico. Para determinar $q(\tau)$, a transformada inversa de Laplace é aplicada à Equação (6.7), obtendo-se finalmente o vetor das coordenadas generalizadas do sistema,

$$\{q(\tau)\} = \mathcal{L}^{-1}(Z(s)^{-1}\{F(s)\}) \quad (6.8)$$

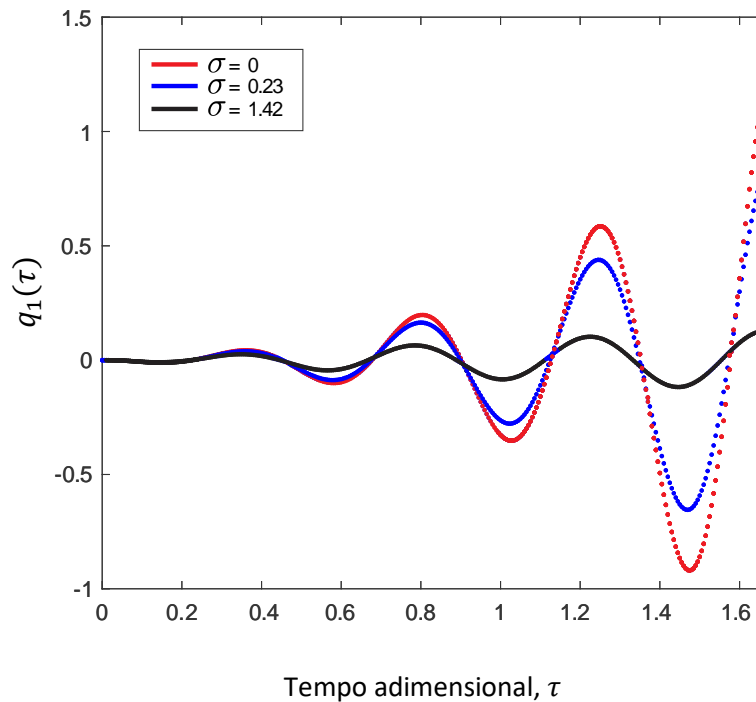
Com o conhecimento do vetor $\{q(\tau)\}$, a resposta dinâmica é obtida ao substituir as Equações (6.8) e (2.26) na Equação (4.10),

$$\eta(\xi, \tau) = \phi_1(\xi)q_1(\tau) + \phi_2(\xi)q_2(\tau) + \dots + \phi_N(\xi)q_N(\tau). \quad (6.9)$$

6.2 Efeito do parâmetro viscoso do meio externo na resposta do sistema

A Figura 6.1 apresenta a coordenada generalizada $q_1(\tau)$ como função do tempo para três valores de amortecimento viscoso, $\sigma = 1,42 ; 0,23$ e 0 para um sistema com $\beta = 0,2$ e velocidade do fluido $u = 6,5$. Da curva de velocidade crítica vs. parâmetro de massa, Figura 5.13, tem-se que a velocidade crítica para este sistema é de $u_{cr} = 5,595$. Portanto, como a velocidade do sistema em estudo está acima da sua velocidade crítica, o sistema é instável.

Figura 6.1 – Variação através do tempo da coordenada generalizada, $q_1(\tau)$, para diferentes valores do parâmetro de amortecimento viscoso, σ , para o sistema com $\beta = 0,2$, $\alpha = \gamma = 0$.



A Figura 6.1 mostra que, como esperado, a amplitude de oscilação diminui ao aumentar o amortecimento externo σ . Por outro lado, como o sistema é instável, as amplitudes das oscilações aumentam ao longo do tempo.

O sistema com um meio externo altamente viscoso não se torna um sistema estável com velocidades de fluido acima da velocidade crítica, a alta viscoelasticidade permite unicamente

ampliar o período da transição à instabilidade do sistema. Observa-se também que o período de oscilação não é modificado significativamente pela viscosidade do meio externo, incluso pode-se dizer que é mantido invariável.

6.3 História de resposta

Esta seção analisa a estabilidade através da história da resposta do tubo. A motivação é encontrar outras características tais como: a localização de onde ocorre o maior deslocamento do tubo e o tipo de regime oscilatório que apresenta.

O sistema é submetido a uma força harmônica senoidal $f(\tau) = \sin(\omega_f \tau)$. Foram conduzidas simulações da resposta dinâmica variando os parâmetros estruturais de massa β , gravidade γ , viscoelasticidade α e a velocidade interna do fluido u , com diferentes frequências excitação ω_f . Na Tabela 6.1 apresentam-se os parâmetros dos quatro tipos de sistemas que foram simulados.

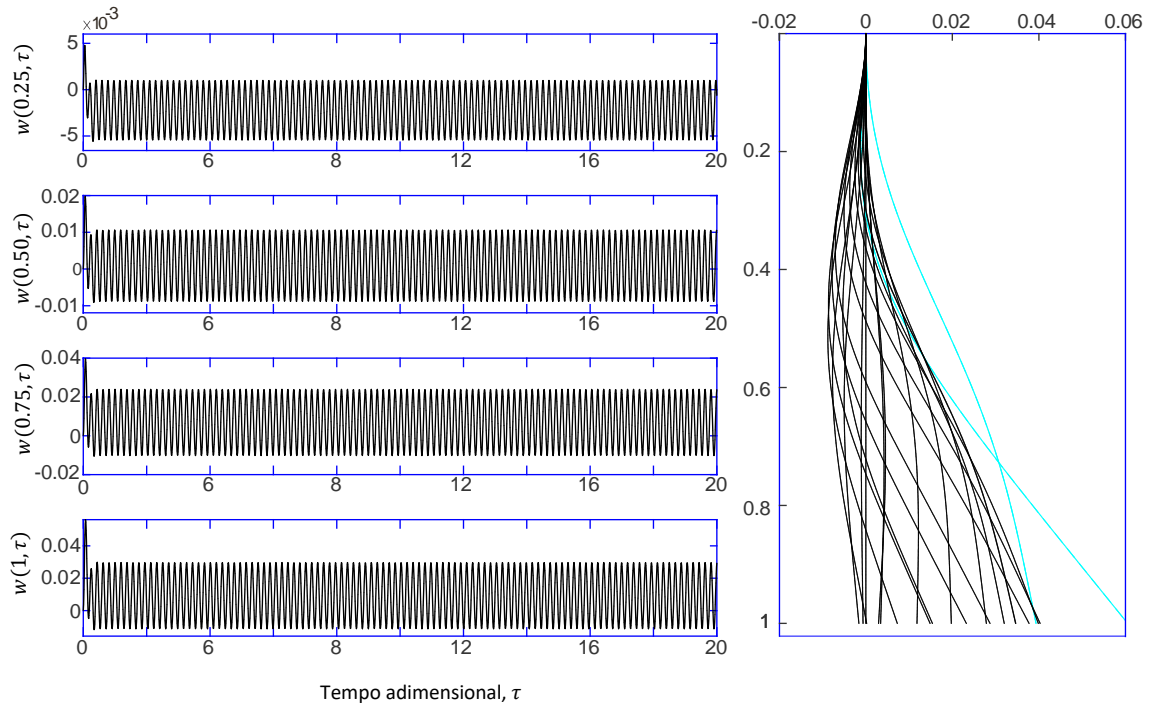
Tabela 6.1 – Parâmetros estruturais do sistema e frequência da força de excitação

Material	Caso	u	β	γ	α	ω_f
Elástico	1	9,868	0,5	0	0	16,697
Elástico	2	5	0,65	10	0	14,609
Elástico	3	11	0,8	0	0	1
Viscoelástico	4	11	0,8	0	0,01	1

6.3.1 Resposta do sistema: Caso 1

A Figura 6.2 apresenta as diferentes configurações que adota o tubo ao longo do tempo para o Caso 1 da Tabela 6.1, com velocidade do fluido igual à velocidade crítica. A força harmônica senoidal tem frequência igual à frequência natural do sistema, $\omega = \omega_f$, portanto, está em ressonância.

Figura 6.2 – Resposta dinâmica para o Caso 1 da Tabela 6.1, com velocidade igual à velocidade crítica $u_{cr} = 9,868$: (a) Deslocamento lateral $w(\xi, \tau)$ em diferentes posições; (b) configuração do tubo em regime permanente.



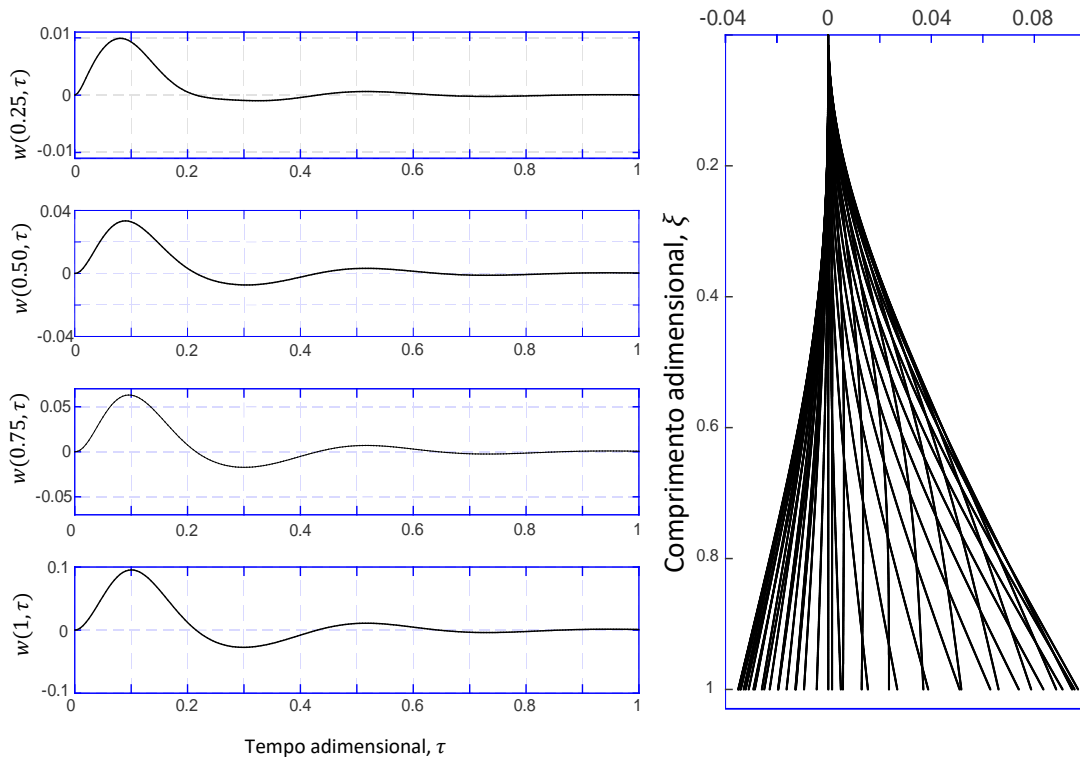
Na Figura 6.2 (b), as linhas de cor azul claro correspondem ao primeiro ciclo de oscilação, com maiores amplitudes do deslocamento do tubo devido ao desequilíbrio causado pela força de excitação em ressonância. Após esse período transiente, o tubo apresenta uma resposta permanente com amplitudes constantes e movimento oscilatório não simétrico em relação ao eixo vertical.

A resposta é o esperado, de acordo a análise de frequências do sistema baseado no diagrama de Argand, Figura (5.10), discutido na Seção 5.1, confirma a estabilidade neutra do sistema na velocidade crítica.

6.3.2 Resposta do sistema: Caso 2

Apresenta-se na Figura 6.3 as diferentes configurações que adota o tubo ao longo do tempo para o Caso 2 da Tabela 6.1, com velocidade do fluido abaixo do valor crítica, $u < u_{cr}$. A frequência da força harmônica é associada ao segundo modo, $\omega_f = 14,609$, portanto, o sistema está em ressonância.

Figura 6.3 – Resposta dinâmica do sistema, definido pelos parâmetros do Caso 2 da Tabela 6.1, com velocidade de descarrega $u = 5$: (a) Deslocamento lateral $w(\xi, \tau)$; (b) configuração do tubo



A resposta do tubo é um movimento oscilatório que cessa após quatro meios-ciclos, descrevendo um comportamento sobreamortecido. A configuração que adota o tubo é aproximadamente do primeiro modo considerado na solução de Galerkin, ou seja, o primeiro modo é o predominante na dinâmica do tubo.

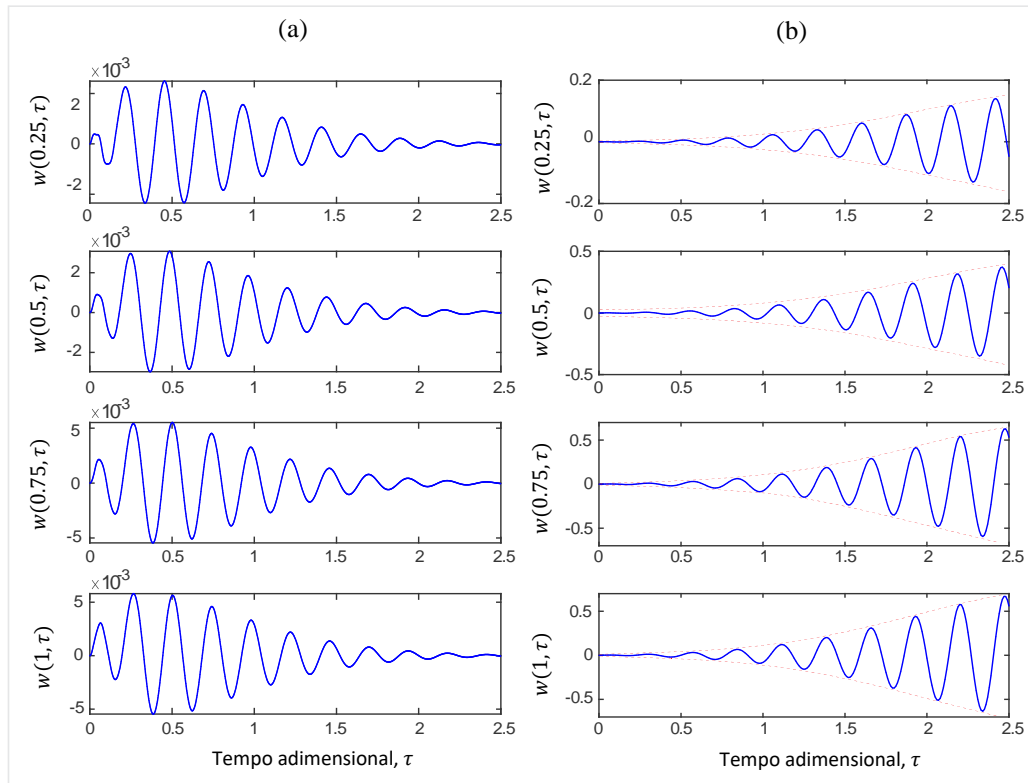
A resposta do tubo para este caso é esperada, da análise baseado no diagrama de Argand, Figura (5.10) da Seção 5.1, as frequências associadas ao primeiro modo para $u = 5$ são dois números imaginários, $\omega_{1,5} = 4,784i$ e $\bar{\omega}_{1,5} = 10,181i$, o que indica a característica de sobreamortecimento do movimento e confirma-se a estabilidade do sistema para velocidade abaixo do valor crítico, $u_{cr} = 9,328$.

6.3.3 Efeito da viscoelasticidade do material na resposta

Apresenta-se na o deslocamento lateral $w(\xi, \tau)$, para o tubo elástico e viscoelástico, respectivamente, na Figura (a) e (b), ao longo do tempo para diferentes posições, ambos tubos

unicamente diferenciam-se no parâmetro viscoelástico, Caso 3 e 4, a fim analisar o efeito do material viscoelástico na resposta.

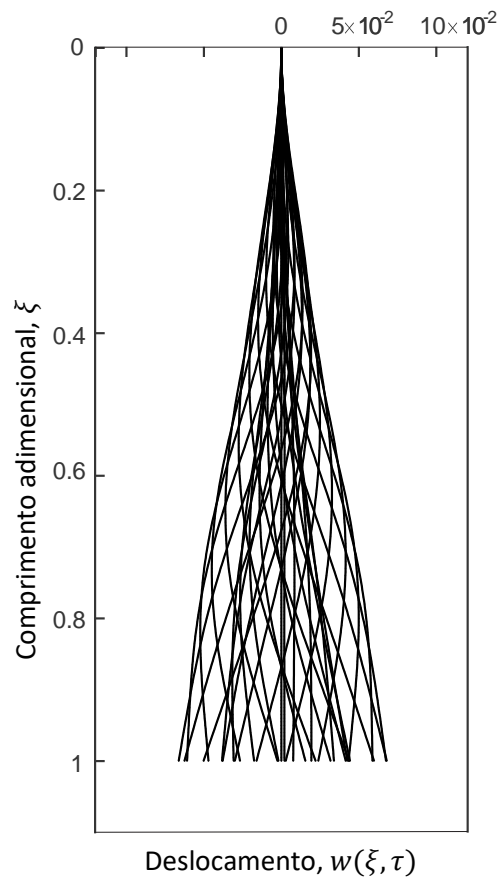
Figura 6.4 – Resposta dinâmica do sistema definido pelos parâmetros $\beta = 0,8$; $\gamma = 10$ para: (a) Tubo elástico com $\alpha = 0$ e (b) tubo viscoelástico com $\alpha = 0,01$



Comparando a resposta quase periódicas do tubo elástico e viscoelástico, Figura (a) e (b), respectivamente, observa-se que as oscilações do tubo elástico são amortecidas, no entanto que, para o tubo viscoelástico são não amortecidas, isto, deve-se ao efeito desestabilizado do material viscoelástico. Da análise da curva de velocidades, Figura 5.11 da Seção 5.6, sistemas com $\beta = 0,8$ e $\alpha = 0$ a velocidade crítica é $u_{cr} = 13,5$, embora se $\alpha = 0,01$ a velocidade crítica reduz-se até $u_{cr} = 10$. O que justifica a instabilidade da resposta vista na Figura 6.4 (b) para $u = 11$ que fica acima da velocidade crítica.

Apresenta-se na Figura 6.5 as configurações que adota o tubo puramente elástico na faixa de $0 < \tau < 2,5$ para o Caso 3 da Tabela 6.1, com velocidade do fluido abaixo do valor crítico. Onde observa-se que o tubo realiza um movimento oscilatório amortecido, simétrico em relação ao eixo vertical, e o maior deslocamento ocorre no extremo livre.

Figura 6.5 – Resposta dinâmica do tubo com velocidade de descarrega, abaixo da sua velocidade crítica $u = 5$

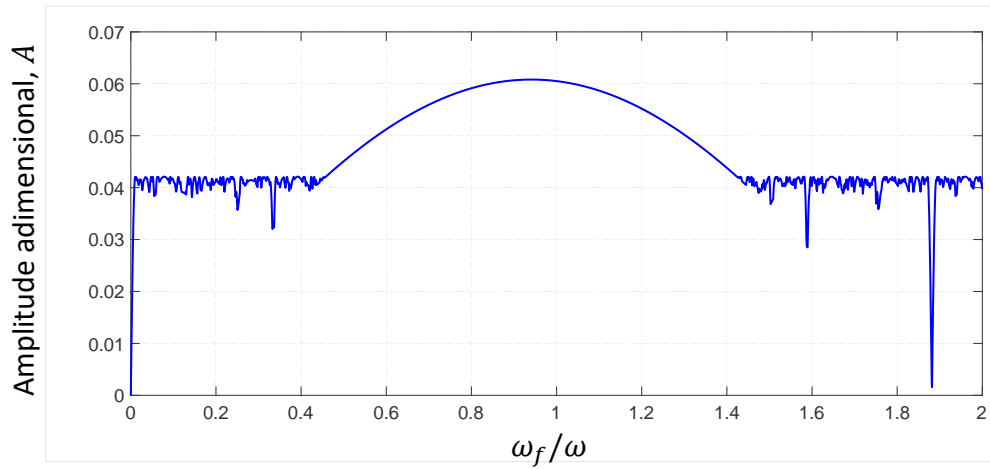


6.4 Ressonância

Como foi dito, a ressonância ocorre quando a frequência de excitação é próxima a frequências do sistema, $\frac{\omega_f}{\omega} \approx 1$, causando uma excessiva deformação da estrutura. A partir das análises das respostas dos diferentes casos discutidos na Seção 6.3, o deslocamento máximo ocorre no extremo livre do tubo.

A fim de estudar o efeito da frequência da força de excitação, ω_f , sobre o deslocamento máximo, apresenta-se na Figura 6.6 a curva de deslocamento máximo versus a frequência de excitação para um sistema com parâmetros estruturais do Caso 1 da Tabela 6.1, considerando a frequência de ressonância igual a $\omega = 16,697$.

Figura 6.6 – Amplitude adimensional de vibração do extremo livre do tubo viscoelástico descarregando fluido vs. a frequência da força de excitação, com parâmetros do Caso 1 da Tabela 6.1.



Observa-se que na faixa de $0,42 < \frac{\omega_f}{\omega} < 1$ o deslocamento do extremo livre do tubo aumenta com frequência. O excessivo deslocamento ocorre quando $\frac{\omega_f}{\omega} \approx 1$, ou seja, em ressonância. A média das amplitudes é aproximadamente igual a 0,04, porém, no caso de ressonância, a amplitude máxima é aproximadamente igual a 0,06.

Capítulo 7

Conclusões

Este capítulo apresenta as conclusões e os trabalhos futuros do presente trabalho de mestrado.

7.1 Conclusões

Realizou-se o desenvolvimento da equação diferencial de movimento do sistema a qual foi discretizada e escrita na forma matricial padrão. Identificou que a força de Coriolis é força estabilizadora e a força centrípeta, desestabilizadora, além ter sido percebido que a dissipação de energia do material viscoelástico nem sempre estabiliza o sistema. Apresentou-se o fluxo de cálculo computacional para solucionar a equação de movimento e os resultados foram validados com a literatura especializada.

O número de termos da série de Galerkin que deve ser escolhido para a correta obtenção da velocidade crítica depende do valor do parâmetro de massa, como mostrou-se na Figura 5.10. Para sistemas com $\beta \leq 0,15$, deve-se considerar pelo menos dois termos; com $0,15 < \beta \leq 0,3$, pelo menos três termos; com $0,3 < \beta \leq 0,65$ pelo menos quatro termos; e com $0,65 < \beta \leq 1$, pelo menos seis termos.

Ao analisar efeito do parâmetro adimensional de gravidade, γ , sobre a curva de velocidades críticas versus parâmetro de massa, Figura 5.11, conclui-se que para todo os sistemas na faixa de $0 \leq \beta \leq 1$, o efeito é estabilizador e incrementa significativamente a velocidade crítica.

Ao estudar o efeito do parâmetro de viscoelasticidade, α , sobre a curva de velocidades críticas versus parâmetro de massa, Figura 5.11, conclui-se que, ao aumentar α para sistemas com $0 < \beta \leq 0,3$, a velocidade crítica aumenta ligeiramente; para sistemas com $0,3 < \beta \leq$

0,7, a velocidade crítica diminui ligeiramente; e para sistemas com $0,7 < \beta \leq 1$, a velocidade crítica diminui significativamente.

Ao analisar o efeito do parâmetro de viscosidade do fluido externo, σ , sobre a curva de velocidades críticas versus parâmetro de massa, Figura 5.11, conclui-se que para sistemas com $\beta \leq 0,85$, a velocidade crítica aumenta ligeiramente e para sistemas com $0,85 < \beta \leq 1$, a velocidade crítica permanece praticamente invariável.

Em ordem crescente de importância, os parâmetros estruturais que aumentam a velocidade crítica são: o parâmetro de viscoelasticidade (para sistemas com $\beta \leq 0,3$), o parâmetro de massa, e por último, o mais importante, o parâmetro da gravidade.

A perda de estabilidade do sistema não ocorre imediatamente para velocidades acima da velocidade crítica, mas sim após um período considerável em que a amplitude de vibração cresce a cada ciclo, danificando a estrutura. A duração desse período é determinada pela força oposta ao movimento, que é controlado pelo parâmetro viscoso do meio externo, σ . Quanto maior for a magnitude de σ , maior será esse período antes da perda de estabilidade. Portanto, o parâmetro viscoso é significativo na dinâmica, resposta do sistema, além disso, aumenta ligeiramente o valor da velocidade crítica.

A resposta dinâmica do sistema permitiu verificar a análise de estabilidade baseadas nas frequências. Além de isso, permitiu observar outras características do movimento, como o máximo deslocamento que ocorre no extremo livre do tubo e assimetria do movimento oscilatório em relação à posição de equilíbrio inicial.

7.2 Trabalhos futuros

- Discretizar a equação de movimento pelo método dos elementos de finitos.
- Realizar uma formulação não linear do problema para grandes deslocamentos e analisar o comportamento do tubo com velocidade acima da velocidade crítica.
- Reduzir as vibrações induzidas pelo escoamento usando um sistema absorvedor de vibrações ligado ao tubo.

Bibliografia

Aitken, John. 1878. "XIV. An Account of Some Experiments on Rigidity Produced by Centrifugal Force." *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 5(29): 81–105.

Ashley, Holt, and George Haviland. 1950. "Bending Vibrations of a pipe line Containing Flowing Fluid." *Journal of Applied Mechanics* 17(3): 229–32.

Benjamin, T B, and A. "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid." (ii).

Benjamin, T B, and Proc R Soc Lond A. 1961. "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid - I.Theory." *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 261(1307): 457–86.

Blevins, Robert D Blevins. 2003. "Applied Fluid Dynamics Handbook." Book: 558.

Bourrières, F. J. 1939. "Sur Un Phénomène d'oscillation Auto-Entretenue En Mécanique Des Fluides Réels." *Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air* 147.

Clough, Ray W., and Joseph. Penzien. 1993. *Dynamics of Structures*.

Crandall, Stephen H. 1995. "The Effect of Damping on the Stability of Gyroscopic Pendulums" *Theoretical, Experimental, and Numerical Contributions to the Mechanics of Fluids and Solids*: 761–80.

Dodds, H. L., Jr., H. L. Runyan, and H. L. Runyan. 1965. "Effect of High-Velocity Fluid Flow on the Bending Vibrations and Static Divergence of a Simply Supported Pipe."

Edelstein, W. S. et al. 1986. "A Finite Element Computation of the Flow-Induced Oscillations in a Cantilevered Tube." *JSV* 107(1): 121–29.

Feodos'ev, V.P. 1951. "Vibrations and Stability of a Pipe When Liquid Flows through It." *Inzhenernyi Sbornik* (10): 169–70.

Gregory, R W, and M P Païdoussis. 1966a. "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid I. Theory." *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 293(1435): 512–27.

Gregory, R W, and M P Païdoussis. 1966b. "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid II. Experiments." *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 293(1435): 528–42.

Herrmann, G. 1967. "Stability of Equilibrium of Elastic Systems Subjected to Non-Conservative Forces." *Applied Mechanics Reviews* 20, 103-10.

Herrmann, G., and S. Nemat-Nasser. 1967. "Instability Modes of Cantilevered Bars Induced by Fluid Flow through Attached Pipes" *International Journal of Solids and Structures* 3(1): 39–52.

- Housner, G. W. 1952. "Bending Vibrations of a Pipe line Containing Flowing Fluid." *Journal of Applied Mechanics* 19(2): 205–8.
- Long, R. H. 1955. "Experimental and Theoretical Study of Transverse Vibration of a Tube Containing Flowing Fluid." *Journal of Applied Mechanics* 22(1): 65–68.
- Meirovitch, Leonard. 2000. "Fundamentals of Vibration.": 806.
- Meriam, J. L. 1975. *Dynamics*. 2nd ed.
- Nemat-Nasser, S., S. N. Prasad, and G. Herrmann. 1966. "Destabilizing Effect of Velocity-Dependent Forces in Nonconservative continuous Systems." *AIAA Journal* 4(7): 1276–80.
- Ni, Q., Z. L. Zhang, and L. Wang. 2011. "Application of the Differential Transformation Method to Vibration Analysis of Pipes Conveying Fluid." *Applied Mathematics and Computation* 217(16): 7028–38.
- Niordson, F.I. 1953. "Vibrations of a Cylindrical Tube Containing Flowing Fluid" *Kungliga Tekniska Hogskolans Handlingar (Stockholm) (No. 73.)*.
- Païdoussis, M P et al. 2002. "Linear and nonlinear dynamics of cantilevered cylinders in axial flow. part 1: physical dynamics." *Journal of Fluids and Structures* (6): 691–713.
- Païdoussis, M. P. 1970. "Dynamics of Tubular Cantilevers Conveying Fluid." *Pressure Vessels Piping Design Anal* 2: 1347–65.
- Païdoussis, M. P., and N. T. Issid. 1974. "Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid." *Journal of Sound and Vibration* 33(3): 267–94.
- Païdoussis, M. P., and G. X. Li. 1993. "Pipes Conveying Fluid: A Model Dynamical Problem." *Journal of Fluids and Structures* 7(2): 137–204.
- Païdoussis, Michael. 2013. *1 Fluid-Structure Interactions: Second Edition Fluid-Structure Interactions Volume 1: Slender Structures and Axial Flow*. Elsevier Ltd.
- Rao, Singiresu S. 2004. *Mechanical Vibrations*. Pearson Prentice Hall.
- Sällström, J.H. e Åkesson, B.Å. 1990. "Fluid-Conveying Damped Rayleigh-Timoshenko Beams in Transverse Vibration Analyzed by Use of an Exact Finite Element. Part I: Theory. *Journal of Fluids and Structures*." *Journal of Fluids and Structures*.
- Sazesh, Saeid, and Shahrokh Shams. 2019. "Vibration Analysis of Cantilever Pipe Conveying Fluid under Distributed Random Excitation." *Journal of Fluids and Structures* 87: 84–101.
- Semler, C., H. Alighanbari, and M. P. Païdoussis. 1998. "A Physical Explanation of the Destabilizing Effect of Damping." *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME* 65(3): 642–48.

Stangl, Michael, Johannes Gerstmayr, and Hans Irschik. 2009. "A Large Deformation Planar Finite Element for Pipes Conveying Fluid Based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation." *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 4(3): 1–8.

Ziegler, H. 1968. *Principles of Structural Stability*.

Apêndice

Apêndice A – Parâmetros adimensionais

A adimensionalização é uma técnica fundamental em física e em engenharia para remover as unidades físicas de uma equação, tornando-a independente das unidades utilizadas. Na equação geral de movimento do sistema, Equação (3.62), é possível ser expressado em sua forma adimensional, dividendo as variáveis x e w por um comprimento de referência, L , como segue,

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (\text{A.1})$$

$$\eta = \frac{w}{L} \quad (\text{A.2})$$

e dividimos o tempo, t , por um tempo referencial, t_{ref} , resultando o parâmetro adimensional de tempo τ , da forma:

$$\tau = \frac{t}{t_{ref}} \quad (\text{A.3})$$

De modo que $x = L\xi$, $w = \eta L$ e $t = \tau t_{ref}$. Substituindo as relações últimas na Equações (3.62), e logo aplicando a regra da cadeia, $\frac{d^n w}{dx^n} = \frac{d^n \eta}{L^{n-1} d\xi^n}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{E^* I}{t_{ref} L^3} \frac{d^5 \eta}{d\xi^4 d\tau} + \frac{EI}{L^3} \frac{d^4 \eta}{d\xi^4} + \frac{(MU^2 - (M + m)L(1 - \xi)g)}{L} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \frac{2MU}{t_{ref}} \frac{d^2 \eta}{d\xi d\tau} \\ + \frac{(m + M)g}{L} \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{(m + M)L}{t_{ref}^2} \frac{d^2 w}{d\tau^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

dividindo a Equação (A.4) por $\frac{EI}{L^3}$, resulta

$$\begin{aligned} \frac{E^*}{Et_{ref}} \frac{\partial^5 \eta}{\partial \xi^4 \partial \tau} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + \frac{(MU^2 - (M + m)(1 - \xi)gL)L^2}{EI} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \frac{2MUL^3}{Et_{ref}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} \\ + \frac{(m + M)g}{L} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \frac{(m + M)L^4}{EIt_{ref}^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0 \end{aligned} \quad (A.5)$$

A Equação (A.5) é adimensional, portanto, o coeficiente do último termo terá ausência de unidade, portanto, é igual à unidade

$$\frac{(m + M)L^4}{EIt_{ref}^2} = 1 \quad (A.6)$$

ou

$$\frac{1}{t_{ref}} = \left(\frac{EI}{m + M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{L^2} \quad (A.7)$$

Substituindo a Equação (A.7) em (A.3), obtém-se a o parâmetro adimensional do tempo

$$\tau = \left(\frac{EI}{m + M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{t}{L^2} \quad (A.8)$$

De forma similar o primeiro termo da Equação (A.4), o cociente é adimensional, portanto

$$\frac{E^*}{Et_{ref}} = 1 \quad (A.9)$$

substituindo a Equação (A.7) em (A.9), obtém-se

$$\frac{E^*}{L^2} \left[\frac{I}{E(m + M)} \right]^{1/2} = 1 \quad (A.10)$$

O parâmetro adimensional de viscoelasticidade α é definido pela seguinte relação:

$$\alpha = \frac{E^*}{L^2} \left[\frac{I}{E(m + M)} \right]^{1/2} \quad (A.11)$$

De forma similar a primeira somando do terceiro termo da Equação (A.5)

$$\frac{MU^2L^2}{EI} = 1 \quad (\text{A.12})$$

tomando a raiz quadrada, resulta

$$\left(\frac{M}{EI}\right)^{1/2} LU = 1 \quad (\text{A.13})$$

o parâmetro de adimensional velocidade u é definido pela seguinte relação:

$$u = \left(\frac{M}{EI}\right)^{1/2} LU \quad (\text{A.14})$$

De maneira semelhante, para o quarto termo da Equação (A.5), temos

$$\frac{MUL^3}{EIt_{ref}} = 1 \quad (\text{A.15})$$

substituindo a Equação (A.12) e (A.7) em (A.14), resulta

$$\frac{M}{m + M} = 1 \quad (\text{A.16})$$

por último o parâmetro adimensional de massa β é definido pela seguinte relação:

$$\beta = \frac{M}{m + M} \quad (\text{A.17})$$

Apêndice B – Tabelas

Tabela B.1 – Primeiras quatro frequências do sistema com $\beta = 0,65$, $\gamma = 10$ e $\alpha = 0$

Velocidade u	Frequência (ω)			
	1° modo	2° modo	3° modo	4° modo
0	5,291	23,912	63,681	123,008
1	5,085 + 1,591 <i>i</i>	23,662 + 1,661 <i>i</i>	63,360 + 1,618 <i>i</i>	122,690 + 1,616 <i>i</i>
2	4,436 + 3,164 <i>i</i>	22,911 + 3,331 <i>i</i>	62,394 + 3,243 <i>i</i>	121,730 + 3,222 <i>i</i>
3	3,221 + 4,697 <i>i</i>	21,645 + 4,970 <i>i</i>	60,785 + 4,884 <i>i</i>	120,114 + 4,824 <i>i</i>
4	5,881 <i>i</i> 6,429 <i>i</i>	19,836 + 6,63 <i>i</i>	58,530 + 6,545 <i>i</i>	117,820 + 6,431 <i>i</i>
5	4,784 <i>i</i> 10,181 <i>i</i>	17,410 + 8,341 <i>i</i>	55,616 + 8,223 <i>i</i>	114,827 + 8,060 <i>i</i>
6	0,256 + 8,518 <i>i</i>	14,092 + 10,248 <i>i</i>	52,163 + 9,912 <i>i</i>	111,121 + 9,735 <i>i</i>
7	7,151 + 6,947 <i>i</i>	9,762 + 14,656 <i>i</i>	47,655 + 11,597 <i>i</i>	106,692 + 11,490 <i>i</i>
8	9,198 + 5,579 <i>i</i>	9,349 + 18,742 <i>i</i>	42,336 + 13,277 <i>i</i>	101,536 + 13,353 <i>i</i>
9	13,155 + 7,440 <i>i</i>	8,275 + 19,294 <i>i</i>	35,325 + 15,117 <i>i</i>	95,629 + 15,352
10	23,669 + 4,801 <i>i</i>	14,842 <i>i</i> 23,083 <i>i</i>	26,453 + 4,803 <i>i</i>	88,889 + 17,508
11	27,816 + 0,788 <i>i</i>	12,854 <i>i</i> 28,865 <i>i</i>	25,114 + 28,135 <i>i</i>	81,055 + 19,886 <i>i</i>
12	33,642 + 0,952 <i>i</i>	17,348 <i>i</i> 29,489	22,942 + 28,528 <i>i</i>	71,313 + 22,944 <i>i</i>
13	46,290 – 0,252 <i>i</i>	12,200 + 34,682 <i>i</i>	16,808 + 16,184 <i>i</i>	59,453 + 30,862 <i>i</i>
14	55,365 – 6,817 <i>i</i>	13,256 + 40,869 <i>i</i>	18,626 + 12,615 <i>i</i>	54,807 + 41,071 <i>i</i>
15	62,859 – 4,601 <i>i</i>	14,870 + 42,358 <i>i</i>	23,093 + 14,698 <i>i</i>	51,276 + 46,014 <i>i</i>
16	72,871 – 10,216 <i>i</i>	11,946 + 38,342 <i>i</i>	38,509 + 18,336 <i>i</i>	42,288 + 50,205 <i>i</i>
17	89,880 – 11,473 <i>i</i>	35,724 <i>i</i> 43,209 <i>i</i>	51,755 + 8,047 <i>i</i>	37,318 + 58,619 <i>i</i>
18	105,620 – 21,073 <i>i</i>	38,134 <i>i</i> 51,620 <i>i</i>	57,945 + 2,362 <i>i</i>	33,355 + 59,851 <i>i</i>
19	115,821 + 29,887 <i>i</i>	57,145 <i>i</i> 68,496 <i>i</i>	66,272 + 2,011 <i>i</i>	30,687 + 43,698 <i>i</i>
20	123,943 – 35,353 <i>i</i>	61,511 <i>i</i> 91,320 <i>i</i>	82,744 + 3,643 <i>i</i>	36,298 + 27,115 <i>i</i>

Fonte: Dados do próprio autor

Tabela B.2 – Primeiras quatro frequências do sistema com $\beta = 0,65$ e $\gamma = 10$ e $\alpha = 0,0189$

u	Frequência (ω)			
	1° modo	2° modo	3° modo	4° modo
0	5,290	23,905	52,553	55,495i 58,636i
1	5,0449 + 1,709i	22,905 + 6,256i	51,045 + 37,597i	55,407i 58,153i
2	4,346 + 3,282i	21,800 + 7,927i	48,676 + 39,226i	55,666i 57,190i
3	3,036 + 4,799i	20,103 + 9,584i	45,328 + 10,832i	1,424 + 56,091i
4	5,1851i 7,185i	17,746 + 11,205i	40,790 + 42,232i	3,037 + 55,778i
5	4,844i 9,637i	14,611 + 12,811i	34,677 + 43,445i	5,165 + 54,716i
6	3,089 + 7,201i	10,561 + 14,885i	26,441 + 43,174i	6,629 + 53,533i
7	6,490 + 5,407i	7,276 + 17,687i	17,878 + 39,176i	5,799 + 53,503i
8	9,271 + 4,152i	2,834 + 18,427i	12,642 + 34,427i	49,422i 57,538i
9	13,044 + 2,365i	12,263i 22,755i	9,357 + 31,713i	43,677i 64,016i
10	16,916 – 0,415i	11,896i 18,215i	6,865 + 31,347i	39,380i 70,005i
11	20,678 – 3,597i	5,672 + 12,106i	3,691 + 31,749i	35,453i 76,339i
12	24,494 – 6,982i	8,914 + 9,391i	26,665i 31,134i	37,918i 82,858i
13	28,428 – 10,559i	11,650 + 6,707i	1,627 + 25,1763i	42,358i 89,554i
14	32,477 – 14,324i	14,384 + 3,786i	4,682 + 22,100i	46,236i 96,384i
15	36,627 – 18,265i	17,228 + 0,541i	7,206 + 19,558i	49,917i 103,319i
16	40,870 – 22,363i	20,213 – 2,974i	9,464 + 17,426i	53,501i 110,340i
17	45,204 – 26,602i	23,344 + 6,674i	11,467 + 15,580i	57,029i 117,434i
18	49,628 – 30,972i	26,616 – 10,492i	13,240 + 13,930i	60,523i 124,590i
19	54,144 + 35,462i	30,017 – 14,385i	14,813 + 12,418i	63,992i 131,801i
20	58,753 – 40,066i	33,532 – 18,327	16,219 + 11,011i	67,444i 139,061i

Fonte: Dados do próprio autor