



[www.utel.edu.mx](http://www.utel.edu.mx)

Maestría en Ciencias  
Computacionales y Telecomunicaciones

“Desarrollo tecnológico para los  
cálculos de ecuaciones matemáticas  
en el tema de orbitas planetarias,  
usando algoritmos genéticos”

**TESIS**

**Presenta:**

Alex Rossi Quispe Rodriguez

**Asesor:**

Carlos Ramiro Soria Cano

**Fecha**

10 de junio del 2022



## DEDICATORIA

*A mi padre por sus palabras, coraje y apoyo constante en mi vida, agradecerte a ti por todo el tiempo que me brindas y me ayudas a ser una mejor persona cada día.*

*Gracias.*

*A mi madre por su ternura, cariño y comprensión, te agradezco mamita linda por aquellos consejos y cuidados que siempre me diste.*

*Gracias*

## **AGRADECIMIENTOS**

*Agradezco a la universidad tecnológica latinoamericana en línea por haberme aceptado, ser parte de ella y abierto las puertas de su seño científico para poder estudiar la maestría, así también a los diferentes docentes que me brindaron sus conocimientos y su apoyo para seguir adelante día a día.*

*Agradezco a mi asesor de tesis Doctor Carlos Ramiro Soria Cano, por haberme brindado la oportunidad de recurrir a su capacidad y conocimiento científico, así como también haberme tenido paciencia para guiarme durante todo este periodo del desarrollo de la tesis.*

*Finalmente, y muy especial, a mis padres, Lut Eugenio Naira Quispe y Janet Rodriguez Olazabal, por haberme enseñado con esfuerzo, trabajo y constancia todo se consigue.*

## RESUMEN

En el presente trabajo de investigación se desarrolla un análisis del algoritmo genético, mediante la optimización de ecuaciones matemáticas de orbitas planetarias. Estas ecuaciones se plantean según un caso de orbita satelital geoestacionario, los datos obtenidos son incorporados a las ecuaciones y optimizadas en primera instancia mediante el método analítico de optimización el cual es usando la técnica de la segunda derivada, seguidamente se corre el programa de optimización para cada caso de las ecuaciones con distintos ajustes al algoritmo, donde se obtiene resultados óptimos según el algoritmo. Los dos datos obtenidos, mediante método analítico y algoritmo genético, son comparados para verificar la validez del resultado mediante el algoritmo genético, mostrando así un desarrollo tecnológico de resolución de las ecuaciones matemáticas en el campo de orbitas planetarias y su nivel de exactitud que esta herramienta proporciona.

Palabras clave: algoritmo genético, método analítico, fitness, satélite, ecuaciones.

## ABSTRACT

In the present research work, an analysis of the genetic algorithm is developed, through the optimization of mathematical equations of planetary orbits. These equations are raised according to a case of geostationary satellite orbit, the data obtained are incorporated into the equations and optimized in the first instance through the analytical optimization method which is using the second derivative technique, then the optimization program is run to each case of the equations with different adjustments to the algorithm, where optimal results are obtained according to the algorithm. The two data obtained, through the analytical method and genetic algorithm, are compared to verify the validity of the result through the genetic algorithm, thus showing a technological development of resolution of mathematical equations in the field of planetary orbits and its level of accuracy that this tool provides.

Keywords: genetic algorithm, analytical method, fitness, satellite, equations.

## ÍNDICE

DEDICATORIA .....	iii
AGRADECIMIENTOS .....	iv
RESUMEN .....	v
ABSTRACT .....	vi
ÍNDICE .....	vii
ÍNDICE DE FIGURAS .....	x
ÍNDICE DE CUADROS .....	xi
INTRODUCCIÓN.....	xiii
.....	8
Capítulo 1 .....	8
1 Contextualización de la problemática .....	8
1.1 Descripción de la problemática: .....	9
1.2 Formulación de la pregunta de investigación.....	10
1.3 Objetivos de la investigación.....	10
1.4 Justificación e impacto. ....	10
.....	12
Capítulo 2 .....	12
2 Fundamentación teórica de la investigación .....	12
2.1 Python .....	13
2.2 C++ .....	14
2.3 Java.....	15
2.4 Orbitas planetarias .....	16
2.4.1 Formulación Newtoniana para las Orbitas planetarias.....	17
2.4.2 Algoritmo genético .....	21
2.4.3 Métodos numéricos de Optimización.....	29
2.4.4 Método analítico. ....	30
2.5 Sistema de Variables .....	33

.....	34
Capítulo 3 .....	34
3 Aspectos Metodológicos de la Investigación.....	34
3.1 Enfoque y método de investigación .....	35
3.2 Tipo de investigación.....	35
3.3 Hipótesis.....	36
3.4 Diseño de la investigación. ....	36
3.4.1 Formulación de las ecuaciones.....	36
3.4.2 Desarrollo de las ecuaciones orbitales. ....	39
3.4.3 Diseño del algoritmo genético.....	44
3.4.4 Generación de resultados analíticos a las ecuaciones. ....	49
3.4.5 Implementación de las ecuaciones al algoritmo genético .....	57
3.5 Población y muestra/Unidades de estudio.....	59
3.6 Técnicas e instrumentos de recolección de datos .....	60
3.7 Validez y confiabilidad de los instrumentos .....	61
3.8 Técnicas de análisis de los datos .....	61
.....	63
Capítulo 4.....	63
4 Análisis de los resultados .....	63
4.1 Procesamiento de los datos .....	64
4.1.1 Potencial efectivo .....	65
4.1.2 Ecuación de Energía.....	71
4.1.3 Ecuación de Velocidad.....	77
4.1.4 Ecuación de Orbita .....	83
4.2 Discusión de los resultados. ....	89
.....	92
Capítulo 5.....	92
5 Propuesta .....	92
5.1 Denominación de la propuesta .....	93

5.2	Descripción.....	93
5.3	Fundamentación .....	93
5.4	Objetivos de la propuesta .....	94
5.5	Beneficiarios.....	94
5.6	Productos .....	94
5.7	Localización .....	95
5.8	Método .....	95
5.9	Cronograma.....	95
5.10	Recursos .....	97
5.11	Presupuesto .....	97
	Conclusiones .....	98
	Recomendaciones .....	100
	Bibliografía .....	101
	Apéndice .....	104

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.	Grafica de $V(r)$ vs $r$ .....	18
Figura 2.	La transferencia de Hohmann entre dos órbitas requiere dos impulsos. Fuente: Transferencia de Hohmann (4) Moraño.....	19
Figura 3.	Figura 2: Para hacer una transferencia entre dos órbitas elípticas con la misma línea de ápsides se puede optar entre dos posibles transferencias de Hohmann, OH1 y OH2. Fuente: Transferencia de Hohmann (8) Moraño.....	20
Figura 4.	Desarrollo gráfico del Algoritmo Genético .....	22
Figura 5.	Representación de los cromosomas y tipos de genes .....	23
Figura 6.	Figura: Población inicial con su valor obtenido por la función de aptitud o fitness 23	
Figura 7.	Desarrollo del algoritmo genético. ....	24
Figura 8.	Selección de población .....	25
Figura 9.	Cruzamiento de un punto, fuente: de autoría propia, 2021.....	27
Figura 10.	Cruzamiento en dos puntos, fuente: de autoría propia, 2021.....	28
Figura 11.	Mutación, fuente: de autoría propia, 2021 .....	28
Figura 12.	Teorema de Fermat: Si $f$ tiene un máximo o un mínimo local en $x = c$ , y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$ (Stewart,2001). Fuente: Autoría propia. ....	31
Figura 13.	Representación de un movimiento geoestacionario. ....	38

## ÍNDICE DE CUADROS

Tabla 1.	Sistema de variables de la investigación .....	33
Tabla 2.	Datos astronómicos a usar en la investigación. ....	36
Tabla 3.	Resultados obtenidos de modo analítico. ....	57
Tabla 4.	Datos obtenidos del radio óptimo para el potencial efectivo mínimo, con datos igual a uno. 66	
Tabla 5.	Datos obtenidos del potencial mínimo, con datos igual a uno. ....	66
Tabla 6.	Datos obtenidos del radio óptimo para el potencial efectivo mínimo, con datos igual a uno. 67	
Tabla 7.	Datos obtenidos del potencial mínimo, con datos igual a uno. ....	68
Tabla 8.	Datos obtenidos del radio óptimo para el potencial efectivo mínimo .....	69
Tabla 9.	Datos obtenidos del potencial mínimo, con datos igual a uno. ....	69
Tabla 10.	Datos obtenidos del radio óptimo para el potencial efectivo mínimo. ....	70
Tabla 11.	Datos obtenidos del potencial mínimo.....	71
Tabla 12.	Datos obtenidos del radio óptimo para la energía mínima. Con datos igual a uno. 72	
Tabla 13.	Datos obtenidos de la energía mínima, con datos igual a uno. ....	72
Tabla 14.	Datos obtenidos del radio óptimo para la energía mínima, con datos igual a uno 73	
Tabla 15.	Datos obtenidos de la energía mínima, con datos igual a uno. ....	74
Tabla 16.	Datos obtenidos del radio óptimo para la energía mínima. ....	75
Tabla 17.	Datos obtenidos de la energía mínima.....	75
Tabla 18.	Datos obtenidos del radio óptimo para la energía mínima. ....	76
Tabla 19.	Datos obtenidos de la energía mínima .....	77
Tabla 20.	Datos obtenidos del radio óptimo para la velocidad máxima. ....	78
Tabla 21.	Datos obtenidos de la velocidad máxima .....	78
Tabla 22.	Datos obtenidos del radio óptimo para la velocidad máxima. ....	79
Tabla 23.	Datos obtenidos de la velocidad máxima .....	80
Tabla 24.	Datos obtenidos del radio óptimo para la velocidad máxima. ....	81

Tabla 25.	Datos obtenidos de la velocidad máxima .....	81
Tabla 26.	Datos obtenidos del radio óptimo para la velocidad máxima. ....	82
Tabla 27.	Datos obtenidos de la velocidad máxima .....	83
Tabla 28.	Datos obtenidos del ángulo en radianes óptimo para el radio máximo .....	84
Tabla 29.	Datos obtenidos del radio máximo.....	84
Tabla 30.	Datos obtenidos del ángulo en radianes óptimo para el radio máximo .....	85
Tabla 31.	Datos obtenidos del radio máximo.....	86
Tabla 32.	Datos obtenidos del ángulo en radianes óptimo para el radio máximo. ....	87
Tabla 33.	Datos obtenidos del radio máximo.....	87
Tabla 34.	Datos obtenidos del ángulo en radianes óptimo para el radio máximo .....	88
Tabla 35.	Datos obtenidos del radio máximo.....	89
Tabla 36.	Cronograma de actividades .....	96

## INTRODUCCIÓN

El análisis del algoritmo genético está basado y llamado así por la inspiración de la evolución biológica y su base genético molecular, la programación evolutiva propuesta originalmente por Lawrence Fogel a principios de los sesenta, el modelo a usar en la presente investigación es de tipo generacional, en donde cada interacción se crea una población completa con nuevos individuos. (la nueva población reemplaza directamente a la antigua). En la rama de matemática aplicada se tiene a la optimización de ecuaciones como un tema fundamental de estudio, dado que en distintas áreas científicas se presenta problemas de optimización, es así que el área de ciencias físicas, la optimización de ecuaciones orbitales es importante, sobre todo en el aspecto de ser implementados en un software el cual pueda desarrollar estas ecuaciones, de forma rápida, practica y correcta, con los cuales poder realizar el análisis requerido.

El siguiente proyecto de investigación se tiene como objetivo principal el desarrollo tecnológico de la herramienta que permita desarrollar cuatro ecuaciones matemáticas de optimización utilizando el algoritmo genético, los datos para reemplazar a las ecuaciones y poder implementar en el algoritmo, se extrae de un caso práctico de análisis satelital geoestacionario. El desarrollo de la investigación tendrá el principal énfasis en construir esta herramienta tecnológica para pueda ayudar a los estudiantes docentes en el departamento de Puno -Perú, en la universidad nacional del altiplano, pero además la investigación busca probar la capacidad de precisión que pueda tener el algoritmo genético en este caso de análisis, teniendo en cuenta todas las variables del algoritmo genético que puedan mejorar el resultado, tales como el número de generaciones, número de individuos a un inicio del programa, índice de mutación y tamaño de datos.

# Capítulo 1

## 1 CONTEXTUALIZACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

## 1.1 Descripción de la problemática:

En el campo de la física, cobra un profundo interés el desarrollo de tecnologías computacionales que ayuden al fácil y rápido desarrollo de algunas ecuaciones matemáticas. Esto con el fin de indagar más en la parte de análisis de datos. En el campo de la Astrofísica se cuenta con ecuaciones de orbitas planetarias, las cuales necesitan el desarrollo de optimización, entre estas ecuaciones tenemos: ecuación de orbitas planetarias en coordenadas polares, el potencial efectivo, orbita de transferencia de Hohmann y velocidad angular.

El cálculo más exacto y rápido de algunas ecuaciones matemáticas en el tema de orbitas planetarias es importante y fundamental para el análisis, el desarrollo de estas ecuaciones tiene un desarrollo algebraico, pero la exactitud de estas respuestas es requerida.

El desarrollo teórico es importante, en el cual uno siembra las bases de su conocimiento en el tema, pero cuando desea dar el paso al análisis, necesita acceso a programas, sistemas digitales y de más herramientas que le brinden la capacidad de poder analizar y predecir eventos.

En algunos departamentos de la nación de Perú se cuenta con herramientas tecnológicas que ayudan a la precisión de estos cálculos, pero el acceso o manipulación de algunos de estos softwares son de forma restringida y no indican que procesos o algoritmos usan para brindar su respuesta a las soluciones de las ecuaciones.

En la carrera de física del departamento de Puno - Perú se tiene la necesidad de obtener resultados los más precisos posibles, en el campo de la astronomía los cálculos en orbitas planetarias son muy requeridos que sean precisos, dado que esta información es importante para el análisis de la composición de los astros, entender su origen, desarrollo, su localización y su movimiento.

Las técnicas usadas para la optimización de ecuaciones en el tema de orbitas planetarias, por lo general son métodos numéricos y no algoritmos genéticos, los métodos numéricos

cuales aproximan de manera regular. En cuestión a la capacidad computacional, se tiende a tener complicaciones ya sea en tiempo o en memoria.

Para conseguir una mejor exactitud se plantea el uso de algoritmos genéticos en la optimización de algunas ecuaciones de orbitas planetarias, comparándolas después con las aproximaciones que nos brinda otros algoritmos de métodos numéricos como gradiente.

## 1.2 Formulación de la pregunta de investigación

¿Se puede dar un desarrollo tecnológico para los cálculos de ecuaciones matemáticas en el tema de orbitas planetarias, usando algoritmos genéticos?

## 1.3 Objetivos de la investigación

### a) Objetivo General

Desarrollar e implementar tecnología para los cálculos de las ecuaciones matemáticas de orbitas planetarias, para el departamento de Puno – Perú.

### b) Objetivo específico

- Diseño de optimización de ecuaciones mediante algoritmos genéticos.
- Indicar las mejores aproximaciones teniendo en cuenta: optimización mediante métodos numéricos y optimización mediante algoritmos genéticos.
- Comparación de los resultados obtenidos con el método analítico.

## 1.4 Justificación e impacto.

La carrera de ciencias físico matemáticas, con especialidad en física requiere el desarrollo de herramientas digitales para los cálculos en el tema de orbitas planetarias, ya sea tanto para el desarrollo en clases que se imparte de los docentes a los estudiantes, como también para el análisis en la investigación.

Debido a la problemática de no contar en el departamento de puno, no cuenta con todas las ecuaciones plantaría en un mismo “programa” y dado la importancia de buenas prácticas

en los algoritmos para el desarrollo de ecuaciones, se plantea dar un desarrollo tecnológico con la intención de mejorar la precisión de los resultados.

Se pretende diseñar un programa en Python que ayude a la optimización de ecuaciones planetarias con algoritmos genéticos. Así mismo mostrar si efectivamente llega a las soluciones optimas y más exactas, comparándolas con otras técnicas de optimización.

Con este desarrollo tecnológico se logrará cubrir la necesidad de Puno – Perú, con la mayor cantidad de soluciones de ecuaciones con respecto al tema de orbitas planetarias, y que en un futuro se pueda seguir desarrollando a un más el programa. Así también el desarrollo del programa brinda la utilización necesaria de esta herramienta tecnológica en el ámbito de enseñanza como también en el análisis investigativo.

# Capítulo 2

## 2 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN

## 2.1 Python

Python es un lenguaje de programación creado por Guido van Rossum principios de los años 90 cuyo nombre está inspirado en el grupo de cómicos ingleses “Monty Python”. Es un lenguaje similar a Perl, pero con una sintaxis muy limpia y que favorece un código legible. (Gonzales, s.f.)

Se trata de un lenguaje interpretado o de script, con tipado dinámico, fuertemente tipado, multiplataforma y orientado a objetos. (Gonzales, s.f.)

Python es un lenguaje de programación de alto nivel, es decir la sintaxis que se suele usar es fácil de leer para un ser humano, a comparación de otros lenguajes como Java y C++, ya que la filosofía del lenguaje es proporcionar una sintaxis muy limpia y que beneficie con código legible. (Challenger-Pérez et al., 2014)

Es un lenguaje de programación versátil multiplataforma y multiparadigma que se destaca por su código legible y limpio. Una de las razones de su éxito es que cuenta con una licencia de código abierto que permite su utilización en cualquier escenario. Esto hace que sea uno de los lenguajes de iniciación de muchos programadores siendo impartido en escuelas y universidades de todo el mundo. Sumado a esto cuenta con grandes compañías que hacen de este un uso intensivo. Tal es el caso de Google, Facebook o YouTube, ya que permite, entre otras de sus características la automatización de procesos y ejecución de tareas en tanto en entorno cliente como servidor. (OpenWebinars, s.f.)

Python es ideal para trabajar con grandes volúmenes de datos ya que, al ser multiplataforma, favorece su extracción y procesamiento, por eso lo eligen las empresas de Big Data. A nivel científico, tiene una gran biblioteca de recursos con especial énfasis en las matemáticas para aspirantes a programadores en áreas

especializadas. Y si esto fuera poco, es posible crear videojuegos, aunque no es tan eficiente como Java o C#. (OpenWebinars, s.f.)

Una ventaja fundamental de Python es la gratuidad de su intérprete. Puedes descargar el intérprete de la página web <https://www.python.org>. El intérprete de Python tiene versiones para prácticamente cualquier plataforma en uso: sistemas PC bajo Linux, sistemas PC bajo Microsoft Windows, sistemas Macintosh de Apple, etc. (Marzal & Gracia, 2003)

## 2.2 C++

C++ es un lenguaje de programación, creado a mediados de 1980 por Bjarne Stroustrup, como extensión del lenguaje C. Este lenguaje abarca tres paradigmas de la programación: (olivares, s.f.)

- a) Programación Estructurada.
- b) Programación Genérica.
- c) Programación Orientada a Objetos.

En la actualidad, C++ es un lenguaje versátil, potente y general. Su éxito entre los programadores le ha llevado a ocupar el primer puesto como herramienta de desarrollo de aplicaciones, ya sea en Windows o GNU Linux, que es el sistema operativo en el cual basaremos este tutorial. (olivares, s.f.)

A C++ primero se le conoció como "C con clases". Luego se cambió a C++ que significa "incremento de C", dando a entender que se trata de una extensión del lenguaje de programación C. (OpenWebinars, s.f.)

Las principales ventajas de programar en C++ son: (OpenWebinars, s.f.)

- a. Alto rendimiento: Es una de sus principales características, el alto rendimiento que ofrece. Esto es debido a que puede hacer llamadas directas al sistema operativo, es un lenguaje compilado para cada plataforma, posee gran variedad de parámetros de optimización y se integra de forma directa con el lenguaje ensamblador.
- b. Lenguaje actualizado: A pesar de que ya tiene muchos años, el lenguaje se ha ido actualizando, permitiendo crear, relacionar y operar con datos complejos y ha implementado múltiples patrones de diseño.
- c. Multiplataforma
- d. Extendido: C y C++ están muy extendidos. Casi cualquier programa o sistema están escritos o tienen alguna parte escrita en estos lenguajes (desde un navegador web hasta el propio sistema operativo).

### 2.3 Java

Java fue diseñado en 1990 por James Gosling, de Sun Microsystems, como software para dispositivos electrónicos de consumo. Curiosamente, todo este lenguaje fue diseñado antes de que diese comienzo la era World Wide Web, puesto que fue diseñado para dispositivos electrónicos como calculadoras, microondas y la televisión interactiva.

En los primeros años de la década de los noventa, Sun Microsystems decidió intentar introducirse en el mercado de la electrónica de consumo y desarrollar programas para pequeños dispositivos electrónicos. Tras unos comienzos dudosos, Sun decidió crear una filial, denominada FirstPerson Inc., para dar margen de maniobra al equipo responsable del proyecto.

Inicialmente Java se llamó Oak (roble en inglés), aunque tuvo que cambiar el nombre, debido a que ya estaba registrado por otra Empresa. Se dice que este nombre se le puso debido a la existencia de tal árbol en los alrededores del lugar de trabajo de los promotores del lenguaje.

Tres de las principales razones que llevaron a crear Java son:

- a) Creciente necesidad de interfaces mucho más cómodas e intuitivas que los sistemas de ventanas que proliferaban hasta el momento.
- b) Fiabilidad del código y facilidad de desarrollo. Gosling observó que muchas de las características que ofrecían C o C++ aumentaban de forma alarmante el gran coste de pruebas y depuración. Por ello en sus ratos libres creó un lenguaje de programación donde intentaba solucionar los fallos que encontraba en C++.
- c) Enorme diversidad de controladores electrónicos. Los dispositivos electrónicos se controlan mediante la utilización de microprocesadores de bajo precio y reducidas prestaciones, que varían cada poco tiempo y que utilizan diversos conjuntos de instrucciones. Java permite escribir un código común para todos los dispositivos.

## 2.4 Orbitas planetarias

La detección de planetas extrasolares ha sido durante los últimos años un objetivo importante para los astrónomos de todo el mundo. La localización directa de estos planetas es muy complicada debido a que la luz reflejada por los mismos es muy pequeña comparada con la luz emitida por la estrella local. (Boss, 1996)

### 2.4.1 Formulación Newtoniana para las Orbitas planetarias.

El movimiento de un sistema formado por dos cuerpos que actúan bajo la influencia de una fuerza dirigida según la recta que une los centros de ambos (o sea, una fuerza central), constituye un problema de gran importancia para la física y cuya solución puede determinarse completamente. La importancia de este problema reside, en gran medida, en los objetos celestes, tales como planetas, satélites, cometas, estrellas dobles, etc. , y ciertas interacciones entre dos partículas nucleares, como es la dispersión de las partículas  $\alpha$  por los núcleos. Asimismo, en los tiempos que precedieron a la mecánica cuántica, la descripción del átomo de hidrógeno se llevaba a cabo utilizando una imagen clásica de dos cuerpos interactuando entre sí mediante fuerzas centrales y, aunque esta descripción es todavía útil en sentido cualitativo, el problema debe abordarse con las teorías cuánticas para obtener una descripción detallada. (Marion, 2003)

#### 2.4.1.1 Ecuación de energía mecánica

$$E = K + U$$

De donde al reemplazar los datos correspondientes a la energía cinética y energía potencial, se obtiene:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

#### 2.4.1.2 Potencial efectivo

De la ecuación de energía, los dos últimos términos llevan el nombre de potencial efectivo. En la ecuación siguiente se ve plasmada.

$$U_{eff} = V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Esta ecuación presenta la siguiente grafica

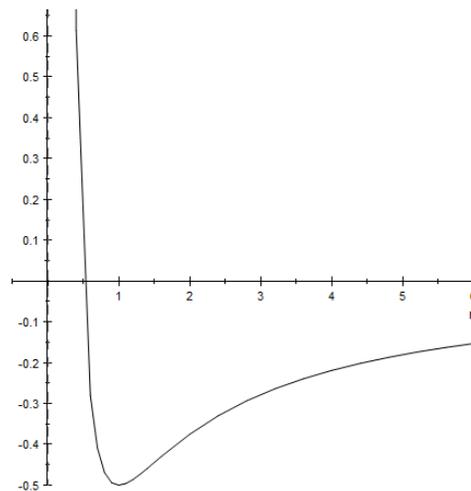


Figura 1. Grafica de  $V(r)$  vs  $r$

#### 2.4.1.3 Ecuación de orbitas.

Dado la ecuación de energía, se procede a derivar en ambos términos de la igualdad con respecto al tiempo y después realizar un cambio de variable de  $r$  a  $u$ , obtenido así la ecuación de Binet. (Finn, 2018)

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}$$

Al solucionar la ecuación diferencial de Binet se obtiene la ecuación de orbitas planetarias, la cual es la siguiente.

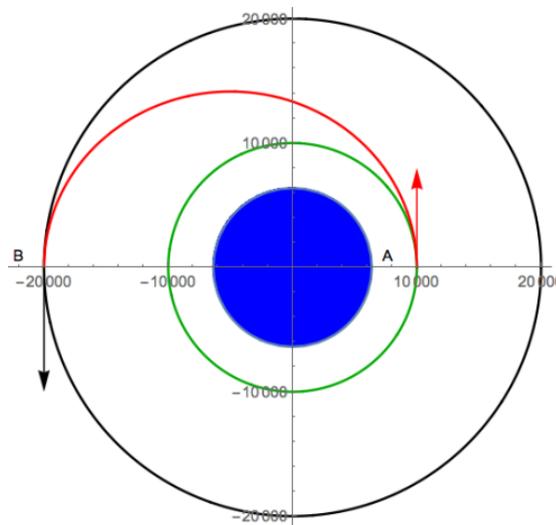
$$r(\varnothing) = \frac{L^2}{GMm^2(1 - e * \cos(\varnothing))}$$

#### 2.4.1.4 Orbitas de Transferencia de Hohmann

##### 2.4.1.4.1 O. T. H. entre orbitas circulares.

Una aplicación de las maniobras impulsivas es el estudio de una maniobra bi-impulsiva utilizada para viajar entre dos órbitas circulares coplanarias que comparten el mismo centro/foco. La

Transferencia de Hohmann es una órbita elíptica recorrida por la nave que es tangente a ambas circunferencias (ver figura 1). (Moraño,2021)



*Figura 2. La transferencia de Hohmann entre dos órbitas requiere dos impulsos.*

*Fuente: Transferencia de Hohmann (4) Moraño*

#### 2.4.1.4.2 Órbitas de transferencia de hohman entre orbital elípticas.

En la realidad las órbitas perfectamente circulares no existen por lo que sería interesante generalizar la transferencia de Hohmann a órbitas elípticas. Para hacer esta extensión hay que exigir que las órbitas elípticas sean coaxiales y coplanarias. En este caso la órbita de transferencia también debe ser tangente tanto a la inicial como a la final por lo que hay dos posibles recorridos para la ejecución de la maniobra, OH1 y OH2 (ver figura 2) no siendo evidente saber cuál es el de menor consumo. (Moraño,2021)

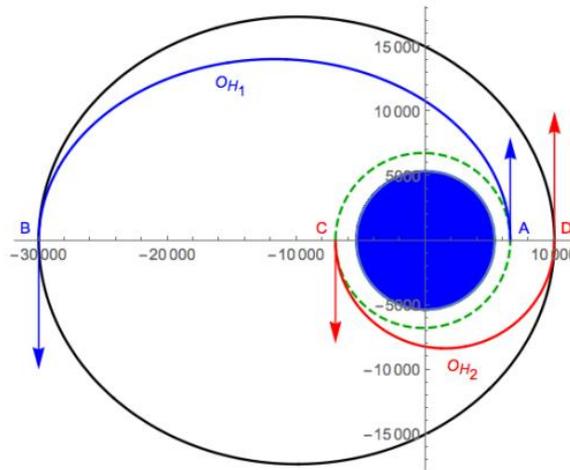


Figura 3. Figura 2: Para hacer una transferencia entre dos órbitas elípticas con la misma línea de ápsides se puede optar entre dos posibles transferencias de Hohmann, OH1 y OH2. Fuente: Transferencia de Hohmann (8) Moraño

$$\Delta V = \sqrt{\frac{GM}{R}} \left[ \sqrt{\frac{2R'}{R'+R}} - 1 \right]$$

$$\Delta V' = \sqrt{\frac{GM}{R'}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{2R}{R'+R}} \right]$$

#### 2.4.1.5 Calculo de los máximos y mínimos de la velocidad angular.

En la observación del movimiento de los cuerpos celestes, se han de distinguir dos tipos combinados de desplazamientos: (Goldstein, 1987)

- Traslación del cuerpo (por ejemplo, de la Tierra alrededor del Sol), descrita mediante una ecuación de movimiento del centro de masas del cuerpo celeste.
- Rotación en torno a un eje interno, que se describe mediante la ecuación de evolución de su momento angular. Como la fuerza gravitatoria ejercida sobre cada partícula es de tipo radial, el momento total con respecto al centro de giro es nulo.

$$\vec{L} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

#### 2.4.2 Algoritmo genético

Existen variantes de los algoritmos genéticos. Se muestra a continuación la propuesta original de Goldberg (Gol, 1989), conocida como algoritmo genético simple o también denominado canónico. Una representación gráfica del algoritmo genético se muestra en la figura 4.

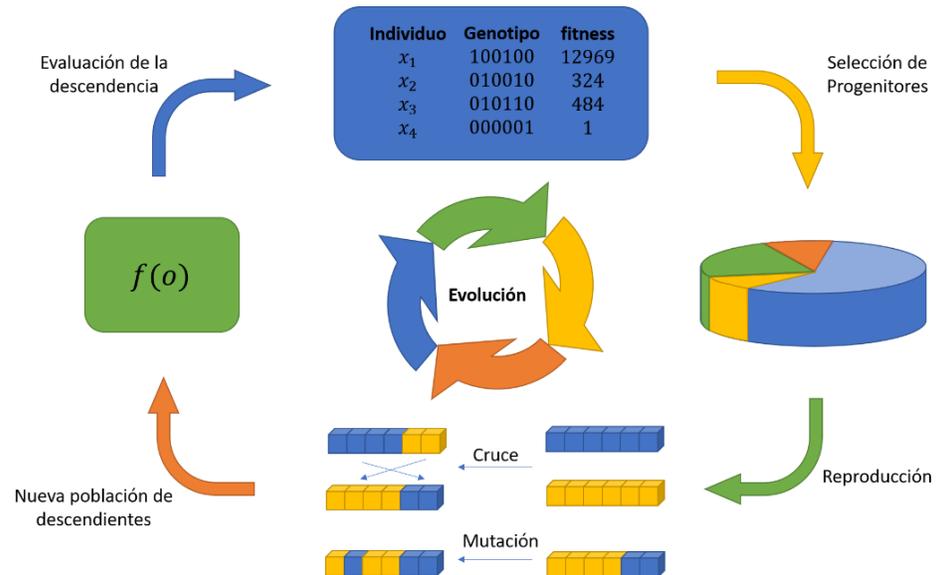


Figura 4. Desarrollo gráfico del Algoritmo Genético

#### 2.4.2.1 Representación de los elementos del espacio de soluciones:

La estructura de los datos es una población de  $n$  individuos. Cada individuo corresponde a un cromosoma el cual es una secuencia del bit. Estos cromosomas pueden estar compuestos por diferentes tipos de genes, los cuales pueden ser: números binarios, números enteros (los cuales logran representar todos los números reales), y por último pueden ser letras. En la figura, se puede observar más claramente. (Gol, 1989),

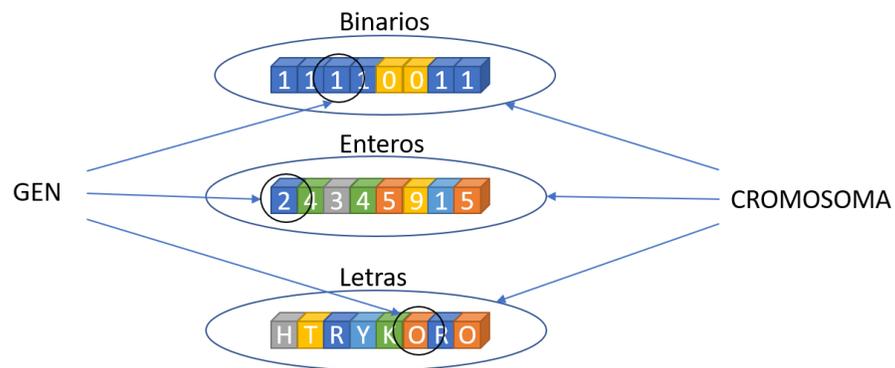


Figura 5. Representación de los cromosomas y tipos de genes

#### 2.4.2.2 Población inicial:

Se genera aleatoriamente la población inicial, que está constituida por un conjunto de cromosomas los cuales representan las posibles soluciones del problema. En caso de no hacerlo aleatoriamente, es importante garantizar que, dentro de la población inicial, se tenga la diversidad necesaria para tener una representación de la mayor parte de la población posible o al menos evitar la convergencia prematura. (Gol, 1989)

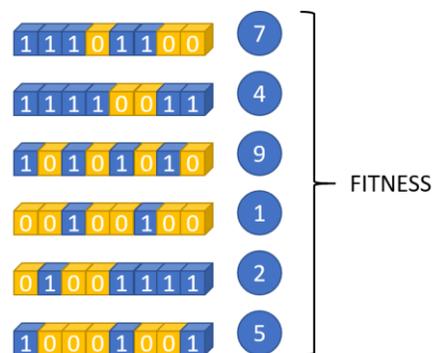


Figura 6. Figura: Población inicial con su valor obtenido por la función de aptitud o fitness

En la figura se puede observar un grupo de cromosomas, con genes seleccionados aleatoriamente, Cada uno de estos son evaluados en una métrica llamada función de aptitud o también llamada fitness, estos valores son importantes para poder llegar a la solución óptima según sea el caso, de maximizar o minimizar. El desarrollo a partir de este punto se representa en la figura. (Gol, 1989)

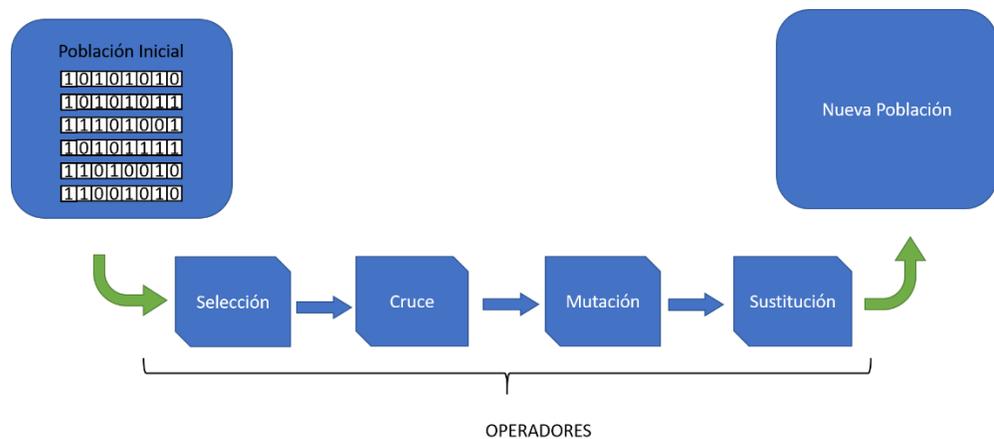


Figura 7. Desarrollo del algoritmo genético.

En los siguientes puntos detallamos cada operador del algoritmo genético que logra evolucionar, entre estos operadores se tiene: selección, cruce, mutación y sustitución.

#### 2.4.2.3 Selección:

Si bien el método original (GOL,1989) utiliza selección por rueda de ruleta, se representa en la figura la selección por torneo y líneas más abajo se expresa los demás métodos de selección.

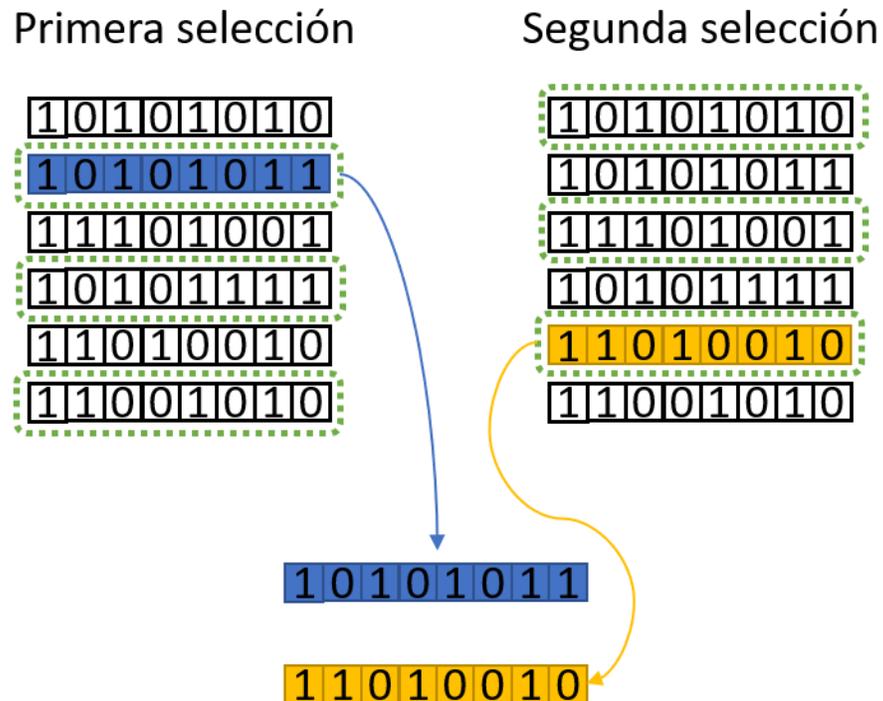


Figura 8. Selección de población

#### 2.4.2.3.1 Métodos de selección:

- Selección Elitista, se garantiza la selección de los miembros más aptos de cada generación. (La mayoría de los AGs no utilizan elitismo puro, sino una forma modificada por la que el individuo mejor, o algunos de los mejores, son copiados hacia la siguiente generación en caso de que no surja nada mejor).
- Selección proporcional a la aptitud, los individuos más aptos tienen más probabilidad de ser seleccionados, pero no la certeza.
- Selección por rueda de ruleta, una forma de selección proporcional a la aptitud en la que la probabilidad de que un

individuo sea seleccionado es proporcional a la diferencia entre su aptitud y la de sus competidores.

- d) Selección escalada, al incrementarse la aptitud media de la población, la fuerza de la presión selectiva también aumenta y la función de aptitud se hace más discriminadora. Este método puede ser útil para seleccionar más tarde, cuando todos los individuos tengan una aptitud relativamente alta y sólo les distingan pequeñas diferencias en la aptitud.
- e) Selección por torneo, se eligen subgrupos de individuos de la población, y los miembros de cada subgrupo compiten entre ellos. Sólo se elige a un individuo de cada subgrupo para la reproducción.
- f) Selección por rango, a cada individuo de la población se le asigna un rango numérico basado en su aptitud, y la selección se basa en este ranking, en lugar de las diferencias absolutas en aptitud. La ventaja de este método es que puede evitar que individuos muy aptos ganen dominancia al principio a expensas de los menos aptos, lo que reduciría la diversidad genética de la población y podría obstaculizar la búsqueda de una solución aceptable.
- g) Selección generacional, la descendencia de los individuos seleccionados en cada generación se convierte en toda la siguiente generación. No se conservan individuos entre las generaciones.
- h) Selección jerárquica, los individuos atraviesan múltiples rondas de selección en cada generación. Las evaluaciones de los primeros niveles son más rápidas y menos discriminatorias, mientras que

los que sobreviven hasta niveles más altos son evaluados más rigurosamente. La ventaja de este método es que reduce el tiempo total de cálculo al utilizar una evaluación más rápida y menos selectiva para eliminar a la mayoría de los individuos que se muestran poco o nada prometedores, y sometiendo a una evaluación de aptitud más rigurosa y computacionalmente más costosa sólo a los que sobreviven a esta prueba inicial.

#### 2.4.2.4 Cruce:

Este es el primer método de cambio en los genes, el cual consiste en que, una vez elegido a dos individuos, estos han de intercambiar segmentos de su código genético, produciendo una descendencia artificial cuyos individuos son combinaciones de sus padres. Las formas comunes de cruzamiento son: (Gol, 1989)

- a) Cruzamiento de un punto, se selecciona un punto aleatorio del genoma de los individuos, donde uno de ellos contribuye todo su código anterior a ese punto y el otro individuo contribuye todo su código a partir de ese punto, para así conseguir una descendencia. Se representa en la figura.

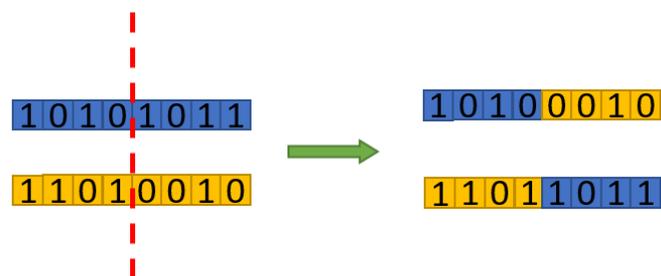


Figura 9. Cruzamiento de un punto, fuente: de autoría propia, 2021

- b) Cruzamiento en dos puntos, en este caso se selecciona dos puntos aleatorios, donde se intercambia los genes que aparecen en el intervalo de los puntos aleatorios encontrados. Se representa de modo gráfico en la figura

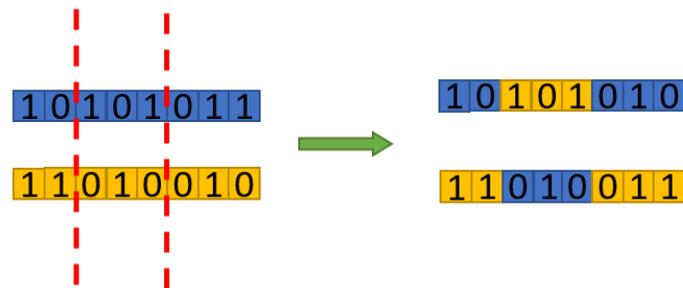


Figura 10. Cruzamiento en dos puntos, fuente: de autoría propia, 2021

3.5. Mutación: Este es el segundo método de cambio en los genes, al igual que la mutación en los seres vivos cambia un gen por otro, una mutación en un algoritmo genético también causa pequeñas alteraciones en puntos concretos de la codificación del individuo. Se representa gráficamente en la figura.

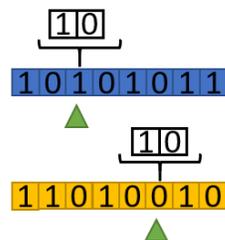


Figura 11. Mutación, fuente: de autoría propia, 2021

### 2.4.3 Métodos numéricos de Optimización

#### 1.1 Método de Newton

Dado  $x_c$ , alrededor de  $x_c$  la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se puede aproximar por un modelo cuadrático (Cristina, 2000)

$$f(x) = f(x_c + s) \approx f(x_c) + \nabla f(x_c)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f(x_c) s$$

Para el modelo  $q_c(s)$  una condición necesaria para que  $s$  sea un mínimo es  $\nabla q_c(s) = 0$ . Esto es

$$\nabla f(x_c) + \nabla^2 f(x_c) s = 0$$

que es el modelo lineal de  $F(x) = \nabla f(x_c)$  alrededor de  $x_c$ . El paso de Newton es

$$S_c^N = -\nabla^2 f(x_c)^{-1} \nabla f(x_c)$$

$$= -\nabla^2 f(x_c)^{-1} \nabla f(x_c).$$

A partir de esto, podemos construir el siguiente algoritmo

Algoritmo: (Método de Newton para MSR)

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$

un punto inicial,

**For**  $k = 0, \dots$ , hasta convergencia **do**

- Resolver el sistema lineal  $\nabla^2 f(x_k) s = -\nabla f(x_k)$ .
- Definir  $x_{k+1} = x_k + s_k$ .

**end**

#### 2.4.4 Método analítico.

El método analítico es un procedimiento que descompone un todo en sus elementos básicos y, por tanto, que va de lo general a lo específico. También es posible concebirlo también como un camino que parte de los fenómenos para llegar a las leyes, es decir, de los efectos a las causas.

Los métodos analíticos representan soluciones basadas en fórmulas matemáticas, desarrolladas generalmente de forma manual, en las que se definen variables de entrada para el cálculo de una o más variables de salida. Algunos ejemplos consisten de ecuaciones elementales disponibles en la literatura de ingeniería o procedimientos descritos en normas técnicas de organizaciones y clasificadoras como ASME, ASTM y DNV. Se trata de una metodología simple, en general de bajo costo y complejidad, que proporciona una respuesta rápida y directa después de la solución de estas ecuaciones.

Aplicando el criterio de la segunda derivada, podemos obtener los valores máximos o mínimos. El proceso empieza por derivar por primera vez e igualando a cero, de donde se encuentran los valores de las variables, después se realiza la segunda derivada, con ello se procede a reemplazar los valores obtenidos en la primera derivada. Al reemplazar los valores podemos indicar que es un punto máximo o mínimo. (Stewart,2001)

Definición 1: Sea  $c$  un número en el dominio  $D$  de una función  $f$ . Entonces  $f(c)$  es el

- Valor **máximo absoluto** de  $f$  sobre  $D$  si  $f(c) \geq f(x)$  para toda  $x$  en  $D$
- Valor **mínimo absoluto** de  $f$  sobre  $D$  si  $f(c) \leq f(x)$  para toda  $x$  en  $D$

Definición 2: El número  $f(c)$  es un

- Valor **máximo local** de  $f$  si  $f(c) \geq f(x)$  cuando  $x$  está cerca de  $c$

- Valor **mínimo local** de  $f$  si  $f(c) \leq f(x)$  cuando  $x$  está cerca de  $c$

Teorema del valor extremo: Si  $f$  es continua sobre un intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces  $f$  alcanza un valor máximo absoluto  $f(c)$  y un valor mínimo absoluto  $f(d)$  en algunos números  $c$  y  $d$  en  $[a, b]$ . (Stewart,2001)

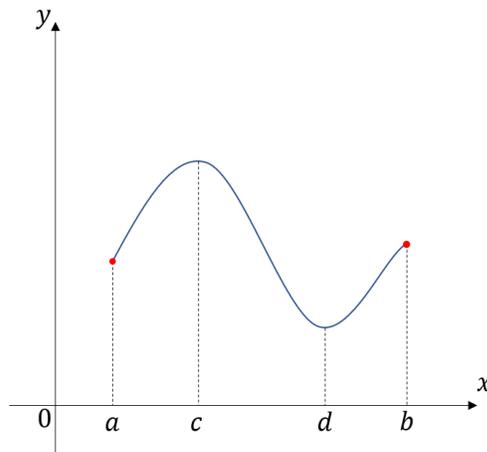


Figura 12. Teorema de Fermat: Si  $f$  tiene un máximo o un mínimo local en  $x = c$ , y si  $f'(c)$  existe, entonces  $f'(c) = 0$  (Stewart,2001). Fuente: Autoría propia.

Demostración: Para la consideración de la conclusión, suponga que  $f$  tiene un máximo local en  $x = c$ . Entonces, según la definición 2,  $f(c) \geq f(x)$  si  $x$  es suficientemente cercana a  $c$ . Esto implica que, si  $h$  está lo suficiente cerca de 0 y es positiva o negativa, entonces.

$$f(c) \geq f(c + h)$$

Y, por lo consiguiente,

$$f(c + h) - f(c) \leq 0$$

Podemos dividir ambos lados de la desigualdad entre un número positivo. Así, si  $h > 0$  y  $h$  es suficientemente pequeña, tenemos.

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Tomando el límite por la derecha de ambos lados de la desigualdad, obtenemos.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

Pero, dado que  $f'(c)$  existe, tenemos.

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Y con esto se demuestra que  $f'(c) \leq 0$ .

Si  $h < 0$ , entonces la dirección de la desigualdad en la ecuación  $f(c+h) - f(c) \leq 0$ , se invierte cuando dividimos por  $h$ :

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad ; h < 0$$

Así que, tomando el límite por la izquierda, tenemos.

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Y se demostró que  $f'(c) \geq 0$  y también que  $f'(c) \leq 0$ . Puesto que ambas desigualdades deben ser verdaderas, la única posibilidad es que  $f'(c) = 0$ .

Así es entonces la demostración del teorema de Fermat para el caso de un máximo local. El caso de un mínimo local puede demostrarse similar.

### 2.5 Sistema de Variables

En la tabla 1 se puede observar la variable codificación, a la se le asigna las dimensiones de tiempo, líneas de código, tipo de lenguaje y precisión.

**Tabla 1. Sistema de variables de la investigación**

Variables	Definición conceptual	Dimensiones Definiciones conceptuales	Indicadores Definición operacional
Codificación	Hacer o formar un cuerpo de leyes metódico y sistemático.	Tiempo	Rapidez de codificación (10 s)
		Líneas de código	Líneas esperadas (50 líneas)
		Tipo de lenguaje	tipo de lenguaje usado Python
		Precisión	Exactitud de los resultados con otras técnicas en un rango de $\pm 0.1$

Fuente: Elaboración propia, 2021.

# Capítulo 3

## 3 ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

### 3.1 Enfoque y método de investigación

El método de investigación a usar es inductivo, dado que la aplicación se dará mediante ecuaciones matemáticas de orbitas planetarias, como: ecuación polar de orbita planetaria, potencial efectivo, orbita de transferencia de hohmann y velocidad angular. Y con ello se dará una generalización para su solución de estas con el algoritmo genético.

Los resultados obtenidos en las diferentes compilaciones de las ecuaciones, se compararán con los datos obtenidos analíticamente, comparándolos y así mostrar la relación de error obtenida.

El método inductivo, parte de fenómenos particulares para llegar a generalizaciones. Esto se refiere a pasar de los resultados obtenidos de la observación y experimentación con elementos particulares a la formulación de hipótesis, principios y leyes de tipo general.

### 3.2 Tipo de investigación

El tipo de investigación a usar es de tipo descriptivo, dado que se va a desarrollar las ecuaciones orbitales con algoritmos genéticos en donde se describirá los procesos desarrollados para lograr los resultados requeridos en la investigación, también se tiene como desarrollo describir el proceso del algoritmo genético para la optimización de las ecuaciones de orbita planetaria.

La investigación descriptiva, refiere o narra características y propiedades de un objeto, sujeto o situación específica, sin emplear juicios de valor y en procura de altos niveles de objetividad.

### 3.3 Hipótesis

Se desarrollará e implementará un software con algoritmo genético para resolver los cálculos de las ecuaciones matemáticas de la problemática planteada del departamento de Puno – Perú

### 3.4 Diseño de la investigación.

En la presente investigación descriptiva de modo inductivo, se empieza mediante la obtención de datos planetarios, para remplazar en las distintas ecuaciones a estudiar, se tendrá un producto listo de las ecuaciones ya remplazadas sus datos, y con ellas poder incorporarlas al algoritmo genético, donde se realizará varias compilaciones obteniendo mejores resultados con los cuales poder comparar con los datos obtenidos analíticamente.

#### 3.4.1 Formulación de las ecuaciones

Son 4 ecuaciones a implementar en el algoritmo genético, las cuales necesitan datos astronómicos y estos datos son obtenidos de las siguientes bases de datos: ESA SKY, CHIVO, ALADIN, Space Place y Dinámica Celeste. Para mayor información, los enlaces de estas bases de datos se encuentran en la bibliografía.

En la tabla 2 se muestra los datos a utilizar en la investigación, estos datos serán introducidos en las ecuaciones para su tratamiento de optimización con el algoritmo genético.

**Tabla 2. Datos astronómicos a usar en la investigación.**

Nr o.	Unidad	Magnitudes	Valor	Simplificación
1	$r_0$	Radio inicial	42231625.106 m	-

2	$v_0$	Velocidad inicial	3071.17 m/s	-
3	L	Momento angular	291180000000000 $kg\ m^2/s$	1
4	M	Masa del Planeta principal (Tierra)	$5.972 \times 10^{24}\ kg$	1
5	m	Masa del satélite	2300 kg	1
6	G	Constante gravitacional	$6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$	1
7	e	Excentricidad de la tierra	0.017	-
8	e	Excentricidad del satélite	$2.891533614768349 \times 10^{-7}$	-

Fuente: de mi autoría propia.

Como se muestra en la tabla, todas estas magnitudes iremos usando según la ecuación a analizar. Se muestra el símbolo de la unidad, el nombre de la magnitud física y su valor numérico.

El último apartado de la tabla, se titula simplificación, haciendo referencia a que se analizara de modo directo, igualando a uno cada magnitud física vista en cualquier ecuación.

El radio inicial ( $r_0$ ) y la velocidad inicial ( $v_0$ ), son datos obtenidos de manera personal por el investigador, dado que se tiene que poner un caso a estudiar. La elección de estos valores, es mediante el análisis de un satélite que se mueva a la misma velocidad de giro del planeta tierra. Se llama satélites geoestacionarios a estos satélites que giran al mismo ritmo del planeta en cuestión. Para su obtención de dichos datos se realizó lo siguiente.

La velocidad angular esta dado por:

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T}$$

De donde T, es el periodo, en el caso de la tierra es 24 horas, que en segundos es 86400. Y para el satélite que está siendo influenciado por la fuerza de gravedad de la tierra, se tiene que su aceleración sería:

$$a = \omega^2 r$$

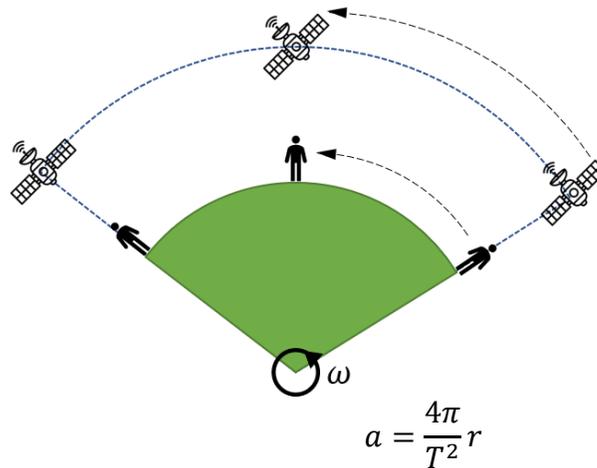


Figura 13. Representación de un movimiento geostacionario.

Remplazando en la ecuación de fuerza gravitacional de Newton.

$$F = \frac{GMm}{r^2} = ma = m \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

Se tiene que el radio al que tiene que estar este dado por la siguiente ecuación, remplazando los datos requeridos se tiene que el radio es igual a:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}}$$

$$r_0 = 42231625.106 \text{ m}$$

Para el caso de la velocidad inicial se puede encontrar según las siguientes ecuaciones:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \frac{2\pi}{T} r$$

$$v_0 = 3071.17 \text{ m/s}$$

De esta manera es como podemos contar con todos los datos necesarios para poder continuar con el desarrollo de la investigación.

### 3.4.2 Desarrollo de las ecuaciones orbitales.

#### 3.4.2.1 Ecuación del potencial efectivo:

La ecuación en cuestión tiene la forma siguiente:

$$U_{eff} = V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

De donde, en nuestro caso de estudio, para las variables física, tales como: momento angular (L), masa del planeta (m), constante gravitacional (G) y masa solar (M), las encontramos en la tabla líneas arriba mencionada. Con dichos datos la ecuación del potencial efectivo queda de la siguiente manera.

$$U_{eff} = V(r) = \frac{298311150176626.25^2}{2 * 2300 * r^2} - \frac{6.67 \times 10^{-11} * 5.972 \times 10^{24} * 2300}{r}$$

$$V(r) = \frac{1.9345552678196012 \times 10^{25}}{r^2} - \frac{9.1616452 \times 10^{17}}{r}$$

Esta ecuación se derivará con respecto al tiempo, dado que será de utilidad para el cálculo del máximo o mínimo de forma analítica.

$$V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow V'(r) = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{GMm}{r^2}$$

Escribiendo sus valores exactos de cada magnitud física se tiene:

$$V'(r) = -\frac{298311150176626.25^2}{2300 * r^3} + \frac{6.67 \times 10^{-11} * 5.972 \times 10^{24} * 2300}{r^2}$$

$$V'(r) = -\frac{3.8691105356392025 \times 10^{25}}{r^3} + \frac{9.1616452 \times 10^{17}}{r^2}$$

### 3.4.2.2 Ecuación de energía

La ecuación de la energía corresponde a la siguiente expresión:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

De donde, las variables a necesitar son: masa del satélite  $m$ , velocidad del satélite  $v_0$ , momento angular  $L$ , masa de la Tierra  $M$  y la constante de gravitación universal. Los valores lo obtenemos en la tabla líneas arriba mencionado.

Con dichos valores la ecuación de energía para la velocidad orbital queda de la siguiente manera.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \frac{1}{2} * 2300 * v^2 + \frac{298311150176626.25^2}{2 * 2300 * r^2} - \frac{6.67 \times 10^{-11} * 5.972 \times 10^{24} * 2300}{r}$$

Con  $v = v_0$

$$E = 1150 * 3071.17^2 + \frac{1.9345552678196012 \times 10^{25}}{r^2} - \frac{9.1616452 \times 10^{17}}{r}$$

$$E = 10846897944.235 + \frac{1.9345552678196012 \times 10^{25}}{r^2} - \frac{9.1616452 \times 10^{17}}{r}$$

### 3.4.2.3 Velocidad del satélite

Despejando  $\dot{r}$  o  $v$  de la ecuación de energía, de lo cual se tiene:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 = E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r} \right)}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r} \right)}$$

Reemplazando los datos de masa del satélite  $m$ , momento angular  $L$ , masa del planeta Tierra  $M$  y la constante de gravitación universal, con todo ello se tiene lo siguiente.

$$v = \sqrt{\frac{2}{2300} \left( E - \frac{298311150176626.25^2}{2 * 2300 * r^2} + \frac{6.67 \times 10^{-11} * 5.972 \times 10^{24} * 2300}{r} \right)}$$

Se nota que la energía aún no tiene un valor definido, esto es debido a que varía dependiendo del caso de estudio, líneas más abajo se calculara la energía para nuestro caso y con el cual ya se pueda realizar los cálculos respectivos.

### 3.4.2.4 Ecuación de orbita planetaria

La ecuación orbital de un planeta o un satélite como es en la investigación presente, se tiene por ecuación a la siguiente.

$$r(\phi) = \frac{L^2}{GMm^2(1 - e * Cos(\phi))}$$

Remplazando los datos requeridos en dicha ecuación, como son: momento angular  $L$ , masa de la Tierra  $M$ , masa del satélite  $m$ , excentricidad del satélite y la constante de gravitación universal  $G$ . Notar que la ecuación del radio está en función del ángulo  $\phi$ , por lo que la ecuación queda de la siguiente manera.

$$r(\phi) = \frac{298311150176626.25^2}{6.67 \times 10^{-11} * 5.972 \times 10^{24} * 2300^2(1 - 2.891533614768349 \times 10^{-7} * Cos(\phi))}$$

Con los datos de la tabla líneas arriba mencionado, se completó la ecuación de orbita, ejecutando las operaciones nos queda la ecuación de la siguiente manera.

$$r(\phi) = \frac{42231612.894583635}{1 - 2.891533614768349 \times 10^{-7} * \text{Cos}(\phi)}$$

Notar que para el cálculo de la excentricidad se puede usar un despeje de la ecuación de orbita planetaria, suponiendo los datos siguientes: radio inicial, velocidad inicial y un ángulo inicial.

Los datos serian entonces, los siguientes.

- $r_0 = 42231625.106 \text{ m}$
- Ángulo inicial  $\phi = 0$

Por lo que al reemplazar los datos en la ecuación de orbita.

$$r(\phi) = \frac{L^2}{GMm^2(1 - e * \text{Cos}(\phi))}$$

$$42231625.106 = \frac{L^2}{GMm^2(1 - e * \text{Cos}(0))}$$

Despejando excentricidad (e)

$$1 - e = \frac{L^2}{GMm^2 * 42231625.106}$$

$$e = 1 - \frac{L^2}{GMm^2 * 42231625.106}$$

$$e = 1 - \frac{298311150176626.25^2}{6.67 \times 10^{-11} * 5.972 \times 10^{24} * 2300^2 * 42231625.106}$$

$$e = 2.891533614768349 \times 10^{-7}$$

Con ello se dio el cálculo y reemplazo de la excentricidad para la ecuación de órbita planetaria.

### 3.4.3 Diseño del algoritmo genético

El algoritmo genético, es un algoritmo que trata de imitar la evolución biológica y que se usa como estrategia para resolver problemas, se empieza tomando un conjunto de soluciones (individuos), con los cuales se va evaluando generación tras generación, pasando por mutaciones y cruzamientos hasta encontrar una solución óptima que resuelva el problema en cuestión. Para el desarrollo del algoritmo genético se tomó las siguientes condiciones.

#### 3.4.3.1 Modo de engendrar los primeros individuos:

Para este primer proceso se opta por representar los genes, en forma de lista, para después lograr las mutaciones y cruzamientos. Esto se logra mediante el código siguiente.

Código:

```
ind_size = 15

aRang = np.arange(0,6,1)
bRang = np.arange(0,10,1)

genetic_pool=[aRang,bRang]

poblacion = []

for i in range(10):
    individuo = []
```

```
individuo += [np.random.choice(genetic_pool[0])]
individuo += list(np.random.choice(genetic_pool[1], ind_size-1))
poblacion.append(individuo)
```

Nota: Dado que los genes están en forma de lista, el proceso para cambiar, se da mediante la descomposición polinómica, ejemplo.

[2, 0, 9, 4, 2, 5, 2, 1, 1, 5, 5, 7, 1, 8, 1]

Se puede realizar la siguiente suma sucesiva

$$2 \times 10^0 + 0 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3} + \dots + 7 \times 10^{-14} \\ = 2,0942521157181$$

Mediante la siguiente función se generaliza este proceso.

```
# Cambia de una lista a un número decimal
def listToDecimal(num):
    decimal=0
    for i in range(len(num)):
        decimal+=num[i]*10**(-i)
    return decimal
```

#### 3.4.3.2 Medición del éxito:

A la medición del éxito se le conoce mejor como fitness, el cual se encarga de medir el éxito de cada individuo con el objetivo de lograr el mejor resultado para el problema. Para lograr esto, se extrae los valores de “y” o codominio, y a cada uno de estos valores se le divide entre la suma total de todos los elementos de “y”, para así tener los porcentajes de cada uno de los valores entre 0 y 1, los valores que tengan

mayor porcentaje, son los candidatos a mejores resultados y también candidatos de ser cruzados, con estos datos continua las siguientes generaciones.

El código para ello es:

```
fitness =[]

#extraigo los valores de y para medir su éxito
for individuo in poblacion:
    x = listToDecimal(individuo)
    y = fx(x)          ##### igual
    fitness += [y]

#convierto fitnees en un vector para realizar operaciones
#más fácilmente
fitness = np.array(fitness)

#divido todos los valores de y para la suma total
#y así obtener valores entre 0 y 1

fitness=fitness/fitness.sum()
```

#### 3.4.3.3 Entrecruzamiento:

Para el entrecruzamiento se mezcla los genes de los mejores individuos, este proceso se realizará mediante la selección por torneo, en base al fitness y el cruzamiento por un punto (cross point).

Nota: Es importante no descartar completamente a los peores individuos ya que, tal vez, su código genético pueda servir para lograr mejores resultados en las siguientes generaciones.

Este proceso es mucha importancia dado que de esta manera se van originando las nuevas generaciones, este proceso tiene que ir repitiéndose varias veces hasta encontrar un valor óptimo o hasta que termine el número de generaciones programada.

El código para realizar el proceso de entrecruzamiento es:

```
size_poblacion = len(poblacion)
#hijos
offspring = []
for i in range(size_poblacion//2):
    parents = np.random.choice(size_poblacion, 2, p=fitness)
    cross_point = np.random.randint(ind_size)
    offspring += [poblacion[parents[0]][:cross_point] +
poblacion[parents[1]][cross_point:]]
    offspring += [poblacion[parents[1]][:cross_point] +
poblacion[parents[0]][cross_point:]]
```

#### 3.4.3.4 Mutación:

Aquí programamos la probabilidad de que se produzca una mutación en los individuos, daremos un cambio en el ADN de cada individuo. La función que realiza este proceso es la siguiente.

```
def mutate(individuals, prob, pool):
    for i in range(len(individuals)):
```

```
mutate_individual=individuals[i]
if np.random.random() < probab:
    mutation = np.random.choice(pool[0])
    mutate_individual = [mutation] + mutate_individual[1:]

for j in range(1,len(mutate_individual)):
    if np.random.random() < probab:
        mutation = np.random.choice(pool[1])
        mutate_individual = mutate_individual[0:j] + [mutation] +
mutate_individual[j+1:]
    individuals[i] = mutate_individual
```

Nota: Este proceso no es completamente indispensable en el algoritmo genético, dado que naturalmente con cada generación podría tal vez llegar a la solución óptima, pero este proceso es importante debido a que ayuda a evitar estancamientos con ciertos valores de óptimos locales, con la mutación se logra saltar estos valles y así poder llegar al óptimo general.

Para el llamado de la función se cuenta con la siguiente línea de código.

```
mutate(poblacion,0.005,genetic_pool)
```

Observar que para la probabilidad de mutación se pone un valor muy pequeño, dado que el cambio en el ADN de cada individuo no puede ser cambios tan grandes, ya que perjudicaría el desarrollo que se va teniendo generación tras generación. La intención con la alteración del ADN mediante la mutación es el de ayudar un poco a evitar los estancamientos en óptimos locales.

#### 3.4.4 Generación de resultados analíticos a las ecuaciones.

La comparación de los resultados que se obtengan en las compilaciones del algoritmo genético, tiene compararse con valores precisos o por lo menos con correctas aproximaciones, para ello se desarrolla las ecuaciones de modo analítico y no se usa otro método numérico, dado que las ecuaciones planteadas en la investigación si cuentan con soluciones analíticas.

##### 3.4.4.1 Ecuación del potencial efectivo:

$$V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Para el caso práctico, optamos por los valores simplificados, y nos queda la siguiente manera.

$$V(r) = \frac{1}{2 * r^2} - \frac{1}{r}$$

El valor optimo que presenta esta ecuación que está en función de  $r$  es.

$$V'(r) = \frac{-1}{r^3} + \frac{1}{r^2}$$

Por criterio de la segunda derivada, igualamos a cero.

$$\frac{-1}{r^3} + \frac{1}{r^2} = 0$$

De donde se tiene:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r^2}$$

$$r = 1$$

Entonces el potencial para  $r = 1$  correspondiente es  $V(r) = -0.5$

Con los valores de las variables completas, tenemos:

$$V(r) = \frac{1.9345552678196012 \times 10^{25}}{r^2} - \frac{9.1616452 \times 10^{17}}{r}$$

Derivando.

$$V'(r) = -\frac{3.8691105356392025 \times 10^{25}}{r^3} + \frac{9.1616452 \times 10^{17}}{r^2}$$

Igualando a cero.

$$-\frac{3.8691105356392025 \times 10^{25}}{r^3} + \frac{9.1616452 \times 10^{17}}{r^2} = 0$$

Por lo que:

$$\frac{9.1616452 \times 10^{17}}{r^2} = \frac{3.8691105356392025 \times 10^{25}}{r^3}$$

$$r = \frac{3.8691105356392025 \times 10^{25}}{9.1616452 \times 10^{17}}$$

$$r = 42231612.894583635$$

De donde el potencial efectivo para  $r = 42231612.894583635$ , seria  $V(r) = -10846904217.071728$

### 3.4.4.2 Ecuación de energía

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Para el caso práctico, con velocidad  $\dot{r} = \sqrt{0.4}$ , se opta por los valores simplificados, obteniendo lo siguiente.

$$E = \frac{1}{2} * (\sqrt{0.4})^2 + \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r}$$

El punto óptimo que presenta esta ecuación es la siguiente, se procede a derivar la ecuación.

$$E' = -\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2}$$

Igualando a cero.

$$-\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^3}$$

$$r = 1$$

De donde se tiene para  $r = 1$  la energía es igual a  $E = -0.3$

Con los valores de las variables completas, tenemos:

$$E = 10846897944.235 + \frac{1.9345552678196012 \times 10^{25}}{r^2} - \frac{9.1616452 \times 10^{17}}{r}$$

Derivando

$$E' = -\frac{3.8691105356392025 \times 10^{25}}{r^3} + \frac{9.1616452 \times 10^{17}}{r^2}$$

Igualando a cero.

$$-\frac{3.8691105356392025 \times 10^{25}}{r^3} + \frac{9.1616452 \times 10^{17}}{r^2} = 0$$

Tenemos:

$$r = 42231612.894583635$$

De donde el valor de la energía para  $r = 42231612.894583635$ , sería  $E(r) = -6272.835819244385$

#### 3.4.4.3 Ecuación de velocidad

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r} \right)}$$

Reemplazando los datos simplificados. Tenemos.

$$v = \sqrt{2 \left( E - \frac{1}{2r^2} + \frac{1}{r} \right)}$$

La derivada de la ecuación:

$$v' = \frac{2 \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^2} \right)}{2 \sqrt{2 \left( E - \frac{1}{2r^2} + \frac{1}{r} \right)}}$$

$$v' = \frac{\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^2}}{\sqrt{2 \left( E - \frac{1}{2r^2} + \frac{1}{r} \right)}}$$

$$v' = \frac{r^2 - r^3}{r^5 \sqrt{2 \left( E - \frac{1}{2r^2} + \frac{1}{r} \right)}}$$

$$\frac{r^2 - r^3}{r^5 \sqrt{2 \left( E - \frac{1}{2r^2} + \frac{1}{r} \right)}} = 0$$

$$r^2 - r^3 = 0$$

$$r = 1$$

La velocidad correspondiente a  $r = 1$ , es  $v = 0$

Nota: Pero dando otro valor de energía, por ejemplo,  $E = -0.3$ , para ello se tiene una velocidad de 0.63246

Con los valores completos de las variables, tenemos:

$$v = \sqrt{\frac{2}{2300} \left( E - \frac{298311150176626.25^2}{2 * 2300 * r^2} + \frac{6.67 \times 10^{-11} * 5.972 \times 10^{24} * 2300}{r} \right)}$$

$$v'$$

$$= \frac{\frac{2}{2300} \left( \frac{298311150176626.25^2}{2300 * r^3} - \frac{6.67 \times 10^{-11} * 5.972 \times 10^{24} * 2300}{r^2} \right)}{2 \sqrt{\frac{2}{2300} \left( E - \frac{298311150176626.25^2}{2 * 2300 * r^2} + \frac{6.67 \times 10^{-11} * 5.972 \times 10^{24} * 2300}{r} \right)}}$$

$$v'$$

$$= \frac{\frac{1}{2300} \left( \frac{298311150176626.25^2}{2300 * r^3} - \frac{6.67 \times 10^{-11} * 5.972 \times 10^{24} * 2300}{r^2} \right)}{\sqrt{\frac{2}{2300} \left( E - \frac{298311150176626.25^2}{2 * 2300 * r^2} + \frac{6.67 \times 10^{-11} * 5.972 \times 10^{24} * 2300}{r} \right)}}$$

$$\frac{\frac{1}{2300} \left( \frac{298311150176626.25^2}{2300 * r^3} - \frac{6.67 \times 10^{-11} * 5.972 \times 10^{24} * 2300}{r^2} \right)}{\sqrt{\frac{2}{2300} \left( E - \frac{298311150176626.25^2}{2 * 2300 * r^2} + \frac{6.67 \times 10^{-11} * 5.972 \times 10^{24} * 2300}{r} \right)}} = 0$$

$$\frac{298311150176626.25^2}{2300 * r^3} - \frac{6.67 \times 10^{-11} * 5.972 \times 10^{24} * 2300}{r^2} = 0$$

$$\frac{298311150176626.25^2}{2300 * r^3} = \frac{6.67 \times 10^{-11} * 5.972 \times 10^{24} * 2300}{r^2}$$

$$\frac{298311150176626.25^2}{6.67 \times 10^{-11} * 5.972 \times 10^{24} * 2300 * 2300} = r$$

$$r = 42231612.894583635$$

Para este valor de radio, el valor de velocidad es = 3071.1700000001288

Para este valor de radio, pero contando a la energía como E = 5272.835819244385, se tiene como resultado de la velocidad a v = 129700500076.794

Ecuación de orbita

$$r(\phi) = \frac{L^2}{GMm^2(1 - e * \text{Cos}(\phi))}$$

Para los datos simplificados y contando como e = 0.9 , tenemos lo siguiente.

$$r(\phi) = \frac{1}{1 - 0.9 * \text{Cos}(\phi)}$$

Derivando la ecuación

$$r'(\phi) = \frac{-e * \text{Sen}\phi}{(1 - e * \text{Cos}(\phi))^2}$$

Igualando cero

$$\frac{-e * \text{Sen}\phi}{(1 - e * \text{Cos}(\phi))^2} = 0$$

$$\text{Sen}\phi = 0$$

$$\phi = n\pi ; n = 0,1,2,3,4, \dots$$

De donde, para  $\phi = 0$ , se tiene

$$r(\phi) = \frac{1}{1 - 0.9 * \text{Cos}(0)} = 10$$

De donde, para  $\phi = \pi$ , se tiene

$$r(\phi) = \frac{1}{1 - 0.9 * \text{Cos}(\pi)}$$

$$r(\phi) = 0.526$$

Para los datos completos de las variables, se tiene.

$$r(\phi) = \frac{42231612.894583635}{1 - e * \text{Cos}(\phi)}$$

Derivando

$$r'(\phi) = 42231612.894583635 * \frac{-e * \text{Sen}\phi}{(1 - e * \text{Cos}(\phi))^2}$$

Igualando a cero

$$42231612.894583635 * \frac{-e * \text{Sen}\phi}{(1 - e * \text{Cos}(\phi))^2} = 0$$

$$-e * \text{Sen}\phi = 0$$

$$\text{Sen}\phi = 0$$

$$\phi = n\pi ; n = 0,1,2,3, \dots$$

Para los valores de  $\phi = 0$

$$r(\phi) = \frac{42231612.894583635}{1 - 2.891533614768349 \times 10^{-7} * \text{Cos}(0)}$$

$$r(\phi) = \frac{42231612.894583635}{1 - 2.891533614768349 \times 10^{-7} * 1}$$

$$r(\phi) = 42231625.106$$

Para el valor de  $\phi = \pi$

$$r(\phi) = \frac{42231612.894583635}{1 - 2.891533614768349 \times 10^{-7} * (-1)}$$

$$r(\phi) = 42231600.683174334$$

Se presenta entonces un cuadro donde facilita la comprensión de todos los datos obtenidos de manera analítica, con base al teorema de Fermat para el cálculo de óptimos en una función  $f(x)$

En la tabla 3 se muestra los resultados analíticos obtenidos con el método de la segunda derivada.

**Tabla 3. Resultados obtenidos de modo analítico.**

Nro.	Ecuación	Valor mínimo Valores simplificados	Valor mínimo Valores reales
1	Potencial Efectivo	$r = 1$ $V(r) = -0.5$	$r = 42231612.894583635$ $V(r) = -10846904217.071728$
2	Ecuación de energía	$r = 1$ $E = -0.5$	$r = 42231612.894583635$ $E = -6272.835819244385$
3	Ecuación de velocidad	$r = 1$ $E = -0.5 ; v = 0$ $E = -0.3 ; v = 0.63246$	$r = 42231612.894583635$ $v = 3071.1700000001288$
4	Ecuación de orbita	$e = 0.9$ $\phi = 0 \Rightarrow r = 10$ $\phi = \pi \Rightarrow r = 0.526$	$e = 2.891533614768349 \times 10^{-7}$ $\phi = 0 \Rightarrow r = 42231625.106$ $\phi = \pi \Rightarrow r = 42231600.683174334$

Fuente: Autoría propia.

### 3.4.5 Implementación de las ecuaciones al algoritmo genético

La implementación de las ecuaciones al programa se da mediante un nombre característico a cada una de ellas, a un inicio del programa, para después poder hacer un llamado en el momento que se necesite.

Se da mediante el código siguiente:

declarando las variables

$$r0 = 42231625.106 \text{ \# m}$$

$$v0 = 3071.17 \text{ \# m/s}$$

$$m = 2300 \text{ \# kg}$$

$$M = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ \# kg}$$

$$L = r0 \cdot m \cdot v0 \text{ \# kg}^2/\text{s}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ \# N m}^2/\text{kg}^2$$

$$e = 2.891533614768349e-7$$

ecuación de potencial efectivo

$$U = (L^{**2})/(2 \cdot m \cdot r0^{**2}) - (G \cdot M \cdot m)/(r0)$$

$$U = -1/(2 \cdot x^{**2}) + 1/x$$

ecuación de energía

$$E = (1/2) \cdot m \cdot v0^{**2} + (L^{**2})/(2 \cdot m \cdot r0^{**2}) - (G \cdot M \cdot m)/(r0)$$

$$E = (1/2) \cdot 0.4 + 1/(2 \cdot x^{**2}) - 1/x$$

ecuación de velocidad

$$vel = ((2/m) \cdot (E - (L^{**2})/(2 \cdot m \cdot r0^{**2}) + (G \cdot M \cdot m)/(r0)))^{**}(1/2)$$

$$\text{pow}((2) \cdot (10000 - (1)/(2 \cdot x^{**2}) + (1)/(x)), 1/2)$$

E = 5272.835819244385 # valor de la energia

EE = -1272.835819244385

EEE -10846904217.071728 # valor de la energía

# ecuación de orbita

$r = (L^{**2}) / (G * M * m^{**2} * (1 - e * \cos(\text{phi})))$

return -1 / (1 - 0.9 \* math.cos(x))

### 3.5 Población y muestra/Unidades de estudio

La población de estudio es un conjunto de casos, definido, limitado y accesible, que formará el referente para la elección de la muestra, y que cumple con una serie de criterios predeterminados. Es necesario aclarar que cuando se habla de población de estudio, el término no se refiere exclusivamente a seres humanos, sino que también puede corresponder a animales, muestras biológicas, expedientes, hospitales, objetos, familias, organizaciones, etc.; para estos últimos, podría ser más adecuado utilizar un término análogo, como universo de estudio.

La población de estudio para la presente investigación son las ecuaciones de la mecánica celeste, donde algunas ecuaciones son: ecuación de gravitación universal, leyes de Kepler, ecuación de orbita, ecuación de energía, ecuaciones diferencial de Binet, puntos de lagrange, energía potencial, energía cinética, potencial efectivo, momento angular, área en coordenadas polares, colisiones, anomalía real, anomalía

excéntrica, problema de dos cuerpos, problema de tres cuerpos, centro de masas, colapso, etc.

En general, para cualquier estudio de investigación se incluyen muestras o subgrupos de poblaciones para ahorrar tiempo, para este trabajo las muestras de estudio serán: potencial efectivo, ecuación de energía, ecuación de velocidad y ecuación de órbita. Las cuales son destacadas por la practicidad en el aspecto de optimización.

### 3.6 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Una vez definidas las características de los participantes en el estudio, es necesario que se garantice, en la medida de lo posible que dicha muestra sea representativa de la población de estudio. Existen dos métodos los probabilísticos y los no probabilísticos. Dentro de los métodos de muestreo probabilísticos encontramos los siguientes tipos: Muestreo aleatorio simple, Muestreo aleatorio estratificado, Muestreo aleatorio por conglomerados, y los no probabilísticos como: Muestreo por cuotas, Muestreo intencional o de conveniencia y Bola de nieve.

Para la presente investigación se hace uso del muestro probabilístico de tipo muestreo intencional o de conveniencia, la cual consiste en una selección directa e intencionadamente de los individuos de la población. El caso más frecuente de este procedimiento es utilizar como muestra los individuos a los que se tiene fácil acceso. En general, el método puede resultar de utilidad cuando se pretende realizar una exploración de un fenómeno en una población o cuando no existe un tamaño muestral definido.

Con base en la necesidad de obtener cálculos precisos para el departamento de Puno – Perú y de la capacidad de optimización del algoritmo genético, se selecciona

las ecuaciones de: potencial efectivo, ecuación de energía, ecuación de velocidad y ecuación de órbita.

### 3.7 Validez y confiabilidad de los instrumentos

Se puede definir confiabilidad como el Grado en que un instrumento produce resultados consistentes y coherentes. Es decir, en que su aplicación repetida al mismo sujeto u objeto produce resultados iguales.

Las técnicas que se va utilizar son dos: medida de estabilidad, la cual consiste en ser un instrumento de medición donde se aplica dos más veces a un mismo grupo de personas, después de cierto periodo, y el método de formas alternativas o paralelas, Aquí no se administra el mismo instrumento de medición, sino dos o más versiones equivalentes de este.

En el uso de la técnica de medida de estabilidad, se va correr el programa de optimización con algoritmo genético más dos veces con los mismos datos esperando el último resultado óptimo.

Para el uso de método de formas alternativas o paralelas, se va correr el programa de optimización con algoritmo genético, del cual, el resultado obtenido se correlaciona con el dato obtenido de forma analítica que se obtuvo según el criterio de la segunda derivada.

### 3.8 Técnicas de análisis de los datos

El análisis de datos es la ciencia que se encarga de examinar un conjunto de datos con el propósito de sacar conclusiones sobre la información para poder tomar decisiones, o simplemente ampliar los conocimientos sobre diversos temas.

Si se quiere datos útiles, se debe analizar. Para ello se recurre a diversas técnicas que dependen del tipo de información que se esté recopilando, por lo que es importante tener definida la técnica a utilizar antes de implementarla.

Las técnicas que se cuentan son:

- Análisis de datos cualitativo, en los datos cualitativos se presentan de manera verbal (en ocasiones en gráficas). Se basa en la interpretación.
- Los datos cuantitativos se presentan en forma numérica. Se basa en resultados tangibles.

En la presente investigación se hace uso del análisis de datos cuantitativos, dado que los valores obtenidos de las ecuaciones matemáticas de la mecánica celeste son valores numéricos, valores con los cuales se pronostican eventos o fenómenos astronómicos y astrofísicos.

# Capítulo 4

## 4 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Para el análisis de los datos en la investigación presente se tiene desarrollada en dos partes, una con datos igual a la unidad y otro con datos reales del caso. Las variables a tener en cuenta en las compilaciones en el algoritmo genético son: tamaño del numeral (valores enteros y valores decimales), el número de dígitos a usar (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9), cantidad de individuos para dar comienzo el algoritmo, número de generaciones a realizar el algoritmo y el índice de mutación.

El primer caso de análisis, con datos igual a la unidad, su importancia radica en aplicar un caso físico más sencillo, para verificar la óptima calibración del algoritmo a la ecuación planteada de forma general con los datos completos. Una vez corrido un cierto número de veces y llevado a cabo sus verificaciones con los datos analíticos ya mostrados anteriormente, se procede a realizar el segundo caso de análisis.

El segundo caso de análisis, con los datos reales de investigación, se procede a dar un cierto número de compilaciones, unas 5 corridas con 3000 generaciones y unas 5 corridas más con 6000 generaciones, mostrando en algunos casos la mejoría en los datos obtenidos y en otros casos probables desviaciones del resultado requeridos.

Cada dato obtenido en cada compilación bajo cierto número generaciones, se ha de comparar con los datos analíticos obtenidos en el capítulo 3. Cada resultado emitirá un porcentaje de error para la discusión final, así como también el error absoluto de todo un conjunto de compilaciones bajo un cierto criterio de las variables usadas en el algoritmo genético.

#### 4.1 Procesamiento de los datos

Con el procesado de los datos al algoritmo genético para lograr la optimización de las ecuaciones matemáticas de la mecánica celestre, se obtuvo los siguientes resultados.

#### 4.1.1 Potencial efectivo

Para la ecuación en mención se tomó los siguientes parámetros.

Primer caso: variables con valores unitarios ( $L, m, G, M = 1$ )

Primera configuración

- Numero de generaciones: 1000
- Número de población inicial: 100
- Tamaño del numeral: 1 cifras enteras y 9 cifras decimales.
- Índice de mutación: 0.000001

Con los cuales obtenemos los siguientes resultados, según las primeras 5 compiladas. En la tabla 4 y 5 se puede observar los resultados en donde la segunda columna indica el resultado del algoritmo genético, la tercera columna indica el resultado analítico, en la cuarta columna se obtiene la diferencia entre los resultados del método analítico y el resultado del algoritmo genético, en la quinta columna se calcula el error de cada compilada, y finalmente en la sexta columna se indica el error absoluto de cada bloque de compilación ya será en la tabla 4 y 5.

**Tabla 4. Datos obtenidos del radio óptimo para el potencial efectivo mínimo, con datos igual a uno.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	5.88310715	1	4.883107154	1.99048595	2.453223628
2	4.02276266	1	3.022762661	1.23215944	
3	3.32807779	1	2.328077785	0.94898719	
4	2.78531877	1	1.785318767	0.727744	
5	0.75314823	1	0.246851772	0.10062343	
			2.453223628		

Fuente: de mi autoría propia.

**Tabla 5. Datos obtenidos del potencial mínimo, con datos igual a uno.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	-0.15553191	-0.5	0.344468089	1.52340497	0.22611721
2	-0.21768804	-0.5	0.282311963	1.24852043	
3	-0.25533151	-0.5	0.24466849	1.08204274	
4	-0.29457574	-0.5	0.205424261	0.90848572	
5		-0.5	0.053713269		

Fuente: de mi autoría propia.

Segunda configuración

- Numero de generaciones: 2000

- Número de población inicial: 100
- Tamaño del numeral: 1 cifras enteras y 9 cifras decimales.
- Índice de mutación: 0.000001

Con los cuales obtenemos los siguientes resultados, según las primeras 5 compiladas. En la tabla 6 y 7 se puede observar los resultados en donde la segunda columna indica el resultado del algoritmo genético, la tercera columna indica el resultado analítico, en la cuarta columna se obtiene la diferencia entre los resultados del método analítico y el resultado del algoritmo genético, en la quinta columna se calcula el error de cada compilada, y finalmente en la sexta columna se indica el error absoluto de cada bloque de compilación ya será en la tabla 6 y 7.

**Tabla 6. Datos obtenidos del radio óptimo para el potencial efectivo mínimo, con datos igual a uno.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	1.07231313	1	0.072313132	0.34857966	0.207450808
2	1.45580616	1	0.455806165	2.1971771	
3	1.14023416	1	0.140234157	0.67598752	
4	1.07407405	1	0.074074055	0.35706805	
5	0.70517347	1	0.294826533	1.42118768	
	1.0895202		0.207450808		

Fuente: de mi autoría propia.

**Tabla 7. Datos obtenidos del potencial mínimo, con datos igual a uno.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	-0.49772615	-0.5	0.002273846	0.0057739	0.39381461
2	-0.45098565	-0.5	0.049014354	0.12446048	
3	-0.49243708	-0.5	0.00756292	0.01920427	
4	0.49762188	-0.5	0.99762188	2.5332272	
5	0.41260005	-0.5	0.912600045	2.31733416	
			0.393814609		

Fuente: de mi autoría propia

Segundo caso: variables con valores según a la investigación (L, m, G, M  $\neq$  1)

Primera configuración

- Numero de generaciones: 3000
- Número de población inicial: 100
- Tamaño del numeral: 8 cifras enteras y 10 cifras decimales.
- Índice de mutación: 0.000001

Con los cuales obtenemos los siguientes resultados, según las primeras 5 compiladas. En la tabla 8 y 9 se puede observar los resultados en donde la segunda columna indica el resultado del algoritmo genético, la tercera columna indica el resultado analítico, en la cuarta columna se obtiene la diferencia entre los resultados del método analítico y el resultado del algoritmo genético, en la quinta columna se calcula el error de cada compilada, y finalmente en la sexta columna se indica el error absoluto de cada bloque de compilación ya será en la tabla 8 y 9.

**Tabla 8. Datos obtenidos del radio óptimo para el potencial efectivo mínimo**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	75008800.6	42231612.9	32777187.7	1.92459987	17030650.5
2	47816508.6	42231612.9	5584895.69	0.32793202	
3	23071705.6	42231612.9	19159907.3	1.12502498	
4	30056323.7	42231612.9	12175289.2	0.71490453	
5	57687585.5	42231612.9	15455972.6	0.90753859	
			17030650.5		

Fuente: de mi autoría propia.

**Tabla 9. Datos obtenidos del potencial mínimo, con datos igual a uno.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	-8775691333	1.0847E+10	2071212884	0.84482389	2451650456
2	-10698931989	1.0847E+10	147972228	0.06035617	
3	-3366359708	1.0847E+10	7480544509	3.051228	
4	-9067016268	1.0847E+10	1779887949	0.72599581	
5	-10068269506	1.0847E+10	778634711	0.31759614	
			2451650456		

Fuente: de mi autoría propia.

Segunda configuración

- Numero de generaciones: 6000
- Número de población inicial: 100
- Tamaño del numeral: 8 cifras enteras y 10 cifras decimales.
- Índice de mutación: 0.000001

Con los cuales obtenemos los siguientes resultados, según las primeras 5 compiladas. En la tabla 10 y 11 se puede observar los resultados en donde la segunda columna indica el resultado del algoritmo genético, la tercera columna indica el resultado analítico, en la cuarta columna se obtiene la diferencia entre los resultados del método analítico y el resultado del algoritmo genético, en la quinta columna se calcula el error de cada compilada, y finalmente en la sexta columna se indica el error absoluto de cada bloque de compilación ya será en la tabla 10 y 11.

**Tabla 10. Datos obtenidos del radio óptimo para el potencial efectivo mínimo.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	55380464	42231612.9	13148851.1	2.14596851	6127233.95
2	40216526.9	42231612.9	2015086.01	0.32887368	
3	46311465.6	42231612.9	4079852.75	0.66585555	
4	52073363	42231612.9	9841750.12	1.60623051	
5	43782242.7	42231612.9	1550629.76	0.25307174	
			6127233.95		

Fuente: de mi autoría propia.

**Tabla 11. Datos obtenidos del potencial mínimo**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	-10235443951	-1.0847E+10	611460266	2.72018045	224786655
2	-10819671946	-1.0847E+10	27232270.7	0.12114719	
3	-10762722509	-1.0847E+10	84181707.8	0.37449602	
4	-10459451045	-1.0847E+10	387453172	1.72364846	
5	-10833298356	-1.0847E+10	13605860.9	0.06052789	
			224786655		

Fuente: de mi autoría propia.

#### 4.1.2 Ecuación de Energía

Para la ecuación en mención se tomó los siguientes parámetros.

Primer caso: variables con valores unitarios (L, m, G, M = 1)

##### Primera configuración

- Numero de generaciones: 1000
- Número de población inicial: 100
- Tamaño del numeral: 1 cifras enteras y 9 cifras decimales.
- Índice de mutación: 0.000001

Con los cuales obtenemos los siguientes resultados, según las primeras 5 compiladas. En la tabla 12 y 13 se puede observar los resultados en donde la segunda columna indica el resultado del algoritmo genético, la tercera columna indica el resultado analítico, en la cuarta columna se obtiene la diferencia entre los resultados del método analítico y el resultado del algoritmo genético, en la quinta

columna se calcula el error de cada compilada, y finalmente en la sexta columna se indica el error absoluto de cada bloque de compilación ya será en la tabla 12 y 13.

**Tabla 12. Datos obtenidos del radio óptimo para la energía mínima. Con datos igual a uno.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	2.16185521	1	1.161855214	1.54137829	0.753776811
2	1.55017439	1	0.550174385	0.7298903	
3	2.50848118	1	1.508481177	2.00123054	
4	0.72685835	1	0.273141649	0.36236409	
5	1.27523163	1	0.275231629	0.36513677	
			0.753776811		

Fuente: de mi autoría propia.

**Tabla 13. Datos obtenidos de la energía mínima, con datos igual a uno.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	-0.15558217	-0.3	0.144417831	1.49777164	0.0964218
2	-0.23701899	-0.3	0.062981011	0.6531823	
3	-0.11918765	-0.3	0.180812355	1.87522285	
4	-0.22939324	-0.3	0.070606761	0.73226972	
5	-0.27670898	-0.3	0.023291021	0.24155349	
			0.096421796		

Fuente: de mi autoría propia.

Segunda configuración

- Numero de generaciones: 3000
- Número de población inicial: 100
- Tamaño del numeral: 1 cifras enteras y 9 cifras decimales.
- Índice de mutación: 0.000001

Con los cuales obtenemos los siguientes resultados, según las primeras 5 compiladas. En la tabla 14 y 15 se puede observar los resultados en donde la segunda columna indica el resultado del algoritmo genético, la tercera columna indica el resultado analítico, en la cuarta columna se obtiene la diferencia entre los resultados del método analítico y el resultado del algoritmo genético, en la quinta columna se calcula el error de cada compilada, y finalmente en la sexta columna se indica el error absoluto de cada bloque de compilación ya será en la tabla 14 y 15.

**Tabla 14. Datos obtenidos del radio óptimo para la energía mínima, con datos igual a uno**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	1.12421584	1	0.124215843	0.79815506	0.15562871
2	1.05075218	1	0.050752176	0.32611063	
3	0.7674756	1	0.232524399	1.49409706	
4	1.3140334	1	0.3140334	2.01783719	
5	1.05661773	1	0.056617733	0.36380005	
			0.15562871		

Fuente: de mi autoría propia.

**Tabla 15. Datos obtenidos de la energía mínima, con datos igual a uno.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	-0.29389586	-0.3	0.006104141	0.36701484	0.01663187
2	-0.29883352	-0.3	0.001166484	0.07013548	
3	-0.25410368	-0.3	0.045896325	2.75954167	
4	-0.27144324	-0.3	0.028556757	1.71699063	
5	-0.29856438	-0.3	0.001435619	0.08631737	
			0.016631865		

Fuente: de mi autoría propia.

Segundo caso: variables con valores según a la investigación (L, m, G, M  $\neq$  1)

Primera configuración

- Numero de generaciones: 3000
- Número de población inicial: 100
- Tamaño del numeral: 8 cifras enteras y 10 cifras decimales.
- Índice de mutación: 0.000001

Con los cuales obtenemos los siguientes resultados, según las primeras 5 compiladas. En la tabla 16 y 17 se puede observar los resultados en donde la segunda columna indica el resultado del algoritmo genético, la tercera columna indica el resultado analítico, en la cuarta columna se obtiene la diferencia entre los resultados del método analítico y el resultado del algoritmo genético, en la quinta

columna se calcula el error de cada compilada, y finalmente en la sexta columna se indica el error absoluto de cada bloque de compilación ya será en la tabla 16 y 17.

**Tabla 16. Datos obtenidos del radio óptimo para la energía mínima.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	41223243.2	42231612.9	1008369.71	0.11432479	8820219.2
2	74414431.3	42231612.9	32182818.4	3.64875495	
3	42243412	42231612.9	11799.1196	0.00133774	
4	32324232.6	42231612.9	9907380.28	1.12325783	
5	43222341.3	42231612.9	990728.447	0.1123247	
			8820219.2		

Fuente: de mi autoría propia.

**Tabla 17. Datos obtenidos de la energía mínima.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	6483971.898	-6272.83582	6490244.73	0.01060506	611995018
2	2028795525	-6272.83582	2028801797	3.3150626	
3	-5426.609425	-6272.83582	846.226395	1.3827E-06	
4	1018976929	-6272.83582	1018983202	1.66501879	
5	5692725.021	-6272.83582	5698997.86	0.00931216	
			611995018		

Fuente: de mi autoría propia.

Segunda configuración

- Numero de generaciones: 6000
- Número de población inicial: 100
- Tamaño del numeral: 8 cifras enteras y 10 cifras decimales.
- Índice de mutación: 0.000001

Con los cuales obtenemos los siguientes resultados, según las primeras 5 compiladas. En la tabla 18 y 19 se puede observar los resultados en donde la segunda columna indica el resultado del algoritmo genético, la tercera columna indica el resultado analítico, en la cuarta columna se obtiene la diferencia entre los resultados del método analítico y el resultado del algoritmo genético, en la quinta columna se calcula el error de cada compilada, y finalmente en la sexta columna se indica el error absoluto de cada bloque de compilación ya será en la tabla 18 y 19.

**Tabla 18. Datos obtenidos del radio óptimo para la energía mínima.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	41234432.8	42231612.9	997180.107	0.14802787	6736435.01
2	35534455.8	42231612.9	6697157.13	0.99416934	
3	31817222.7	42231612.9	10414390.2	1.54597946	
4	35554343.9	42231612.9	6677269.01	0.99121702	
5	33335434.3	42231612.9	8896178.64	1.32060632	
			6736435.01		

Fuente: de mi autoría propia.

**Tabla 19. Datos obtenidos de la energía mínima**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	6337285.929	-6272.83582	6343558.77	0.01170905	541765604
2	385283468.5	-6272.83582	385289741	0.71117424	
3	1162108325	-6272.83582	1162114597	2.14505053	
4	382570160.8	-6272.83582	382576434	0.70616597	
5	772497415.9	-6272.83582	772503689	1.42590021	
			541765604		

Fuente: de mi autoría propia.

#### 4.1.3 Ecuación de Velocidad

Para la ecuación en mención se tomó los siguientes parámetros.

Primer caso: variables con valores unitarios (L, m, G, M = 1)

##### Primera configuración

- Numero de generaciones: 1000
- Número de población inicial: 100
- Tamaño del numeral: 1 cifras enteras y 9 cifras decimales.
- Índice de mutación: 0.000001

Con los cuales obtenemos los siguientes resultados, según las primeras 5 compiladas. En la tabla 20 y 21 se puede observar los resultados en donde la segunda columna indica el resultado del algoritmo genético, la tercera columna indica el resultado analítico, en la cuarta columna se obtiene la diferencia entre los resultados del método analítico y el resultado del algoritmo genético, en la quinta

columna se calcula el error de cada compilada, y finalmente en la sexta columna se indica el error absoluto de cada bloque de compilación ya será en la tabla 20 y 21.

**Tabla 20. Datos obtenidos del radio óptimo para la velocidad máxima.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	0.86183711	1	0.13816289	0.42649418	0.323950238
2	1.61166387	1	0.611663871	1.88814145	
3	1.344607	1	0.344607004	1.06376525	
4	1.26760215	1	0.267602147	0.82605942	
5	0.74228472	1	0.257715276	0.7955397	
			0.323950238		

Fuente: de mi autoría propia.

**Tabla 21. Datos obtenidos de la velocidad máxima**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	141.424801	141.424892	9.08608E-05	0.32082348	0.00028321
2	141.424382	141.424892	0.000509239	1.79808853	
3	141.42466	141.424892	0.000232221	0.81995759	
4	141.424734	141.424892	0.000157564	0.55634869	
5	141.424466	141.424892	0.000426171	1.50478171	
			0.000283211		

Fuente: de mi autoría propia.

Segunda configuración

- Numero de generaciones: 2000
- Número de población inicial: 100
- Tamaño del numeral: 1 cifras enteras y 9 cifras decimales.
- Índice de mutación: 0.000001

Con los cuales obtenemos los siguientes resultados, según las primeras 5 compiladas. En la tabla 22 y 23 se puede observar los resultados en donde la segunda columna indica el resultado del algoritmo genético, la tercera columna indica el resultado analítico, en la cuarta columna se obtiene la diferencia entre los resultados del método analítico y el resultado del algoritmo genético, en la quinta columna se calcula el error de cada compilada, y finalmente en la sexta columna se indica el error absoluto de cada bloque de compilación ya será en la tabla 22 y 23.

**Tabla 22. Datos obtenidos del radio óptimo para la velocidad máxima.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	1.85761138	1	0.857611377	1.56072459	0.549495652
2	1.47811628	1	0.478116278	0.8701002	
3	1.83624628	1	0.836246277	1.5218433	
4	1.55368648	1	0.553686485	1.00762669	
5	1.02181784	1	0.021817843	0.03970521	
			0.549495652		

Fuente: de mi autoría propia.

**Tabla 23. Datos obtenidos de la velocidad máxima**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	141.424138	141.424892	0.000753558	1.63296693	0.00046147
2	141.424522	141.424892	0.000369909	0.80159559	
3	141.424158	141.424892	0.00073325	1.58895849	
4	141.424443	141.424892	0.000449	0.97298613	
5	141.42489	141.424892	1.61184E-06	0.00349286	
			0.000461466		

Fuente: de mi autoría propia.

Segundo caso: variables con valores según a la investigación (L, m, G, M, m  $\neq$  1)

Primera configuración

- Numero de generaciones: 3000
- Número de población inicial: 100
- Tamaño del numeral: 8 cifras enteras y 10 cifras decimales.
- Índice de mutación: 0.000001

Con los cuales obtenemos los siguientes resultados, según las primeras 5 compiladas. En la tabla 24 y 25 se puede observar los resultados en donde la segunda columna indica el resultado del algoritmo genético, la tercera columna indica el resultado analítico, en la cuarta columna se obtiene la diferencia entre los resultados del método analítico y el resultado del algoritmo genético, en la quinta

columna se calcula el error de cada compilada, y finalmente en la sexta columna se indica el error absoluto de cada bloque de compilación ya será en la tabla 24 y 25.

**Tabla 24. Datos obtenidos del radio óptimo para la velocidad máxima.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	25243342.8	42231612.9	16988270.1	0.88479045	19200331.6
2	65333334.5	42231612.9	23101721.6	1.20319388	
3	66342466.5	42231612.9	24110853.6	1.25575194	
4	66543456.8	42231612.9	24311843.9	1.26622	
5	34742644.1	42231612.9	7488968.82	0.39004372	
			19200331.6		

Fuente: de mi autoría propia.

**Tabla 25. Datos obtenidos de la velocidad máxima**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	1.29701E+11	1.297E+11	0	0	0
2	1.29701E+11	1.297E+11	0	0	
3	1.29701E+11	1.297E+11	0	0	
4	1.29701E+11	1.297E+11	0	0	
5	1.29701E+11	1.297E+11	0	0	
			0		

Fuente: de mi autoría propia.

Segunda configuración

- Numero de generaciones: 6000

- Número de población inicial: 100
- Tamaño del numeral: 8 cifras enteras y 10 cifras decimales.
- Índice de mutación: 0.000001

Con los cuales obtenemos los siguientes resultados, según las primeras 5 compiladas. En la tabla 26 y 27 se puede observar los resultados en donde la segunda columna indica el resultado del algoritmo genético, la tercera columna indica el resultado analítico, en la cuarta columna se obtiene la diferencia entre los resultados del método analítico y el resultado del algoritmo genético, en la quinta columna se calcula el error de cada compilada, y finalmente en la sexta columna se indica el error absoluto de cada bloque de compilación ya será en la tabla 26 y 27.

**Tabla 26. Datos obtenidos del radio óptimo para la velocidad máxima.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	26646263.3	42231612.9	15585349.6	1.7570217	8870322.81
2	53334252.4	42231612.9	11102639.5	1.25166127	
3	34665224.6	42231612.9	7566388.25	0.85300033	
4	32466325.8	42231612.9	9765287.12	1.10089422	
5	42563562.4	42231612.9	331949.536	0.03742249	
			8870322.81		

Fuente: de mi autoría propia.

**Tabla 27. Datos obtenidos de la velocidad máxima**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	1.29701E+11	1.297E+11	0	0	0
2	1.29701E+11	1.297E+11	0	0	
3	1.29701E+11	1.297E+11	0	0	
4	1.29701E+11	1.297E+11	0	0	
5	1.29701E+11	1.297E+11	0	0	
			0		

Fuente: de mi autoría propia.

#### 4.1.4 Ecuación de Orbita

Para la ecuación en mención se tomó los siguientes parámetros.

Primer caso: variables con valores unitarios ( $L, m, G, M = 1$ )

##### Primera configuración

- Numero de generaciones: 1000
- Número de población inicial: 100
- Tamaño del numeral: 1 cifras enteras y 9 cifras decimales.
- Índice de mutación: 0.000001

Con los cuales obtenemos los siguientes resultados, según las primeras 5 compiladas. En la tabla 28 y 29 se puede observar los resultados en donde la segunda columna indica el resultado del algoritmo genético, la tercera columna indica el resultado analítico, en la cuarta columna se obtiene la diferencia entre los resultados del método analítico y el resultado del algoritmo genético, en la quinta

columna se calcula el error de cada compilada, y finalmente en la sexta columna se indica el error absoluto de cada bloque de compilación ya será en la tabla 28 y 29.

**Tabla 28. Datos obtenidos del ángulo en radianes óptimo para el radio máximo**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	6.33320613	6.28318531	0.050020821	0.30242996	0.165396379
2	6.45363585	6.28318531	0.17045054	1.03055787	
3	6.03564034	6.28318531	0.247544967	1.49667706	
4	6.13438884	6.28318531	0.148796466	0.89963557	
5	6.07301621	6.28318531	0.210169101	1.27069953	
			0.165396379		

. Fuente: de mi autoría propia.

**Tabla 29. Datos obtenidos del radio máximo**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	9.88868286	10	0.111317139	0.09314488	1.19509671
2	8.84623816	10	1.153761841	0.96541295	
3	7.84714991	10	2.152850086	1.8014024	
4	9.09547287	10	0.904527126	0.75686521	
5	8.34697263	10	1.65302737	1.38317456	
			1.195096713		

Fuente: de mi autoría propia.

Segunda configuración

- Numero de generaciones: 2000
- Número de población inicial: 100
- Tamaño del numeral: 1 cifras enteras y 9 cifras decimales.
- Índice de mutación: 0.000001

Con los cuales obtenemos los siguientes resultados, según las primeras 5 compiladas. En la tabla 30 y 31 se puede observar los resultados en donde la segunda columna indica el resultado del algoritmo genético, la tercera columna indica el resultado analítico, en la cuarta columna se obtiene la diferencia entre los resultados del método analítico y el resultado del algoritmo genético, en la quinta columna se calcula el error de cada compilada, y finalmente en la sexta columna se indica el error absoluto de cada bloque de compilación ya será en la tabla 30 y 31.

**Tabla 30. Datos obtenidos del ángulo en radianes óptimo para el radio máximo**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	6.18565745	6.28318531	0.097527855	1.13761545	0.085730073
2	6.37656738	6.28318531	0.093382077	1.08925695	
3	6.33765077	6.28318531	0.054465466	0.63531342	
4	6.36104159	6.28318531	0.077856281	0.90815601	
5	6.17776662	6.28318531	0.105418684	1.22965817	
			0.085730073		

. Fuente: de mi autoría propia.

**Tabla 31. Datos obtenidos del radio máximo**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	9.58985481	10	0.410145193	1.23506072	0.33208504
2	9.6226715	10	0.377328503	1.13624058	
3	9.86829875	10	0.131701246	0.39658891	
4	9.73460141	10	0.265398588	0.79918862	
5	9.52414831	10	0.475851686	1.43292116	
			0.332085043		

Fuente: de mi autoría propia.

Segundo caso: variables con valores según a la investigación (L, m, G, M  $\neq$  1)

Primera configuración

- Numero de generaciones: 1000
- Número de población inicial: 100
- Tamaño del numeral: 8 cifras enteras y 10 cifras decimales.
- Índice de mutación: 0.000001

Con los cuales obtenemos los siguientes resultados, según las primeras 5 compiladas. En la tabla 32 y 33 se puede observar los resultados en donde la segunda columna indica el resultado del algoritmo genético, la tercera columna indica el resultado analítico, en la cuarta columna se obtiene la diferencia entre los resultados del método analítico y el resultado del algoritmo genético, en la quinta columna se calcula el error de cada compilada, y finalmente en la sexta columna se indica el error absoluto de cada bloque de compilación ya será en la tabla 32 y 33.

**Tabla 32. Datos obtenidos del ángulo en radianes óptimo para el radio máximo.**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	6.07188165	6.28318531	0.21130365	0.72391857	0.29188871
2	3.50423657	3.14159265	0.36264392	1.24240475	
3	6.0763563	6.28318531	0.206829	0.70858858	
4	6.02287362	6.28318531	0.26031169	0.89181829	
5	5.86483004	6.28318531	0.41835527	1.4332698	
			0.29188871		

Fuente: de mi autoría propia.

**Tabla 33. Datos obtenidos del radio máximo**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	42231624.83	42231625.1	0.2716025	0.48663718	0.55812114
2	42231601.48	42231600.7	0.7942033	1.42299449	
3	42231624.85	42231625.1	0.2602618	0.46631775	
4	42231624.69	42231625.1	0.4114052	0.73712528	
5	42231624.05	42231625.1	1.0531329	1.8869253	
			0.55812114		

Fuente: de mi autoría propia.

Segunda configuración

- Numero de generaciones: 2000

- Número de población inicial: 100
- Tamaño del numeral: 8 cifras enteras y 10 cifras decimales.
- Índice de mutación: 0.000001

Con los cuales obtenemos los siguientes resultados, según las primeras 5 compiladas. En la tabla 34 y 35 se puede observar los resultados en donde la segunda columna indica el resultado del algoritmo genético, la tercera columna indica el resultado analítico, en la cuarta columna se obtiene la diferencia entre los resultados del método analítico y el resultado del algoritmo genético, en la quinta columna se calcula el error de cada compilada, y finalmente en la sexta columna se indica el error absoluto de cada bloque de compilación ya será en la tabla 34 y 35.

**Tabla 34. Datos obtenidos del ángulo en radianes óptimo para el radio máximo**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	5.85663504	6.28318531	0.42655027	1.10512078	0.38597616
2	6.66276026	6.28318531	0.37957495	0.98341554	
3	2.80462881	3.14159265	0.33696384	0.87301724	
4	5.81343671	6.28318531	0.4697486	1.21704047	
5	6.60022842	6.28318531	0.31704312	0.82140596	
			0.38597616		

. Fuente: de mi autoría propia.

**Tabla 35. Datos obtenidos del radio máximo**

n°	A.G.	M.A.	diferencia	error	Error absoluto
1	42231624.01	42231625.1	1.0941624	1.19413687	0.91627888
2	42231624.24	42231625.1	0.8691819	0.94859973	
3	42231601.37	42231600.7	0.6867348	0.7494823	
4	42231623.78	42231625.1	1.3227152	1.44357272	
5	42231624.5	42231625.1	0.6086001	0.66420837	
			0.91627888		

Fuente: de mi autoría propia.

#### 4.2 Discusión de los resultados.

En los resultados del trabajo se pudo apreciar que el número de generaciones aplicados al algoritmo genético ayuda a poder lograr una mejor solución, salvo en ciertos casos, en donde se necesita aplicar otros ajustes, tales como, el número de individuos, número del tamaño del individuo, valores a tomar el individuo inicialmente y el índice de mutación. Como se indica en Podesta (2014) y Tapía (2021)

La investigación también concluyó que, en algunas ecuaciones a optimizar, la misma estructura matemática de la ecuación, dado que en algunos casos en donde prueba cada dato de ingreso, salen resultados infinitos o nulos, que hacen invalidar todo el proceso de optimizado. Para ello se ajusta el algoritmo, con un fitness mayor a lo que da el resultado, en los casos de datos con valor unitario, se consideró un +10 y

el los casos donde los datos son los originales según la investigación se consideró un +200.

Los valores de las cifras a tomar los primeros individuos, son también un punto importante, dado que en los casos de variables igual a la unidad se toma valores entre 0 y 4 o 5 para los enteros y de 0 a 9 en caso de los decimales, y en los casos con datos según la investigación se toma valores entre 0 y 9 para los enteros y de 0 a 9 para los decimales.

Los valores iniciales o población inicial son aleatorios en el caso de la presente investigación no como en el caso de Tapia (2021) en donde se toma ya valores posibles a la solución óptima. Uno con el gráfico obtenido de una ecuación en dos o más variables podría dar también un margen de posibles respuestas con las cuales poder iniciar el proceso del algoritmo genético.

El índice de mutación ayuda a poder mutar algunos resultados obtenidos con la intención de evitar los estancamientos como también lo indica Podesta (2014). En caso de la comparación con otras herramientas como el de gradiente, el algoritmo genético elige aleatoriamente el o los puntos de partida para la interacción y no necesita ninguna hipótesis de diferenciabilidad de la función objetivo, esto coincide con Berres Stefan (2018).

En las distintas ecuaciones desarrolladas con el algoritmo genético se muestra un resultado óptimo, con los casos de análisis optados de 3000 y 6000 generaciones, con un tiempo promedio de 15 segundos. Se enumera a continuación los resultados de cada ecuación:

De las pruebas realizadas se obtuvo los siguientes resultados que se enumera a continuación.

- 1) Los datos obtenidos según la primera ecuación son: (potencial efectivo)
  - Con datos igual a la unidad, el menor error registrado es de 0.207 con 2000 generaciones.
  - Con datos en base a la investigación, el menor error registrado es de 6127233.95 con 6000 generaciones,
- 2) Los datos obtenidos según la segunda ecuación son: (ecuación de energía)
  - Con datos igual a la unidad, el menor error registrado es de 0.016 con 3000 generaciones.
  - Con datos en base a la investigación, el menor error registrado es de 6736435.01 con 6000 generaciones,
- 3) Los datos obtenidos según la tercera ecuación son: (ecuación de velocidad)
  - Con datos igual a la unidad, el menor error registrado es de 0.00028 con 1000 generaciones.
  - Con datos en base a la investigación, el menor error registrado es de 0 con 6000 generaciones.
- 4) Los datos obtenidos según la cuarta ecuación son: (ecuación de orbita)
  - Con datos igual a la unidad, el menor error registrado es de 0.085 con 2000 generaciones.
  - Con datos en base a la investigación, el menor error registrado es de 0.291 con 1000 generaciones.

# Capítulo 5

## 5 PROPUESTA

### 5.1 Denominación de la propuesta

Desarrollo tecnológico para los cálculos de ecuaciones matemáticas en el tema de orbitas planetarias, usando algoritmos genéticos.

### 5.2 Descripción

Se pretende diseñar un programa en Python que ayude a la optimización de ecuaciones planetarias con algoritmos genéticos. Así mismo mostrar si efectivamente llega a las soluciones optimas y más exactas, comparándolas con otras técnicas de optimización.

Con este desarrollo tecnológico se logrará cubrir la necesidad de Puno – Perú, con la mayor cantidad de soluciones de ecuaciones con respecto al tema de orbitas planetarias, y que en un futuro se pueda seguir desarrollando a un más el programa. Así también el desarrollo del programa brinda la utilización necesaria de esta herramienta tecnológica en el ámbito de enseñanza como también en el análisis investigativo.

### 5.3 Fundamentación

En la carrera de física del departamento de Puno - Perú se tiene la necesidad de obtener resultados los más precisos posibles, en el campo de la astronomía los cálculos en orbitas planetarias son muy requeridos que sean precisos, dado que esta información es importante para el análisis de la composición de los astros, entender su origen, desarrollo, su localización y su movimiento.

Para conseguir una mejor exactitud se plantea el uso de algoritmos genéticos en la optimización de algunas ecuaciones de orbitas planetarias, comparándolas después

con las aproximaciones que nos brinda otros algoritmos de métodos numéricos como gradiente.

#### 5.4 Objetivos de la propuesta

##### a) Objetivo General

Desarrollar e implementar tecnología para los cálculos de las ecuaciones matemáticas de orbitas planetarias, para el departamento de Puno – Perú.

##### b) Objetivo específico

Diseño de optimización de ecuaciones mediante algoritmos genéticos.

Indicar las mejores aproximaciones teniendo en cuenta: optimización mediante métodos numéricos y optimización mediante algoritmos genéticos.

Comparación de los resultados obtenidos con el método analítico y el método de Newton.

#### 5.5 Beneficiarios

Va dirigido al departamento de Física de la universidad Nacional del Altiplano Puno – Perú. Estudiantes, docentes e investigadores en general quienes ejecutarían el producto de la presente investigación.

#### 5.6 Productos

El desarrollo del software que resuelve ecuaciones físicas de mecánica celeste.

### 5.7 Localización

Se desarrollo en el departamento de Física de la universidad Nacional del Altiplano Puno – Perú.

### 5.8 Método

Se utiliza metodología de desarrollo de software con las siguientes fases generales:

- Análisis de necesidades
- Planeación
- Diseño
- Implementación
- Pruebas
- Validación
- Documentación

### 5.9 Cronograma

En la tabla 36 se muestra el cronograma de desarrollo del desarrollo de la investigación presente.

**Tabla 36. Cronograma de actividades**

Actividad	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Búsqueda de referencias						
Recolección de información						
Redacción del planteamiento teórico y objetivos						
Redacción de los aspectos metodológicos						
Desarrollo del software						
Recolección de datos astronómicos						
Desarrollo del análisis de los resultados						
Redacción de la propuesta						
Redacción de la conclusión y recomendaciones						
Presentación del proyecto						

Fuente: de mi autoría propia.2021.

## 5.10 Recursos

- Programa de Python
- Computadora
- Textos
- Internet
- Procesados de textos

## 5.11 Presupuesto

- No se requirió de ningún presupuesto.
- El departamento proporciono todo el material requerido para la investigación.

## Conclusiones

Se planteo dar una solución de optimización a cuatro ecuaciones de orbitas planetarias, haciendo uso de algoritmo genético, con el cual se obtuvo resultados los cuales se enumera a continuación.

5) Los datos obtenidos según la primera ecuación son:

- Con datos igual a la unidad, el menor error registrado es de 0.207 con 2000 generaciones.
- Con datos en base a la investigación, el menor error registrado es de 6127233.95 con 6000 generaciones,

6) Los datos obtenidos según la segunda ecuación son:

- Con datos igual a la unidad, el menor error registrado es de 0.016 con 3000 generaciones.
- Con datos en base a la investigación, el menor error registrado es de 6736435.01 con 6000 generaciones,

7) Los datos obtenidos según la tercera ecuación son:

- Con datos igual a la unidad, el menor error registrado es de 0.00028 con 1000 generaciones.
- Con datos en base a la investigación, el menor error registrado es de 0 con 6000 generaciones.

8) Los datos obtenidos según la cuarta ecuación son:

- Con datos igual a la unidad, el menor error registrado es de 0.085 con 2000 generaciones.
- Con datos en base a la investigación, el menor error registrado es de 0.291 con 1000 generaciones

Los datos líneas arriba mencionados nos muestran que el desarrollo e implementación tecnológica para el cálculo de optimización se realizó exitosamente, y en cuestión al código del algoritmo genético utilizado, se puede consultar en el apéndice A.

La comparación de los resultados obtenidos con el algoritmo genético con el resultado del método analítico, se indica los menores errores líneas arriba, con lo que se indica, que el desarrollo por algoritmo genético para los casos de optimización para datos moderadamente pequeños, se tiene errores menores aceptables, en cambio para datos más grandes se muestra un error más considerable, cabe resaltar que dichos resultados están sujetos a las variables de número de generaciones, índice de mutación, tamaño del numeral, número de individuos inicialmente y el modo de medir el fitness.

## Recomendaciones

Para futuros trabajos de investigación referidos al tema presente, se plantea las siguientes sugerencias:

- 1) Las ecuaciones trabajadas en la investigación son enteramente para el caso de optimización y que, si presentan una solución analítica exacta, a lo cual se plantea que se pueda realizar un análisis con ecuaciones que no presenten solución analítica exacta, y compara los resultados con método numéricos.
- 2) En las compilaciones del algoritmo genético, se plantea que se pueda analizar con un mayor número de generaciones para poder tener una mejor aproximación a las soluciones de las ecuaciones, esto es dado a la capacidad computacional que se cuente.
- 3) Utilizar el algoritmo genético en otras disciplinas científicas e identificar su efectividad en ellas.

## Bibliografía

Gonzales Duque Raúl (s.f.). Python para todos.

Challenger-Pérez, I., Díaz-Ricardo, Y., & Becerra-García, R. A. (2014). El lenguaje de programación Python. *Ciencias Holguín*.

Marzal Andrés & Gracia Isabel (2003). Introducción a la programación con Python. Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos. Universitat Jaume I.

Boss Alan. (1996). Extrasolar Planets. *Physics Today*.

Moraño Fernández, J. A. (2021). Transferencia de Hohmann.

Marion, Jerry B. (2003). Dinámica clásica de las partículas y sistemas. Editorial reverté, s.a.

Abramson Guillermo (2019). Mecánica Clásica. Instituto Balseiro. Universidad Nacional de Cuyo - CNEA.

Arias Serna Jorge Ivan Londoño Marín (2009). Algoritmos Genéticos: Una solución alternativa para optimizar el modelo de inventario (Q,r). Escuela de ciencias y humanidades, Medellín.

Di Rado Alejandra y Podestá Gabriela (2014). Algoritmos genéticos binarios con control de diversidad. Universidad de Buenos Aires.

Marcos; Rivero Gestal Daniel; Rabuñal, Juan Ramón; Dorado, Julián; Pazos, Alejandro), Gestal, M. (2010). Introducción a los algoritmos genéticos y la programación genética (p. 32). Universidad de Coruña.

Ruiz Lizama, E. C. (2021). Algoritmo genético de operadores de cruce y mutación (ALGOCYM) para la optimización de la distribución en planta en organizaciones de manufactura.

Berres Stefan, Coronel Aníbal y LAgos Richard (2018), Solución numérica de un problema inverso aplicando un algoritmo genético continuo. Universidad Industrial de Santander, Escuela de Matemáticas.

Honda Mitsura (2018), Application of genetic algorithms to modelings of fusion plasma physics, Computer Physics Communications

Olivares Flores, Linda I. (s.f.). Manual de Programación en Lenguaje C++.

Goldberg, D. (1989) Genetics Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning.  
Addison Wesley.

Cristina Maciel, María (2000). Introducción a la optimización numérica, Córdoba.

Stewart, J., & Bouclier, A. S. (2001). Cálculo de una variable: trascendentes tempranas (No. 515.83 S7C3 2001). Thomson Learning.

Alonso, M., & Finn, E. J. (2018). Física: Um curso universitário-Mecânica (Vol. 1). Editora Blucher.

Goldstein, H. (1987). Mecánica clásica. Reverté.

Melian Perdomo Kevin (2014). Mecánica celeste, Departamento de análisis matemático, Universidad de la Laguna.

Tapia, A., del Nozal, A. R., Reina, D. G., & Millán, P. (2021). Three-dimensional optimization of penstock layouts for micro-hydropower plants using genetic algorithms. Applied Energy, 301, 117499.

ESA SKY (<http://sky.esa.int/> )

CHIVO (<https://vo.chivo.cl/> )

ALADIN (: <http://aladin.u-strasbg.fr/> )

Space Place (<https://spaceplace.nasa.gov/planets-weight/sp/#:~:text=%C2%BFCu%C3%A1l%20es%20la%20masa%20de,000%20000%20000%20kilos> )

Dinámica Celeste  
([http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/solar/sistema\\_solar.html](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/solar/sistema_solar.html) )

## Apéndice

### A

Algoritmo genético para la optimización de las ecuaciones.

```
# ecuacion de V(r)
```

```
def fx(x):
```

```
    return U = (L**2)/(2*m*x**2) - (G*M*m)/(x)
```

```
def fx(x):
```

```
    return (1/2)*m*v0**2 + (L**2)/(2*m*x**2) - (G*M*m)/(x)
```

```
def fx(x):
```

```
    return ((2/m)*(E-(L**2)/(2*m*x**2) + (G*M*m)/(x)))**(1/2)
```

```
def fx(x):
```

```
    return (L**2)/(G*M*m**2*(1-e*cos(x)))
```

```
y_axis = []
```

```
x_axis=np.arange(0.4,10,0.02)
```

```
# para que y_axis tome los datos de x_axis

for num in x_axis:

    y_axis.append(fx(num))

#####

# Cambia de una lista a un numero decimal

def listToDecimal(num):

    decimal=0

    for i in range(len(num)):

        decimal+=num[i]*10**(-i+7) # se pone +7

    return decimal

def mutate(individuals, prob, pool):

    for i in range(len(individuals)):

        mutate_individual=individuals[i]

        if np.random.random() < prob:

            mutation = np.random.choice(pool[0])

            mutate_individual = [mutation] + mutate_individual[1:]

    for j in range(1,len(mutate_individual)):
```

```
if np.random.random() < probab:

    mutation = np.random.choice(pool[1])

    mutate_individual = mutate_individual[0:j] + [mutation] + mutate_individual[j+1:]

    individuals[i] = mutate_individual

#####

ind_size = 18 # se pone 18 o 10

aRang = np.arange(2,7,1) # aRang = np.arange(0,9,1) o de (0,2,1) depende
bRang = np.arange(0,9,1) # aRang = np.arange(0,9,1)

genetic_pool=[aRang,bRang]

poblacion = []

for i in range(50):

    individuo = []

    individuo += list(np.random.choice(genetic_pool[0],8))

    individuo += list(np.random.choice(genetic_pool[1],ind_size-8))

    poblacion.append(individuo)
```

```
# Para poder tener cada individuo con su rango correspondiente segun la funcion
```

```
for individuo in poblacion:
```

```
    x = listToDecimal(individuo)
```

```
    y = fx(x)
```

```
#####
```

```
size_poblacion = len(poblacion)
```

```
generaciones = 3000
```

```
for _ in range(generaciones):
```

```
    fitne =[]
```

```
    fitness =[]
```

```
    fitnesss =[]
```

```
    fitnessss =[]
```

```
#extraigo los valores de y para medir su éxito
```

```
for individuo in poblacion:
```

```
    x = listToDecimal(individuo)
```

```
    y = fx(x)
```

```
fitne += [y]
```

```
fitne = np.array(fitne)
```

```
fitnes = fitne/fitne.sum()
```

```
fitness = fitnes + 1    # mas 100 o mas 10 depende de que no se tenga una probabilidad  
positiva
```

```
#divido todos los valores de y para la suma total
```

```
#y así obtener valores entre 0 y 1
```

```
fitnesss=fitness/fitness.sum()
```

```
# se reproducen los mejores individuos
```

```
offspring = []
```

```
for i in range(size_poblacion//2):
```

```
    parents = np.random.choice(size_poblacion, 2, p=fitnesss)
```

```
    cross_point = np.random.randint(ind_size)
```

```
    offspring += [poblacion[parents[0]][:cross_point] + poblacion[parents[1]][cross_point:]]
```

```
offspring += [poblacion[parents[1]][:cross_point] + poblacion[parents[0]][cross_point:]]
```

```
poblacion = offspring
```

```
#####
```

```
# MUTACIONES
```

```
####
```

```
mutate(poblacion,0.000001,genetic_pool)
```

```
for individuo in poblacion:
```

```
    x = listToDecimal(individuo)
```

```
    y = fx(x)
```

```
    plt.plot(x,y,'x')
```

```
plt.plot(x_axis,y_axis)
```