

**O problema de Nathan Jacobson
e questões relacionadas**

Victor Hugo López Solís

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Ivan P. Shestakov

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, Outubro de 2017

O problema de Nathan Jacobson e questões relacionadas

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 30/10/2017. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Ivan Shestakov (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Lucia Satie Ikemoto Murakami - IME-USP
- Prof. Dr. Victor Petrogradskiy - UnB
- Prof. Dr. Alexandr Kornev - UFABC
- Prof. Dr. Faber Alberto Gómez González - Universidade de Antioquia

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer a Cristo nosso Senhor por guiar meus passos, por ter me fortalecido em momentos de angústia, desespero e também de alegria, e também por ter permitido cumprir um dos meus grandes desejos, obter o doutorado.

Eu também quero agradecer a muitas pessoas que me ajudaram a cumprir este sonho. Meus mais sinceros agradecimentos ao professor Ivan Shestakov, pela sua sabedoria e paciência em me guiar, pois as inúmeras conversas e suas palavras foram fundamentais na minha formação como matemático.

Agradeço também a minha família, a minha mãe Eugenia Hermelinda, ao meu pai Victor Modesto e ao meu irmão Jesús Miguel por me dar amor, carinho e que apesar da distância conseguiram acompanhar-me nos meus dias de luta para tornar este sonho realidade. Essa conquista é para vocês.

Agradeço aos meus amigos do CRUSP, onde vivi momentos tristes e felizes, e onde conheci muitas pessoas que me ajudaram a ser feliz todos os dias. Meus agradecimentos especiais são para minha amiga Janeth Marlene e para meu irmão Johnny César, a companhia de ambos me fez sentir e ver que eu não estava sozinho. Muito obrigado a ambos pelo amor, companhia e amizade, e pelo que compartilhamos; refeições, risos, jogos e conversas ... coisas que fazem a vida valer a pena.

Como não lembrar dos meus amigos que me acompanharam todos esses anos no IME, aqui é um momento importante para agradecer de forma especial a sua amizade e companhia; a Diego (Chupito), Carlos (Charly), Daniel (Danielito) e Pablo (Pablito). Obrigado pelos risos e conversas que fizeram sentir me em boa companhia.

Agradeço ao IME (Instituto de Matemática e Estatística) por todo o apoio, especialmente aos professores e administrativos, por me oferecer um bom ambiente de trabalho.

Resumo

López Solís V. H. **O problema de Nathan Jacobson e questões relacionadas**. 2017. 120 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

Este trabalho consiste de três partes: “Teoremas de coordenatização de Wedderburn e de Zorn”, “O problema de Nathan Jacobson” e “Teoremas de Fatorização de Kronecker para as superálgebras alternativas”.

Na primeira parte apresentamos os teoremas de coordenatização de Wedderburn e de Zorn e suas aplicações na teoria de representações das álgebras associativas e alternativas.

Na segunda parte resolvemos um problema de longa data que foi anunciado por Nathan Jacobson sobre a descrição das álgebras alternativas que contém $M_2(F)$ (álgebra associativa de matrizes 2×2) com o mesmo elemento identidade.

Na terceira parte damos uma prova independente que é válida em qualquer característica do clássico Teorema de Fatorização de Kronecker de Nathan Jacobson. Generalizamos esse resultado e provamos um teorema de Fatorização de Kronecker para as superálgebras alternativas cuja parte par contém \mathbb{O} com o mesmo elemento identidade. Além disso, provamos um Teorema de Fatorização de Kronecker para as superálgebras alternativas que contêm a superálgebra associativa $M_{(1|1)}(F)$ com o mesmo elemento identidade. Como Corolário desse resultado, respondemos a um análogo do problema de Jacobson para as superálgebras alternativas, isto é, descrevemos as superálgebras alternativas que contêm a superálgebra associativa $M_{(1|1)}(F)$ com o mesmo elemento identidade. Finalmente, estudamos as representações das superálgebras alternativa simples $\mathbb{O}(4|4)$ e $\mathbb{O}[u]$. Classificamos os bimódulos sobre essas superálgebras e provamos alguns análogos do Teorema de Fatorização de Kronecker para as superálgebras alternativas que contenham $\mathbb{O}(4|4)$ ou $\mathbb{O}[u]$ com o mesmo elemento identidade.

Palavras-chave: (Super) álgebras alternativas, teoremas de coordenatização, teoremas de fatorização de Kronecker.

Abstract

López Solís V. H. **The Nathan Jacobson's problem and related questions.** 2017. 120 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

This work consists of three parts: “Wedderburn and Zorn coordinatizations theorems”, “Nathan Jacobson’s problem” and “Kronecker’s Factorization theorems for alternative superalgebras”.

In the first part we present Wedderburn and Zorn coordinatizations theorems and their applications in the theory of representations of associative and alternative algebras.

In the second part we solve a long standing problem that was announced by Nathan Jacobson on the description of alternative algebras containing $M_2(F)$ (associative matrix algebra 2×2) with the same identity element.

In the third part we give an independent proof that is valid in any characteristic of Nathan Jacobson’s classic Kronecker Factorization Theorem. We generalize this result and prove a Kronecker Factorization Theorem for alternative superalgebras whose even part contains \mathbb{O} with the same identity element. In addition, we prove a Kronecker Factorization Theorem for alternative superalgebras containing the associative superalgebra $M_{(1|1)}(F)$ with the same identity element. As a corollary of this result, we respond to an analogue of Jacobson’s problem for alternative superalgebras, that is, we describe the alternative superalgebras containing the associative superalgebra $M_{(1|1)}(F)$ with the same identity element. Finally, we study the representations of the simple alternative superalgebras $\mathbb{O}(4|4)$ e $\mathbb{O}[u]$. We classify the bimodules on these superalgebras and prove some analogues of the Kronecker Factorization Theorem for alternative superalgebras containing $\mathbb{O}(4|4)$ or $\mathbb{O}[u]$ with the same identity element .

Keywords: Alternative algebras, coordinatization theorems, Kronecker’s factorization theorems.

Sumário

Introdução	1
1 Algumas (super)álgebras não associativas	5
1.1 Álgebras e álgebras livres	5
1.2 Álgebras livres em uma variedade	6
1.3 Bimódulos	7
1.4 Superálgebras	9
2 Teoremas de Coordenatização de Wedderburn e de Zorn	11
2.1 O Teorema de coordenatização de Wedderburn	11
2.2 O Teorema de coordenatização de Zorn	14
2.3 Generalização de um teorema de Nathan Jacobson	25
3 O problema de Nathan Jacobson	31
3.1 Álgebras e bimódulos alternativos	32
3.1.1 Álgebras alternativas	32
3.1.2 Bimódulos alternativos	33
3.2 Formulação do problema	34
3.3 Solução do problema	35
3.3.1 Álgebras alternativas tensoriais	49
3.4 Respostas do problema de Nathan Jacobson	60
3.5 Álgebras e bimódulos alternativos com involução	61
4 Teoremas de Fatorização de Kronecker para as superálgebras alternativas	65
4.1 Superálgebras e (super) bimódulos alternativos	66
4.1.1 Superálgebras alternativas	66
4.1.2 Superimódulos alternativos	67
4.2 Um análogo do problema de Nathan Jacobson para as superálgebras alternativas	68
4.3 Teoremas de Fatorização de Kronecker	69
Referências Bibliográficas	83

Introdução

“Só sei que nada sei.” (Sócrates)

As álgebras alternativas são álgebras não-associativas e nem comutativas que satisfazem as versões debilitadas de associatividade

$$(xy)y = xy^2, \quad x^2y = x(xy).$$

É claro que toda álgebra associativa, é alternativa. Um exemplo clássico de uma álgebra alternativa não-associativa, é a álgebra de octônios \mathbb{O} . Esta álgebra foi descoberta antes da álgebra de matrizes, mas a teoria sistemática das álgebras alternativas teve ainda seu começo nos anos 30, nos trabalhos de Zorn e Moufang dedicados a planos projetivos.

Assim, desde aquele tempo, as álgebras alternativas, junto com as álgebras de Jordan, encontraram aplicações fundamentais em várias partes da matemática e na física e agora formam uma parte intrínseca de métodos algébricos modernos.

A teoria estrutural das álgebras alternativas está bem desenvolvida [1, 6, 12, 19]. Essa teoria tem as mesmas características da teoria das álgebras associativas. Por exemplo, cada álgebra alternativa contém um radical (ideal maximal quase-regular) tal que o quociente por este ideal é soma subdireta de álgebras primitivas. Daí, o famoso teorema de Kleinfeld diz que cada álgebra alternativa simples (ou primitiva) é associativa ou isomorfa à álgebra de octônios.

Nas teorias das álgebras associativas, alternativas e de Jordan, os chamados *teoremas de coordenatização* desempenham um papel importante. Um teorema clássico deste tipo é o teorema de coordenatização de Wedderburn para as álgebras associativas, ele diz que se uma álgebra associativa unitária \mathcal{A} contém uma subálgebra $M_n(F)$ de matrizes $n \times n$ como o mesmo elemento identidade, então $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \otimes_F M_n(F)$ para uma certa subálgebra \mathcal{B} de \mathcal{A} . Kaplansky no Teorema 2 de [4] estendeu o resultado de Wedderburn para as álgebras alternativas \mathcal{A} e \mathcal{B} a álgebra de Cayley. Em um dos seus trabalhos, Nathan Jacobson deu uma nova prova do resultado de Kaplansky, usando sua classificação da redutibilidade completa dos bimódulos alternativos e provou um análogo desse teorema para as álgebras de Jordan [2], onde o papel da álgebra de Cayley é desempenhado pela álgebra de Jordan simples excepcional de dimensão 27 de Albert. Estes resultados tem aplicações importantes na teoria de representações de álgebras alternativas e de Jordan [1, 3].

Nossos principais objetivos são:

- Descrever o Teorema de coordenatização de Wedderburn e aplica-lo na teoria de representação de álgebras associativas. Provar o Teorema de coordenatização de Zorn que foi deixado como um exercício em [19] e aplica-lo na teoria de representação de álgebras alternativas.
- Resolver o problema de Nathan Jacobson que foi anunciado em [2].

- Oferecer uma demonstração que funcione para o caso geral do clássico Teorema de Fatorização de Kronecker de Jacobson. Generalizar esse resultado para as superálgebras alternativas. Resolver um análogo do problema de Jacobson para as superálgebras alternativas. Finalmente, obter um Teorema de Fatorização de Kronecker para as superálgebras alternativas que contêm as superálgebras alternativas simples com o mesmo elemento identidade.

Assim, nosso trabalho começa com:

O capítulo 1 que é dedicado as diferentes classes de (super)álgebras. Nesse capítulo incluímos algumas definições, exemplos de classes de (super)álgebras que usamos nos seguintes capítulos. O capítulo foi embasada nos livros de E. N. Kuzmin e I. Shestakov *Nonassociative structures* [6], R. D. Schafer *An Introduction to Nonassociative Algebras* [12] e o artigo de I. Shestakov *Alternative and Jordan superalgebras* [15].

O capítulo 2 refere-se a dois teoremas de coordenatização. Na seção 2.1, apresentamos o Teorema de coordenatização de Wedderburn relativo as álgebras associativas e o usamos na teoria de representações (bimódulos) de álgebras associativas para obter uma bela equivalência de categorias. Na seção 2.2, apresentamos e demostramos o Teorema de coordenatização de Zorn relativo as álgebras alternativas não-associativas. Esse teorema foi deixado como um exercício no livro [19], e o usamos na teoria de representações de álgebras alternativas para obter novamente uma bela equivalência de categorias, do qual, obtemos a classificação os bimódulos alternativos irredutíveis unitários sobre a álgebra matricial de Cayley-Dickson $C(F)$. Na seção 2.3, obtemos que o Teorema de coordenatização de Wedderburn, no caso $n \geq 3$, admite uma generalização formal para as álgebras alternativas de dimensão e característica arbitrária, o qual, usamos para demonstrar (via extensão cisão nula) que cada bimódulo alternativo unitário para $M_n(F)$ com $n \geq 3$, é associativo. Esse resultado é análogo ao teorema 11.1 de [3], demonstrado por N. Jacobson para corpos de característica diferente de 2.

O capítulo 3 é dedicado ao problema de Nathan Jacobson e suas soluções. Na seção 3.1, incluímos definições, exemplos e definimos um classe importante de álgebras alternativas (a álgebra dos quaterniões \mathbb{H}) que é usada ao longo do capítulo. Na seção 3.2, formulamos o problema de N. Jacobson. Esse problema, refere-se à descrição das álgebras alternativas que contêm uma subálgebra $M_2(F)$ (álgebra split dos quaterniões) com o mesmo elemento identidade, o qual, foi formulado por N. Jacobson na década de 50 em [2, 3]. Na seção 3.4, descrevemos as soluções desse problema, os quais são obtidas ao longo da seção 3.3.

O capítulo 4 é dedicado as superálgebras alternativas simples e demostramos um Teorema de Fatorização de Kronecker para essas superálgebras. Na seção 4.1, incluímos definições, exemplos e alguns resultados principais sem apresentar demonstração da classificação das superálgebras associativas simples de dimensão finita sobre corpos algebricamente fechados, obtida por C. T. Wall [18], e a classificação das superálgebras alternativas simples de característica 2, obtida por I. Shestakov [16]. Na seção 4.2, formulamos um análogo do problema de Jacobson (dada no capítulo 3) para as superálgebras alternativas. Na seção 4.3, damos uma demonstração independente que funciona para o caso geral do clássico Teorema de Fatorização de Jacobson. Generalizamos esse resultado para obter um Teorema de Fatorização de Kronecker para as superálgebras alternativas cuja parte par contem a álgebra de Cayley-Dickson com o mesmo elemento identidade. Também, demostramos um Teorema de Fatorização de Kronecker para as superálgebras alternativas que contêm $M_{(1|1)}(F)$ com o mesmo elemento identidade, o qual usamos para responder o análogo do problema de Jacobson para as superálgebras alternativas que foi formulado na seção 4.2. Finalmente,

demonstramos um Teorema de Fatorização de Kronecker para as superálgebras alternativas simples $\mathbb{O}(4|4)$ e $\mathbb{O}[u]$.

Convém esclarecer ao leitor que, entre os resultados que aparecem na tese, todos aqueles que têm demonstração (a menos do Teorema 3) são contribuições nossas.

Capítulo 1

Algumas (super)álgebras não associativas

Ao longo de cada capítulo vamos incluir definições necessárias para oferecer um conteúdo próprio de cada um deles. Assim, neste capítulo, apresentamos definições de algumas classes de (super)álgebras que serão estudadas nos próximos capítulos. As referências e os conteúdos podem ser encontrados em [6, 12, 15, 19].

1.1 Álgebras e álgebras livres

Definição 1 *Seja \mathcal{A} um espaço vetorial sobre um corpo F . O espaço vetorial \mathcal{A} é uma álgebra sobre o corpo F (ou F -álgebra) se existe uma aplicação bilinear sobre \mathcal{A} , isto é, a aplicação $(x, y) \mapsto xy$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ em \mathcal{A} dada com as seguintes condições*

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha(xz) + \beta(yz); \quad x(\alpha y + \beta z) = \alpha(xy) + \beta(xz),$$

para todo $\alpha, \beta \in F; x, y, z \in \mathcal{A}$.

A aplicação bilinear sobre \mathcal{A} na definição acima é chamada de **multiplicação**.

A álgebra \mathcal{A} é chamada **associativa** se, a multiplicação é associativa, isto é, $(xy)z = x(yz)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$. Se a multiplicação de \mathcal{A} não satisfaz a condição anterior, a álgebra \mathcal{A} é chamada de **não associativa**.

Ao considerar álgebras não associativas, a noção de um **associador** será útil $(x, y, z) \equiv (xy)z - x(yz)$. Além disso, consideramos o **comutador** $[x, y] \equiv xy - yx$ dos elementos $x, y \in \mathcal{A}$.

Uma F -álgebra \mathcal{L} é chamada uma **álgebra de Lie**, se sua multiplicação é **anticomutativa**, isto é,

$$x^2 = 0$$

e se ela satisfaz a **identidade de Jacobi**

$$J(x, y, z) \equiv (xy)z + (yz)x + (zx)y = 0.$$

As álgebras que satisfazem as seguintes identidades

$$xy = yx, \quad x^2(yx) = (x^2y)x$$

são chamadas **álgebras de Jordan**. As **álgebras alternativas** estão definidas pelas iden-

tidades

$$x^2y = x(xy), \quad yx^2 = (yx)x.$$

Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} álgebras sobre F . O **produto de Kronecker** $\mathcal{A} \otimes_F \mathcal{B}$ (escrito $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ se não houver ambiguidade) é o produto tensorial $\mathcal{A} \otimes_F \mathcal{B}$ dos espaços vetoriais \mathcal{A} , \mathcal{B} (assim, todos os elementos são somas $\sum a \otimes b$ com a em \mathcal{A} e b em \mathcal{B}), sendo a multiplicação definida pela distributividade e

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (a_1a_2) \otimes (b_1b_2)$$

para a_i em \mathcal{A} e b_i em \mathcal{B} . Se \mathcal{A} tem identidade 1, então o conjunto de todos os elementos $1 \otimes b$ em $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ que é isomorfa a \mathcal{B} , e podemos identificá-la com \mathcal{B} (similarmente, se \mathcal{B} tem identidade 1, então $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ contém \mathcal{A} como uma subálgebra).

Se \mathcal{A} é um corpo K (uma extensão arbitrária de F). Então, K contém 1, assim $\mathcal{B}_K = K \otimes_F \mathcal{B}$ contém \mathcal{B} (no sentido de isomorfismo) como uma subálgebra sobre F . Além disso, \mathcal{B}_K é facilmente visto como uma álgebra sobre K , a qual, é chamada a **extensão escalar** de \mathcal{B} para uma álgebra sobre K .

Seja \mathcal{A} uma álgebra arbitrária. Os seguintes subconjuntos serão considerados na álgebra \mathcal{A} : O **centro associativo** $N(\mathcal{A})$, o **centro comutativo** $K(\mathcal{A})$ e o **centro** $Z(\mathcal{A})$. Esses subconjuntos, respectivamente estão definidos da seguinte maneira:

$$N(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} | (a, \mathcal{A}, \mathcal{A}) = (\mathcal{A}, a, \mathcal{A}) = (\mathcal{A}, \mathcal{A}, a) = 0\},$$

$$K(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} | [a, \mathcal{A}] = 0\},$$

$$Z(\mathcal{A}) = N(\mathcal{A}) \cap K(\mathcal{A}).$$

Seja a qualquer elemento de uma álgebra \mathcal{A} . A **multiplicação à direita** R_a de \mathcal{A} determinada por a , está definida por $R_a : x \rightarrow xa$, para todo x em \mathcal{A} . Claramente R_a é um operador linear sobre \mathcal{A} . O conjunto de todas as multiplicações à direita de \mathcal{A} é um subespaço da álgebra associativa $\text{End}_F(\mathcal{A})$ de todos os operadores lineares sobre \mathcal{A} pois, $a \rightarrow R_a$ é uma aplicação linear de \mathcal{A} em $\text{End}_F(\mathcal{A})$. Por $R(\mathcal{A})$, denotamos a subálgebra de $\text{End}_F(\mathcal{A})$ gerada por todos os R_a , e é chamada a **álgebra de multiplicações à direita**. De maneira semelhante, a **multiplicação à esquerda** L_a definida por $L_a : x \rightarrow ax$ para todo x em \mathcal{A} , é um operador linear sobre \mathcal{A} , a aplicação $a \rightarrow L_a$ é linear e o conjunto de todas as multiplicações à esquerda de \mathcal{A} , é um subespaço de $\text{End}_F(\mathcal{A})$. Por $L(\mathcal{A})$, denotamos a subálgebra de $\text{End}_F(\mathcal{A})$ gerada por todos os L_a , e é chamada a **álgebra de multiplicações à esquerda**.

Seja X um conjunto arbitrário de símbolos. Em [19] foi construída a F -álgebra $F[X]$, a qual, chama-se de **álgebra livre** sobre F do conjunto de geradores X . As álgebras livres possuem a propriedade universal dada no seguinte

Teorema 1 *Seja \mathcal{A} uma F -álgebra arbitrária e θ uma aplicação de X em \mathcal{A} . Então, θ se estende de modo único a um homomorfismo da álgebra $F[X]$ na álgebra \mathcal{A} .*

Os elementos da álgebra $F[X]$ são chamados de **polinômios não-associativos** dos elementos do conjunto X .

1.2 Álgebras livres em uma variedade

Sejam $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto enumerável de símbolos e f um elemento arbitrário de $F[X]$. Nesta, aparece apenas um quantidade finita de elementos de X , por exemplo x_1, x_2, \dots, x_n e escrevemos $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Dados a_1, a_2, \dots, a_n elementos de uma F -álgebra \mathcal{A} , pelo Teorema 1, existe um único homomorfismo $\theta : F[X] \rightarrow \mathcal{A}$, tal que, $\theta(x_i) = a_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ e $\theta(x_i) = 0$ para $i \neq 1, 2, \dots, n$. Denotemos por $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ a imagem do elemento f pelo homomorfismo θ e dizemos que o elemento $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é obtido por substituição dos elementos a_1, a_2, \dots, a_n no polinômio não-associativo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Um polinômio não-associativo $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F[X]$ é chamado de *identidade* de uma álgebra \mathcal{A} se $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{A}$. Neste caso, também se diz que \mathcal{A} satisfaz a identidade f ou que f é válida em \mathcal{A} .

A coleção de todas as identidades de uma álgebra \mathcal{A} é um ideal da álgebra $F[X]$, que é chamado de *ideal das identidades* ou *T-ideal* da álgebra \mathcal{A} e é denotado por $T(\mathcal{A})$. A coleção de todas as identidades que são satisfeitas por cada álgebra de uma classe de álgebras \mathfrak{M} também é um ideal de $F[X]$, chamado *ideal das identidades* ou *T-ideal* da classe das álgebras \mathfrak{M} e é denotado por $T(\mathfrak{M})$.

Dado um subconjunto I de $F[X]$, a classe \mathfrak{M} de todas as F -álgebras satisfazendo cada identidade de I é chamada de *variedade* de F -álgebras definida pelo conjunto de identidades I , e assim, I é dito de *identidades* definindo a variedade \mathfrak{M} .

Pela seção 1.1, a classe de todas as F -álgebras associativas é uma variedade com identidade $f = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)$. A classe de todas as F -álgebras de Lie é uma variedade com as identidades $f = x_1^2$ e $g = J(x_1, x_2, x_3)$. A classe de todas as álgebras de Jordan é uma variedade com as identidades $f = [x_1, x_2]$ e $g = x_1^2(x_2x_1) - (x_1^2x_2)x_1$ e, todas as F -álgebras alternativas formam uma variedade com as identidades $f = x_1^2x_2 - x_1(x_1x_2)$ e $g = x_2x_1^2 - (x_2x_1)x_1$. Vamos denotar a variedade das álgebras associativas, a variedade das álgebras de Lie, a variedade das álgebras de Jordan e alternativas, respectivamente, por **Ass**, **Lie**, **Jord** e **Alt**.

Uma *zero-álgebra* é uma álgebra em que o produto de quaisquer dos elementos é zero; a variedade consistindo somente de zero-álgebras recebe o nome de *variedade trivial*.

Seja \mathfrak{M} uma variedade não trivial de F -álgebras e \mathcal{A} uma álgebra de \mathfrak{M} com conjunto de geradores Y . A álgebra \mathcal{A} é chamada de *livre na variedade* \mathfrak{M} (ou \mathfrak{M} -livre) com *conjunto de geradores livres* Y se Y gera \mathcal{A} e se toda aplicação do conjunto Y em uma álgebra arbitrária \mathcal{B} de \mathfrak{M} pode ser estendida de modo único a um homomorfismo da álgebra \mathcal{A} em \mathcal{B} .

Dado um conjunto de polinômios I de $F[X]$, o ideal da F -álgebra \mathcal{A} gerado por todos os elementos da forma $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, onde $f \in I$ e $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{A}$, será denotada por $I(\mathcal{A})$.

Teorema 2 *Seja \mathfrak{M} uma variedade não trivial de F -álgebras com sistema de identidades I . Então, para qualquer conjunto Y , a restrição do homomorfismo canônico σ a Y é injetiva, onde*

$$\sigma : F[Y] \rightarrow F[Y]/I(F[Y]).$$

Além disso, $F_{\mathfrak{M}}[\sigma(Y)] = F[Y]/I(F[Y])$ é livre na variedade \mathfrak{M} com conjunto de geradores livres $\sigma(Y)$. E também, quaisquer duas álgebras livres de \mathfrak{M} com conjuntos equivalentes de geradores livres são isomorfas.

1.3 Bimódulos

As noções de um bimódulo tem papel importante na teoria das álgebras. Seja \mathfrak{M} uma variedade de álgebras sobre o corpo F . Suponha que, para uma álgebra \mathcal{A} em \mathfrak{M} e um espaço vetorial V sobre F , estão definidas as composições bilineares $\mathcal{A} \times V \rightarrow V$ e $V \times \mathcal{A} \rightarrow V$,

escritas como av e va , para $a \in \mathcal{A}$ e $v \in V$. Então, o espaço vetorial $\mathcal{A} \oplus V$ é uma álgebra com a seguinte multiplicação

$$(a + v)(b + w) = ab + (vb + aw),$$

onde $a, b \in \mathcal{A}$, $v, w \in V$. A álgebra $\mathcal{A} \oplus V$ é chamada a *extensão cisão nula* da álgebra \mathcal{A} pelo espaço V . Se a álgebra $\mathcal{A} \oplus V$ pertence à variedade \mathfrak{M} , então V é chamado um *bimódulo sobre a álgebra \mathcal{A}* (ou um *\mathcal{A} -bimódulo*) *na variedade \mathfrak{M}* .

Exemplo 1 *Se \mathfrak{M} é a variedade das álgebras associativas **Ass**, então as operações devem satisfazer as seguintes condições:*

$$(va)b = v(ab), \quad (av)b = a(vb), \quad (ab)v = a(bv),$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$, $v \in V$. Na variedade das álgebras de Lie **Lie**, as correspondentes condições para as operações do bimódulo são da forma

$$av = -va, \quad v(ab) = (va)b - (vb)a.$$

A variedade das álgebras alternativas **Alt** está definida via as seguintes identidades:

$$(x, x, y) = 0, \quad (x, y, y) = 0.$$

Portanto, um bimódulo V sobre uma álgebra alternativa \mathcal{A} é alternativa se, e somente se, as seguintes relações são válidas na extensão cisão nula $\mathcal{A} \oplus V$:

$$(a + v, a + v, b + w) = 0, \quad (a + v, b + w, b + w) = 0,$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$, $v, w \in V$. Como $V^2 = 0$ (na álgebra $\mathcal{A} \oplus V$), essas relações nos fornecem as seguintes condições para que um bimódulo V seja alternativa:

$$(a, a, v) = 0, \quad (a, v, b) + (v, a, b) = 0$$

$$(v, b, b) = 0, \quad (a, v, b) + (a, b, v) = 0.$$

Finalmente, a variedade **Jord** está definida pelas seguintes identidades:

$$xy = yx, \quad (x^2, y, x) = 0.$$

Se \mathcal{J} é uma álgebra de Jordan e V é um bimódulo sobre \mathcal{J} , então a álgebra $\mathcal{J} \oplus V$ é de Jordan se, e somente se, as seguintes relações são válidas:

$$(a + v)(b + w) = (b + w)(a + v); \quad ((a + v)^2, b + w, a + v) = 0,$$

para todo $a, b \in \mathcal{J}$; $v, w \in V$. É fácil ver que essas relações são equivalentes aos seguintes:

$$av = va, \quad (a^2, v, a) = 0, \quad (a^2, b, v) + 2(av, b, a) = 0,$$

para todo $a, b \in \mathcal{J}$, $v \in V$.

Um endomorfismo do espaço vetorial \mathcal{A} é chamada uma *involução* da álgebra \mathcal{A} se, é de período 2 e, é um anti-homomorfismo.

Vamos a introduzir a noção de um bimódulo com involução.

Seja \mathcal{A} uma álgebra na variedade \mathfrak{M} com involução “ $-$ ”. Então, um bimódulo V para \mathcal{A} na variedade \mathfrak{M} , é um **bimódulo com involução**, se existe um endomorfismo $v \mapsto v^*$ de período 2 de V , tal que,

$$(av)^* = v^* \bar{a}, \quad (va)^* = \bar{a} v^*$$

para todo $a \in \mathcal{A}$, $v \in V$. O endomorfismo $v \mapsto v^*$ é chamado a **involução** de V .

Se V é um bimódulo com involução sobre \mathcal{A} , então junto com a involução de \mathcal{A} , podemos obter uma involução na extensão cisão nula $E = \mathcal{A} \oplus V$. Inversamente, qualquer involução em E que estende a involução de \mathcal{A} , pode ser usada para fazer do bimódulo V , um bimódulo com involução.

1.4 Superálgebras

Definição 2 Uma álgebra \mathcal{A} é chamada uma **álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada** ou uma **superálgebra**, se $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$, onde $\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{A}_{i+j}$, $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Exemplo 2 Seja Γ a álgebra de Grassmann sobre um corpo F gerada pelos elementos $1, e_1, \dots, e_n, \dots$ tais que

$$e_i^2 = 0, \quad e_i e_j = -e_j e_i.$$

Os produtos

$$1, \quad e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k,$$

formam uma base de Γ sobre F (consideremos 1 como o produto do conjunto vazio dos elementos e_i). Denote-se por $\Gamma_{\bar{0}}$ e $\Gamma_{\bar{1}}$ os espaços gerados pelos produtos de comprimento par e ímpar; então Γ é a soma direta desses espaços,

$$\Gamma = \Gamma_{\bar{0}} \oplus \Gamma_{\bar{1}},$$

onde

$$\Gamma_i \Gamma_j \subseteq \Gamma_{i+j \pmod{2}}, \quad i, j \in \{\bar{0}, \bar{1}\}.$$

Em outras palavras, Γ é uma álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada (ou superálgebra) sobre F .

Seja \mathfrak{M} uma variedade de álgebras sobre um corpo infinito F , definida por algum sistema de identidades.

Definição 3 A superálgebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ é chamada uma **\mathfrak{M} -superálgebra** se sua envolvente de Grassmann $\Gamma(\mathcal{A}) = \Gamma_{\bar{0}} \otimes \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \Gamma_{\bar{1}} \otimes \mathcal{A}_{\bar{1}}$ pertence a \mathfrak{M} .

Exemplo 3 A superálgebra de Grassmann Γ é uma superálgebra comutativa, pois sua envolvente de Grassmann $\Gamma(\Gamma) = \Gamma_{\bar{0}} \otimes \Gamma_{\bar{0}} + \Gamma_{\bar{1}} \otimes \Gamma_{\bar{1}}$ é comutativa. Isto vem do fato de que Γ satisfaz a seguinte identidade de comutatividade (ou supercomutatividade) graduada

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba,$$

onde $a, b \in \Gamma_{\bar{0}} \cup \Gamma_{\bar{1}}$ e $|x|$ denota a paridade de um elemento homogêneo x of A : $|x| = i$ se $x \in A_i$.

Se as identidades que definem a variedade \mathfrak{M} são conhecidas, então é possível escrever as “superidentidades” que definem as **\mathfrak{M} -superálgebras**.

Exemplo 4 *Sejam $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ uma superálgebra e $d \in \mathcal{A}_0$, $a, b, c \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$. A superálgebra \mathcal{A} é uma superálgebra alternativa se satisfaz as seguintes identidades:*

$$(a, b, c) + (-1)^{|b||c|}(a, c, b) = 0,$$

$$(a, b, c) + (-1)^{|a||b|}(b, a, c) = 0;$$

$$(d, d, a) = 0.$$

Se a característica do corpo F é diferente de 2, note que a última identidade se segue das duas primeiras. Assim, também, as superálgebras de Lie estão definidas pelas seguintes identidades:

$$ab + (-1)^{|a||b|}ba = 0,$$

$$(ab)c - a(bc) - (-1)^{|b||c|}(ac)b = 0;$$

e as superálgebras de Jordan estão definidas pelas seguintes identidades:

$$ab - (-1)^{|a||b|}ba = 0,$$

$$(-1)^{|d|(|a|+|c|)}(ab, c, d) + (-1)^{|a|(|b|+|c|)}(bd, c, a) + (-1)^{|b|(|c|+|d|)}(da, c, b) = 0,$$

onde $a, b, c, d \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$.

Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} superálgebras sobre F . De modo análogo ao caso das álgebras, podemos definir o **produto de Kronecker** $\mathcal{A} \tilde{\otimes}_F \mathcal{B}$ (escrito $\mathcal{A} \tilde{\otimes} \mathcal{B}$ se não houver ambiguidade) como o produto tensorial graduado $\mathcal{A} \tilde{\otimes}_F \mathcal{B}$ dos superespaços vetoriais \mathcal{A} , \mathcal{B} (assim, todos os elementos são somas $\sum a \tilde{\otimes} b$ com a em \mathcal{A} e b em \mathcal{B}), sendo a multiplicação definida pela distributividade e

$$(a_1 \tilde{\otimes} b_1)(a_2 \tilde{\otimes} b_2) = (-1)^{|b_1||a_2|}(a_1 a_2) \tilde{\otimes} (b_1 b_2)$$

para a_i em \mathcal{A} e b_i em \mathcal{B} . De forma semelhante, se \mathcal{A} tem identidade 1, então o conjunto de todos os elementos $1 \tilde{\otimes} b$ em $\mathcal{A} \tilde{\otimes} \mathcal{B}$ é uma subsuperálgebra de $\mathcal{A} \tilde{\otimes} \mathcal{B}$ que é isomorfo a \mathcal{B} , e que podemos identificá-lo com \mathcal{B} (similarmente, se \mathcal{B} tem identidade 1, então $\mathcal{A} \tilde{\otimes} \mathcal{B}$ contém \mathcal{A} como uma subsuperálgebra).

Seja \mathfrak{M} uma arbitrária variedade de álgebras. Uma \mathfrak{M} -superálgebra \mathcal{A} de dimensão finita é chamada **semisimples** se \mathcal{A} é soma direta de ideais simples \mathbb{Z}_2 -graduados.

Uma \mathfrak{M} -superálgebra \mathcal{A} de dimensão finita é chamada **separável** se $\mathcal{A}_K = K \otimes_F \mathcal{A}$ é semisimples.

Capítulo 2

Teoremas de Coordenatização de Wedderburn e de Zorn

Seja \mathcal{A} uma álgebra associativa de dimensão finita sobre F . Então existe um ideal \mathfrak{R} , chamado o *radical* de \mathcal{A} , que é o único nilideal maximal de \mathcal{A} (isto é, o ideal maximal que consiste inteiramente de elementos nilpotentes). Além disso, \mathfrak{R} é nilpotente no sentido que existe um inteiro t com a propriedade que qualquer produto $a_1 a_2 \dots a_t$ de t elementos de \mathfrak{R} é zero; portanto \mathfrak{R} é também o único ideal nilpotente maximal de \mathcal{A} . Módulo este radical, a álgebra é *semisimples*, isto é, a álgebra quociente \mathcal{A}/\mathfrak{R} tem radical igual a zero. Além disso, qualquer álgebra associativa semisimples se escreve de maneira única como uma soma direta $I_1 \oplus \dots \oplus I_r$ de ideais bilaterais simples (onde uma álgebra é *simples*, desde que não tenha ideais próprios e não seja uma álgebra de dimensão 1 no qual o produto seja zero). Um célebre teorema de Wedderburn afirma que qualquer álgebra associativa simples I é o produto de Kronecker $D \otimes_F M_n(F)$ de uma álgebra de divisão D sobre F e a álgebra de matrizes $M_n(F)$ de dimensão n^2 , onde n é único e D está determinada de maneira única a menos de isomorfismo.

Outro resultado clássico nas álgebras associativas é o Teorema de *Coordenatização de Wedderburn* (Teorema 3), o qual afirma que qualquer álgebra associativa unitária que contém um sistema de n^2 elementos de matrizes unitárias, é também uma álgebra de matrizes.

Apresentamos o Teorema de Coordenatização de Wedderburn como bem disse K. McCrimmon, é o avô de todos os teoremas de Coordenatização. Além disso, apresentamos o Teorema de Coordenatização de Zorn que foi deixada como um exercício no livro [19]. Estes são exemplos de uma família de teoremas de coordenatização, os quais afirmam que uma álgebra será de uma certa forma, se conter uma família de elementos de um certo tipo.

2.1 O Teorema de coordenatização de Wedderburn

Definimos os e_{ij} como as matrizes com 1 na (i, j) -entrada e 0 nas outras. Vamos chamar ao conjunto desses elementos, um *sistema de matrizes unitárias* que satisfazem

$$e_{ij}e_{rs} = \delta_{jr}e_{is}, \quad \sum e_{ii} = 1,$$

onde δ é a delta de Kronecker.

Lembremos que uma álgebra \mathcal{A} é associativa se, todos os associadores dos elementos de \mathcal{A} são 0, isto é, $(x, y, z) = 0$ para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$.

Exemplo 5 A álgebra $M_n(F)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas no corpo F , é uma álgebra associativa. Em geral, se \mathcal{A} é uma álgebra associativa qualquer, podemos considerar a álgebra associativa $M_n(\mathcal{A})$ de todas as matrizes com coordenadas na álgebra \mathcal{A} .

Teorema 3 Seja \mathcal{A} uma álgebra associativa com elemento identidade 1 tal que \mathcal{A} contém um sistema de n^2 elementos de matrizes unitárias. Então, $\mathcal{A} \cong M_n(\mathcal{B})$ para uma certa subálgebra \mathcal{B} de \mathcal{A} .

Demonstração: Fixemos $i, j, k, r, s \in \{1, 2, \dots, n\}$. Consideremos o conjunto $\mathcal{B} = \{a \in \mathcal{A} : [a, e_{ij}] = 0 \text{ para todo } i, j\}$. Pela seguinte identidade, válida em toda álgebra associativa,

$$[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y$$

segue facilmente que o conjunto \mathcal{B} é uma subálgebra de \mathcal{A} .

Seja $a \in \mathcal{A}$ e defina $a_{ij} = \sum_{k=1}^n e_{ki} a e_{jk}$. Então,

$$a_{ij} e_{rs} = \left(\sum_{k=1}^n e_{ki} a e_{jk} \right) e_{rs} = \sum_{k=1}^n e_{ki} a (e_{jk} e_{rs}) = e_{ri} a e_{js}$$

e

$$e_{rs} a_{ij} = e_{rs} \left(\sum_{k=1}^n e_{ki} a e_{jk} \right) = \sum_{k=1}^n (e_{rs} e_{ki}) a e_{jk} = e_{ri} a e_{js}.$$

Logo $[a_{ij}, e_{rs}] = 0$, e assim, $a_{ij} \in \mathcal{B}$. Além disso,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} e_{ij} = \sum_{i,j=1}^n e_{ii} a e_{jj} = \left(\sum_{i=1}^n e_{ii} \right) a \left(\sum_{j=1}^n e_{jj} \right) = a.$$

Agora suponha-se que os b_{ij} são elementos de \mathcal{B} , tais que, $\sum_{i,j=1}^n b_{ij} e_{ij} = 0$. Logo

$$0 = \sum_{k=1}^n e_{kp} \left(\sum_{i,j=1}^n b_{ij} e_{ij} \right) e_{qk} = b_{pq}$$

para $p, q = 1, \dots, n$. Isto mostra que os elementos de \mathcal{A} podem ser escritos de uma única forma $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} e_{ij}$ onde $a_{ij} \in \mathcal{B}$ para todo i, j . Isto implica que, a aplicação $f : \mathcal{A} \rightarrow M_n(\mathcal{B})$, definida por

$$f(a) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

com $a = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} e_{ij}$ é injetiva. É claro que f também é sobrejetiva, e portanto, é um isomorfismo de espaços de \mathcal{A} sobre $M_n(\mathcal{B})$.

Finalmente, vamos mostrar que f é um homomorfismo de álgebras. Sejam $a = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} e_{ij}$ e $b = \sum_{r,s=1}^n b_{rs} e_{rs}$ com $a_{ij}, b_{rs} \in \mathcal{B}$, então

$$ab = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} e_{ij} \right) \left(\sum_{r,s=1}^n b_{rs} e_{rs} \right) = \sum_{i,j,r,s=1}^n a_{ij} b_{rs} e_{ij} e_{rs} = \sum_{i,j,s=1}^n a_{ij} b_{js} e_{is}.$$

Assim,

$$f(ab) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{jn} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{2j}b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{nj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{nj}b_{jn} \end{bmatrix}$$

e é claro que o produto $f(a)f(b)$ é igual à matriz $f(ab)$. Portanto, $\mathcal{A} \cong M_n(\mathcal{B})$.

Isto prova o Teorema.

Q.E.D.

Corolário 4 (Teorema de coordenatização de Wedderburn) *Seja \mathcal{A} uma álgebra associativa, tal que, \mathcal{A} contém uma subálgebra $M_n(F)$ como o mesmo elemento identidade. Então, $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \otimes M_n(F)$ para uma certa subálgebra \mathcal{B} de \mathcal{A} que comuta com todas as matrizes unitárias e_{ij} de $M_n(F)$.*

Se consideramos uma álgebra associativa unitária \mathcal{B} , podemos obter uma importante aplicação do Teorema de Coordenatização de Wedderburn na teoria de representações das álgebras associativas unitárias.

Corolário 5 *A categoria dos bimódulos associativos unitários sobre $M_n(\mathcal{B})$ é equivalente à categoria dos bimódulos associativos unitários sobre \mathcal{B} .*

Demonstração: Denotemos por $\mathbf{Bimod}_{Ass}\mathcal{B}$ a categoria dos bimódulos associativos unitários sobre \mathcal{B} e por $\mathbf{Bimod}_{Ass}M_n(\mathcal{B})$ a categoria dos bimódulos associativos unitários sobre $M_n(\mathcal{B})$. Então, desejamos mostrar que

$$\mathbf{Bimod}_{Ass}\mathcal{B} \simeq \mathbf{Bimod}_{Ass}M_n(\mathcal{B}).$$

Seja $N \in \text{Obj}(\mathbf{Bimod}_{Ass}\mathcal{B})$, e considere a extensão cisão nula $E = \mathcal{B} \oplus N$ da álgebra associativa \mathcal{B} pelo bimódulo N . Como E é uma álgebra associativa, podemos formar a álgebra matricial $K = M_n(E)$ que contém $M_n(\mathcal{B})$ como uma subálgebra. Além disso, K contém o ideal $M = M_n(N) \cap K = M_n(N)$, que é o conjunto de matrizes de K cujas entradas estão no ideal N de E . Assim, $M_n(N)$ é um bimódulo associativo unitário para $M_n(\mathcal{B})$ relativo à multiplicação definida em $M_n(E)$. Vamos chamar M ao $M_n(\mathcal{B})$ -bimódulo *associado* com o dado bimódulo N de \mathcal{B} e denote

$$M = \mathcal{F}(N).$$

Como $E = \mathcal{B} \oplus N$ temos que $K = M_n(\mathcal{B}) \oplus M$. Também $N^2 = 0$ em E , implica que $M^2 = 0$ em K , assim K é a extensão cisão nula de $M_n(\mathcal{B})$ por seu bimódulo M .

Pode-se verificar facilmente que \mathcal{F} é realmente um funtor da categoria $\mathbf{Bimod}_{Ass}\mathcal{B}$ na categoria $\mathbf{Bimod}_{Ass}M_n(\mathcal{B})$. Além disso, para cada par de objetos N e N' de $\mathbf{Bimod}_{Ass}\mathcal{B}$, a seguinte igualdade é válida:

$$\mathcal{F}(\text{Hom}(N, N')) = \text{Hom}(\mathcal{F}(N), \mathcal{F}(N')).$$

Portanto, N e N' são isomorfos, se e somente se, $\mathcal{F}(N)$ e $\mathcal{F}(N')$ são isomorfos.

Similarmente, o funtor \mathcal{F} oferece um isomorfismo reticulado do reticulado dos sub-bimódulos de N relativo a \mathcal{B} sobre o reticulado dos sub-bimódulos de M sobre $M_n(\mathcal{B})$.

Para completar a redução da teoria dos bimódulos para $M_n(\mathcal{B})$ ao dos bimódulos para \mathcal{B} , agora mostraremos que cada $M_n(\mathcal{B})$ -bimódulo unitário é isomorfo a algum bimódulo associado com um bimódulo unitário para \mathcal{B} .

Considere-se um bimódulo associativo unitário V para $M_n(\mathcal{B})$, e seja

$$\mathcal{A} = M_n(\mathcal{B}) \oplus V$$

a extensão cisão nula de $M_n(\mathcal{B})$ por V . Assim, \mathcal{A} é uma álgebra associativa (com elemento identidade 1, a identidade de $M_n(\mathcal{B})$) que contém a álgebra matricial $M_n(\mathcal{B})$ como uma subálgebra unitária, então pelo Teorema de Coordenatização de Wedderburn existe uma álgebra associativa \mathcal{D} tal que $\mathcal{A} = M_n(\mathcal{D})$. Considere o conjunto W dos elementos de \mathcal{D} que aparecem nas entradas das matrizes de V . Logo

$$V := M_n(W),$$

onde $W \triangleleft \mathcal{D}$ e $W^2 = 0$ em \mathcal{D} , pois $V \triangleleft \mathcal{A}$ e $V^2 = 0$ em \mathcal{A} , e assim, $\mathcal{D} = \mathcal{B} \oplus W$. Logo, \mathcal{D} é a extensão cisão nula de \mathcal{B} por seu bimódulo W , então W é um bimódulo associativo unitário sobre \mathcal{B} . Portanto, $\mathcal{F}(W) = V$.

Isto prova o Corolário.

Q.E.D.

Do Corolário 5, podemos classificar os bimódulos associativos irredutíveis unitários sobre $M_n(F)$.

Corolário 6 *Cada bimódulo associativo irredutível unitário sobre $M_n(F)$, é isomorfo ao bimódulo regular $\text{Reg}(M_n(F))$.*

2.2 O Teorema de coordenatização de Zorn

Na seção 2.1 temos descrito o Teorema de Coordenatização de Wedderburn e algumas de suas aplicações relacionadas às álgebras associativas unitárias. Nesta seção vamos apresentar e provar o Teorema de Coordenatização de Zorn, o qual, é o análogo do Teorema de Coordenatização de Wedderburn para as álgebras alternativas. Além disso, apresentaremos algumas das suas aplicações na teoria de representações das álgebras alternativas unitárias.

Definição 4 *Uma álgebra alternativa (linear) é um espaço vetorial \mathcal{A} com uma operação binária bilinear $(x, y) \mapsto xy$ satisfazendo as seguintes identidades:*

$$(2.1) \quad x^2y = x(xy), \quad (xy)y = xy^2.$$

para todo $x, y \in \mathcal{A}$.

As equações anteriores são conhecidas, respectivamente, como *identidade alternativa à esquerda* e *à direita*. A linearização de (2.1) é

$$(2.2) \quad (x \circ z)y = x(zy) + z(xy), \quad y(x \circ z) = (yx)z + (yz)x,$$

onde $x \circ x \equiv xz + zx$ é o *produto de Jordan*. As igualdades de (2.1) são equivalentes, em termos do associador, a

$$(x, x, y) = (y, x, x) = 0 \quad \text{para todo } x \text{ em } \mathcal{A}$$

ou, em termos das multiplicações à direita e esquerda, a

$$R_{x^2} = R_x^2, \quad L_{x^2} = L_x^2 \quad \text{para todo } x, y \text{ em } \mathcal{A}.$$

É claro que toda álgebra associativa é uma álgebra alternativa. Como tínhamos dito na introdução, o exemplo clássico de uma álgebra alternativa não-associativa é a álgebra de Octonões \mathbb{O} e a álgebra de Cayley-Dickson que vem do processo de duplicação de Cayley-Dickson (veja [19]).

A *álgebra de matrizes de Cayley-Dickson* $C(F)$ é uma álgebra alternativa não-associativa de dimensão 8 sobre F com base $e_{ii}, e_{ij}^{(k)}$ ($i, j = 1, 2; k = 1, 2, 3$) cuja tabela de multiplicação é a que segue:

$$(2.3) \quad e_{ii}^2 = e_{ii}, \quad e_{ii}e_{jj} = 0;$$

$$(2.4) \quad e_{ii}e_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)}e_{jj} = e_{ij}^{(k)}, \quad e_{jj}e_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)}e_{ii} = 0;$$

$$(2.5) \quad (e_{ij}^{(k)})^2 = e_{ij}^{(k)} \circ e_{ij}^{(l)} = 0 \quad (k \neq l);$$

$$(2.6) \quad e_{ij}^{(k)}e_{ji}^{(k)} = e_{ii}, \quad e_{ij}^{(k)}e_{ji}^{(l)} = 0 \quad (k \neq l);$$

$$(2.7) \quad e_{ij}^{(k)}e_{ij}^{(k+1)} = (j-i)e_{ji}^{(k+2)} \quad (k \bmod 3).$$

Os elementos $e_{ii}, e_{ij}^{(k)}$ são chamados *matrizes unitárias de Cayley-Dickson*.

A álgebra de matrizes de Cayley-Dickson, pode ser considerada não somente sobre corpos mas também sobre anéis associativos e comutativos Φ . Segue imediatamente que a álgebra $C(\Phi)$ será também alternativa.

O nome “álgebra de matrizes” vem do fato de que os elementos de $C(F)$ podem ser representados por matrizes da seguinte maneira: Seja $a \in C(F)$ com

$$a = \alpha_{11}e_{11} + \alpha_{22}e_{22} + \sum_{k=1}^3 (\alpha_{12}^{(k)}e_{12}^{(k)} + \alpha_{21}^{(k)}e_{21}^{(k)}).$$

Associamos ao elemento a a matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{onde } a_{ij} = (\alpha_{ij}^{(1)}, \alpha_{ij}^{(2)}, \alpha_{ij}^{(3)}) \in F^3.$$

A soma e a multiplicação escalar dos elementos da álgebra $C(F)$ correspondem às usuais soma e multiplicação escalar de matrizes da forma acima. No entanto, a multiplicação dos elementos da álgebra $C(F)$ correspondem a uma multiplicação especial (veja [19]).

Ao longo do nosso trabalho, vamos utilizar uma série de identidades que são válidas em cada álgebra alternativa, cada uma dessas identidades irão aparecer no momento em que elas forem necessárias.

Para começar, cada álgebra alternativa \mathcal{A} satisfaz as seguintes identidades chamadas as *identidades de Moufang*

$$(2.8) \quad x(yzy) = [(xy)z]y, \quad \text{identidade de Moufang à direita,}$$

$$(2.9) \quad (yzy)x = y[z(yx)], \quad \text{identidade de Moufang à esquerda,}$$

$$(2.10) \quad (xy)(zx) = x(yz)x, \quad \text{identidade de Moufang do meio.}$$

Com isso, temos condições de anunciar e mostrar o Teorema de Coordenatização de Zorn relacionada às álgebras alternativas, o qual, foi formulado em [19] como um exercício: Seja \mathcal{A} uma álgebra alternativa com elemento identidade 1 que contém um sistema de matrizes

Lema 1 *A álgebra \mathcal{A} é decomponível numa soma direta de submódulos:*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{11} \oplus \mathcal{A}_{12} \oplus \mathcal{A}_{21} \oplus \mathcal{A}_{22}$$

onde $\mathcal{A}_{ij} = \{a \in \mathcal{A} : e_{ii}a = ae_{jj} = a\}$. Além disso, as componentes \mathcal{A}_{ij} possuem as relações

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ii}^2 &\subseteq \mathcal{A}_{ii}, & \mathcal{A}_{ii}\mathcal{A}_{jj} &= 0, \\ \mathcal{A}_{ii}\mathcal{A}_{ij} + \mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{jj} &\subseteq \mathcal{A}_{ij}, & \mathcal{A}_{jj}\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{ii} &= 0, \\ \mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{ij} &\subseteq \mathcal{A}_{ji}, & \mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{ji} &\subseteq \mathcal{A}_{ii}, \end{aligned}$$

onde $i \neq j$.

Demonstração: Seja $a \in \mathcal{A}$ então, pela identidade alternativa à direita, temos $(a, e_{ii}, e_{ii}) = 0$. Se $i \neq j$, então

$$\begin{aligned} (a, e_{ii}, e_{jj}) &= (ae_{ii})e_{jj} = (ae_{ii})e_{jj}^2 = (a, e_{ii}, e_{jj})e_{jj} \\ &= -(a, e_{jj}, e_{ii})e_{jj} = -((ae_{jj})e_{ii})e_{jj} \stackrel{(2.8)}{=} -a(e_{jj}e_{ii}e_{jj}) = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$a = 1a1 = (e_{11} + e_{22})a(e_{11} + e_{22}) = e_{11}ae_{11} + e_{11}ae_{22} + e_{22}ae_{11} + e_{22}ae_{22}$$

e $e_{ii}ae_{jj} \in \mathcal{A}_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) pois

$$e_{ii}(e_{ii}ae_{jj}) = e_{ii}^2(ae_{jj}) = e_{ii}ae_{jj} \quad \text{e} \quad (e_{ii}ae_{jj})e_{jj} = (e_{ii}a)e_{jj}^2 = e_{ii}ae_{jj}.$$

Logo, $a \in \mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{12} + \mathcal{A}_{21} + \mathcal{A}_{22}$, e assim, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{12} + \mathcal{A}_{21} + \mathcal{A}_{22}$. Portanto

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{12} + \mathcal{A}_{21} + \mathcal{A}_{22}.$$

Suponhamos que existem elementos $a_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$, tais que, $\sum a_{ij} = 0$. Logo

$$0 = \sum (e_{rr}a_{ij})e_{ss} = a_{rs}$$

para $r, s = 1, 2$. Consequentemente

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{11} \oplus \mathcal{A}_{12} \oplus \mathcal{A}_{21} \oplus \mathcal{A}_{22}.$$

Agora, vamos provar as relações. Sejam $a, b \in \mathcal{A}_{ii}$ então, por (2.2)

$$e_{ii}(ab) = (e_{ii} \circ a)b - a(e_{ii}b) = 2ab - ab = ab \quad \text{e}$$

$$(ab)e_{ii} = a(b \circ e_{ii}) - (ae_{ii})b = 2ab - ab = ab.$$

Portanto, $ab \in \mathcal{A}_{ii}$, e assim $\mathcal{A}_{ii}^2 \subseteq \mathcal{A}_{ii}$.

Consideremos a linearização da identidade de Moufang do meio (2.10)

$$(2.11) \quad (xy)(zw) + (wy)(zx) - [w(yz)]x - [x(yz)]w = 0.$$

Sejam $a \in \mathcal{A}_{ii}$ e $b \in \mathcal{A}_{jj}$. Então, usando os fatos $e_{ii}b = be_{ii} = b(1 - e_{jj}) = b - be_{jj} = 0$,

$e_{jj}a = ae_{ii} = 0$ e por (2.11), temos

$$ab = (ae_{ii})(e_{jj}b) = -(be_{ii})(e_{jj}a) + [b(e_{ii}e_{jj})]a + [a(e_{ii}e_{jj})]b = 0.$$

Isto implica que $\mathcal{A}_{ii}\mathcal{A}_{jj} = 0$.

Sejam $a \in \mathcal{A}_{ii}$ e $b \in \mathcal{A}_{ij}$ então, por (2.2)

$$e_{ii}(ab) = (e_{ii} \circ a)b - a(e_{ii}b) = 2ab - ab = ab \quad e$$

$$(ab)e_{jj} = a(b \circ e_{jj}) - (ae_{jj})b = a(be_{jj}) + a(e_{jj}b) = ab.$$

Consequentemente $ab \in \mathcal{A}_{ij}$ para quaisquer $a \in \mathcal{A}_{ii}$ e $b \in \mathcal{A}_{ij}$, e assim $\mathcal{A}_{ii}\mathcal{A}_{ij} \subseteq \mathcal{A}_{ij}$. Tomemos $a \in \mathcal{A}_{ij}$ e $b \in \mathcal{A}_{jj}$ então, novamente por (2.2)

$$e_{ii}(ab) = (e_{ii} \circ a)b - a(e_{ii}b) = (e_{ii}a)b + (ae_{ii})b = ab \quad e$$

$$(ab)e_{jj} = a(b \circ e_{jj}) - (ae_{jj})b = 2ab - ab = ab.$$

Logo, $ab \in \mathcal{A}_{ij}$ para quaisquer $a \in \mathcal{A}_{ij}$ e $b \in \mathcal{A}_{jj}$, e assim $\mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{jj} \subseteq \mathcal{A}_{ij}$. Portanto, como $\mathcal{A}_{ii}\mathcal{A}_{ij} \subseteq \mathcal{A}_{ij}$ e $\mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{jj} \subseteq \mathcal{A}_{ij}$, obtemos $\mathcal{A}_{ii}\mathcal{A}_{ij} + \mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{jj} \subseteq \mathcal{A}_{ij}$.

Sejam $a \in \mathcal{A}_{jj}$, $b \in \mathcal{A}_{ij}$ e $c \in \mathcal{A}_{ii}$ elementos arbitrários. Então, por (2.11) e o fato $e_{ii}a = ce_{jj} = 0$, obtemos

$$ab = (ae_{jj})(e_{ii}b) = -(be_{jj})(e_{ii}a) + [b(e_{jj}e_{ii})]a + [a(e_{jj}e_{ii})]b = 0 \quad e$$

$$bc = (be_{jj})(e_{ii}c) = -(ce_{jj})(e_{ii}b) + [c(e_{jj}e_{ii})]b + [b(e_{jj}e_{ii})]c = 0.$$

Portanto, $\mathcal{A}_{jj}\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{ii} = 0$.

Sejam $a, b \in \mathcal{A}_{ij}$ então, por (2.2)

$$e_{jj}(ab) = (e_{jj} \circ a)b - a(e_{jj}b) = (e_{jj}a)b + (ae_{jj})b = ab$$

pois $e_{jj}b = 0$ e

$$(ab)e_{ii} = a(b \circ e_{ii}) - (ae_{ii})b = ab.$$

Assim, $ab \in \mathcal{A}_{ji}$ para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}_{ij}$, e portanto $\mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{ij} \subseteq \mathcal{A}_{ji}$.

Finalmente, sejam $a \in \mathcal{A}_{ij}$ e $b \in \mathcal{A}_{ji}$ então, novamente por (2.2)

$$e_{ii}(ab) = (e_{ii} \circ a)b - a(e_{ii}b) = (e_{ii}a)b + (ae_{ii})b = ab \quad e$$

$$(ab)e_{ii} = a(b \circ e_{ii}) - (ae_{ii})b = a(be_{ii}) + a(e_{ii}b) = ab.$$

Logo, $ab \in \mathcal{A}_{ii}$ para quaisquer $a \in \mathcal{A}_{ij}$ e $b \in \mathcal{A}_{ji}$, e portanto $\mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{ji} \subseteq \mathcal{A}_{ii}$.

Isto prova o Lema.

Q.E.D.

Lema 2 Para $i \neq j$

$$\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ij}^{(1)} \oplus \mathcal{A}_{ij}^{(2)} \oplus \mathcal{A}_{ij}^{(3)}$$

onde $\mathcal{A}_{ij}^{(k)} = \mathcal{A}_{ii}e_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)}\mathcal{A}_{jj}$, $k = 1, 2, 3$. Além disso, as componentes $\mathcal{A}_{ij}^{(k)}$ possuem as seguintes relações

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ij}^{(k)}\mathcal{A}_{ji}^{(k)} &\subseteq \mathcal{A}_{ii}, & \mathcal{A}_{ij}^{(k)}\mathcal{A}_{ji}^{(l)} &= 0, & k \neq l \\ \mathcal{A}_{ij}^{(k)}\mathcal{A}_{ij}^{(k)} &= 0, & \mathcal{A}_{ij}^{(k)}\mathcal{A}_{ij}^{(k+1)} &\subseteq \mathcal{A}_{ji}^{(k+2)}, & k \text{ mod } 3. \end{aligned}$$

Demonstração: Pelas relações do Lema 1

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ii}e_{ij}^{(k)} &= e_{ii}(\mathcal{A}_{ii}e_{ij}^{(k)}) \stackrel{(2.6)}{=} (e_{ij}^{(k)}e_{ji}^{(k)})(\mathcal{A}_{ii}e_{ij}^{(k)}) \\ &\stackrel{(2.10)}{\subseteq} e_{ij}^{(k)}((e_{ji}^{(k)}\mathcal{A}_{ii})e_{ij}^{(k)}) \\ &\subseteq e_{ij}^{(k)}\mathcal{A}_{jj}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, $e_{ij}^{(k)}\mathcal{A}_{jj} \subseteq \mathcal{A}_{ii}e_{ij}^{(k)}$. Logo, $\mathcal{A}_{ii}e_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)}\mathcal{A}_{jj}$, $k = 1, 2, 3$. Portanto, $\mathcal{A}_{ij}^{(k)}$ está bem definida.

Em seguida, mostraremos que $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ij}^{(1)} + \mathcal{A}_{ij}^{(2)} + \mathcal{A}_{ij}^{(3)}$. Sejam $a_{ii} \in \mathcal{A}_{ii}$ e $a_{jj} \in \mathcal{A}_{jj}$, então por (2.2) e (2.4)

$$\begin{aligned} e_{ii}a_{ij}^{(k)} &= e_{ii}(a_{ii}e_{ij}^{(k)}) = (e_{ii} \circ a_{ii})e_{ij}^{(k)} - a_{ii}(e_{ii}e_{ij}^{(k)}) = 2a_{ii}e_{ij}^{(k)} - a_{ii}e_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k)} \quad e \\ a_{ij}^{(k)}e_{jj} &= (e_{ij}^{(k)}a_{jj})e_{jj} = e_{ij}^{(k)}(a_{jj} \circ e_{jj}) - (e_{ij}^{(k)}e_{jj})a_{jj} = 2e_{ij}^{(k)}a_{jj} - e_{ij}^{(k)}a_{jj} = a_{ij}^{(k)}. \end{aligned}$$

Assim $\mathcal{A}_{ij}^{(k)} \subseteq \mathcal{A}_{ij}$, o qual, implica imediatamente que $\mathcal{A}_{ij} \supseteq \mathcal{A}_{ij}^{(1)} + \mathcal{A}_{ij}^{(2)} + \mathcal{A}_{ij}^{(3)}$. Portanto, será suficiente mostrar a outra inclusão. É claro que por (2.4), os $e_{ij}^{(k)}$ são elementos de \mathcal{A}_{ij} . Seja $a_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$, então por (2.6) e (2.2), e pelas relações do Lema 1

$$\begin{aligned} a_{ij} = e_{ii}a_{ij} &= (e_{ij}^{(1)}e_{ji}^{(1)})a_{ij} = e_{ij}^{(1)}(e_{ji}^{(1)} \circ a_{ij}) - (e_{ij}^{(1)}a_{ij})e_{ji}^{(1)} \\ &= e_{ij}^{(1)}(e_{ji}^{(1)}a_{ij}) - (e_{ij}^{(1)}a_{ij})e_{ji}^{(1)} \in e_{ij}^{(1)}\mathcal{A}_{jj} + \mathcal{A}_{ji}e_{ij}^{(1)}, \end{aligned}$$

onde $e_{ij}^{(1)}\mathcal{A}_{jj} = \mathcal{A}_{ij}^{(1)}$ e para todo $a_{ji} \in \mathcal{A}_{ji}$, temos por (2.7)

$$\begin{aligned} a_{ji}e_{ji}^{(1)} &= (j-i)a_{ji}(e_{ij}^{(2)}e_{ij}^{(3)}) = (j-i)((a_{ji} \circ e_{ij}^{(2)})e_{ij}^{(3)} - e_{ij}^{(2)}(a_{ji}e_{ij}^{(3)})) \\ &= (j-i)((e_{ij}^{(2)}a_{ji})e_{ij}^{(3)} - e_{ij}^{(2)}(a_{ji}e_{ij}^{(3)})) \in \mathcal{A}_{ii}e_{ij}^{(3)} + e_{ij}^{(2)}\mathcal{A}_{jj}. \end{aligned}$$

Logo $a_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}^{(2)} + \mathcal{A}_{ij}^{(3)} + \mathcal{A}_{ij}^{(1)}$, e assim $\mathcal{A}_{ij} \subseteq \mathcal{A}_{ij}^{(1)} + \mathcal{A}_{ij}^{(2)} + \mathcal{A}_{ij}^{(3)}$. Portanto,

$$\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ij}^{(1)} + \mathcal{A}_{ij}^{(2)} + \mathcal{A}_{ij}^{(3)}.$$

Agora, suponhamos que os $a_{ii}^{(k)}$ são elementos de \mathcal{A}_{ii} tais que $\sum_k a_{ii}^{(k)}e_{ij}^{(k)} = 0$. Então, por (2.2)

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_k (a_{ii}^{(k)}e_{ij}^{(k)})e_{ji}^{(l)} = \sum_k [a_{ii}^{(k)}(e_{ij}^{(k)} \circ e_{ji}^{(l)}) - (a_{ii}^{(k)}e_{ji}^{(l)})e_{ij}^{(k)}] \\ &= \sum_k a_{ii}^{(k)}(e_{ij}^{(k)}e_{ji}^{(l)}) = a_{ii}^{(l)}(e_{ij}^{(l)}e_{ji}^{(l)}) = a_{ii}^{(l)}e_{ii} = a_{ii}^{(l)}, \end{aligned}$$

onde por (2.6) $e_{ij}^{(k)}e_{ji}^{(l)} = 0$ se $k \neq l$. Isto mostra que os elementos de \mathcal{A}_{ij} podem ser escritos de uma única forma, para todo i, j . Portanto, os coeficientes são únicos e a soma $\mathcal{A}_{ij}^{(1)} + \mathcal{A}_{ij}^{(2)} + \mathcal{A}_{ij}^{(3)}$ é direta.

Agora, vamos mostrar as relações. As inclusões $\mathcal{A}_{ij}^{(k)} \subseteq \mathcal{A}_{ij}$, $\mathcal{A}_{ji}^{(k)} \subseteq \mathcal{A}_{ji}$ e a relação $\mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{ji} \subseteq \mathcal{A}_{ii}$ do Lema 1, implicam que, $\mathcal{A}_{ij}^{(k)}\mathcal{A}_{ji}^{(k)} \subseteq \mathcal{A}_{ii}$.

Considere $a_{ii}e_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k)} \in \mathcal{A}_{ij}^{(k)}$ e $b_{jj}e_{ji}^{(l)} = b_{ji}^{(l)} \in \mathcal{A}_{ji}^{(l)}$ ($k \neq l$). Então, por (2.11) e (2.6) e,

o fato que $c_{ii}e_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)}b_{jj}$ para algum $c_{ii} \in \mathcal{A}_{ii}$

$$\begin{aligned}
(a_{ii}e_{ij}^{(k)})(b_{jj}e_{ji}^{(l)}) &= -(e_{ji}^{(l)}e_{ij}^{(k)})(b_{jj}a_{ii}) + [e_{ji}^{(l)}(e_{ij}^{(k)}b_{jj})]a_{ii} + [a_{ii}(e_{ij}^{(k)}b_{jj})]e_{ji}^{(l)} \\
&= [-(a_{ii}, c_{ii}, e_{ij}^{(k)}) + (a_{ii}c_{ii})e_{ij}^{(k)}]e_{ji}^{(l)} \\
&= [-(e_{ij}^{(k)}, a_{ii}, c_{ii}) + (a_{ii}c_{ii})e_{ij}^{(k)}]e_{ji}^{(l)} \\
&= [(a_{ii}c_{ii})e_{ij}^{(k)}]e_{ji}^{(l)} \\
&\stackrel{(2.2)}{=} (a_{ii}c_{ii})(e_{ij}^{(k)} \circ e_{ji}^{(l)}) + ((a_{ii}c_{ii})e_{ij}^{(k)})e_{ji}^{(l)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim $(a_{ii}e_{ij}^{(k)})(b_{jj}e_{ji}^{(l)}) = 0$, e portanto, $\mathcal{A}_{ij}^{(k)}\mathcal{A}_{ji}^{(l)} = 0$ para $k \neq l$.

Para provar $\mathcal{A}_{ij}^{(k)}\mathcal{A}_{ij}^{(k)} = 0$ considera-se $a_{ii}e_{ij}^{(k)}, b_{ii}e_{ij}^{(k)} \in \mathcal{A}_{ij}^{(k)}$. Então, por (2.11) e (2.5) tem-se

$$(a_{ii}e_{ij}^{(k)})(b_{ii}e_{ij}^{(k)}) = -(e_{ij}^{(k)}e_{ij}^{(k)})(b_{ii}a_{ii}) + [e_{ij}^{(k)}(e_{ij}^{(k)}b_{ii})]a_{ii} + [a_{ii}(e_{ij}^{(k)}b_{ii})]e_{ij}^{(k)} = 0.$$

Isto implica o que queríamos mostrar.

Finalmente, sejam $a_{ii}e_{ij}^{(k)} \in \mathcal{A}_{ij}^{(k)}$ e $b_{ii}e_{ij}^{(k+1)} \in \mathcal{A}_{ij}^{(k+1)}$. Então, novamente por (2.11)

$$\begin{aligned}
(a_{ii}e_{ij}^{(k)})(b_{ii}e_{ij}^{(k+1)}) &= -(e_{ij}^{(k+1)}e_{ij}^{(k)})(b_{ii}a_{ii}) + [e_{ij}^{(k+1)}(e_{ij}^{(k)}b_{ii})]a_{ii} + [a_{ii}(e_{ij}^{(k)}b_{ii})]e_{ij}^{(k+1)} \\
&= (e_{ij}^{(k)}e_{ij}^{(k+1)})(b_{ii}a_{ii}) \\
&\stackrel{(2.7)}{=} (j-i)e_{ji}^{(k+2)}(b_{ii}a_{ii}) \quad (k \bmod 3)
\end{aligned}$$

onde $b_{ii}a_{ii} \in \mathcal{A}_{ii}$ e $e_{ji}^{(k+2)}(b_{ii}a_{ii}) \in \mathcal{A}_{ji}^{(k+2)}$ para todo $a_{ii}, b_{ii} \in \mathcal{A}_{ii}$. Portanto,

$$\mathcal{A}_{ij}^{(k)}\mathcal{A}_{ij}^{(k+1)} \subseteq \mathcal{A}_{ji}^{(k+2)} \quad (k \bmod 3).$$

Isso prova o Lema.

Q.E.D.

Lema 3 *O anel $\Omega = \mathcal{A}_{11}$ é um anel associativo e comutativo.*

Demonstração: Fixemos elementos arbitrários $a_{11}, b_{11}, c_{11} \in \mathcal{A}_{11}$. Primeiramente provamos que o associador (a_{11}, b_{11}, c_{11}) é anulado pelo elemento $e_{12}^{(1)}$. Então,

$$\begin{aligned}
(a_{11}, b_{11}, c_{11})e_{12}^{(1)} &= [(a_{11}b_{11})c_{11} - a_{11}(b_{11}c_{11})]e_{12}^{(1)} \\
&= [(a_{11}b_{11})c_{11}]e_{12}^{(1)} - [a_{11}(b_{11}c_{11})]e_{12}^{(1)} \\
&\stackrel{(2.2)}{=} [(a_{11}b_{11})c_{11}]e_{12}^{(1)} - a_{11}((b_{11}c_{11}) \circ e_{12}^{(1)}) + (a_{11}e_{12}^{(1)})(b_{11}c_{11}) \\
&= [(a_{11}b_{11})c_{11}]e_{12}^{(1)} - a_{11}((b_{11}c_{11})e_{12}^{(1)})
\end{aligned}$$

pois pelo Lema 1, $\mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{11} = 0$. Consideremos as linearizações da identidade de Moufang à direita

$$(2.12) \quad [x(wz)y] + x[(yz)w] - [(xw)z]y - [(xy)z]w = 0 \quad \text{ou}$$

$$(2.13) \quad x[w(zy)] + x[y(zw)] - [(xw)z]y - [(xy)z]w = 0.$$

A equação (2.12), pode-se escrever $[(xw)z]y - x[(wz)y] = x[(yz)w] - [(xy)z]w$. Então,

$$[(a_{11}b_{11})c_{11}]e_{12}^{(1)} - a_{11}[(b_{11}c_{11})e_{12}^{(1)}] = a_{11}[(e_{12}^{(1)}c_{11})b_{11}] - [(a_{11}e_{12}^{(1)})c_{11}]b_{11} = 0.$$

Assim $(a_{11}, b_{11}, c_{11})e_{12}^{(1)} = 0$.

Agora, como $(a_{11}, b_{11}, c_{11}) \in A_{11}$, então por (2.6)

$$\begin{aligned} (a_{11}, b_{11}, c_{11}) &= (a_{11}, b_{11}, c_{11})e_{11} &= (a_{11}, b_{11}, c_{11})(e_{12}^{(1)}e_{21}^{(1)}) \\ &\stackrel{(2.2)}{=} ((a_{11}, b_{11}, c_{11}) \circ e_{12}^{(1)})e_{21}^{(1)} - e_{12}^{(1)}((a_{11}, b_{11}, c_{11})e_{21}^{(1)}) \\ &= ((a_{11}, b_{11}, c_{11})e_{12}^{(1)})e_{21}^{(1)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, \mathcal{A}_{11} é um anel associativo.

Finalmente, vamos a mostrar a comutatividade de \mathcal{A}_{11} . Por (2.7) sabemos que

$$e_{21}^{(2)}e_{21}^{(3)} = (1-2)e_{12}^{(1)} = -e_{12}^{(1)} \quad \text{e} \quad e_{21}^{(2)}e_{21}^{(3)} + e_{21}^{(3)}e_{21}^{(2)} = e_{21}^{(2)} \circ e_{21}^{(3)} = 0,$$

os quais implicam, $e_{12}^{(1)} = e_{21}^{(3)}e_{21}^{(2)}$. Então, por (2.11)

$$\begin{aligned} [a_{11}, b_{11}]e_{12}^{(1)} &= (a_{11}b_{11})(e_{21}^{(3)}e_{21}^{(2)}) - (b_{11}a_{11})(e_{21}^{(3)}e_{21}^{(2)}) \\ &= -(e_{21}^{(2)}b_{11})(e_{21}^{(3)}a_{11}) + [e_{21}^{(2)}(b_{11}e_{21}^{(3)})]a_{11} + [a_{11}(b_{11}e_{21}^{(3)})]e_{21}^{(2)} \\ &\quad + (e_{21}^{(2)}a_{11})(e_{21}^{(3)}b_{11}) - [e_{21}^{(2)}(a_{11}e_{21}^{(3)})]b_{11} - [b_{11}(a_{11}e_{21}^{(3)})]e_{21}^{(2)} \\ &= -(e_{21}^{(2)}b_{11})(e_{21}^{(3)}a_{11}) + (e_{21}^{(2)}a_{11})(e_{21}^{(3)}b_{11}). \end{aligned}$$

Assim, novamente por (2.11)

$$\begin{aligned} (e_{21}^{(2)}b_{11})(e_{21}^{(3)}a_{11}) &= -(a_{11}b_{11})(e_{21}^{(3)}e_{21}^{(2)}) + [a_{11}(b_{11}e_{21}^{(3)})]e_{21}^{(2)} + [e_{21}^{(2)}(b_{11}e_{21}^{(3)})]a_{11} \\ &= -(a_{11}b_{11})(e_{21}^{(3)}e_{21}^{(2)}) \\ &= (a_{11}b_{11}, e_{21}^{(3)}, e_{21}^{(2)}) - ((a_{11}b_{11})e_{21}^{(3)})e_{21}^{(2)} \\ &= (e_{21}^{(2)}, a_{11}b_{11}, e_{21}^{(3)}) \end{aligned}$$

e de forma semelhante $(e_{21}^{(2)}a_{11})(e_{21}^{(3)}b_{11}) = (e_{21}^{(2)}, b_{11}a_{11}, e_{21}^{(3)})$. Mas, lembrando que $e_{21}^{(2)}e_{21}^{(3)} = -e_{12}^{(1)}$ e usando a seguinte identidade obtida de (2.13) $x[y(zw)] = -x[w(zy)] + [(xy)z]w + [(xw)z]y$, obtemos

$$\begin{aligned} (e_{21}^{(2)}, b_{11}a_{11}, e_{21}^{(3)}) &= -(e_{21}^{(2)}, e_{21}^{(3)}, b_{11}a_{11}) \\ &= -(e_{21}^{(2)}e_{21}^{(3)})(b_{11}a_{11}) + e_{21}^{(2)}(e_{21}^{(3)}(b_{11}a_{11})) \\ &= -e_{21}^{(2)}[a_{11}(b_{11}e_{21}^{(3)})] + [(e_{21}^{(2)}e_{21}^{(3)})b_{11}]a_{11} + [(e_{21}^{(2)}a_{11})b_{11}]e_{21}^{(3)} \\ &= (e_{21}^{(2)}, a_{11}b_{11}, e_{21}^{(3)}), \end{aligned}$$

por conseguinte, $(e_{21}^{(2)}a_{11})(e_{21}^{(3)}b_{11}) = (e_{21}^{(2)}b_{11})(e_{21}^{(3)}a_{11})$. Portanto,

$$[a_{11}, b_{11}]e_{12}^{(1)} = 0.$$

Logo, por (2.6)

$$\begin{aligned}
[a_{11}, b_{11}] &= [a_{11}, b_{11}]e_{11} &= [a_{11}, b_{11}](e_{12}^{(1)}e_{21}^{(1)}) \\
&\stackrel{(2.2)}{=} ([a_{11}, b_{11}] \circ e_{12}^{(1)})e_{21}^{(1)} - e_{12}^{(1)}([a_{11}, b_{11}]e_{21}^{(1)}) \\
&= ([a_{11}, b_{11}]e_{12}^{(1)})e_{21}^{(1)} \\
&= 0;
\end{aligned}$$

assim, $[a_{11}, b_{11}] = 0$. Portanto, \mathcal{A}_{11} é um anel associativo e comutativo.

Isto prova o Lema.

Q.E.D.

Como no Lema 3, usando o mesmo processo de demonstração pode-se mostrar que \mathcal{A}_{22} é uma subálgebra associativa e comutativa de \mathcal{A} .

Definimos as “funções de coordenadas” $\pi_{ij}^{(k)} : \mathcal{A} \rightarrow \Omega$ sobre \mathcal{A} tomando $\pi_{ij}^{(k)}$ igual a zero em todas as componentes exceto em $\mathcal{A}_{ij}^{(k)}$, e sobre $\mathcal{A}_{ij}^{(k)}$ estão definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\pi_{11}(a_{11}) &= a_{11}, & \pi_{22}(a_{22}) &= e_{12}(a_{22}e_{21}) = L_{e_{12}}R_{e_{21}}(a_{22}), \\
\pi_{12}^{(k)}(a_{12}^{(k)}) &= a_{12}^{(k)}e_{21}^{(k)} = R_{e_{21}^{(k)}}(a_{12}^{(k)}), & \pi_{21}^{(k)}(a_{21}^{(k)}) &= e_{12}^{(k)}a_{21}^{(k)} = L_{e_{12}^{(k)}}(a_{21}^{(k)}),
\end{aligned}$$

onde pode-se observar que $\pi_{22} = L_{e_{12}}R_{e_{21}}$, $\pi_{12}^{(k)} = R_{e_{21}^{(k)}}$ e $\pi_{21}^{(k)} = L_{e_{12}^{(k)}}$. Além disso, definimos uma aplicação linear $\pi : \mathcal{A} \rightarrow C(\Omega)$ dada por

$$\pi(a) = \sum_{i=1}^2 \pi_{ii}(a)e_{ii} + \sum_{k=1}^3 (\pi_{12}^{(k)}(a)e_{12}^{(k)} + \pi_{21}^{(k)}(a)e_{21}^{(k)}).$$

Lema 4 *A aplicação π é um homomorfismo de álgebras, isto é, $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$.*

Demonstração: Primeiro vamos mostrar a igualdade $e_{12}(a_{22}e_{21}) = e_{12}^{(k)}(a_{22}e_{21}^{(k)})$, $k = 2, 3$. Isto segue das relações dos espaços de Peirce do Lema 1 ou 2 e, por (2.11)

$$\begin{aligned}
e_{12}^{(2)}(a_{22}e_{21}^{(2)}) &\stackrel{(2.7)}{=} (e_{21}^{(1)}e_{21}^{(3)})(a_{22}e_{21}^{(2)}) \\
&= -(e_{21}^{(2)}e_{21}^{(3)})(a_{22}e_{21}^{(1)}) + [e_{21}^{(1)}(e_{21}^{(3)}a_{22})]e_{21}^{(2)} + [e_{21}^{(2)}(e_{21}^{(3)}a_{22})]e_{21}^{(1)} \\
&= -(-e_{12}^{(1)})(a_{22}e_{21}^{(1)}) \\
&= e_{12}^{(1)}(a_{22}e_{21}^{(1)}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{12}^{(3)}(a_{22}e_{21}^{(2)}) &\stackrel{(2.7)}{=} -(e_{21}^{(1)}e_{21}^{(2)})(a_{22}e_{21}^{(3)}) \\
&= -(e_{21}^{(3)}e_{21}^{(2)})(a_{22}e_{21}^{(1)}) + [e_{21}^{(1)}(e_{21}^{(2)}a_{22})]e_{21}^{(3)} + [e_{21}^{(3)}(e_{21}^{(2)}a_{22})]e_{21}^{(1)} \\
&= -(-e_{12}^{(1)})(a_{22}e_{21}^{(1)}) \\
&= e_{12}^{(1)}(a_{22}e_{21}^{(1)}).
\end{aligned}$$

Para provar que π é um homomorfismo de álgebras, precisaremos as seguintes expressões das funções de coordenadas $\pi_{ij}^{(k)}$: por (2.2) e $(e_{ij}^{(k)}, a_{jj}, e_{ji}^{(k)}) = 0$ para $i, j \neq$

$$\pi_{12}^{(k)}(a_{11}e_{12}^{(k)}) = (a_{11}e_{12}^{(k)})e_{21}^{(k)} = a_{11}(e_{12}^{(k)} \circ e_{21}^{(k)}) - (a_{11}e_{21}^{(k)})e_{12}^{(k)} = a_{11},$$

$$\pi_{12}^{(k)}(e_{12}^{(k)} a_{22}) = (e_{12}^{(k)} a_{22})e_{21}^{(k)} = e_{12}^{(k)}(a_{22}e_{21}^{(k)}) = e_{12}(a_{22}e_{21}) = \pi_{22}(a_{22}),$$

$$\pi_{21}^{(k)}(e_{21}^{(k)} a_{11}) = e_{12}^{(k)}(e_{21}^{(k)} a_{11}) = (e_{12}^{(k)} \circ e_{21}^{(k)})a_{11} - e_{21}^{(k)}(e_{12}^{(k)} a_{11}) = a_{11},$$

$$\pi_{21}^{(k)}(a_{22}e_{21}^{(k)}) = e_{12}^{(k)}(a_{22}e_{21}^{(k)}) = e_{12}(a_{22}e_{21}) = \pi_{22}(a_{22}),$$

Basta analisar os casos quando a e b estão nos espaços de Peirce $\mathcal{A}_{ij}^{(k)}$, assim:

(A) $\pi_{ii}(ab) = \pi_{ii}(a)\pi_{ii}(b)$; $a, b \in \mathcal{A}_{ii}$.

(B) $\pi_{ij}^{(k)}(ab) = \pi_{ii}(a)\pi_{ij}^{(k)}(b)$; $a \in \mathcal{A}_{ii}$ e $b \in \mathcal{A}_{ij}^{(k)}$

(C) $\pi_{ij}^{(k)}(ab) = \pi_{ij}^{(k)}(a)\pi_{jj}(b)$; $a \in \mathcal{A}_{ij}^{(k)}$ e $b \in \mathcal{A}_{jj}$

(D) $\pi_{ii}(ab) = \pi_{ij}^{(k)}(a)\pi_{ji}^{(k)}(b)$; $a \in \mathcal{A}_{ij}^{(k)}$ e $b \in \mathcal{A}_{ji}^{(k)}$

(E) $\pi_{ji}^{(k+2)}(ab) = \delta_{ij}\pi_{ij}^{(k)}(a)\pi_{ij}^{(k+1)}(b)$; $a \in \mathcal{A}_{ij}^{(k)}$ e $b \in \mathcal{A}_{ij}^{(k+1)}$

onde todas as igualdades são resultado das relações de ortogonalidade do Lema 2. Usando os Lemas 1 e 2 para expressar as componente $\mathcal{A}_{ij}^{(k)}$ e, junto com as expressões de acima das funções de coordenadas $\pi_{ij}^{(k)}$, obtemos os seguintes casos:

(A1) Sejam $a_{11}, b_{11} \in \mathcal{A}_{11}$, então $\pi_{11}(a_{11}b_{11}) = a_{11}b_{11} = \pi_{11}(a_{11})\pi_{11}(b_{11})$.

(B1) Considere $a_{11} \in \mathcal{A}_{11}$ e $b_{11}e_{12}^{(k)} = b_{12}^{(k)} \in \mathcal{A}_{12}^{(k)}$

$$\pi_{12}^{(k)}(a_{11}b_{12}^{(k)}) = \pi_{12}^{(k)}(a_{11}(b_{11}e_{12}^{(k)})) = \pi_{12}^{(k)}((a_{11}b_{11})e_{12}^{(k)}) = a_{11}b_{11} = \pi(a_{11})\pi_{12}^{(k)}(b_{12}^{(k)}).$$

(C1) Agora, sejam $e_{21}^{(k)} a_{11} = a_{21}^{(k)} \in \mathcal{A}_{21}^{(k)}$ e $b_{11} \in \mathcal{A}_{11}$

$$\pi_{21}^{(k)}(a_{21}^{(k)}b_{11}) = \pi_{21}^{(k)}((e_{21}^{(k)} a_{11})b_{11}) = \pi_{12}^{(k)}(e_{21}^{(k)}(a_{11}b_{11})) = a_{11}b_{11} = \pi_{21}^{(k)}(a_{21}^{(k)})\pi_{11}(b_{11}).$$

(D1) Tome $a_{11}e_{12}^{(k)} = a_{12}^{(k)} \in \mathcal{A}_{12}^{(k)}$ e $e_{21}^{(k)} b_{11} = b_{21}^{(k)} \in \mathcal{A}_{21}^{(k)}$, logo

$$a_{12}^{(k)}b_{21}^{(k)} = (a_{11}e_{12}^{(k)})b_{21}^{(k)} \stackrel{(2)}{=} a_{11}(e_{12}^{(k)} \circ b_{21}^{(k)}) - (a_{11}b_{21}^{(k)})e_{12}^{(k)} = a_{11}[e_{12}^{(k)}(e_{21}^{(k)} b_{11})] = a_{11}b_{11}.$$

Então,

$$\pi_{11}(a_{12}^{(k)}b_{21}^{(k)}) = \pi_{11}(a_{11}b_{11}) = a_{11}b_{11} = \pi_{12}^{(k)}(a_{11}e_{12}^{(k)})\pi_{21}^{(k)}(e_{21}^{(k)}b_{11}) = \pi_{12}^{(k)}(a_{12}^{(k)})\pi_{21}^{(k)}(b_{21}^{(k)}).$$

(E1) Sejam $a_{11}e_{12}^{(k)} = a_{12}^{(k)} \in \mathcal{A}_{12}^{(k)}$ e $b_{11}e_{12}^{(k+1)} = b_{12}^{(k+1)} \in \mathcal{A}_{12}^{(k+1)}$, logo pela comutatividade de \mathcal{A}_{11}

$$a_{12}^{(k)}b_{12}^{(k+1)} = (a_{11}e_{12}^{(k)})(b_{11}e_{12}^{(k+1)}) \stackrel{(11)}{=} -(e_{12}^{(k+1)} e_{12}^{(k)})(b_{11}a_{11}) = e_{21}^{(k+2)}(a_{11}b_{11}).$$

Portanto,

$$\pi_{21}^{(k+2)}(a_{12}^{(k)}b_{12}^{(k+1)}) = \pi_{21}^{(k+2)}(e_{21}^{(k+2)}(a_{11}b_{11})) = a_{11}b_{11} = \pi_{12}^{(k)}(a_{12}^{(k)})\pi_{12}^{(k+1)}(b_{12}^{(k+1)}).$$

E analogamente, também temos:

(A2) Sejam $a_{22}, b_{22} \in \mathcal{A}_{22}$, então $\pi_{22}(a_{22}b_{22}) = a_{22}b_{22} = \pi_{22}(a_{22})\pi_{22}(b_{22})$.

(B2) Considere $a_{22} \in \mathcal{A}_{22}$ e $b_{22}e_{21}^{(k)} = b_{21}^{(k)} \in \mathcal{A}_{21}^{(k)}$

$$\pi_{21}^{(k)}(a_{22}b_{21}^{(k)}) = \pi_{21}^{(k)}(a_{22}(b_{22}e_{21}^{(k)})) = \pi_{21}^{(k)}((a_{22}b_{22})e_{21}^{(k)}) = \pi_{22}(a_{22}b_{22}) = \pi_{22}(a_{22})\pi_{21}^{(k)}(b_{21}^{(k)}).$$

(C2) Agora, sejam $e_{12}^{(k)}a_{22} = a_{12}^{(k)} \in \mathcal{A}_{12}^{(k)}$ e $b_{22} \in \mathcal{A}_{22}$

$$\pi_{12}^{(k)}(a_{12}^{(k)}b_{22}) = \pi_{12}^{(k)}((e_{12}^{(k)}a_{22})b_{22}) = \pi_{12}^{(k)}(e_{12}^{(k)}(a_{22}b_{22})) = \pi_{22}(a_{22}b_{22}) = \pi_{12}^{(k)}(a_{12}^{(k)})\pi_{22}(b_{22}).$$

(D2) Tome $a_{22}e_{21}^{(k)} = a_{21}^{(k)} \in \mathcal{A}_{21}^{(k)}$ e $e_{12}^{(k)}b_{22} = b_{12}^{(k)} \in \mathcal{A}_{12}^{(k)}$, logo

$$a_{21}^{(k)}b_{12}^{(k)} = (a_{22}e_{21}^{(k)})b_{12}^{(k)} \stackrel{(2)}{=} a_{22}(e_{21}^{(k)} \circ b_{12}^{(k)}) - (a_{22}b_{12}^{(k)})e_{21}^{(k)} = a_{22}[e_{21}^{(k)}(e_{12}^{(k)}b_{22})] = a_{22}b_{22}.$$

Então,

$$\pi_{22}(a_{21}^{(k)}b_{12}^{(k)}) = \pi_{22}(a_{22}b_{22}) = \pi_{22}(a_{22})\pi_{22}(b_{22}) = \pi_{21}^{(k)}(a_{21}^{(k)})\pi_{12}^{(k)}(b_{12}^{(k)}).$$

(E2) Sejam $a_{22}e_{21}^{(k)} = a_{21}^{(k)} \in \mathcal{A}_{21}^{(k)}$ e $b_{22}e_{21}^{(k+1)} = b_{21}^{(k+1)} \in \mathcal{A}_{21}^{(k+1)}$, logo pela comutatividade de \mathcal{A}_{22}

$$a_{21}^{(k)}b_{21}^{(k+1)} = (a_{22}e_{21}^{(k)})(b_{22}e_{21}^{(k+1)}) \stackrel{(11)}{=} (e_{21}^{(k+1)}e_{21}^{(k)})(b_{22}a_{22}) = -e_{12}^{(k+2)}(a_{22}b_{22}).$$

Portanto,

$$\pi_{12}^{(k+2)}(a_{21}^{(k)}b_{21}^{(k+1)}) = \pi_{12}^{(k+2)}(-e_{12}^{(k+2)}(a_{22}b_{22})) = -\pi_{22}(a_{22}b_{22}) = -\pi_{21}^{(k)}(a_{21}^{(k)})\pi_{21}^{(k+1)}(b_{21}^{(k+1)}).$$

Isso prova o Lema.

Q.E.D.

O Teorema de coordenatização de Wedderburn diz que uma álgebra associativa com elemento identidade contendo matrizes unitárias é uma álgebra matricial. Da mesma forma, o **Teorema de coordenatização de Zorn** diz que uma álgebra alternativa com elemento identidade contendo matrizes unitárias de Cayley-Dickson é uma álgebra matricial de Cayley-Dickson.

Teorema 7 (Teorema de coordenatização de Zorn) *Seja \mathcal{A} uma álgebra alternativa com elemento identidade 1 que contém um sistema de matrizes unitárias de Cayley-Dickson tal que $e_{11} + e_{22} = 1$. Então, \mathcal{A} é uma álgebra matricial de Cayley-Dickson sobre o anel $\Omega = \mathcal{A}_{11}$, isto é, $\mathcal{A} \cong C(\Omega)$.*

Demonstração: Consideremos a aplicação $\pi : \mathcal{A} \rightarrow C(\Omega)$ dada acima $\pi(a) = \sum_{i=1}^2 \pi_{ii}(a)e_{ii} + \sum_{k=1}^3 (\pi_{12}^{(k)}(a)e_{12}^{(k)} + \pi_{21}^{(k)}(a)e_{21}^{(k)})$ com $a = a_{11} + \sum_{k=1}^3 a_{12}^{(k)} + \sum_{k=1}^3 a_{21}^{(k)} + a_{22}$ dada pela decomposição de \mathcal{A} nos Lemas 1 e 2.

Pelo Lema 4, já sabemos que π é um homomorfismo de álgebras. Portanto, será suficiente mostrar que π é bijetiva.

Usando as expressões das funções de coordenadas do Lema 4, todas as aplicações $\pi_{ij}^{(k)}$ são bijeções; é claro que π_{11} é uma bijeção, $\pi_{12}^{(k)} = R_{e_{21}^{(k)}}$ é a inversa de

$$R_{e_{12}^{(k)}} : \mathcal{A}_{11} \rightarrow \mathcal{A}_{11}e_{12}^{(k)} = \mathcal{A}_{12}^{(k)},$$

$\pi_{21}^{(k)} = L_{e_{12}^{(k)}}$ é a inversa de $L_{e_{21}^{(k)}} : \mathcal{A}_{11} \rightarrow e_{21}^{(k)} \mathcal{A}_{11} = \mathcal{A}_{21}^{(k)}$, enquanto $\pi_{22} = L_{e_{12}^{(k)}} R_{e_{21}^{(k)}}$ tem inversa $L_{e_{21}^{(k)}} R_{e_{12}^{(k)}}$. Assim, isto mostra que π é um homomorfismo bijetivo. Portanto, $\mathcal{A} \cong C(\Omega)$.

Isso prova o Teorema.

Q.E.D.

Ao considerar uma álgebra associativa e comutativa Ω com elemento identidade podemos obter do Teorema 7 a seguinte equivalência de categorias.

Corolário 8 *A categoria dos bimódulos alternativos unitários sobre $C(\Omega)$ é equivalente à categoria dos módulos associativos comutativos unitários sobre Ω .*

Demonstração: Vamos denotar por $\mathbf{Mod}_{AssCom}\Omega$ a categoria dos módulos associativos e comutativos sobre Ω , e por $\mathbf{Bimod}_{Alt}C(\Omega)$ a categoria dos bimódulos alternativos sobre $C(\Omega)$. Então, desejamos mostrar que

$$\mathbf{Mod}_{AssCom}\Omega \simeq \mathbf{Bimod}_{Alt}C(\Omega).$$

Seja $N \in \text{Obj}(\mathbf{Mod}_{AssCom}\Omega)$ e considere a extensão cisão nula $E = \Omega \oplus N$ de Ω por N , E é uma álgebra associativa comutativa. Assim, podemos formar a álgebra matricial de Cayley-Dickson $K = C(E)$, que contém a álgebra $C(\Omega)$ como uma subálgebra. Também, K contém o ideal $M = N_2 \cap K = C(N)$, que é o conjunto de matrizes de K cujas entradas estão no ideal N de E . Então M é um bimódulo alternativo unitário para $C(\Omega)$, relativo à multiplicação definida em K . Vamos chamar ao M o $C(\Omega)$ -bimódulo *associado* com o dado módulo N de Ω e denote

$$M = \mathcal{G}(N).$$

Como $E = \Omega \oplus N$ temos, $K = C(\Omega) \oplus M$. Também, $N^2 = 0$ em E implica que $M^2 = 0$ em K , assim K é a extensão cisão nula de $C(\Omega)$ por seu bimódulo M .

Pode-se verificar facilmente que \mathcal{G} é realmente um funtor da categoria $\mathbf{Mod}_{AssCom}\Omega$ na categoria $\mathbf{Bimod}_{Alt}C(\Omega)$. Além disso, para cada par de objetos N e N' de $\mathbf{Mod}_{AssCom}\Omega$, a seguinte igualdade é válida:

$$\mathcal{G}(\text{Hom}(N, N')) = \text{Hom}(\mathcal{G}(N), \mathcal{G}(N')).$$

Portanto, N e N' são isomorfos, se e somente se, $\mathcal{G}(N)$ e $\mathcal{G}(N')$ são isomorfos.

Similarmente, o funtor \mathcal{G} oferece um isomorfismo reticulado do reticulado dos submódulos de N , relativo a Ω sobre o reticulado dos sub-bimódulos de M sobre $C(\Omega)$.

Para completar a nossa redução da teoria dos bimódulos para $C(\Omega)$ ao dos módulos para Ω , agora mostraremos que cada $C(\Omega)$ -bimódulo unitário é isomorfo a algum bimódulo associado com um módulo unitário para Ω .

Considere um bimódulo alternativo unitário V para $C(\Omega)$, e seja

$$\mathcal{A} = C(\Omega) \oplus V$$

a extensão cisão nula de $C(\Omega)$ por V . Assim, \mathcal{A} é uma álgebra alternativa que contém a álgebra matricial de Cayley-Dickson $C(\Omega)$ como uma subálgebra com o mesmo elemento identidade, então pelo Teorema de Coordenatização de Zorn - Teorema 7 - existe um álgebra associativa e comutativa D tal que $\mathcal{A} = C(D)$. Considere o conjunto W dos elementos de D que aparecem nas entradas das matrizes de V . Logo,

$$V := C(W)$$

onde $W \triangleleft D$ e $W^2 = 0$ em D pois, $V \triangleleft \mathcal{A}$ e $V^2 = 0$ em \mathcal{A} , e assim, $D = \Omega \oplus N$. Logo, D é a extensão cisão nula de Ω por seu módulo W , então W é um módulo associativo e comutativo unitário sobre Ω . Portanto $\mathcal{G}(W) = V$.

Isto prova o Corolário.

Q.E.D.

Da equivalência de categorias dada no Corolário 8, podemos classificar aos bimódulos alternativos irredutíveis unitários sobre $C(F)$, dada no Corolário 9, mas nós damos uma demonstração desse resultado usando diretamente o Teorema de Coordenatização de Zorn.

Corolário 9 *Cada bimódulo alternativo irredutível unitário sobre a álgebra matricial de Cayley-Dickson $C(F)$, é isomorfo ao bimódulo regular $\text{Reg}(C(F))$.*

Demonstração: Seja V um bimódulo alternativo irredutível unitário sobre $C(F)$. Então, a extensão cisão nula $E = C(F) \oplus V$ de $C(F)$ pelo bimódulo V , é uma álgebra alternativa com a mesmo elemento identidade de $C(F)$. Portanto, pelo Teorema de Coordenatização de Zorn (Teorema 7), existe uma certa subálgebra Ω de E tal que $E = C(\Omega)$.

A partir de $E = C(\Omega)$, considere o conjunto D dos elementos de Ω que aparecem nas entradas das matrizes de V . Logo,

$$V := C(D)$$

onde $D \triangleleft \Omega$ e $D^2 = 0$ pois, $V \triangleleft E$ e $V^2 = 0$ em E , e assim, $\Omega = F \cdot 1 + D$ é a extensão cisão nula de $F \cdot 1$ por D . Mas, D é um F -bimódulo associativo irredutível pois, V o é. Portanto, $D = F \cdot 1$, o qual implica, $V = \text{Reg}(C(F))$.

Isto prova o Corolário.

Q.E.D.

2.3 Generalização de um teorema de Nathan Jacobson

A decomposição de Peirce de uma álgebra alternativa foi dada de maneira geral no Lema 1 para alguns idempotentes especiais. Mas para não perder a ilação das nossas ideias aqui, vamos descrever o que é a decomposição de Peirce associada a um idempotente e logo depois, a decomposição de Peirce associada a um sistema de idempotentes.

Seja \mathcal{A} uma álgebra alternativa com um elemento idempotente e ($e^2 = e$). Utilizando as equivalências de (2.1) em termos das multiplicações à direita e esquerda, temos que R_e e L_e são operadores lineares idempotentes sobre \mathcal{A} que comutam. Logo, se segue que \mathcal{A} é a soma direta de espaços vetoriais

$$(2.14) \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_{11} \oplus \mathcal{A}_{10} \oplus \mathcal{A}_{01} \oplus \mathcal{A}_{00},$$

onde \mathcal{A}_{ij} ($i, j = 0, 1$) é o subespaço de \mathcal{A} definido por

$$\mathcal{A}_{ij} = \{x_{ij} | ex_{ij} = ix_{ij}, x_{ij}e = jx_{ij}\}, \quad i, j = 0, 1$$

com as relações dadas no Lema 1, os quais são

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}_{ii}^2 &\subseteq \mathcal{A}_{ii}, & \mathcal{A}_{ii}\mathcal{A}_{jj} &= 0, \\ \mathcal{A}_{ii}\mathcal{A}_{ij} + \mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{jj} &\subseteq \mathcal{A}_{ij}, & \mathcal{A}_{jj}\mathcal{A}_{ij} &= \mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{ii} = 0, \\ \mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{ij} &\subseteq \mathcal{A}_{ji}, & \mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{ji} &\subseteq \mathcal{A}_{ii}, \end{aligned}$$

onde $i \neq j$.

Os idempotentes e_1, e_2, \dots, e_n em uma álgebra \mathcal{A} (arbitrária) são chamados **sistema de idempotentes ortogonais** quando $e_i e_j = 0$ para $i \neq j$. Observe que qualquer soma $e = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ de um sistema de idempotentes ortogonais ($n \geq 1$) é um idempotente. Além disso, $e e_i = e_i e = e_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

No Lema 1 tínhamos observado que a relação $(x, e_{11}, e_{22}) = 0$ é válida em cada álgebra alternativa, onde e_{11} e e_{22} são elementos da base da álgebra de matrizes de Cayley-Dickson com $e_{11} + e_{22} = 1$. Mas, na verdade, essa relação é válida em cada álgebra alternativa para um sistema de idempotentes ortogonais, isto é, $(x, e_i, e_j) = 0$ para $i \neq j$ (veja, [12]).

Uma decomposição de Peirce mais refinada para uma álgebra alternativa \mathcal{A} é a seguinte decomposição, relacionada a um sistema de idempotentes ortogonais e_1, \dots, e_n em \mathcal{A} : \mathcal{A} é a soma direta de espaços vetoriais

$$(2.16) \quad \mathcal{A} = \sum \mathcal{A}_{ij} \quad (i, j = 1 \dots, n),$$

onde os \mathcal{A}_{ij} são subespaços de \mathcal{A} e estão definidos por

$$(2.17) \quad \mathcal{A}_{ij} = \{x_{ij} | e_k x_{ij} = \delta_{ki} x_{ij}, x_{ij} e_k = \delta_{jk} x_{ij} \text{ para } k = 1, \dots, n\} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n).$$

Os subespaços \mathcal{A}_{ij} em (2.17), satisfazem também relações semelhantes aos subespaços de Peirce (2.15), obtidas por um idempotente:

$$(2.18) \quad \mathcal{A}_{ij} \mathcal{A}_{jk} \subseteq \mathcal{A}_{ik}, \quad (i, j, k = 0, 1, \dots, n),$$

$$(2.19) \quad \mathcal{A}_{ij} \mathcal{A}_{ij} \subseteq \mathcal{A}_{ji}, \quad (i, j = 0, 1, \dots, n),$$

$$(2.20) \quad \mathcal{A}_{ij} \mathcal{A}_{kl} = 0, \quad j \neq k, \quad (i, j) \neq (k, l) \quad (i, j, k, l = 0, 1, \dots, n),$$

$$(2.21) \quad (x_{ii}, y_{ij} z_{ji}, t_{ii}) = 0 \text{ se } i \neq j \text{ para todo } x_{ii}, t_{ii} \in \mathcal{A}_{ii}, y_{ij} \in \mathcal{A}_{ij} \text{ e } z_{ji} \in \mathcal{A}_{ji},$$

e muitas outras que estão dadas no livro de Schafer [12].

Lema 5 *Seja \mathcal{A} uma álgebra alternativa que contém um sistema de idempotentes ortogonais e_1, e_2, \dots, e_n . Seja (2.16) a decomposição de Peirce de \mathcal{A} associada a e_1, e_2, \dots, e_n . Então, a álgebra \mathcal{A} é associativa, se e somente se, cada \mathcal{A}_{ii} é associativa e $\mathcal{A}_{ij}^2 = 0$ para $i \neq j$. Neste caso, \mathcal{A}_{ii} será associativa se $\mathcal{A}_{ii} = \mathcal{A}_{ij} \mathcal{A}_{ji}$ para alguns $i \neq j$, e $\mathcal{A}_{ij}^2 = 0$ se $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ik} \mathcal{A}_{kj}$ para algum $k \neq i, j$.*

Demonstração: Certamente as duas condições são necessárias. Também elas são suficientes pois, $(a_{ii}, b_{ii}, c_{ii}) = 0$ se \mathcal{A}_{ii} é associativa, $(a_{ij}, b_{ij}, \mathcal{A}) = 0$ porque $\mathcal{A}_{ij}^2 = 0$, e através das propriedades da decomposição de Peirce para álgebras alternativas (2.18), (2.19) e (2.20); de modo que todos os produtos diferentes de zero devem ter índices ligados.

Usando a identidade

$$(xy, z, w) = x(y, z, w) + (x, z, w)y - (x, y, [z, w])$$

que é válida em toda álgebra alternativa. Assim, para todo $a_{ii}, b_{ii} \in \mathcal{A}_{ii}$ e $c_{ij} d_{ji} \in \mathcal{A}_{ij} \mathcal{A}_{ji}$

$$(c_{ij} d_{ji}, a_{ii}, b_{ii}) = c_{ij} (d_{ji}, a_{ii}, b_{ii}) + (c_{ij}, a_{ii}, b_{ii}) d_{ji} - (c_{ij}, d_{ji}, [a_{ii}, b_{ii}]) = 0,$$

isto significa que $\mathcal{A}_{ij} \mathcal{A}_{ji}$ se associa com \mathcal{A}_{ii} . Quando $\mathcal{A}_{ij} \mathcal{A}_{ji} = \mathcal{A}_{ii}$ a álgebra \mathcal{A}_{ii} é associativa. Quando $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ik} \mathcal{A}_{kj}$, então pela identidade linearizada da identidade de Moufang do meio

(2.11)

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{ij}^2 = \mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{ij} &= (\mathcal{A}_{ik}\mathcal{A}_{kj})(\mathcal{A}_{ik}\mathcal{A}_{kj}) \\
&\subseteq -(\mathcal{A}_{kj}\mathcal{A}_{kj})(\mathcal{A}_{ik}\mathcal{A}_{ik}) + (\mathcal{A}_{ik}(\mathcal{A}_{kj}\mathcal{A}_{ik}))\mathcal{A}_{kj} + (\mathcal{A}_{kj}(\mathcal{A}_{kj}\mathcal{A}_{ik}))\mathcal{A}_{kj} \\
&\stackrel{(2.20)}{=} (0)
\end{aligned}$$

pois todos os espaços de Peirce são distintos se $i, j, k \neq$.

Isto prova o Lema.

Q.E.D.

Lema 6 *Seja \mathcal{A} uma álgebra alternativa com idempotente $e \neq 1$. Seja (2.14) a decomposição de Peirce de \mathcal{A} associada a e . Suponha que existem elementos a_{10} em \mathcal{A}_{10} e b_{01} em \mathcal{A}_{01} , tais que,*

$$a_{10}b_{01} = e.$$

Então, $e\mathcal{A}e = \mathcal{A}_{10}\mathcal{A}_{01}$ é associativa.

Demonstração: É claro que $e\mathcal{A}e = \mathcal{A}_{11}$. Também, $\mathcal{A}_{10}\mathcal{A}_{01} \subseteq \mathcal{A}_{11}$. Vamos mostrar a outra inclusão. Seja a_{11} um elemento de \mathcal{A}_{11} , então

$$a_{11} = a_{11}e = a_{11}(a_{10}a_{01}) \stackrel{(2.2)}{=} (a_{11} \circ a_{10})a_{01} - a_{10}(a_{11}a_{01}) = (a_{11}a_{10})a_{01} \in \mathcal{A}_{10}\mathcal{A}_{01}$$

para alguns $a_{10} \in \mathcal{A}_{10}$ e $a_{01} \in \mathcal{A}_{01}$. Portanto $e\mathcal{A}e = \mathcal{A}_{11} = \mathcal{A}_{10}\mathcal{A}_{01}$. Também (2.21) implica que $\mathcal{A}_{10}\mathcal{A}_{01}$ é associativa.

Isto prova o Lema.

Q.E.D.

Agora, podemos enunciar e provar o teorema principal desta seção que é válido para as álgebras alternativas de dimensão e característica arbitrária.

Teorema 10 *Seja \mathcal{A} uma álgebra alternativa com elemento identidade 1 que contém um sistema de idempotentes ortogonais e_1, e_2, \dots, e_n tais que $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$. Suponha que para cada $i \neq j$ existem $a_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$ e $b_{ji} \in \mathcal{A}_{ji}$, tais que,*

$$a_{ij}b_{ji} = e_i \quad e \quad b_{ji}a_{ij} = e_j.$$

Se $n \geq 3$, então \mathcal{A} é uma álgebra associativa.

Demonstração: Seja $\mathcal{A} = \sum \oplus \mathcal{A}_{ij}$ a decomposição de Peirce da álgebra alternativa \mathcal{A} relativa aos idempotentes e_1, e_2, \dots, e_n . Para qualquer $i = 2, 3, \dots, n$, primeiro mostraremos que

$$\mathcal{A}_{1i}^2 = \mathcal{A}_{i1}^2 = 0 \quad (i = 2, \dots, n).$$

Considere $e = e_1 + e_i \neq 1$ pois $n \geq 3$. Logo, pela hipótese, existem $a_{1j} \in \mathcal{A}_{1j}$, $a_{j1} \in \mathcal{A}_{j1}$, $a_{ik} \in \mathcal{A}_{ik}$ e $a_{ki} \in \mathcal{A}_{ki}$ ($1, i, j, k \neq$), tais que,

$$e = e_1 + e_i = a_{1j}a_{j1} + a_{ik}a_{ki} = (a_{1j} + a_{ik})(a_{j1} + a_{ki}),$$

onde os elementos $a_{1j} + a_{ik}$ e $a_{j1} + a_{ki}$ pertencem aos espaços de Peirce da decomposição de \mathcal{A} associada a e . Assim, pelo Lema 6, temos

$$e\mathcal{A}e = e\left(\sum \oplus \mathcal{A}_{ij}\right)e = (e_1 + e_i)\left(\sum \oplus \mathcal{A}_{ij}\right)(e_1 + e_i) = \mathcal{A}_{11} \oplus \mathcal{A}_{1i} \oplus \mathcal{A}_{i1} \oplus \mathcal{A}_{ii}.$$

é associativa. Mais, essa decomposição é a decomposição de Peirce de $e\mathcal{A}e$ associada ao idempotente e_1 ; de fato, como

$$e(e\mathcal{A}e) = e(e(\mathcal{A}e)) = e^2(\mathcal{A}e) = e(\mathcal{A}e) = e\mathcal{A}e$$

e

$$(e\mathcal{A}e)e = ((e\mathcal{A})e)e = (e\mathcal{A})e^2 = (e\mathcal{A})e = e\mathcal{A}e,$$

então e é o elemento identidade de $e\mathcal{A}e$ com a condição $e = e_1 + e_i$. A decomposição de Peirce de $e\mathcal{A}e$ associada a e_1 está dada por

$$e\mathcal{A}e = (e\mathcal{A}e)_{11} \oplus (e\mathcal{A}e)_{1i} \oplus (e\mathcal{A}e)_{i1} \oplus (e\mathcal{A}e)_{ii}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (e\mathcal{A}e)_{11} &= e_1(e\mathcal{A}e)e_1 = e_1(\mathcal{A}_{11} \oplus \mathcal{A}_{1i} \oplus \mathcal{A}_{i1} \oplus \mathcal{A}_{ii})e_1 = \mathcal{A}_{11}, \\ (e\mathcal{A}e)_{1i} &= e_1(e\mathcal{A}e)e_i = e_1(\mathcal{A}_{11} \oplus \mathcal{A}_{1i} \oplus \mathcal{A}_{i1} \oplus \mathcal{A}_{ii})e_i = \mathcal{A}_{1i}, \\ (e\mathcal{A}e)_{i1} &= e_i(e\mathcal{A}e)e_1 = e_i(\mathcal{A}_{11} \oplus \mathcal{A}_{1i} \oplus \mathcal{A}_{i1} \oplus \mathcal{A}_{ii})e_1 = \mathcal{A}_{i1}, \\ (e\mathcal{A}e)_{ii} &= e_i(e\mathcal{A}e)e_i = e_i(\mathcal{A}_{11} \oplus \mathcal{A}_{1i} \oplus \mathcal{A}_{i1} \oplus \mathcal{A}_{ii})e_i = \mathcal{A}_{ii} \end{aligned}$$

e isso mostra o que queríamos. Portanto, pelo Lema 5, \mathcal{A}_{11} é associativa e $\mathcal{A}_{1i}^2 = \mathcal{A}_{i1}^2 = 0$. Segue a partir da relação $\mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{kl} = 0$ para $j \neq k$ dada em (2.20) que

$$\left(\sum_{j=2}^n \mathcal{A}_{1j}\right)^2 = \left(\sum_{i=2}^n \mathcal{A}_{i1}\right)^2 = 0.$$

Agora, consideramos a decomposição de Peirce $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{11} \oplus \bar{\mathcal{A}}_{12} \oplus \bar{\mathcal{A}}_{21} \oplus \bar{\mathcal{A}}_{22}$ de \mathcal{A} relativa ao idempotente e_1 (Não há ambiguidade sobre a notação \mathcal{A}_{11} , pois $\bar{\mathcal{A}}_{11} = \mathcal{A}_{11}$). Resulta do Lema 5 que \mathcal{A} é associativa quando as componentes \mathcal{A}_{11} e $\bar{\mathcal{A}}_{22}$ são associativas e $\bar{\mathcal{A}}_{12}^2 = \bar{\mathcal{A}}_{21}^2 = 0$. Mas,

$$\bar{\mathcal{A}}_{12} = \sum_{j=2}^n \mathcal{A}_{1j}, \quad \bar{\mathcal{A}}_{21} = \sum_{i=2}^n \mathcal{A}_{i1}, \quad \bar{\mathcal{A}}_{22} = \sum_{i,j=2}^n \mathcal{A}_{ij}$$

onde,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{11} \oplus \sum_{j=2}^n \mathcal{A}_{1j} \oplus \sum_{i=2}^n \mathcal{A}_{i1} \oplus \sum_{i,j=2}^n \mathcal{A}_{ij}$$

é a decomposição de Peirce de \mathcal{A} relativa aos idempotentes e_1, e_2, \dots, e_n . Portanto, $\bar{\mathcal{A}}_{12}^2 = \bar{\mathcal{A}}_{21}^2 = 0$.

Já sabemos que \mathcal{A}_{11} é associativa. Mas vamos mostrar esse resultado por meio de um argumento útil. Para fazer isso, primeiro provamos que $(a_{11}, b_{11}, c_{11})a_{12} = 0$ para quaisquer $a_{11}, b_{11}, c_{11} \in \mathcal{A}_{11}$ e $a_{12} \in \mathcal{A}_{12}$. De fato

$$\begin{aligned} (a_{11}, b_{11}, c_{11})a_{12} &= ((a_{11}b_{11})c_{11})a_{12} - (a_{11}(b_{11}c_{11}))a_{12} \\ &\stackrel{(2.2)}{=} ((a_{11}b_{11})c_{11})a_{12} - a_{11}((b_{11}c_{11}) \circ a_{12}) + (a_{11}a_{12})(b_{11}c_{11}) \\ &= ((a_{11}b_{11})c_{11})a_{12} - a_{11}((b_{11}c_{11})a_{12}) \end{aligned}$$

e logo usando a identidade linearizada de Moufang á direita (2.12), tem-se

$$((a_{11}b_{11})c_{11})a_{12} - a_{11}((b_{11}c_{11})a_{12}) = a_{11}((a_{12}c_{11})b_{11}) - ((a_{11}a_{12})c_{11})b_{11} = 0$$

pois $\mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{11} = 0$ (isto se segue de (2.20)). Assim, como existem $a_{12} \in \mathcal{A}_{12}$ e $b_{21} \in \mathcal{A}_{21}$, tais que, $a_{12}b_{21} = e_1$ então, temos

$$\begin{aligned} (a_{11}, b_{11}, c_{11}) &= (a_{11}, b_{11}, c_{11})e_1 \\ &= (a_{11}, b_{11}, c_{11})(a_{12}b_{21}) \\ &= -((a_{11}, b_{11}, c_{11}), a_{12}, b_{21}) + ((a_{11}, b_{11}, c_{11})a_{12})b_{21} \\ &= (a_{12}, (a_{11}, b_{11}, c_{11}), b_{21}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, \mathcal{A}_{11} é uma álgebra associativa.

Usando os argumentos acima expostos com $e'_2 = e_2 + e_3 + \dots + e_n$ e $e_1 + e'_2 = 1$. Vamos provar que $\bar{\mathcal{A}}_{22}$ é uma álgebra associativa. Temos que

$$\bar{\mathcal{A}}_{22} = \{a \in \mathcal{A} : e'_2 a = a e'_2 = a\}$$

e existem $a_{i1} \in \mathcal{A}_{i1}$, $b_{1i} \in \mathcal{A}_{1i}$ tais que $a_{i1}b_{1i} = e_i$ para $i = 2, 3, \dots, n$. Logo, $e'_2 = a_{21}b_{12} + a_{31}b_{13} + \dots + a_{n1}b_{1n}$, então para quaisquer $a_{22}, b_{22}, c_{22} \in \bar{\mathcal{A}}_{22}$ tem-se

$$\begin{aligned} (a_{22}, b_{22}, c_{22}) &= (a_{22}, b_{22}, c_{22})e'_2 \\ &= (a_{22}, b_{22}, c_{22})(a_{21}b_{12} + a_{31}b_{13} + \dots + a_{n1}b_{1n}) \\ &= (a_{22}, b_{22}, c_{22})(a_{21}b_{12}) + (a_{22}, b_{22}, c_{22})(a_{31}b_{13}) + \dots + (a_{22}, b_{22}, c_{22})(a_{n1}b_{1n}). \end{aligned}$$

Logo, $(a_{22}, b_{22}, c_{22}) = 0$ se, e somente se, cada termo da soma do lado direito da igualdade anterior é igual a zero. Assim,

$$\begin{aligned} (a_{22}, b_{22}, c_{22})a_{21} &= ((a_{22}b_{22})c_{22})a_{21} - (a_{22}(b_{22}c_{22}))a_{21} \\ &\stackrel{(2.2)}{=} ((a_{22}b_{22})c_{22})a_{21} - a_{22}((b_{22}c_{22}) \circ a_{21}) + (a_{22}a_{21})(b_{22}c_{22}) \\ &= ((a_{22}b_{22})c_{22})a_{21} - a_{22}((b_{22}c_{22})a_{21}) \end{aligned}$$

pois $\mathcal{A}_{21}\bar{\mathcal{A}}_{22} = 0$ (isto se segue de (2.20)). Logo, usando a identidade linearizada de Moufang á direita (2.12), obtemos

$$((a_{22}b_{22})c_{22})a_{21} - a_{22}((b_{22}c_{22})a_{21}) = a_{22}((a_{21}c_{22})b_{22}) - ((a_{22}a_{21})c_{22})b_{22} = 0.$$

Então,

$$(a_{22}, b_{22}, c_{22})a_{21} = 0.$$

De forma análoga, $(a_{22}, b_{22}, c_{22})a_{31} = \dots = (a_{22}, b_{22}, c_{22})a_{n1} = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} (a_{22}, b_{22}, c_{22})(a_{21}b_{12}) &= -((a_{22}, b_{22}, c_{22}), a_{21}, b_{12}) + ((a_{22}, b_{22}, c_{22})a_{21})b_{12} \\ &= (a_{21}, (a_{22}, b_{22}, c_{22}), b_{12}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da mesma forma, também temos $(a_{22}, b_{22}, c_{22})(a_{31}b_{13}) = \dots = (a_{22}, b_{22}, c_{22})(a_{n1}b_{1n}) = 0$. Logo, todos os termos da soma são iguais a 0. Assim, $(a_{22}, b_{22}, c_{22}) = 0$ para quaisquer $a_{22}, b_{22}, c_{22} \in \bar{\mathcal{A}}_{22}$, ou seja, $\bar{\mathcal{A}}_{22}$ é uma álgebra associativa. Portanto, \mathcal{A} é uma álgebra associativa.

Isto prova o Teorema.

Q.E.D.

Corolário 11 *Seja \mathcal{A} uma álgebra alternativa com elemento identidade, tal que, \mathcal{A} contém $M_n(F)$ ($n \geq 3$) com o mesmo elemento identidade. Então, \mathcal{A} é associativa, e portanto é válido o Teorema de Coordenatização de Wedderburn.*

Usando o Corolário 11 podemos classificar os bimódulos alternativos unitários sobre $M_n(F)$, $n \geq 3$.

Corolário 12 *Cada bimódulo alternativo unitário para $M_n(F)$, $n \geq 3$, é associativo.*

Observação 13 *Deve-se notar que o Corolário 12 foi também obtido por Jacobson usando sua classificação da redutibilidade completa dos bimódulos alternativos sobre corpos de característica diferente de 2 (veja [3], Teorema 11.1). Portanto, o Corolário 12 generaliza a aquele Teorema de Jacobson.*

Observação 14 *O corolário 12 não é válido se $n = 2$ pois $M_2(F)$ possui um bimódulo de Cayley irredutível unitário não-associativo de dimensão 2 (veja o exemplo 8 do Cap. 3).*

Capítulo 3

O problema de Nathan Jacobson

A teoria estrutural das álgebras alternativas de dimensão finita foi desenvolvida por Zorn: se \mathcal{A} é uma álgebra alternativa de dimensão finita, então \mathcal{A} contém um único ideal nilpotente maximal R (o nil-radical da álgebra \mathcal{A}), e a álgebra quociente \mathcal{A}/R é semissimples. Cada álgebra semissimples é uma soma direta de ideais que são álgebras simples. Cada álgebra alternativa simples é uma álgebra associativa ou uma álgebra de Cayley-Dickson sobre seu centro (veja [13, 19]).

A teoria das representações das álgebras alternativas foi iniciada nos artigos de R. D. Schafer [14] e N. Jacobson [3], onde foram estudadas as birepresentações das álgebras alternativas de dimensão finita. Em particular, em [14] foi mostrado que qualquer birepresentação de uma álgebra alternativa semissimples de característica 0 (sem nenhuma restrição sobre a dimensão) é completamente redutível, e em [3] foram classificados os bimódulos alternativos irredutíveis sobre as álgebras de dimensão finita.

N. Jacobson [3] descreveu os bimódulos alternativos irredutíveis sobre as álgebras dos quaterniões sob a suposição que o corpo base tem característica diferente de 2 e centraliza o bimódulo. I. Shestakov [16] estendeu esse resultado, retirando as restrições sobre a característica, a dimensão, e a condição da centralização.

O Teorema de Coordenatização de Wedderburn no caso $n \geq 3$ admite uma generalização formal para as álgebras alternativas, pois cada álgebra alternativa \mathcal{A} que contém uma subálgebra $M_n(F)$ para $n \geq 3$ com o mesmo elemento identidade é associativa (veja o Corolário 11 do Cap. 2). O problema da descrição das álgebras alternativas que contém uma subálgebra $M_2(F)$ com o mesmo elemento identidade foi formulado por N. Jacobson em [2], o qual, vamos chamar “O problema de Nathan Jacobson”. Neste capítulo, nós resolvemos esse problema sem nenhuma restrição sobre a dimensão e a característica do corpo F (veja a secção 3.4).

Para obter a resposta do problema de Jacobson, usamos basicamente a descrição dos bimódulos alternativos unitários sobre os quaterniões, obtida por Shestakov [16]. E na parte final, desenvolvemos e usamos a teoria das álgebras alternativas tensoriais sobre uma fixada álgebra alternativa. Essa teoria foi desenvolvida por I. Kashuba, S. Ovsienko e I. Shestakov [5] para as álgebras de Jordan. Eles a usaram para classificar as álgebras de Jordan segundo seu tipo de representação.

3.1 Álgebras e bimódulos alternativos

3.1.1 Álgebras alternativas

Ao longo deste capítulo, salvo indicação em contrário, F denotará um corpo de característica arbitrária. Também, \mathcal{A} denotará um espaço de dimensão arbitrária sobre F .

Como foi dito nos capítulos 2 e 3, uma *álgebra alternativa (linear)* é um espaço vetorial \mathcal{A} com uma operação binária bilinear $(x, y) \mapsto xy$ satisfazendo as seguintes identidades:

$$(3.1) \quad x^2y = x(xy), \quad (xy)y = xy^2.$$

para todo $x, y \in \mathcal{A}$.

Usando o associador, as identidades (3.1) que definem às álgebras alternativas podem ser reescritas, como

$$(x, x, y) = 0, \quad (x, y, y) = 0.$$

Lembremos que a primeira dessas é chamada de *identidade alternativa à esquerda* e a segunda, a *identidade alternativa à direita*.

Linearizando as identidades da alternatividade à esquerda e à direita, obtemos as identidades

$$(x, z, y) + (z, x, y) = 0 \quad (x, y, z) + (x, z, y) = 0,$$

das quais, resulta que em uma álgebra alternativa, o associador é uma função antissimétrica dos seus argumentos. Também, essas identidades podem ser escritas como

$$(3.2) \quad (x \circ z)y - x(z y) - z(xy) = 0, \quad (xy)z + (xz)y - x(y \circ z) = 0.$$

Os exemplos mais importante de uma álgebra alternativa são as álgebras com composição.

Lembremos que em cada álgebra com composição \mathcal{A} , além da forma quadrática $n(x)$ (*norma* de $x \in \mathcal{A}$), estão também definidas, a forma bilinear $f(x, y)$ conectada com $n(x)$ e a forma linear *traça* $t(x) = f(1, x)$. Além disso, a aplicação $x \mapsto \bar{x} = f(1, x) - x$, é uma involução na álgebra \mathcal{A} . Se \mathcal{B} é algum subespaço da álgebra com composição \mathcal{A} , então, denotamos por \mathcal{B}^\perp , ao complemento ortogonal do espaço \mathcal{B} com respeito à forma $f(x, y)$.

Pelo processo de duplicação de Cayley-Dickson [19] (veja Cap. II), as álgebras com composição diferentes do corpo F , podem ser apresentadas na forma:

$$K(u) = F + Fv_1, \\ v_1^2 = v_1 + u, \quad 4u + 1 \neq 0;$$

a generalizada álgebra dos quaterniões

$$Q(u, \beta) = (K(u), \beta) = K(u) + v_2K(u), \\ v_2 \in K(u)^\perp, \quad v_2^2 = \beta \neq 0;$$

a álgebra de Cayley-Dickson

$$C(u, \beta, \gamma) = (Q(u, \beta), \gamma) = Q(u, \beta) + v_3Q(u, \beta), \\ v_3 \in Q(u, \beta)^\perp, \quad v_3^2 = \gamma \neq 0.$$

Denotamos por \mathbb{H} e \mathbb{O} , respectivamente, a generalizada álgebra dos quaterniões $Q(u, \beta)$ e a

álgebra de Cayley-Dickson $C(u, \beta, \gamma)$.

Além disso, se denotarmos as álgebras de acima por $\mathcal{A}_v = \mathcal{A} + \mathcal{A}v$ com $v = v_1, v_2, v_3$, introduzimos a involução

$$x + yv \longmapsto \bar{x} - yv$$

chamada $-I$, onde $x \longmapsto \bar{x}$ é a involução da álgebra com composição \mathcal{A} , onde $\mathcal{A} = F, K(u), \mathbb{H}$.

Em uma álgebra com composição \mathcal{A} , as seguintes condições, são equivalentes:

- (a) $n(x) = 0$ para algum $x \neq 0$ de \mathcal{A} ;
- (b) existem divisores de zero.

Se uma álgebra com composição \mathcal{A} satisfaz uma das condições anteriores (a) ou (b), então \mathcal{A} é chamada *split*.

Exemplo 6 Consideremos a álgebra $M_2(F)$ de matrizes de ordem 2×2 com entradas no corpo F . Pode-se observar que $M_2(F)$ é uma álgebra com composição com respeito à forma quadrática $n(x) = \det(x)$. Também, em vista da presença de divisores de zero, a álgebra é *split*. Por [19] (veja o Teorema 6 do Cap.II), cada álgebra com composição *split* de dimensão 4 sobre F , é isomorfa a $M_2(F)$. Consequentemente, $\mathbb{H} \cong M_2(F)$. Já temos notado, que a correspondente forma quadrática sobre a álgebra $M_2(F)$, é a determinante da matriz. Note, também, que a forma linear traça $t(x)$ sobre a álgebra $M_2(F)$, é a traça usual de uma matriz. Finalmente, a involução $a \longmapsto \bar{a} = t(a) - a$, aparece na forma

$$\overline{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

e é chamada a *involução simplética*.

Outro exemplo da generalizada álgebra dos quaterniões, é o seguinte:

Exemplo 7 Se a característica do corpo for diferente de 2, temos a **clássica álgebra dos quaterniões**, a qual, é uma F -álgebra de dimensão 4 com base $1, i, j, k$ e com a seguinte tabela de multiplicação

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1, \quad ij = -ji = k.$$

Chamamos ao conjunto $\{1, i, j, k\}$, **base clássica dos quaterniões**.

3.1.2 Bimódulos alternativos

Sejam \mathcal{A} uma álgebra alternativa sobre F e V um bimódulo sobre \mathcal{A} , isto é, V é um espaço vetorial sobre F equipado com as aplicações $\mathcal{A} \otimes V \longrightarrow V$, $a \otimes v \longmapsto av$, $V \otimes \mathcal{A} \longrightarrow V$, $v \otimes a \longmapsto va$, $a \in \mathcal{A}$, $v \in V$. Vamos a definir sobre o espaço vetorial $E = \mathcal{A} \oplus V$ uma operação binária F -bilinear $\cdot : E \times E \longrightarrow E$ por

$$(a + v) \cdot (b + w) = ab + (av + wb),$$

onde $a, b \in \mathcal{A}$, $v, w \in V$. Assim, E com a operação (produto) \cdot torna-se uma álgebra, onde \mathcal{A} é uma subálgebra e V é um ideal tal que $V^2 = 0$. Então, dizemos que V é um **bimódulo alternativo** sobre \mathcal{A} se $E = \mathcal{A} \oplus V$ é uma álgebra alternativa com respeito a \cdot . Neste caso, $E = \mathcal{A} \oplus V$ é chamada a **extensão cisão nula** de \mathcal{A} pelo bimódulo V .

Portanto, um bimódulo V sobre \mathcal{A} é um bimódulo alternativo se, e somente se, são satisfeitas as seguintes relações

$$\begin{aligned}(a, a, v) &= 0, & (a, v, b) + (v, a, b) &= 0, \\ (v, b, b) &= 0, & (a, v, b) + (a, b, v) &= 0,\end{aligned}$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$, $v \in V$.

Lembre que um bimódulo V sobre uma álgebra de composição \mathcal{A} é chamada um **bimódulo de Cayley** se satisfaz a relação

$$(3.3) \quad av = v\bar{a},$$

onde $a \in \mathcal{A}$, $v \in V$, e $a \rightarrow \bar{a}$ é a involução canônica em \mathcal{A} .

Exemplo 8 *O bimódulo de Cayley irredutível unitário não-associativo de dimensão 2 para $M_2(F)$ é o espaço Cay = $F.m_1 + F.m_2$, onde $M_2(F)$ age sobre Cay por*

$$\begin{aligned}e_{ij}.m_k &= \delta_{ik}m_j \\ m.a &= \bar{a}.m\end{aligned}$$

para todo $i, j, k \in \{1, 2\}$; onde $a \in M_2(F)$, $m \in \text{Cay}$ e $a \mapsto \bar{a}$ é a involução simplética em $M_2(F)$.

Um caso concreto do exemplo anterior, é o seguinte:

Exemplo 9 *Na álgebra de matrizes de Cayley-Dickson $C(F)$, o espaço $V = Fe_{12}^{(2)} + Fe_{21}^{(3)}$ é um bimódulo de Cayley sobre $M_2(F)$, onde a ação de $M_2(F)$ sobre V está dada no exemplo 8, e a qual, pode-se mostrar usando a tabela de multiplicação da álgebra $C(F)$.*

3.2 Formulação do problema

No capítulo 2, temos mostrado que o Teorema de Coordenatização de Wedderburn no caso $n \geq 3$ admite uma generalização formal para as álgebras alternativas (veja o Corolário 11 desse capítulo), isto é,

Seja \mathcal{A} uma álgebra alternativa com elemento identidade tal que \mathcal{A} contém $M_n(F)$ ($n \geq 3$) com o mesmo elemento identidade. Então, \mathcal{A} é associativa.

Observamos que nesse caso, é válido o Teorema de Coordenatização de Wedderburn, e assim, a álgebra alternativa é uma álgebra de matrizes. A partir desse resultado, foi natural a pergunta do caso $n = 2$, isto é, quando $\mathbb{H} \cong M_2(F)$. Em geral, para a generalizada álgebra dos quaterniões \mathbb{H} isto foi formulado por Nathan Jacobson em [2] na década dos anos 50. O problema é o seguinte:

Descrever as álgebras alternativas que contém uma subálgebra \mathbb{H} com o mesmo elemento identidade.

Esclarecemos que, se \mathcal{A} contém \mathbb{H} com o mesmo elemento identidade, a conclusão do Corolário 11 não é verdade pois a existência da álgebra de Cayley-Dickson mostra que este não é o caso.

3.3 Solução do problema

O enunciado e a demonstração do seguinte resultado são análogos para álgebras do Lema 11 de [16] que foi dado para superálgebras.

Proposição 15 *Seja \mathcal{A} uma álgebra alternativa unitária sobre um corpo F que contém uma subálgebra de composição \mathcal{C} com o mesmo elemento identidade. Suponha que um subespaço V de \mathcal{A} é \mathcal{C} -invariante e satisfaz (3.3). Então, as seguintes identidades são válidas para quaisquer $a, b \in \mathcal{C}$, $r \in \mathcal{A}$, $u, v \in V$;*

$$(3.4) \quad (ab)v = b(av), \quad v(ab) = (vb)a,$$

$$(3.5) \quad a(ur) = u(\bar{a}r),$$

$$(3.6) \quad a(uv) = u(va), \quad (uv)a = (au)v,$$

$$(3.7) \quad (u, v, a) = [uv, a]$$

Demonstração: Utilizando a linearizada identidade da alternatividade à direita e por (3.3)

$$(ab)v = a(v \circ b) - (av)b = a((b + \bar{b})v) - \bar{b}(av) = (b + \bar{b})(av) - \bar{b}(av) = b(av),$$

pois $b + \bar{b} = t(b) \in F$. Por (3.3), também obtemos a segunda relação de (3.4). Além disso, pela linearizada identidade da alternatividade à esquerda

$$a(ur) = -u(ar) + (a \circ u)r = -u(ar) + t(a)(ur) = u(\bar{a}r),$$

o qual mostra (3.5). Substituindo v pela r em (3.5), obtemos a primeira equação de (3.6). De maneira semelhante, podemos obter a segunda. Finalmente,

$$(u, v, a) = (uv)a - u(va) = (uv)a - a(uv) = [uv, a]$$

o qual mostra (3.7).

Isto prova o Lema.

Q.E.D.

É importante descrever a estrutura dos \mathbb{H} -bimódulos alternativos unitários. Tal estrutura está dada no seguinte resultado:

Proposição 16 ([16], Lema 12) *Cada \mathbb{H} -bimódulo alternativo unitário V admite a decomposição $V = V_a \oplus V_c$, onde V_a é um \mathbb{H} -bimódulo associativo e V_c é um bimódulo de Cayley sob \mathbb{H} ; além disso, o subbimódulo V_c coincide com o subespaço $(V, \mathbb{H}, \mathbb{H})$ e cada componente irredutível do subbimódulo V_c é isomorfo ao \mathbb{H} -módulo associativo irredutível à direita W com a seguinte ação de \mathbb{H} : se $a \in \mathbb{H}$ e $v \in W$, então*

$$av = v * a, \quad va = \bar{a}v,$$

onde $v * a$ significa a ação associativa de \mathbb{H} sob W e $x \mapsto \bar{x}$ é a involução canônica em \mathbb{H} . Em particular, se \mathbb{H} é uma álgebra de divisão, então $\dim_F W = 4$, e se $\mathbb{H} = M_2(F)$, então $\dim_F W = 2$ e W é isomorfo, como um \mathbb{H} -bimódulo, ao bimódulo de Cayley **Cay**.

Denotaremos por $\text{Cay } \mathbb{H}$ ao bimódulo de Cayley para a álgebra dos quaterniões de divisão \mathbb{H} e por Cay ao bimódulo de Cayley de dimensão 2 para $\mathbb{H} \cong M_2(F)$. Por $\text{Reg } \mathbb{H}$ denotaremos ao \mathbb{H} -bimódulo (associativo) regular.

Seja \mathcal{A} uma álgebra alternativa, tal que, \mathcal{A} contém \mathbb{H} com o mesmo elemento identidade, então podemos fazer de \mathcal{A} um \mathbb{H} -bimódulo alternativo unitário. Logo, pela Proposição 16, \mathcal{A} é completamente redutível e admite a decomposição

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_a \oplus \mathcal{A}_c,$$

onde \mathcal{A}_a é um \mathbb{H} -bimódulo associativo unitário e \mathcal{A}_c é um \mathbb{H} -bimódulo de Cayley unitário.

Seja $Z_a = \{v \in \mathcal{A}_a \mid [v, \mathbb{H}] = 0\}$. Como \mathcal{A}_a é um \mathbb{H} -bimódulo associativo unitário, então como em ([8], Lema 3.3), sabemos que a categoria dos \mathbb{H} -bimódulos unitários é equivalente à categoria dos $\mathbb{H}^\circ \otimes \mathbb{H}$ -módulos unitários à direita [10], onde \mathbb{H}° é a álgebra antissimétrica a \mathbb{H} . Como $\mathbb{H}^\circ \otimes \mathbb{H} \cong M_4(F)$, isto implica que cada \mathbb{H} -bimódulo unitário é completamente redutível e que quaisquer dois \mathbb{H} -bimódulos irredutíveis unitários, são isomorfos. O \mathbb{H} -bimódulo $\text{Reg} = \text{Reg } \mathbb{H}$ é unitário e irredutível. Portanto, temos que o bimódulo \mathcal{A}_a é completamente redutível e é isomorfo a uma soma direta de \mathbb{H} -bimódulos regulares Reg , isto é, $\mathcal{A}_a = \sum_i \oplus \text{Reg}_i$. Logo, \mathcal{A}_a contém um conjunto de elementos $\{u_i\}$ (as imagens de 1 no isomorfismo com Reg), tais que $\text{Reg}_i = u_i \mathbb{H}$ com $u_i \in Z_a$, e cada elemento de \mathcal{A}_a pode ser escrito somente em uma única da forma, da forma $\sum u_i a_i$, $a_i \in \mathbb{H}$. Agora, é claro que $Z_a \neq 0$ e $\mathcal{A}_a = Z_a \mathbb{H}$.

Também, pela proposição 16, o bimódulo \mathcal{A}_c coincide com $(\mathcal{A}, \mathbb{H}, \mathbb{H})$ e é completamente redutível; isto é, $\mathcal{A}_c = \sum_j \oplus \widetilde{\text{Cay}}_j$, onde $\widetilde{\text{Cay}}$ é igual a $\text{Cay } \mathbb{H}$ ou a Cay . Portanto,

$$\mathcal{A} = \left(\sum \oplus \text{Reg}_i \right) \oplus \left(\sum \oplus \widetilde{\text{Cay}}_j \right).$$

Os enunciados e as demonstrações dos Lemas 7 e 8 são análogos para bimódulos dos Lemas 3.1 e 3.2 de [8] dadas para superbimódulos.

Lema 7 *Seja $\mathcal{A} = \mathcal{A}_a \oplus \mathcal{A}_c$ a decomposição de \mathcal{A} de acima. Então, para quaisquer $m, n \in \mathcal{A}_c$, $a \in \mathbb{H}$,*

$$(3.8) \quad (mn)a = (am)n, \quad a(mn) = m(na)$$

e para quaisquer $u \in \mathcal{A}_a$, $m \in \mathcal{A}_c$, $a, b \in \mathbb{H}$,

$$(3.9) \quad (um)a = (u\bar{a})m$$

$$(3.10) \quad a(mu) = m(\bar{a}u),$$

$$(3.11) \quad ((um)a)b = (um)(ba),$$

$$(3.12) \quad b(a(mu)) = (ab)(mu),$$

$$(3.13) \quad (um, a, b) = (um)[b, a],$$

$$(3.14) \quad (b, a, mu) = [b, a](mu),$$

Demonstração: Primeiro, consideremos $m, n \in \mathcal{A}_c$, $a \in \mathbb{H}$. By (3.3), $(mn)a - (am)n = (mn)a - (m\bar{a})n = (m, n, a) - (m, \bar{a}, n) + m(na - \bar{a}n) = (m, n, a) + (m, a, n) = 0$. De forma análoga, $a(mn) - m(na) = 0$. Isto prova (3.8)

Agora, sejam $u \in \mathcal{A}_a$, $m \in \mathcal{A}_c$, $a, b \in \mathbb{H}$. Então

$$(um)a - (u\bar{a})m = (u, m, a) - (u, \bar{a}, m) + u(ma - \bar{a}m) = 0,$$

e de forma semelhante, $a(mu) - m(\bar{a}u) = 0$, os quais provam (3.9) e (3.10). Além disso, por

(3.9)

$$(um)a.b = (u\bar{a}.m)b = (u\bar{a}.\bar{b})m = (u.\bar{b}\bar{a})m = (um)(ba),$$

o qual prova (3.11). Similarmente, por (3.10), obtemos (3.12). Finalmente, por (3.11) y (3.12) se seguem

$$(um, a, b) = ((um)a)b - (um)(ab) = (um)(ba) - (um)(ab) = (um)[b, a] \quad e$$

$$(b, a, um) = (ba)(mu) - b(a(mu)) = (ba)(mu) - (ab)(mu) = [b, a](mu)$$

os quais provam (3.13) e (3.14).

Isto prova o Lema.

Q.E.D.

Lema 8 *Os produtos $\mathcal{A}_a\mathcal{A}_a$, $\mathcal{A}_a\mathcal{A}_c$, $\mathcal{A}_c\mathcal{A}_a$ e $\mathcal{A}_c\mathcal{A}_c$ são subespaços \mathbb{H} -invariantes. Além disso, $\mathcal{A}_a\mathcal{A}_c + \mathcal{A}_c\mathcal{A}_a \subseteq \mathcal{A}_c$ e $\mathcal{A}_c\mathcal{A}_c \subseteq \mathcal{A}_a$.*

Demonstração: Como \mathcal{A}_a e \mathcal{A}_c são \mathbb{H} -invariantes, é suficiente provar para a primeira parte do Lema, que o produto de quaisquer subespaços \mathbb{H} -invariantes U e W é de novo \mathbb{H} -invariante.

Temos pela linearizada identidade da alternatividade a direita

$$(UW)\mathbb{H} \subseteq U(W \circ \mathbb{H}) + (U\mathbb{H})W \subseteq UW,$$

e de forma semelhante $\mathbb{H}(UW) \subseteq UW$.

Agora, vamos a demonstrar que $\mathcal{A}_a\mathcal{A}_c + \mathcal{A}_c\mathcal{A}_a \subseteq \mathcal{A}_c$. Lembremos, que pela Proposição 14, $\mathcal{A}_c = (\mathcal{A}, \mathbb{H}, \mathbb{H})$. Escolhamos $a, b \in \mathbb{H}$ tais que $0 \neq [a, b]^2 \in F$, e, por (3.14),

$$\mathcal{A}_c\mathcal{A}_a = [a, b]^2(\mathcal{A}_c\mathcal{A}_a) \subseteq [a, b](\mathcal{A}_c\mathcal{A}_a) \subseteq (a, b, \mathcal{A}_c\mathcal{A}_a) \subseteq (\mathbb{H}, \mathbb{H}, \mathcal{A}) = \mathcal{A}_c$$

e de forma semelhante $\mathcal{A}_c\mathcal{A}_a \subseteq \mathcal{A}_c$. Finalmente, para quaisquer $m, n \in \mathcal{A}_c$ e $a \in \mathbb{H}$, temos por (3.8) e (3.4)

$$((mn)a)b = ((am)n)b = (b(am))n = ((ab)m)n = (mn)(ab),$$

o qual prova que $\mathcal{A}_c\mathcal{A}_c \subseteq \mathcal{A}_a$.

Isto prova o Lema.

Q.E.D.

Lema 9 *\mathcal{A}_a é uma subálgebra associativa de \mathcal{A} .*

Demonstração: Fixemos elementos arbitrários $u, v, w \in Z_a$ e $a, b, c \in \mathbb{H}$. Consideremos as identidades

$$(3.15) \quad [x, yz] = [x, y]z + y[x, z] - 3(x, y, z),$$

$$(3.16) \quad (xy, z, t) = x(y, z, t) + (x, z, t)y - (x, y, [z, t]),$$

e a identidade

$$(3.17) \quad 2[(x, y, z), t] = ([x, y], z, t) + ([y, z], x, t) + ([z, x], y, t),$$

que é válida em cada álgebra alternativa (veja [19], Lema 3, 2). Então, por (3.17)

$$([a, b], u, v) = 2[(a, b, u), v] - ([b, u], a, v) - ([u, a], b, v) = 0.$$

Assim, por (3.16)

$$(uv, a, b) = u(v, a, b) + (u, a, b)v - (u, v, [a, b]) = -([a, b], u, v) = 0,$$

o qual implica, $(Z_a Z_a, \mathbb{H}, \mathbb{H}) = 0$. Agora, consideremos as seguintes identidades, que são válidas em cada álgebra alternativa (veja [19] e [16])

$$(3.18) \quad [x, y](x, y, z) = (x, y, (x, y, z)) = -(x, y, z)[x, y],$$

$$(3.19) \quad \begin{aligned} ((z, w, t), x, y) &= ((z, x, y), w, t) + (z, (w, x, y), t) \\ &+ (z, w, (t, x, y)) - [w, (z, t, [x, y])] + ([z, t], w, [x, y]). \end{aligned}$$

Pela linearização de (3.18) e escolhendo $a, b \in \mathbb{H}$ tais que $[a, b]^2 = \alpha \in F$, $\alpha \neq 0$, temos para quaisquer $x \in \mathcal{A}_a$

$$\begin{aligned} [a, b](u, x, c) &= -[u, b](a, x, c) - [a, x](u, b, c) - [u, x](a, b, c) + (a, b, (u, x, c)) \\ &+ (u, b, (a, x, c)) + (a, x, (u, b, c)) + (u, x, (a, b, c)) \\ &= (a, b, (u, x, c)) \\ &\stackrel{(3.19)}{=} ((u, a, b), x, c) + (u, (x, a, b), c) + (u, x, (c, a, b)) \\ &- [x, (u, c, [a, b])] + ([u, c], x, [a, b]) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\alpha(u, x, c) = [a, b]^2(u, x, c) = [a, b]([a, b](u, x, c)) = 0$, e assim, $(u, x, c) = 0$, o qual implica, $(Z_a, \mathcal{A}_a, \mathbb{H}) = 0$. Em particular, $(Z_a, Z_a, \mathbb{H}) = 0$. Então, por (3.15)

$$[a, uv] = [a, u]v + u[a, v] - 3(a, u, v) = 0;$$

e assim $[\mathbb{H}, Z_a Z_a] = 0$. Portanto, $Z_a Z_a \subseteq Z_a$.

Usando a linearização de (3.18), temos

$$\begin{aligned} [a, b](u, v, w) &= -[a, v](u, b, w) - [u, b](a, v, w) - [u, v](a, b, w) + (a, b, (u, v, w)) \\ &+ (a, v, (u, b, w)) + (u, b, (a, v, w)) + (u, v, (a, b, w)) = 0. \end{aligned}$$

Escolha $a, b \in \mathbb{H}$ tais que $[a, b]^2 = \alpha \in F$, $\alpha \neq 0$. Então

$$\alpha(u, v, w) = [a, b]^2(u, v, w) = [a, b]([a, b](u, v, w)) = 0,$$

e assim, $(u, v, w) = 0$. Portanto, Z_a é associativa.

Consequentemente, pela linearização da identidade de Moufang do meio e usando o fato que \mathcal{A}_a é um \mathbb{H} -bimódulo associativo, obtemos

$$\begin{aligned} (ua)(vb) &= -(ba)(vu) + (u(av))b + (b(av))u \\ &= -(ba)(vu) + (u(va))b + ((ba)v)u \\ &= -(ba)(vu) + ((uv)a)b + (ba)(vu) \\ &= (uv)(ab). \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{A}_a \mathcal{A}_a \subseteq \mathcal{A}_a$, isto é, \mathcal{A}_a é uma subálgebra de \mathcal{A} .

Lembrando que $(Z_a, \mathcal{A}_a, \mathbb{H}) = 0$, então para todo $x, y \in \mathcal{A}_a$, obtemos

$$\begin{aligned} (ua, x, y) &\stackrel{(3.16)}{=} u(a, x, y) + (u, x, y)a - (u, a, [x, y]) \\ &= u(a, x, y) + (u, x, y)a. \end{aligned}$$

Assim, usando a última igualdade várias vezes e o fato que Z_a é associativa, temos

$$\begin{aligned} (ua, vb, wc) &= u(a, vb, wc) + (u, vb, wc)a \\ &= -u(v(b, a, wc) + (v, a, wc)b) - (v(b, u, wc) + (v, u, wc)b)a \\ &= -((w(c, v, u) + (w, v, u)c)b)a = 0. \end{aligned}$$

Portanto, \mathcal{A}_a é uma subálgebra associativa de \mathcal{A} .

Isto prova o Lema.

Q.E.D.

Dos Lemas 8 e 9, se segue imediatamente o seguinte resultado.

Corolário 17 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_a \oplus \mathcal{A}_c$ é uma álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada, onde \mathcal{A}_a é a parte par e \mathcal{A}_c é a parte ímpar da \mathbb{Z}_2 -graduação de \mathcal{A} .

No que segue vamos a usar de maneira permanente o fato de que \mathcal{A} é uma álgebra alternativa \mathbb{Z}_2 -graduada. Assim, temos $(\mathcal{A}_c, \mathcal{A}_a, \mathcal{A}_c) \subseteq \mathcal{A}_a$, $(\mathcal{A}_c, \mathbb{H}, \mathcal{A}_c) \subseteq \mathcal{A}_a$ e $[Z_a, \mathcal{A}_c] \subseteq \mathcal{A}_c$.

Lema 10 $(Z_a, \mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$.

Demonstração: Fixemos elementos arbitrários $u, v, w \in Z_a$, $m, n \in \mathcal{A}_c$ e $a, b, c \in \mathbb{H}$. Na prova do Lema anterior temos mostrado que $(Z_a, \mathcal{A}_a, \mathbb{H}) = 0$. Assim, vamos generalizar a igualdade anterior y mostrar primeiro que

$$(3.20) \quad (Z_a, \mathcal{A}, \mathbb{H}) = 0.$$

Pelo fato de que \mathcal{A}_c é um \mathbb{H} -bimódulo de Cayley, temos

$$(a, u, m) = (au)m - a(um) = (au)m - (um)\bar{a} = (au)m - (ua)m = [a, u]m = 0,$$

o qual prova $(\mathbb{H}, Z_a, \mathcal{A}_c) = 0$. Portanto,

$$(Z_a, \mathcal{A}, \mathbb{H}) \subseteq (Z_a, \mathcal{A}_a, \mathbb{H}) + (Z_a, \mathcal{A}_c, \mathbb{H}) = 0,$$

o qual prova (3.20).

Além disso, consideremos a identidade

$$(3.21) \quad ([x, y], y, z) = [y, (x, y, z)]$$

que é válida em toda álgebra alternativa. Usando sua linearização, obtemos

$$([u, m], a, b) = -([u, a], m, b) + [m, (u, a, b)] + [a, (u, m, b)] = 0.$$

Portanto, $([Z_a, \mathcal{A}_c], \mathbb{H}, \mathbb{H}) = 0$, isto é, $[Z_a, \mathcal{A}_c] \subseteq \mathcal{A}_a$. Logo

$$[Z_a, \mathcal{A}_c] \subseteq \mathcal{A}_a \cap \mathcal{A}_c = 0,$$

o qual implica $[Z_a, \mathcal{A}_c] = 0$.

Pela linearização de (3.18), por (3.19) e escolhendo $a, b \in \mathbb{H}$ tais que $[a, b]^2 = \alpha \in F$, $\alpha \neq 0$ obtemos

$$\begin{aligned} [a, b](u, m, n) &= -[u, b](a, m, n) - [a, m](u, b, n) - [u, m](a, b, n) + (a, b, (u, m, n)) \\ &\quad + (u, b, (a, m, n)) + (a, m, (u, b, n)) + (u, m, (a, b, n)) \\ &= (u, m, (a, b, n)) \\ &= ((u, m, a), b, n) - ((u, b, n), m, a) - (u, (m, b, n), a) \\ &\quad + [m, (u, a, [b, n])] - ([u, a], m, [b, n]) = 0 \end{aligned}$$

logo, $\alpha(u, m, n) = [a, b]^2(u, m, n) = [a, b]([a, b](u, m, n)) = 0$ e $(u, m, n) = 0$; portanto, $(Z_a, \mathcal{A}_c, \mathcal{A}_c) = 0$. Também

$$\begin{aligned} [a, b](u, n, v) &= -[u, b](a, n, v) - [a, n](u, b, v) - [u, n](a, b, v) + (a, b, (u, n, v)) \\ &\quad + (u, b, (a, n, v)) + (a, n, (u, b, v)) + (u, n, (a, b, v)) \\ &= (a, b, (u, n, v)) \\ &= ((u, n, a), b, v) - ((u, b, v), n, a) - (u, (n, b, v), a) \\ &\quad + [n, (u, a, [b, v])] - ([u, a], n, [b, v]) = 0, \end{aligned}$$

assim, $\alpha(u, n, v) = [a, b]^2(u, n, v) = [a, b]([a, b](u, n, v)) = 0$ e $(u, n, v) = 0$; portanto, $(Z_a, \mathcal{A}_c, Z_a) = 0$. Em seguida, por (3.16) e (3.20)

$$(ua, v, m) = u(a, v, m) + (u, v, m)a - (u, a, [v, m]) = 0;$$

assim $(Z_a \mathbb{H}, Z_a, \mathcal{A}_c) = 0$. Portanto, $(\mathcal{A}_a, Z_a, \mathcal{A}_c) = 0$.

Também, usando duas vezes a identidade (3.16) e o fato que Z_a é associativa, obtemos

$$\begin{aligned} (ua, vb, w) &= u(a, vb, w) + (u, vb, w)a \\ &= -u(v(b, a, w) + (v, a, w)b) - (v(b, u, w) + (v, u, w)b)a = 0. \end{aligned}$$

Assim, $(Z_a \mathbb{H}, Z_a \mathbb{H}, Z_a) = 0$; logo $(\mathcal{A}_a, \mathcal{A}_a, Z_a) = 0$. Portanto

$$(Z_a, \mathcal{A}, \mathcal{A}) \subseteq (Z_a, \mathcal{A}_a, \mathcal{A}_a) + (Z_a, \mathcal{A}_c, \mathcal{A}_a) + (Z_a, \mathcal{A}_a, \mathcal{A}_c) + (Z_a, \mathcal{A}_c, \mathcal{A}_c) = 0;$$

logo, Z_a está contido no centro associativo de \mathcal{A} , isto é, $Z_a \subseteq Z(\mathcal{A})$.

Isto prova o Lema.

Q.E.D.

Corolário 18 $\mathcal{A} = Z_a \otimes_F \mathbb{H} + \mathcal{A}_c$.

Demonstração: Como $\mathcal{A}_a = \sum u_i \mathbb{H}$, cada elemento de \mathcal{A}_a pode ser escrito em uma única forma, da forma $\sum u_i a_i$ com $a_i \in \mathbb{H}$. Sabemos que \mathcal{A}_a é associativa. Por outro lado, seja $x = \sum u_i a_i \in Z_a$, então $ax = xa$ para todo $a \in \mathbb{H}$. Logo, por $[Z_a, \mathbb{H}] = 0$ temos

$$\sum u_i a a_i = \sum u_i a_i a;$$

assim, $aa_i = a_i a$. Mas, como \mathbb{H} é central, temos $a_i = \alpha_i 1$, $\alpha_i \in F$. Então, $Z_a = \sum F u_i$. Portanto, é claro que $\mathcal{A}_a = Z_a \otimes_F \mathbb{H}$, onde pelo Lema 9, Z_a é associativa.

Isto prova o Corolário.

Lema 11 $[Z_a, Z_a]\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_c[Z_a, Z_a] = 0$.

Demonstração: Do Lema 10 tem-se $(Z_a, \mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$; em particular $(Z_a, Z_a, \mathcal{A}) = 0$. Assim, pela linearização de (3.18)

$$\begin{aligned} [Z_a, Z_a](\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A}) &\subseteq -[\mathcal{A}, Z_a](Z_a, \mathcal{A}, \mathcal{A}) - [Z_a, \mathcal{A}](\mathcal{A}, Z_a, \mathcal{A}) - [\mathcal{A}, \mathcal{A}](Z_a, Z_a, \mathcal{A}) \\ &\quad + (Z_a, Z_a, (\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A})) + (\mathcal{A}, Z_a, (Z_a, \mathcal{A}, \mathcal{A})) + (Z_a, \mathcal{A}, (\mathcal{A}, Z_a, \mathcal{A})) \\ &\quad + (\mathcal{A}, \mathcal{A}, (Z_a, Z_a, \mathcal{A})) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $[Z_a, Z_a](\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$. De forma semelhante, $(\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A})[Z_a, Z_a] = 0$.

Seja $w \in \mathcal{A}_c$, por (3.4) temos

$$[a, b]w = (ab)w - (ba)w = (ab)w - a(bw) = (a, b, w).$$

para todo $a, b \in \mathbb{H}$. Logo, escolhendo $a, b \in \mathbb{H}$ tais que $[a, b]^2 = \alpha \in F$, $\alpha \neq 0$. Então, por (3.18) $\alpha w = [a, b]([a, b]w) = [a, b](a, b, w) = ((a, b, w), a, b) \in (\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A})$ e $w \in (\mathcal{A}, \mathcal{A}, \mathcal{A})$. Assim, $[Z_a, Z_a]w = 0$ e $w[Z_a, Z_a] = 0$, os quais implicam

$$(3.22) \quad [Z_a, Z_a]\mathcal{A}_c = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_c[Z_a, Z_a] = 0.$$

Isso prova o Lema.

Q.E.D.

Corolário 19 *Se $\mathcal{A}_c \neq 0$ e $\text{Ann}_l(\mathcal{A}_c) = \text{Ann}_r(\mathcal{A}_c) = 0$. Então, Z_a é uma subálgebra comutativa.*

Observação 20 *Podemos dar uma demonstração mais direta do Lema 11 usando a \mathbb{Z}_2 -gradação de \mathcal{A} . Na demonstração do Lema 10 temos obtido $[Z_a, \mathcal{A}_c] = 0$. Assim, por (3.15) e pelo Lema 10*

$$[Z_a, Z_a]\mathcal{A}_c \subseteq [Z_a, Z_a\mathcal{A}_c] - Z_a[Z_a, \mathcal{A}_c] + 3(Z_a, Z_a, \mathcal{A}_c) = 0$$

e

$$\mathcal{A}_c[Z_a, Z_a] \subseteq [Z_a, \mathcal{A}_c Z_a] - [Z_a, \mathcal{A}_c]Z_a + 3(Z_a, \mathcal{A}_c, Z_a) = 0;$$

portanto $[Z_a, Z_a]\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_c[Z_a, Z_a] = 0$. Além disso,

$$[Z_a, Z_a](\mathcal{A}_c\mathcal{A}_c) \subseteq ([Z_a, Z_a]\mathcal{A}_c)\mathcal{A}_c + ([Z_a, Z_a], \mathcal{A}_c, \mathcal{A}_c) = (\mathcal{A}_c, [Z_a, Z_a], \mathcal{A}_c) = 0,$$

$$(\mathcal{A}_c\mathcal{A}_c)[Z_a, Z_a] \subseteq \mathcal{A}_c(\mathcal{A}_c[Z_a, Z_a]) + (\mathcal{A}_c, \mathcal{A}_c, [Z_a, Z_a]) = (\mathcal{A}_c, [Z_a, Z_a], \mathcal{A}_c) = 0,$$

os quais implicam

$$(3.23) \quad [Z_a, Z_a](\mathcal{A}_c\mathcal{A}_c) = 0 \quad \text{e} \quad (\mathcal{A}_c\mathcal{A}_c)[Z_a, Z_a] = 0.$$

Se as condições do Corolário 19 são válidas, temos que $[Z_a, Z_a] = 0$. Assim, Z_a é uma álgebra comutativa

Observação 21 *Se $\text{car } F = 2$, então $\mathcal{A} = \mathcal{A}_a \oplus \mathcal{A}_c$ é uma superálgebra alternativa. Por ([16], Lema 8), sabemos que se \mathcal{A} for prima e não trivial, isto é, $\mathcal{A}_c \neq 0$, então $\text{Ann}(\mathcal{A}_c) = 0$. Portanto, pelo Corolário 19, a subálgebra Z_a de \mathcal{A}_a , é comutativa.*

Proposição 22 *Se $\mathbb{H} \cong M_2(F)$. Então, para todo $i \neq j$ o \mathbb{H} -subbimódulo associativo unitário $\text{Cay}_i \cdot \text{Cay}_j$ de \mathcal{A}_a tem uma base de 4 elementos. Além disso, se $i = j$, então $\text{Cay}_i^2 = 0$.*

Demonstração: Sabemos que $\mathcal{A}_c = \sum \oplus \text{Cay}_j$, onde os $\text{Cay}_i = F.m_1^{(i)} + F.m_2^{(i)}$ são os bimódulos de Cayley irredutíveis sobre \mathbb{H} . Além disso, sabemos que a álgebra alternativa \mathcal{A} é \mathbb{Z}_2 -graduada, logo $\mathcal{A}_c^2 \subseteq \mathcal{A}_a$.

As relações

$$\mathbb{H}\mathcal{A}_c^2 \subseteq (\mathbb{H} \circ \mathcal{A}_c)\mathcal{A}_c + \mathcal{A}_c(\mathbb{H}\mathcal{A}_c) \subseteq \mathcal{A}_c^2$$

e

$$\mathcal{A}_c^2\mathbb{H} \subseteq -(\mathcal{A}_c\mathbb{H})\mathcal{A}_c + \mathcal{A}_c(\mathcal{A}_c \circ \mathbb{H}) \subseteq \mathcal{A}_c^2$$

mostram que \mathcal{A}_c^2 é um subbimódulo de \mathcal{A}_a . Em particular, para todo i e j temos que Cay_iCay_j são subbimódulos de \mathcal{A}_a com $\text{Cay}_i\text{Cay}_j \subseteq \mathcal{A}_a = \sum u_k\mathbb{H}$. Portanto, existem escalares $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \xi_i \in F$ tais que $m_1^{(i)}m_1^{(j)} = \sum_i(\alpha_i u_i e_{11} + \beta_i u_i e_{12} + \gamma_i u_i e_{21} + \xi_i u_i e_{22})$. Mas, por (3.6) e (3.3)

$$e_{22}(m_1^{(i)}m_1^{(j)}) = m_1^{(i)}(m_1^{(j)}.e_{22}) = m_1^{(i)}(\bar{e}_{22}.m_1^{(j)}) = m_1^{(i)}m_1^{(j)}$$

e também

$$(m_1^{(i)}m_1^{(j)})e_{11} = (e_{11}.m_1^{(i)})m_1^{(j)} = m_1^{(i)}m_1^{(j)}.$$

Assim, lembrando as propriedades da subálgebra Z_a , temos

$$\begin{aligned} m_1^{(i)}m_1^{(j)} = e_{22}(m_1^{(i)}m_1^{(j)}) &= \sum_i(\alpha_i e_{22}u_i e_{11} + \beta_i e_{22}u_i e_{12} + \gamma_i e_{22}u_i e_{21} + \xi_i e_{22}u_i e_{22}) \\ &= \sum_i(\alpha_i u_i e_{22}e_{11} + \beta_i u_i e_{22}e_{12} + \gamma_i u_i e_{22}e_{21} + \xi_i u_i e_{22}e_{22}) \\ &= \sum_i(\gamma_i u_i e_{21} + \xi_i u_i e_{22}) \end{aligned}$$

e

$$m_1^{(i)}m_1^{(j)} = (m_1^{(i)}m_1^{(j)})e_{11} = \sum_i(\gamma_i u_i e_{21}e_{11} + \xi_i u_i e_{22}e_{11}) = \sum_i \gamma_i u_i e_{21}.$$

Logo, escrevemos $m_1^{(i)}m_1^{(j)} = u_{21}e_{21}$ onde $u_{21} = \sum_i \gamma_i u_i$. Analogamente, existem os escalares $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i, \xi'_i$ tais que $m_1^{(i)}m_2^{(j)} = \sum_i(\alpha'_i u_i e_{11} + \beta'_i u_i e_{12} + \gamma'_i u_i e_{21} + \xi'_i u_i e_{22})$. Mas,

$$e_{11}(m_1^{(i)}m_2^{(j)}) = m_1^{(i)}(m_2^{(j)}.e_{11}) = m_1^{(i)}(\bar{e}_{11}.m_2^{(j)}) = m_1^{(i)}m_2^{(j)}$$

e também

$$(m_1^{(i)}m_2^{(j)})e_{11} = (e_{11}.m_1^{(i)})m_2^{(j)} = m_1^{(i)}m_2^{(j)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} m_1^{(i)}m_2^{(j)} = e_{11}(m_1^{(i)}m_2^{(j)}) &= \sum_i(\alpha'_i e_{11}u_i e_{11} + \beta'_i e_{11}u_i e_{12} + \gamma'_i e_{11}u_i e_{21} + \xi'_i e_{11}u_i e_{22}) \\ &= \sum_i(\alpha'_i u_i e_{11}e_{11} + \beta'_i u_i e_{11}e_{12} + \gamma'_i u_i e_{11}e_{21} + \xi'_i u_i e_{11}e_{22}) \\ &= \sum_i(\alpha'_i u_i e_{11} + \beta'_i u_i e_{12}) \end{aligned}$$

e

$$m_1^{(i)} m_2^{(j)} = (m_1^{(i)} m_2^{(j)}) e_{11} = \sum_i (\alpha'_i u_i e_{11} e_{11} + \beta'_i u_i e_{12} e_{11}) = \sum_i \alpha'_i u_i e_{11}.$$

Logo, $m_1^{(i)} m_2^{(j)} = u_{11} e_{11}$ onde $u_{11} = \sum_i \alpha'_i u_i$. Similarmente, existem os escalares $\alpha''_i, \beta''_i, \gamma''_i, \xi''_i$ tais que $m_2^{(i)} m_1^{(j)} = \sum_i (\alpha''_i u_i e_{11} + \beta''_i u_i e_{12} + \gamma''_i u_i e_{21} + \xi''_i u_i e_{22})$. Mas,

$$e_{22}(m_2^{(i)} m_1^{(j)}) = m_2^{(i)} (m_1^{(j)} \cdot e_{22}) = m_2^{(i)} (\bar{e}_{22} \cdot m_1^{(j)}) = m_2^{(i)} m_1^{(j)}$$

e

$$(m_2^{(i)} m_1^{(j)}) e_{22} = (e_{22} \cdot m_2^{(i)}) m_1^{(j)} = m_2^{(i)} m_1^{(j)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} m_2^{(i)} m_1^{(j)} = e_{22}(m_1^{(i)} m_2^{(j)}) &= \sum_i (\alpha''_i e_{22} u_i e_{11} + \beta''_i e_{22} u_i e_{12} + \gamma''_i e_{22} u_i e_{21} + \xi''_i e_{22} u_i e_{22}) \\ &= \sum_i (\alpha''_i u_i e_{22} e_{11} + \beta''_i u_i e_{22} e_{12} + \gamma''_i u_i e_{22} e_{21} + \xi''_i u_i e_{22} e_{22}) \\ &= \sum_i (\gamma''_i u_i e_{21} + \xi''_i u_i e_{22}) \end{aligned}$$

e

$$m_2^{(i)} m_1^{(j)} = (m_2^{(i)} m_1^{(j)}) e_{22} = \sum_i (\gamma''_i u_i e_{21} e_{22} + \xi''_i u_i e_{22} e_{22}) = \sum_i \xi''_i u_i e_{22}.$$

Assim, $m_2^{(i)} m_1^{(j)} = u_{22} e_{22}$ onde $u_{22} = \sum_i \xi''_i u_i$. Finalmente, existem escalares $\alpha'''_i, \beta'''_i, \gamma'''_i, \xi'''_i$ tais que $m_2^{(i)} m_2^{(j)} = \sum_i (\alpha'''_i u_i e_{11} + \beta'''_i u_i e_{12} + \gamma'''_i u_i e_{21} + \xi'''_i u_i e_{22})$. Mas,

$$e_{11}(m_2^{(i)} m_2^{(j)}) = m_2^{(i)} (m_2^{(j)} \cdot e_{11}) = m_2^{(i)} (\bar{e}_{11} \cdot m_2^{(j)}) = m_2^{(i)} m_2^{(j)}$$

e

$$(m_2^{(i)} m_2^{(j)}) e_{11} = (e_{11} \cdot m_2^{(i)}) m_2^{(j)} = m_2^{(i)} m_2^{(j)}.$$

Então,

$$\begin{aligned} m_2^{(i)} m_2^{(j)} = e_{11}(m_2^{(i)} m_2^{(j)}) &= \sum_i (\alpha'''_i e_{11} u_i e_{11} + \beta'''_i e_{11} u_i e_{12} + \gamma'''_i e_{11} u_i e_{21} + \xi'''_i e_{11} u_i e_{22}) \\ &= \sum_i (\alpha'''_i u_i e_{11} e_{11} + \beta'''_i u_i e_{11} e_{12} + \gamma'''_i u_i e_{11} e_{21} + \xi'''_i u_i e_{11} e_{22}) \\ &= \sum_i (\alpha'''_i u_i e_{11} + \beta'''_i u_i e_{12}) \end{aligned}$$

e

$$m_2^{(i)} m_2^{(j)} = (m_2^{(i)} m_2^{(j)}) e_{11} = \sum_i (\alpha'''_i u_i e_{11} e_{11} + \beta'''_i u_i e_{12} e_{11}) = \sum_i \beta'''_i u_i e_{12}.$$

Assim, $m_2^{(i)} m_2^{(j)} = u_{12} e_{12}$ onde $u_{12} = \sum_i \beta'''_i u_i$.

Ao considerar o \mathbb{H} -bimódulo $C = \{u_{11} e_{11}, u_{12} e_{12}, u_{21} e_{21}, u_{22} e_{22}\}$ finitamente gerado, temos $\text{Cay}_i \text{Cay}_j \subset C$. Como os elementos u_{ij} pertencem a Z_a , então

$$u_{11} e_{12} = (u_{11} e_{11}) e_{12} = (m_1^{(i)} m_2^{(j)}) e_{12} = (e_{12} \cdot m_1^{(i)}) m_2^{(j)} = m_2^{(i)} m_2^{(j)} = u_{12} e_{12},$$

o qual, implica $u_{11} = u_{12}$. Também

$$u_{11}e_{21} = e_{21}(u_{11}e_{11}) = e_{21}(m_1^{(i)}m_2^{(j)}) = m_1^{(i)}(m_2^{(j)}.e_{21}) = m_1^{(i)}(\bar{e}_{21}.m_2^{(j)}) = -m_1^{(i)}m_1^{(j)} = -u_{21}e_{21},$$

do qual, temos $u_{11} = -u_{21}$. Seguidamente

$$u_{11}e_{22} = (e_{21}(u_{11}e_{11}))e_{12} = (e_{12}.m_1^{(i)})(m_2^{(j)}.e_{21}) = m_2^{(i)}(\bar{e}_{21}.m_2^{(j)}) = -m_2^{(i)}m_1^{(j)} = -u_{22}e_{22}$$

e segue que $u_{11} = -u_{22}$. Portanto, temos mostrado que o \mathbb{H} -bimódulo C é cíclico e pode ser gerado por quaisquer dos elementos u_{rs} ($r, s = 1, 2$). Assim, $\text{Cay}_i\text{Cay}_j = u_{ij}\mathbb{H}$ e o elemento u_{ij} esta bem definido para cada i e j . Portanto, Cay_iCay_j tem uma base de 4 elementos.

Pelas relações obtidas acima, ao considerar $u_{ij} = e_{21}$, temos

$$\begin{aligned} m_1^{(i)}m_1^{(j)} &= u_{ij}e_{21}, \\ m_1^{(i)}m_2^{(j)} &= -u_{ij}e_{11}, \\ m_2^{(i)}m_1^{(j)} &= u_{ij}e_{22}, \\ m_2^{(i)}m_2^{(j)} &= -u_{ij}e_{12}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $i = j$ sabemos que $(m_1^{(i)})^2 = u_{ii}e_{21}$. Então, pela seguinte identidade

$$(3.24) \quad [x^2, y] = [x, x \circ y]$$

que é válida em toda álgebra alternativa, obtemos

$$[(m_1^{(i)})^2, e_{12}] = [m_1^{(i)}, m_1^{(i)} \circ e_{12}] = [m_1^{(i)}, m_1^{(i)}.e_{12} + e_{12}.m_1^{(i)}] = [m_1^{(i)}, \bar{e}_{12}.m_1^{(i)} + e_{12}.m_1^{(i)}] = 0.$$

Imediatamente, por (3.15)

$$0 = [u_{ii}e_{21}, e_{12}] = -[e_{12}, u_{ii}]e_{21} - u_{ii}[e_{12}, e_{21}] + 3(e_{12}, u_{ii}, e_{21}) = -u_{ii}(e_{11} - e_{22}).$$

Logo, se segue facilmente que $u_{ii} = 0$. Portanto, $\text{Cay}_i^2 = 0$.

Isto prova o Lema.

Q.E.D.

Lema 12 Para cada $i, j \neq$, temos $\text{Cay}_i\text{Cay}_j = u_{ij}\mathbb{H}$ e $\text{Cay}_j\text{Cay}_i = u_{ji}\mathbb{H}$. Então,

$$u_{ji} = -u_{ij}.$$

Demonstração: Temos $\text{Cay}_i\text{Cay}_j = u_{ij}\mathbb{H}$, onde o elemento $u_{ij} \in Z_a$ esta bem definido e é um dos elementos u_{11} , u_{12} , u_{21} e u_{22} de Z_a . De forma semelhante, $\text{Cay}_j\text{Cay}_i = u_{ji}\mathbb{H}$ com $u_{ji} \in Z_a$. Assim,

$$m_1^{(i)}m_1^{(j)} = u_{ij}e_{12} = e_{12}u_{ij} \quad \text{e} \quad m_1^{(j)}m_1^{(i)} = u_{ji}e_{12} = e_{12}u_{ji}.$$

Primeiramente, vamos mostrar que $m_1^{(i)} \circ m_1^{(j)} = 0$. Por (3.6) e (3, 3)

$$e_{21}(m_1^{(i)} \circ m_1^{(j)}) = m_1^{(i)}(m_1^{(j)}.e_{21}) + m_1^{(j)}(m_1^{(i)}.e_{21}) = m_1^{(i)}(\bar{e}_{21}.m_1^{(j)}) + m_1^{(j)}(\bar{e}_{21}.m_1^{(i)}) = 0.$$

Agora, como $m_1^{(i)} \circ m_1^{(j)} \in \mathcal{A}_a$, então pelo fato que \mathcal{A}_a é um \mathbb{H} -bimódulo associativo, temos

$$0 = e_{12}(e_{21}(m_1^{(i)} \circ m_1^{(j)})) = (e_{12}e_{21})(m_1^{(i)} \circ m_1^{(j)}) = e_{11}(m_1^{(i)} \circ m_1^{(j)}).$$

Mas, por outro lado

$$0 = [e_{21}(m_1^{(i)} \circ m_1^{(j)})]e_{12} = [e_{21}(e_{12}u_{ij} + e_{12}u_{ji})]e_{12} = e_{22}(u_{ij}e_{12} + u_{ji}e_{12}) = e_{22}(m_1^{(i)} \circ m_1^{(j)});$$

assim

$$0 = e_{11}(m_1^{(i)} \circ m_1^{(j)}) + e_{22}(m_1^{(i)} \circ m_1^{(j)}) = m_1^{(i)} \circ m_1^{(j)}.$$

Portanto,

$$0 = m_1^{(i)} \circ m_1^{(j)} = u_{ij}e_{12} + u_{ji}e_{12} = (u_{ij} + u_{ji})e_{12},$$

o qual, implica facilmente que $u_{ji} = -u_{ij}$.

Isto prova o Lema.

Q.E.D.

Consideremos para cada i, j , o seguinte subconjunto $Z = \{u_{ij}\}$ dos elementos de Z_a obtidos na Proposição 22, tais que, $\text{Cay}_i \text{Cay}_i = u_{ij} \mathbb{H}$, onde $u_{ii} = 0$.

Lema 13 $[Z, \mathcal{A}] = 0$.

Demonstração: Na prova do Lema 10 temos mostrado que $[Z_a, \mathcal{A}_c] = 0$. Logo, em particular

$$[Z, \mathcal{A}_c] = 0.$$

Agora, vamos mostrar que os elementos de Z comutam com os elementos de Z_a , isto é, $[Z, Z_a] = 0$. Sejam $m_1^{(i)} \in \text{Cay}_i$, $m_2^{(j)} \in \text{Cay}_j$ com $i, j \neq$. Como $Z_a \subseteq N(\mathcal{A})$, então para todo $u \in Z_a$, obtemos

$$(m_1^{(i)} m_2^{(j)})u = u_{ij}e_{11}u = u_{ij}ue_{11}.$$

E analogamente $u(m_1^{(i)} m_2^{(j)}) = uu_{ij}e_{11}$. Mas $[Z_a, \mathcal{A}_c] = 0$, logo

$$u(m_1^{(i)} m_2^{(j)}) = m_1^{(i)} u m_2^{(j)} = m_1^{(i)} m_2^{(j)} u = (m_1^{(i)} m_2^{(j)})u.$$

Assim,

$$uu_{ij}e_{11} = u_{ij}ue_{11},$$

o qual, implica facilmente que $[u, u_{ij}] = 0$; portanto $[Z_a, Z] = 0$.

Assim, como sabemos que $\mathcal{A}_a = Z_a \mathbb{H}$, então por (3.15)

$$[Z, \mathcal{A}_a] = [Z, Z_a \mathbb{H}] \subseteq [Z, Z_a] \mathbb{H} + Z_a [Z, \mathbb{H}] - 3(Z, Z_a, \mathbb{H}) = [Z, Z_a] \mathbb{H} = 0.$$

Consequentemente, $[Z, \mathcal{A}_a] = 0$ e

$$[Z, \mathcal{A}] = [Z, \mathcal{A}_a] + [Z, \mathcal{A}_c] = 0.$$

Isto prova o Lema.

Q.E.D.

O Lema 10 junto com o Lema 13 mostram que Z está contido no centro da álgebra alternativa \mathcal{A} .

Sejam $i, j, k, l \neq$ e consideremos os elementos $m_1^{(i)}$, $m_1^{(j)}$ e $m_2^{(k)}$ das bases dos bimódulos de Cayley irreduzíveis Cay_i , Cay_j e Cay_k de dimensão 2. Lembremos que na demonstração

da Proposição 22, tínhamos obtido $m_1^{(i)}m_1^{(j)} = u_{ij}e_{21}$ e $m_1^{(i)}m_2^{(k)} = -u_{ik}e_{11}$. Então, usando a igualdade $[Z_a, \mathcal{A}_c] = 0$ junto com a linearizada identidade alternativa à direita, obtemos

$$\begin{aligned}
u_{ij}m_1^{(k)} &= u_{ij}(e_{21}.m_2^{(k)}) &= (u_{ij}e_{21})m_2^{(k)} \\
& &= (m_1^{(i)}m_1^{(j)})m_2^{(k)} \\
& &= -(m_1^{(i)}m_2^{(k)})m_1^{(j)} + m_1^{(i)}(m_1^{(j)} \circ m_2^{(k)}) \\
& &= -(-u_{ik}e_{11})m_1^{(j)} + m_1^{(i)}(-u_{jk}e_{11} + u_{kj}e_{22}) \\
& &= u_{ik}(e_{11}.m_1^{(j)}) + u_{jk}(m_1^{(i)}.e_{11}) + u_{kj}(m_1^{(i)}.e_{22}) \\
& &= u_{ik}m_1^{(j)} + u_{jk}(\bar{e}_{11}.m_1^{(i)}) + u_{kj}(\bar{e}_{22}.m_1^{(i)}) \\
& &= u_{ik}m_1^{(j)} + u_{jk}(e_{22}.m_1^{(i)}) + u_{kj}(e_{11}.m_1^{(i)}) \\
& &= u_{ik}m_1^{(j)} + u_{kj}m_1^{(i)}.
\end{aligned}$$

Assim

$$(3.25) \quad u_{ij}m_1^{(k)} = u_{ik}m_1^{(j)} + u_{kj}m_1^{(i)}.$$

De forma semelhante, podemos obter $u_{ij}m_2^{(k)} = u_{ik}m_2^{(j)} + u_{kj}m_2^{(i)}$. Olhamos que para achar (3.25) temos usado $m_1^{(k)} = e_{21}.m_2^{(k)}$, mas se utilizarmos a relação $m_1^{(k)} = e_{11}.m_1^{(k)}$, pode-se mostrar que obtemos novamente (3.25). Logo, ao multiplicar (3.25) pelo elemento $m_1^{(l)}$ da base de Cay_l , temos

$$u_{ij}u_{kl}e_{21} = u_{ik}u_{jl}e_{21} + u_{kj}u_{il}e_{21},$$

a qual implica

$$(3.26) \quad u_{ij}u_{kl} = u_{ik}u_{jl} + u_{kj}u_{il}.$$

Lema 14 *Consideremos a álgebra de polinômios $F[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]$, e sejam $\alpha_{ij} = \det \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{bmatrix} \in F[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]$. Então, a álgebra $\text{alg}_F \langle \alpha_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle$ é uma álgebra livre módulo as relações*

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij} &= -\alpha_{ji}, \\
\alpha_{ij}\alpha_{kl} &= -\alpha_{ki}\alpha_{jl} + \alpha_{kj}\alpha_{il}.
\end{aligned}$$

Demonstração: Vamos mostrar que os α_{ij} satisfazem as relações. Rapidamente,

$$\alpha_{ij} = \det \begin{bmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{bmatrix} = x_i y_j - y_i x_j = -(x_j y_i - y_j x_i) = -\det \begin{bmatrix} x_j & x_i \\ y_j & y_i \end{bmatrix} = -\alpha_{ji}.$$

Sejam $\alpha_{ki} = \det \begin{bmatrix} x_k & x_i \\ y_k & y_i \end{bmatrix}$, $\alpha_{jl} = \det \begin{bmatrix} x_j & x_l \\ y_j & y_l \end{bmatrix}$, $\alpha_{kj} = \det \begin{bmatrix} x_k & x_j \\ y_k & y_j \end{bmatrix}$ e $\alpha_{il} = \det \begin{bmatrix} x_i & x_l \\ y_i & y_l \end{bmatrix}$.
Então,

$$\begin{aligned}
-\alpha_{ki}\alpha_{jl} + \alpha_{kj}\alpha_{il} &= -(x_k y_i - y_k x_i)(x_j y_l - y_j x_l) + (x_k y_j - y_k x_j)(x_i y_l - y_i x_l) \\
&= (-y_i x_j + y_j x_i)x_k y_l + (-x_i y_j + x_j y_i)y_k x_l \\
&= (x_i y_j - x_j y_i)(x_k y_l - y_l x_l) \\
&= \alpha_{ij}\alpha_{kl}.
\end{aligned}$$

Agora, seja $F[u_{ij}]$ uma álgebra livre módulo as relações dadas no enunciado do Lema. Assim, existe um epimorfismo $\pi : F[u_{ij}] \rightarrow F[\alpha_{ij}]$; $u_{ij} \mapsto \alpha_{ij}$. Provaremos que $\ker \pi = 0$. Seja $f(u_{1i}, \dots, u_{(n-1)n}) \in \ker \pi$, então existe k , tal que

$$u_{12}^k f(u_{1i}, \dots, u_{(n-1)n}) \in F[u_{1i}, \dots, u_{2j}].$$

Se $g(u_{1i}, \dots, u_{(n-1)n}) = u_{12}^k f(u_{1i}, \dots, u_{(n-1)n})$, é claro que $g(u_{1i}, \dots, u_{(n-1)n}) \in \ker \pi$, então $g(\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{(n-1)n}) = 0$. Logo, todos os coeficientes do polinômio $f(u_{1i}, \dots, u_{(n-1)n})$ são 0; portanto $f(u_{1i}, \dots, u_{(n-1)n}) = 0$.

Q.E.D.

Lema 15 *Os elementos $u_{12}, \dots, u_{1n}, u_{23}, \dots, u_{2n}$ são algebricamente independentes*

Demonstração: Da relação $u_{ij}u_{kl} + u_{ki}u_{jl} + u_{kj}u_{il} = 0$, temos

$$u_{12}u_{ij} + u_{1i}u_{j2} + u_{1j}u_{2i} = 0,$$

então $u_{12} \in \text{alg}_F \langle u_{1i}, u_{2j} \mid 1 < i \leq n, 2 < j \leq n \rangle$. Vamos mostrar que os elementos u_{1i}, u_{2j} são algebricamente independentes. Primeiramente, observamos a igualdade dos corpos de frações

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = F(x_1, x_2, y_1, u_{12}),$$

pois $y_2 = \frac{1}{x_1}u_{12} + \frac{x_2y_1}{x_1}$. De forma semelhante, resolvendo o sistema

$$u_{1n} = x_1y_n - y_1x_n,$$

$$u_{2n} = x_2y_n - y_2x_n$$

obtemos $x_n = \frac{x_2}{x_1y_2 - x_2y_1}u_{1n} - \frac{x_1}{x_1y_2 - x_2y_1}u_{2n}$ e $y_n = \frac{y_2}{x_1y_2 - y_1y_2}u_{1n} - \frac{y_1}{x_1y_2 - y_1x_2}u_{2n}$; logo

$$x_ny_n \in F(u_{1n}, u_{2n}, x_1, x_2, y_1, y_2) = F(u_{1n}, u_{2n}, x_1, x_2, y_1, u_{12}).$$

Portanto,

$$F(x_1, \dots, x_2, y_1, \dots, y_2) = F(x_1, x_2, y_1, u_{12}, \dots, u_{1n}, u_{23}, \dots, u_{2n}).$$

e $\text{tr.deg } F(x_1, x_2, y_1, u_{12}, \dots, u_{1n}, u_{23}, \dots, u_{2n}) = 2n$ (grau de transcendência), o qual, significa que os elementos $u_{12}, \dots, u_{1n}, u_{23}, \dots, u_{2n}$ são algebricamente independentes.

Q.E.D.

No que segue vamos a supor que \mathbb{H} é a álgebra dos quatérnios de divisão.

Os \mathbb{H} -bimódulos de Cayley formam uma categoria que é isomorfa à categoria dos \mathbb{H} -módulos associativos à direita via o seguinte isomorfismo (veja a demonstração da Proposição 16 dada no Lema 12 de [16]): seja L um \mathbb{H} -módulo associativo à direita com a ação $(v, a) \mapsto v * a$. Então, o espaço vetorial L com as operações de bimódulo

$$a.v = v * a, \quad v.a = \bar{a}v,$$

é um bimódulo de Cayley alternativo sobre \mathbb{H} que denotaremos como $\text{Cay}L$. Por outro lado, se M é um \mathbb{H} -bimódulo de Cayley com a ação $(m, a) \mapsto a.m$, definimos uma nova ação de \mathbb{H} sobre M tomando $m * a = a.m$; então

$$m * (ab) = (ab).m \stackrel{(3.4)}{=} b.(a.m) = (m * a) * b,$$

o qual, mostra que M é um módulo associativo unitário à direita sobre \mathbb{H} .

Seja \mathbb{H} a álgebra dos quaterniões de divisão com base $\{1, i, j, k\}$. Assim, ao considerar a álgebra alternativa \mathcal{A} como um \mathbb{H} -bimódulo alternativo unitário, temos pela Proposição 16 a decomposição $\mathcal{A} = \mathcal{A}_a \oplus \mathcal{A}_c$, e além disso, o \mathbb{H} -bimódulo de Cayley \mathcal{A}_c é completamente redutível e $\mathcal{A}_c = \sum \oplus M_r$, onde cada M_r é um subbimódulo irredutível de \mathcal{A}_c .

A seguir, vamos a determinar as ações de \mathbb{H} sobre os bimódulos M_r . Primeiramente, sabemos que os M_r são \mathbb{H} -módulos associativos à direita irredutíveis (sobre a ação $(v, a) \mapsto v * a$, e a prova da irredutibilidade, veja a demonstração da Proposição 16 dada no Lema 12 de [16]) e isomorfos a um ideal à direita minimal I de \mathbb{H} . Mas, como \mathbb{H} é uma álgebra de divisão, então $I = \mathbb{H}$ e $\dim_F I = 4$. Portanto, como \mathbb{H} é a álgebra dos quaterniões de divisão, então os módulos associativos à direita irredutíveis M_r tem uma base $\{1_r, I_r, J_r, K_r\}$ sobre o qual \mathbb{H} age pela seguinte tabela

*	1	i	j	k
1_r	1_r	I_r	J_r	K_r
I_r	I_r	-1_r	K_r	$-J_r$
J_r	J_r	$-K_r$	-1_r	I_r
K_r	K_r	J_r	$-I_r$	-1_r

Assim, se $m \in M_r$ e $a \in \mathbb{H}$. Das relações de acima

$$a.m = m * a \quad \text{e} \quad m.a = \bar{a}.m$$

podemos obter a estrutura do \mathbb{H} -bimódulo de Cayley $M_r = \text{Cay } \mathbb{H}$ a partir do \mathbb{H} -módulo associativo à direita M_r , isto é, temos as ações à esquerda e à direita da álgebra de divisão \mathbb{H} sobre o bimódulo M_r

.	1_r	I_r	J_r	K_r
1	1_r	I_r	J_r	K_r
i	I_r	-1_r	$-K_r$	J_r
j	J_r	K_r	-1_r	$-I_r$
k	K_r	$-J_r$	I_r	-1_r

.	1	i	j	k
1_r	1_r	$-I_r$	$-J_r$	$-K_r$
I_r	I_r	1_r	$-K_r$	J_r
J_r	J_r	K_r	1_r	$-I_r$
K_r	K_r	$-J_r$	I_r	1_r

Seja M_s outro subbimódulo irredutível da decomposição do \mathbb{H} -bimódulo de Cayley \mathcal{A}_c com base $\{1_s, I_s, J_s, K_s\}$. Segue-se de (3.8) que

$$(M_r M_s) \mathbb{H} = (\mathbb{H} M_r) M_s \subseteq M_r M_s,$$

$$\mathbb{H} (M_r M_s) = M_r (M_s \mathbb{H}) \subseteq M_r M_s;$$

assim, os produtos $M_r M_s$ são subbimódulos do bimódulo associativo \mathcal{A}_a e cada um deles tem posto menor ou igual do que $16 = 4 \times 4$.

Proposição 23 *Para todo r, s os \mathbb{H} -subbimódulos $M_r M_s$ têm uma base de 4 elementos. Além disso, $M_r M_s = w_{rs}^1 \mathbb{H} + w_{rs}^2 \mathbb{H} + w_{rs}^3 \mathbb{H} + w_{rs}^4 \mathbb{H}$ com $w_{rs}^i \in Z_a$, $i = 1, 2, 3, 4$.*

Demonstração: Sabemos pelo Lema 8 que, $\mathcal{A}_c \mathcal{A}_c \subseteq \mathcal{A}_a$, onde $\mathcal{A}_a = \sum u_i \mathbb{H}$ e $\mathcal{A}_c = \sum M_r$. Sejam,

$$M_r = F1_r + FI_r + FJ_r + FK_r \quad \text{e} \quad M_s = F1_s + FI_s + FJ_s + FK_s,$$

então existem escalares $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t, \xi_t \in F$, tais que,

$$1_r 1_s = \sum_t u_t a_t = \sum_t \alpha_t u_t 1 + \beta_t u_t i + \gamma_t u_t j + \xi_t u_t k$$

com $a_t = \alpha_t 1 + \beta_t i + \gamma_t j + \xi_t k \in \mathbb{H}$. Fazendo, $w_{rs}^1 = \sum_t \alpha_t u_t$, $w_{rs}^2 = \sum_t \beta_t u_t$, $w_{rs}^3 = \sum_t \gamma_t u_t$ e $w_{rs}^4 = \sum_t \xi_t u_t$ elementos de Z_a , temos

$$1_r 1_s = w_{rs}^1 1 + w_{rs}^2 i + w_{rs}^3 j + w_{rs}^4 k.$$

Assim,

$$i((1_r 1_s)i) = -w_{rs}^1 1 - w_{rs}^2 i + w_{rs}^3 j + w_{rs}^4 k,$$

mas $i((1_r 1_s)i) \stackrel{(3.8)}{=} (i 1_r)(1_s i) = -I_r I_s$. Então,

$$I_r I_s = w_{rs}^1 1 + w_{rs}^2 i - w_{rs}^3 j - w_{rs}^4 k.$$

De forma análoga, podemos obter

$$J_r J_s = w_{rs}^1 1 - w_{rs}^2 i + w_{rs}^3 j - w_{rs}^4 k,$$

$$K_r K_s = w_{rs}^1 1 - w_{rs}^2 i - w_{rs}^3 j + w_{rs}^4 k$$

e observamos que $1_r 1_s$, $I_r I_s$, $J_r J_s$ e $K_r K_s$ são diferentes. De forma semelhante não é difícil obter os outros elementos da base de $M_r M_s$ a partir da expressão de $1_r 1_s$, isto é, podemos obter $1_r I_s$, $1_r J_s$, $1_r K_s$, \dots , $K_r K_s$ a partir de $1_r 1_s$ e todos são diferentes. Logo,

$$(3.27) \quad \begin{aligned} 1_r 1_s &= w_{rs}^1 1 + w_{rs}^2 i + w_{rs}^3 j + w_{rs}^4 k, \\ &\vdots \\ J_r K_s &= w_{rs}^1 i + w_{rs}^2 1 + w_{rs}^3 k + w_{rs}^4 j, \\ &\vdots \\ K_r I_s &= w_{rs}^1 j + w_{rs}^2 k + w_{rs}^3 1 + w_{rs}^4 i, \\ &\vdots \\ I_r J_s &= w_{rs}^1 k + w_{rs}^2 j + w_{rs}^3 i + w_{rs}^4 1. \end{aligned}$$

Portanto, em geral de (3.27) temos

$$M_r M_s = w_{rs}^1 \mathbb{H} + w_{rs}^2 \mathbb{H} + w_{rs}^3 \mathbb{H} + w_{rs}^4 \mathbb{H}.$$

Isto prova o Lema.

Q.E.D.

3.3.1 Álgebras alternativas tensoriais

Vamos descrever a categoria das álgebras alternativas sobre uma fixada álgebra alternativa \mathcal{A} . Esta noção foi introduzida para as álgebras de Jordan por I. Kashuba, S. Ovsienko e I. Shestakov (veja [5]) cuja fonte de inspiração foi a analogia com a álgebra associativa e o significado categórico das construções correspondentes.

Vamos estudar a noção da **álgebra tensorial** $\mathcal{L}\langle V \rangle$ de um bimódulo (no sentido de Eilenberg) V sobre a F -álgebra \mathcal{L} . Podemos defini-la como um objeto livre em uma categoria conveniente, ou construí-la como uma álgebra fator da álgebra F -linear livre $\mathcal{F} = \mathcal{F}[\mathcal{L} \oplus V]$ da correspondente variedade, gerada por $\mathcal{L} \oplus V$ módulo o ideal, gerado pelas relações

$$[a_1] \star [a_2] - [a_1 \circ a_2], \quad a_1, a_2 \in \mathcal{L},$$

$$[v] \star [a] - [v.a], [a] \star [v] - [a.v], a \in \mathcal{L}, v \in V,$$

onde $[x]$ significa um gerador de \mathcal{F} , correspondente a $x \in \mathcal{L} \oplus V$, \star significa o produto em \mathcal{F} , \circ o produto em \mathcal{L} e \cdot a ação de \mathcal{L} sobre V . Se a álgebra \mathcal{L} é associativa e V é um \mathcal{L} -bimódulo associativo unitário, esta construção nos dá a usual álgebra tensorial $T[V]$ do bimódulo V . Se \mathcal{L} é associativa e comutativa com V é um \mathcal{L} -bimódulo associativo comutativo unitário, obtemos a álgebra simétrica $S[V]$. No caso das álgebras alternativas, denotaremos a álgebra alternativa tensorial de um bimódulo V por $\mathcal{L}[V]$.

Vamos fazer um estudo das álgebras alternativas tensoriais, análogo como foi feito para as álgebras de Jordan tensoriais em [5].

Vamos a denotar por **Alt** a categoria das álgebras alternativas. Por

$$F_{\mathbf{Alt}} : F - \text{mod} \longrightarrow \mathbf{Alt}$$

denotamos ao functor que associa a cada espaço $M \in \text{Obj}(F - \text{mod})$ a álgebra alternativa livre $F_{\mathbf{Alt}}(M) = F[M]$ sobre F gerada por M . O functor $F_{\mathbf{Alt}}$ é uma adjunta à esquerda do functor esquecedor $E : \mathbf{Alt} \longrightarrow F - \text{mod}$ (que associa a cada álgebra alternativa seu respectivo espaço vetorial), isto significa que para cada $M \in \text{Obj}(F - \text{mod})$ e $\mathcal{A} \in \text{Obj}(\mathbf{Alt})$, existe uma bijeção

$$\alpha_{M, \mathcal{A}} : \text{Hom}_{\mathbf{Alt}}(F_{\mathbf{Alt}}(M), \mathcal{A}) \longrightarrow \text{Hom}_{F - \text{mod}}(M, E(\mathcal{A}))$$

que é natural em M e \mathcal{A} . Isto é consequência da propriedade universal do objeto livre $F_{\mathbf{Alt}}(M)$ (veja o Teorema 1).

Fixamos $\mathcal{L} \in \mathbf{Alt}$ e definimos a categoria $\mathbf{Alt}_{\mathcal{L}}$ das *álgebras alternativas relativas* ou *álgebras alternativas sobre \mathcal{L}* . Um objeto da categoria $\mathbf{Alt}_{\mathcal{L}}$ é uma álgebra alternativa \mathcal{A} dotado com um homomorfismo de álgebras alternativas $\varphi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}$. Sejam $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \text{Obj}(\mathbf{Alt}_{\mathcal{L}})$, então um morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Alt}_{\mathcal{L}}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ é um homomorfismo de álgebras alternativas $f : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$, tal que, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathcal{A}_1 \\ & \searrow \varphi_2 & \swarrow f \\ & & \mathcal{A}_2 \end{array}$$

comuta, isto é, $\varphi_2 = f\varphi_1$.

Usualmente na notação $\varphi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}$ de uma álgebra alternativa sobre \mathcal{L} vamos ignorar a estrutura de homomorfismo φ e escreveremos simplesmente por \mathcal{A} , e se fosse necessário denotamos ao correspondente homomorfismo por $\varphi_{\mathcal{L}}$.

Se considerarmos a generalizada álgebra dos quaterniões \mathbb{H} . Então, um objeto da categoria $\mathbf{Alt}_{\mathbb{H}}$ é uma álgebra alternativa \mathcal{A} dotado com um homomorfismo de álgebras alternativas unitárias $\varphi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathcal{A}$. Assim:

Problema 1 *Descrever à categoria $\mathbf{Alt}_{\mathbb{H}}$.*

Seja $\mathcal{A} \in \text{Obj}(\mathbf{Alt}_{\mathbb{H}})$, então \mathcal{A} pode ser escrita como $\mathcal{A} = \mathbb{H} \oplus V$, onde V é um \mathbb{H} -bimódulo alternativo unitário, $V = V_a \oplus V_c$. Neste caso, se $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \text{Obj}(\mathbf{Alt}_{\mathbb{H}})$, então $\mathcal{A}_1 = \mathbb{H} \oplus V_1$, $\mathcal{A}_2 = \mathbb{H} \oplus V_2$ e um morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Alt}_{\mathbb{H}}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ é um homomorfismo de álgebras alternativas $f : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$, tal que, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathcal{A}_1 \\ \text{id}_{\mathbb{H}} \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{H} & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathcal{A}_2 \end{array}$$

comuta, isto é, $\varphi_2 = f\varphi_1$. O morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Alt}_{\mathbb{H}}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ é tal que $f_{\mathbb{H}} = id_{\mathbb{H}}$.

Eis aqui exemplos de alguns elementos da categoria $\mathbf{Alt}_{\mathbb{H}}$:

Exemplo 10 *Se \mathcal{A} é associativa, tal que, \mathcal{A} contém \mathbb{H} com o mesmo elemento identidade. Então, $\mathcal{A} = Z \otimes_F \mathbb{H}$.*

Exemplo 11 *Seja \mathbb{O} a álgebra de Cayley-Dickson, onde \mathbb{O} contém \mathbb{H} e ambos têm o mesmo elemento identidade. Então, $\mathbb{O} = \mathbb{H} + v\mathbb{H}$. Aquí, $v\mathbb{H}$ é um bimódulo de Cayley sobre \mathbb{H} , isto é, satisfaz (3.3), onde $a \rightarrow \bar{a}$ é a involução simplética em \mathbb{H} . Se \mathbb{H} é de divisão, então $v\mathbb{H}$ é irredutível. Se $\mathbb{H} \cong M_2(F)$, então $v\mathbb{H}$ é um bimódulo de dimensão 4, isto é,*

$$v\mathbb{H} = \langle ve_{11}, ve_{21} \rangle \oplus \langle ve_{12}, ve_{22} \rangle.$$

Exemplo 12 *A subálgebra $\mathcal{A} = \mathbb{H} \oplus \langle ve_{11}, ve_{21} \rangle$ de \mathbb{O} , tal que, $\langle ve_{11}, ve_{21} \rangle^2 = 0$.*

A seguir, fazemos uma curta descrição das somas e produtos de objetos da categoria $\mathbf{Alt}_{\mathcal{L}}$ e também descrevemos a seus objetos livres.

Consideremos duas \mathcal{L} -álgebras alternativas $\varphi_1 : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}_1$ e $\varphi_2 : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}_2$ e seja $F_{\mathbf{Alt}}([\mathcal{A}_1] \oplus [\mathcal{A}_2])$ a álgebra alternativa livre com multiplicação \star . Então o produto $\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$ ($\mathcal{A}_1 \star_{\mathcal{L}} \mathcal{A}_2$) é o fator da álgebra $F_{\mathbf{Alt}}([\mathcal{A}_1] \oplus [\mathcal{A}_2])$ pelo ideal, gerado pelas relações $[x_1] \star [y_1] - [x_1 \circ y_1]$, $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$, $[x_2] \star [y_2] - [x_2 \circ y_2]$, $x_2, y_2 \in \mathcal{A}_2$, $[\varphi_1(s)] - [\varphi_2(s)]$, $s \in \mathcal{L}$, onde \circ denota a multiplicação em \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 respectivamente.

Lema 16 *$\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$ é a soma de \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 na categoria $\mathbf{Alt}_{\mathcal{L}}$.*

Para cada $\mathcal{A} \in \mathbf{Alt}_{\mathcal{L}}$, o morfismo de estrutura $\varphi_{\mathcal{A}} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}$ provê a \mathcal{A} com a estrutura de um \mathcal{L} -bimódulo alternativo unitário. A seguir, damos a definição geral das *álgebras alternativas tensoriais* na categoria $\mathbf{Alt}_{\mathcal{L}}$.

Definição 5 *Seja V um bimódulo alternativo unitário sobre \mathcal{L} . A \mathcal{L} -álgebra $\mathcal{L}[V]$ junto com um homomorfismo de \mathcal{L} -bimódulos alternativos unitários $\iota_V : V \rightarrow \mathcal{L}[V]$ é chamada uma **álgebra alternativa tensorial** do \mathcal{L} -bimódulo V se para cada \mathcal{L} -álgebra \mathcal{A} e para cada homomorfismo de \mathcal{L} -bimódulos alternativos unitários $f : V \rightarrow \mathcal{A}$ existe um único homomorfismo de \mathcal{L} -álgebras $g : \mathcal{L}[V] \rightarrow \mathcal{A}$, tal que, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\iota_V} & \mathcal{L}[V] \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & \mathcal{A} \end{array}$$

comuta, isto é, $f = g \circ \iota_V$.

Cada $\mathcal{A} \in \text{Obj}(\mathbf{Alt}_{\mathcal{L}})$ tem estrutura de um \mathcal{L} -bimódulo, que define um functor de restrição (esquecedor) $E_{\mathcal{L}} : \mathbf{Alt}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{L}\text{-Bimod}$. O functor $E_{\mathcal{L}}$ proporciona uma adjunta à esquerda $\mathcal{L}[\] : \mathcal{L}\text{-Bimod} \rightarrow \mathbf{Alt}$, $V \mapsto \mathcal{L}[V]$, isto significa que para cada $V \in \text{Obj}(\mathcal{L}\text{-Bimod})$ e $\mathcal{A} \in \text{Obj}(\mathbf{Alt}_{\mathcal{L}})$ existe uma bijeção

$$\beta_{V, \mathcal{A}} : \text{Hom}_{\mathbf{Alt}_{\mathcal{L}}}(\mathcal{L}[V], \mathcal{A}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}\text{-Bimod}}(V, E_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})).$$

que é natural em V e \mathcal{A} .

A álgebra alternativa tensorial $\mathcal{L}[V]$ do \mathcal{L} -bimódulo V pode ser construída como um fator da álgebra alternativa livre $F_{\mathbf{Alt}}([\mathcal{L}] \oplus [V])$ pelo ideal, gerado pelas relações $[a_1] \star [a_2] - [a_1 a_2]$, $a_1, a_2 \in \mathcal{L}$, $[v] \star [a] - [v.a]$, $[a] \star [v] - [a.v]$, $a \in \mathcal{L}$, $v \in V$. A álgebra $\mathcal{L}[V]$ é canonicamente graduada por $\deg l = 0$, $l \in \mathcal{L}$, $\deg v = 1$, $v \in V$.

Naturalmente a Definição 5 pode ser dada em qualquer variedade de álgebras.

Eis aqui exemplos de álgebras alternativas tensoriais:

Exemplo 13 *Seja V um bimódulo associativo unitário sobre $M_n(F)$. Nesse caso, sabemos que V é completamente redutível e cada componente irredutível é isomorfo ao bimódulo regular $\text{Reg}(M_n(F))$. Assim, se $V = \sum_{i=1}^m \text{Reg}(M_n(F))_i$, então*

$$M_n(F)[V] \cong M_n(F\langle x_1, \dots, x_m \rangle),$$

onde $F\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ é a álgebra associativa livre com geradores x_1, \dots, x_m .

Exemplo 14 *Suponha que a característica do corpo é diferente de 2. Em [3], N. Jacobson mostrou que cada bimódulo alternativo unitário sobre \mathbb{O} é completamente redutível e cada componente irredutível é isomorfo ao bimódulo regular $\text{Reg}(\mathbb{O})$. Assim, se $V = \sum_{i=1}^m \text{Reg}(\mathbb{O})_i$, então*

$$\mathbb{O}[V] \cong \mathbb{O} \otimes_F F[x_1, \dots, x_m],$$

onde $F[x_1, \dots, x_m]$ é a álgebra de polinômios nas variáveis x_1, \dots, x_m .

Do Corolário 8 temos

Exemplo 15 *Seja $\mathcal{L} = C(\Omega)$ a álgebra matricial de Cayley-Dickson, $V = C(D)$, onde Ω é uma álgebra associativa e comutativa unitária e, D é um Ω -módulo associativo comutativo. Então, temos a álgebra tensorial associativo comutativo $\mathcal{L}\langle D \rangle$ do Ω -módulo D , e*

$$\mathcal{L}[V] \cong C(\Omega\langle D \rangle).$$

É fundamental a descrição das *álgebras alternativas tensoriais* na categoria $\mathbf{Alt}_{\mathbb{H}}$ pois eles irão responder o problema de Nathan Jacobson, já que cada álgebra alternativa que contenha \mathbb{H} com o mesmo elemento identidade, pela propriedade universal, a álgebra alternativa será a imagem homomórfica do objeto livre.

Sabemos que para cada $\mathcal{A} \in \mathbf{Alt}_{\mathbb{H}}$, o morfismo de estrutura $\varphi_{\mathcal{A}} : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{A}$ provê a \mathcal{A} com a estrutura de um \mathbb{H} -bimódulo alternativo unitário. Portanto, pela Proposição 16, $\mathcal{A} = \mathbb{H} \oplus U$, onde U é um \mathcal{L} -bimódulo alternativo unitário. Assim, na categoria $\mathbf{Alt}_{\mathbb{H}}$, a definição 5 fica da seguinte maneira:

Definição 6 *Seja V um bimódulo alternativo unitário sobre \mathbb{H} . A \mathbb{H} -álgebra $\mathbb{H}[V]$ junto com um homomorfismo de \mathbb{H} -bimódulos alternativos unitários $\iota_V : V \rightarrow \mathbb{H}[V]$ é chamada uma **álgebra alternativa tensorial** do \mathbb{H} -bimódulo V se para cada \mathbb{H} -álgebra $\mathcal{A} = \mathbb{H} \oplus U$ e para cada homomorfismo de \mathbb{H} -bimódulos alternativos unitários $f : V \rightarrow U$ existe um único homomorfismo de \mathbb{H} -álgebras $g : \mathcal{L}[V] \rightarrow \mathcal{A}$, tal que, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\iota_V} & \mathbb{H}[V] \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ U & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{A} \end{array}$$

comuta, onde ι é a inclusão.

Da Definição 6 podemos dizer que o homomorfismo de álgebras g estende ao homomorfismo de bimódulos f .

Cada $\mathcal{A} \in \text{Obj}(\mathbf{Alt}_{\mathbb{H}})$ tem a forma $\mathcal{A} = \mathbb{H} \oplus U$, onde U é um \mathbb{H} -bimódulo alternativo unitário, que define um functor de restrição (esquecedor) $E_{\mathbb{H}} : \mathbf{Alt}_{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{H}\text{-Bimod}$. O functor

$E_{\mathbb{H}}$ proporciona uma adjunta à esquerda $\mathbb{H}[\] : \mathbb{H} - \text{Bimod} \longrightarrow \mathbf{Alt}, V \longmapsto \mathbb{H}[V]$, isto significa que para cada $V \in \text{Obj}(\mathbb{H} - \text{Bimod})$ e $\mathcal{A} \in \text{Obj}(\mathbf{Alt}_{\mathbb{H}})$ existe uma bijeção

$$\beta_{V,\mathcal{A}} : \text{Hom}_{\mathbf{Alt}_{\mathbb{H}}}(\mathbb{H}[V], \mathcal{A}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{H} - \text{Bimod}}(V, E_{\mathbb{H}}(\mathcal{A})).$$

que é natural em V e $\mathcal{A} = \mathbb{H} \oplus U$, onde $E_{\mathbb{H}}(\mathcal{A}) = U$.

Em nosso caso, temos

$$\mathbb{H}[V] = \mathbb{H} \oplus \text{alg}\langle V \rangle = \mathbb{H} \oplus (V + V \star V + V \star (V \star V) + (V \star V) \star V + \dots)$$

Agora, nosso objetivo é descrever a álgebra alternativa tensorial $\mathbb{H}[V]$ para o caso split $M_2(F)$. Denotemos $\mathcal{L} = M_2(F)$.

Seja \mathcal{A} um objeto da categoria $\mathbf{Alt}_{M_2(F)}$, então $\mathcal{A} = M_2(F) \oplus V$, onde V é um bimódulo alternativo unitário completamente redutível sobre $M_2(F)$ e $V = V_a \oplus V_c$; V_a é um $M_2(F)$ -bimódulo associativo unitário completamente redutível e V_c é o $M_2(F)$ -bimódulo de Cayley completamente redutível, isto é, $V_a = \sum_{i=1}^m (\text{Reg } M_2(F))_i$ e $V_c = \sum_{i=1}^n \text{Cay}_i$.

Portanto, para o caso split $\mathcal{L} = M_2(F)$, descrevemos a álgebra alternativa tensorial $\mathcal{L}[V]$, a qual, nós leva aos seguintes casos:

1) O caso puramente associativo $V = V_a$. Nesse caso, $\mathcal{A} = M_2(F) \oplus V_a$.

Consideremos $V = \sum_{i=1}^m (\text{Reg } M_2(F))_i = \sum_{i=1}^m u_i \mathcal{L}$. Consequentemente, pela demonstração do Lema 9

$$V \star V = \left(\sum_{i=1}^m u_i \mathcal{L} \right) \star \left(\sum_{i=1}^m u_i \mathcal{L} \right) = \sum_{i_1, i_2=1}^m u_{i_1} u_{i_2} \mathcal{L}$$

onde $\sum_{i_1, i_2=1}^m u_{i_1} u_{i_2}$ é um polinômio homogêneo de grau 2 nas variáveis u_1, \dots, u_m ,

$$(V \star V) \star V = \left(\sum_{i_1, i_2=1}^m u_{i_1} u_{i_2} \mathcal{L} \right) \star \left(\sum_{i=1}^m u_i \mathcal{L} \right) = \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \mathcal{L}$$

e claramente $V \star (V \star V) = \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3}$, donde $\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3}$ é um polinômio homogêneo de grau 3. De forma semelhante pode-se deduzir que

$$(V \star (V \star V)) \star V = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} u_{i_4} \mathcal{L},$$

neste caso $\sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} u_{i_4}$ é um polinômio homogêneo de grau 4. Em geral, pode-se mostrar que qualquer monômio de comprimento k é igual a $\sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^m u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} \mathcal{L}$, onde $\sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^m u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k}$ é um polinômio homogêneo de grau k . Portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[V] &= \mathcal{L} \oplus (V + V \star V + V \star (V \star V) + (V \star V) \star V + ((V \star V) \star V) \star V + \dots) \\ &= \mathcal{L} + \sum_{i=1}^m u_i \mathcal{L} + \sum_{i_1, i_2=1}^m u_{i_1} u_{i_2} \mathcal{L} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \mathcal{L} \\ &\quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} u_{i_4} \mathcal{L} + \dots + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^m u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} \mathcal{L} + \dots \\ &= F\langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle \mathcal{L} \\ &\cong M_2(F\langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle). \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{L}[V] \cong M_2(F\langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle),$$

onde $F\langle Z_m \rangle = F\langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$ é a álgebra associativa livre sobre o conjunto de variáveis livres $Z_m = \{u_1, \dots, u_m\}$. Isto é, a álgebra alternativa tensorial $\mathcal{L}[V]$ é isomorfa à álgebra associativa matricial $M_2(F\langle Z_m \rangle)$.

2) O caso puramente Cayley $V = V_c$. Nesse caso, $\mathcal{A} = M_2(F) \oplus V_c$.

Consideremos $V = \text{Cay}_1 + \dots + \text{Cay}_n$. De (3.25) para todo $i, j, k \neq$ temos a relação

$$(3.28) \quad u_{ij}\text{Cay}_k \subseteq u_{ik}\text{Cay}_j + u_{jk}\text{Cay}_i,$$

onde $\text{Cay}_i = F.m_1^{(i)} + F.m_2^{(i)}$. Assim, por (3.28) e pela Proposição 22, junto com o Lema 13, vamos dar alguns exemplos de álgebras alternativas tensoriais

Exemplo 16 *Se $n = 1$, temos $V = \text{Cay}$. Portanto, pela Proposição 22*

$$0 = \text{Cay} \star \text{Cay} = V \star V = V \star (V \star V) = (V \star V) \star V = ((V \star V) \star V) \star V = \dots$$

e daí $\mathcal{L}[V] = \mathcal{L} \oplus \text{Cay}$ é uma subálgebra de dimensão 6 da álgebra de Cayley-Dickson split.

Exemplo 17 *Se $n = 2$, temos $V = \text{Cay}_1 \oplus \text{Cay}_2$. Denotemos $\text{Cay}_{1,2} \equiv \text{Cay}_1 \oplus \text{Cay}_2$ e pela Proposição 22, $\text{Cay}_{1,2} \star \text{Cay}_{1,2} = u_{12}\mathcal{L}$ pois $u_{21} = -u_{12}$, logo temos os espaços homogêneos*

$$V \star V = \text{Cay}_{1,2} \star \text{Cay}_{1,2} = u_{12}\mathcal{L},$$

$$(V \star V) \star V = (u_{12}\mathcal{L}) \star \text{Cay}_{1,2} = u_{12}\text{Cay}_{1,2},$$

$$V \star (V \star V) = \text{Cay}_{1,2} \star (u_{12}\mathcal{L}) = u_{12}\text{Cay}_{1,2}.$$

Logo $(V \star V) \star V = V \star (V \star V) = u_{12}\text{Cay}_{1,2}$. Também

$$(V \star (V \star V)) \star V = (u_{12}\text{Cay}_{1,2}) \star \text{Cay}_{1,2} = u_{12}^2\mathcal{L}.$$

Similarmente $V \star ((V \star V) \star V) = (V \star V) \star (V \star V) = u_{12}^2\mathcal{L}$. Além disso,

$$V \star ((V \star V) \star (V \star V)) = \text{Cay}_{1,2} \star (u_{12}^2\mathcal{L}) = u_{12}^2\text{Cay}_{1,2},$$

$$((V \star V) \star V) \star (V \star (V \star V)) = u_{12}\text{Cay}_{1,2} \star u_{12}\text{Cay}_{1,2} = u_{12}^3\mathcal{L},$$

$$((V \star ((V \star V) \star V)) \star V) \star (V \star V) = (u_{12}^2\mathcal{L} \star \text{Cay}_{1,2}) \star u_{12}\mathcal{L} = u_{12}^2\text{Cay}_{1,2} \star u_{12}\mathcal{L} = u_{12}^3\text{Cay}_{1,2}, \dots$$

De forma semelhante podem ser obtidas as outras expressões não-associativas. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[V] &= \mathcal{L} \oplus (V + V \star V + V \star (V \star V) + (V \star V) \star V + ((V \star V) \star V) \star V + \dots) \\ &= \mathcal{L} + u_{12}\mathcal{L} + u_{12}^2\mathcal{L} + u_{12}^3\mathcal{L} + \dots \\ &\quad + \text{Cay}_{1,2} + u_{12}\text{Cay}_{1,2} + u_{12}^2\text{Cay}_{1,2} + u_{12}^3\text{Cay}_{1,2} + \dots \\ &= F[u_{12}]\mathcal{L} + F[u_{12}]\text{Cay}_{1,2} \\ &\cong F[u_{12}] \otimes_F \mathcal{L} + F[u_{12}]\text{Cay}_{1,2} \\ &\cong M_2(F[u_{12}]) + F[u_{12}]\text{Cay}_{1,2}; \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{L}[V] \cong M_2(F[u_{12}]) + F[u_{12}]\text{Cay}_{1,2}.$$

O conjunto dos elementos $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$ e os $m_1^{(i)}, m_2^{(i)}$ com $i = 1, 2$ é uma base da álgebra alternativa tensorial $\mathcal{L}[V]$ sobre a álgebra associativa e comutativa $F[u_{12}]$. Em efeito, suponhamos que

$$w = ae_{11} + be_{12} + ce_{21} + de_{22} + \xi_1 m_1^{(1)} + \xi_2 m_2^{(1)} + \zeta_1 m_1^{(2)} + \zeta_2 m_2^{(2)} = 0$$

para alguns elementos $a, b, c, d, \xi_i, \zeta_i$ de $F[u_{12}]$ com $i = 1, 2$. Então,

$$0 = (e_{11}w)e_{11} = ae_{11} + \xi_1 m_1^{(1)} \cdot e_{11} + \zeta_1 m_1^{(2)} \cdot e_{11} = ae_{11} + \xi_1 (\bar{e}_{11} \cdot m_1^{(1)}) + \zeta_1 (\bar{e}_{11} \cdot m_1^{(2)}) = ae_{11}$$

o qual implica facilmente que $a = 0$. De maneira análoga, $b = c = d = 0$. Logo

$$w = \xi_1 m_1^{(1)} + \xi_2 m_2^{(1)} + \zeta_1 m_1^{(2)} + \zeta_2 m_2^{(2)} = 0$$

e

$$0 = m_1^{(1)}(e_{11}w) = \xi_1 (m_1^{(1)})^2 + \zeta_1 (m_1^{(1)} m_1^{(2)}) = \zeta_1 u_{12} e_{11}.$$

Então $\zeta_1 u_{12} = 0$, isto implica que os coeficientes do polinômio ζ_1 são zero, logo $\zeta_1 = 0$. De forma semelhante $\zeta_2 = \xi_i = 0$ com $i = 1, 2$.

Além disso, se considerarmos o elemento $\nu = m_1^{(1)} + m_2^{(2)}$ de $\text{Cay}_{1,2}$, então pela Proposição 20

$$\nu^2 = (m_1^{(1)} + m_2^{(2)})^2 = m_1^{(1)} m_2^{(2)} + m_2^{(2)} m_1^{(1)} = -u_{12} e_{11} + u_{21} e_{22} = -u_{12} (e_{11} + e_{22}) = -u_{12} \cdot 1$$

Assim, pelo processo de duplicação de Cayley-Dickson [19]

$$\mathcal{L}[V] \cong M_2(F[u_{12}]) + \nu M_2(F[u_{12}]) = (M_2(F[u_{12}]), \nu) \cong C(F[u_{12}]).$$

Portanto, $\mathcal{L}[V]$ é a álgebra de Cayley-Dickson sobre a álgebra associativa e comutativa $F[u_{12}]$.

Em geral, seja $V = \text{Cay}_1 \oplus \cdots \oplus \text{Cay}_n$. De aqui em diante vamos utilizar (3.28) para reduzir relações, como por exemplo, $u_{12} \text{Cay}_3 \subseteq u_{13} \text{Cay}_2 + u_{23} \text{Cay}_1$. Além disso, pela Proposição 22 $V \star V = \sum_{i \neq j}^n u_{ij} \mathcal{L}$ para $i \neq j = 1, \dots, n$, isto é, $V \star V \subseteq \mathcal{A}_a$. Se denotarmos $P \equiv \sum_{i \neq j}^n u_{ij}$, então $V \star V = P\mathcal{L}$ e pelo Lema 10, temos os seguintes espaços homogêneos

$$\begin{aligned} (V \star V) \star V &= P\mathcal{L} \star V = PV, \\ ((V \star V) \star V) \star V &= PV \star V = P^2\mathcal{L}, \\ (((V \star V) \star V) \star V) \star V &= P^2\mathcal{L} \star V = P^2V, \\ (((((V \star V) \star V) \star V) \star V) \star V) \star V &= P^2V \star V = P^3\mathcal{L}, \\ ((((((V \star V) \star V &= P^3\mathcal{L} \star V = P^3V \\ (((((((V \star V) \star V &= P^3V \star V = P^4\mathcal{L} \end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Pelo Lema 13, não é difícil mostrar que as outras expressões não associativas com o mesmo comprimento são iguais as expressões anteriores. Além disso, utilizando o processo de acima, pode-se obter similarmente uma expressão geral para qualquer espaço homogêneo não-associativo de qualquer comprimento. Por exemplo, se o comprimento fosse par, teremos $P^{k/2}\mathcal{L}$. Agora, se o comprimento fosse ímpar, tem-se

$$P^{(k-1)/2}V.$$

Portanto, somando adequadamente os espaços homogêneos, a álgebra alternativa tensorial $\mathcal{L}[V]$ fica da seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[V] &= \mathcal{L} + V + P\mathcal{L} + PV + P^2\mathcal{L} + P^2V + P^3\mathcal{L} + \dots + P^{(k-1)/2}V + P^{k/2}\mathcal{L} + \dots \\ &= (F \cdot 1 + F.P + F.P^2 + F.P^3 + F.P^4 + \dots)\mathcal{L} + (F.1 + F.P + F.P^2 + F.P^3 + \dots)V \\ &= F[u_{ij}]\mathcal{L} + F[u_{ij}]V \\ &\cong M_2(F[u_{ij}]) + F[u_{ij}]V.\end{aligned}$$

Logo,

$$(3.29) \quad \mathcal{L}[V] \cong M_2(F[u_{ij}]) + F[u_{ij}]V.$$

Mas, por (3.28)

$$\begin{aligned}F[u_{ij}]V &= F[u_{ij}]\text{Cay}_{1,2} + F[u_{13}, u_{23}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}]\text{Cay}_3 \\ &\quad + F[u_{14}, u_{24}, u_{34}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}]\text{Cay}_4 + \dots + F[u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}]\text{Cay}_n\end{aligned}$$

e observamos que os espaços

$$F[u_{ij}], F[u_{13}, u_{23}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}], \dots, F[u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}]$$

não são álgebras de polinômios pois as variáveis u_{ij} 's satisfazem (3.26).

Seja $F[X_n \cup Y_n]$ o anel dos polinômios $F[x_1, y_1, \dots, x_n, y_n]$ em $2n$ variáveis. Consideremos a álgebra de Cayley-Dickson split

$$\mathbb{O} = M_2(F) \oplus vM_2(F),$$

e tome na extensão escalar $\mathbb{O} \otimes F[X_n \cup Y_n]$ os elementos $v_i = ve_{11} \otimes x_i + ve_{12} \otimes y_i$, $w_i = ve_{22} \otimes y_i + ve_{21} \otimes x_i$ e seja $V_i = Fv_i + Fw_i$. É claro que $V_i \simeq \text{Cay}$, além disso,

$$V_i \cdot V_j = \alpha_{ij}M_2(F),$$

onde $\alpha_{ij} = \det \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{bmatrix}$. Consideremos a subálgebra $S_n = \text{alg}_F[\alpha_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n]$ de $F[X_n \cup Y_n]$, a qual, pelo Lema 14 é uma álgebra livre módulo as relações

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji},$$

$$\alpha_{ij}\alpha_{kl} = -\alpha_{ki}\alpha_{jl} + \alpha_{kj}\alpha_{il}.$$

Então, $M_2(S_n) + \sum_1^n S_n V_i$ é uma subálgebra de $\mathbb{O} \otimes F[X_n \cup Y_n]$ e por (3.29) é isomorfa à álgebra alternativa tensorial $\mathcal{L}[V]$.

Além disso, a subálgebra $M_2(S_n) + \sum_1^n S_n V_i$ é livre, pois existe uma especialização

$$\varphi : F[x_1, y_1, \dots, x_n, y_n] \longrightarrow F$$

definida por $x_i \mapsto \alpha_i$, $y_i \mapsto \beta_i$ com $v_{ij} = \det \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_j & \beta_j \end{bmatrix}$ tal que, a imagem de $M_2(S_n) + \sum_1^n S_n V_i$ é a álgebra

$$\mathcal{A} = \mathcal{L} + \text{Cay}_1 + \dots + \text{Cay}_n,$$

onde $\text{Cay}_i \text{Cay}_j \cong \mathcal{L}$.

Finalmente chegamos ao caso onde $V_a \neq 0$ e $V_c \neq 0$.

3) O caso geral, $V = V_a \oplus V_c$. Nesse caso, $\mathcal{A} = M_2(F) \oplus (V_a \oplus V_c)$.

Vamos continuar usando alguns resultados mostrados nos Lemas 10 e 13, isto é, as igualdades

$$(Z_a, \mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0 \quad \text{e} \quad [Z_a, \mathcal{A}_c] = [Z, \mathcal{A}] = 0.$$

No que segue vamos considerar alguns exemplos particulares para ver o comportamento da álgebra alternativa tensorial.

Exemplo 18 *Vamos fazer variar m e fixar $n = 1$, isto é, seja qualquer $m \in \mathbb{N}$ e $n = 1$, então temos $V = \sum_{i=1}^m u_i \mathcal{L} + \text{Cay}$. Lembremos $\text{Cay}^2 = 0$. Conseqüentemente*

$$V \star V = \left(\sum_{i=1}^m u_i \mathcal{L} + \text{Cay} \right) \star \left(\sum_{i=1}^m u_i \mathcal{L} + \text{Cay} \right) = \sum_{i_1, i_2=1}^m u_{i_1} u_{i_2} \mathcal{L} + \sum_{i=1}^m u_i \text{Cay}$$

onde $\sum_{i_1, i_2=1}^m u_{i_1} u_{i_2}$ é um polinômio homogêneo de grau 2 nas variáveis u_1, \dots, u_m ,

$$\begin{aligned} (V \star V) \star V &= \left(\sum_{i_1, i_2=1}^m u_{i_1} u_{i_2} \mathcal{L} + \sum_{i=1}^m u_i \text{Cay} \right) \star \left(\sum_{i=1}^m u_i \mathcal{L} + \text{Cay} \right) \\ &= \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \mathcal{L} + \sum_{i_1, i_2=1}^m u_{i_1} u_{i_2} \text{Cay} \end{aligned}$$

donde $\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3}$ é um polinômio homogêneo de grau 3. Então, analogamente pode-se deduzir que

$$((V \star V) \star V) \star V = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} u_{i_4} \mathcal{L} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \text{Cay},$$

neste caso $\sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} u_{i_4}$ é um polinômio homogêneo de grau 4. Assim, de maneira geral, para qualquer monômio não-associativo de comprimento k , temos

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^m u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} \mathcal{L} + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{(k-1)}=1}^m u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_{(k-1)}} \text{Cay},$$

onde $\sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^m u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k}$ é um polinômio homogêneo de grau k . Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[V] &= \mathcal{L} + \sum_{i=1}^m u_i \mathcal{L} + \text{Cay} + \sum_{i_1, i_2=1}^m u_{i_1} u_{i_2} \mathcal{L} + \sum_{i=1}^m u_i \text{Cay} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \mathcal{L} + \sum_{i_1, i_2=1}^m u_{i_1} u_{i_2} \text{Cay} \\ &+ \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} u_{i_4} \mathcal{L} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m u_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \text{Cay} \\ &\vdots \\ &+ \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^m u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} \mathcal{L} + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{(k-1)}=1}^m u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_{(k-1)}} \text{Cay} + \dots \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[V] = & (F \cdot 1 + \sum_{i=1}^m Fu_i + \sum_{i_1, i_2=1}^m Fu_{i_1}u_{i_2} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m Fu_{i_1}u_{i_2}u_{i_3} \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m Fu_{i_1}u_{i_2}u_{i_3}u_{i_4} + \dots + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^m Fu_{i_1}u_{i_2} \dots u_{i_k} + \dots) \mathcal{L} \\
& + (F \cdot 1 + \sum_{i=1}^m Fu_i + \sum_{i_1, i_2=1}^m Fu_{i_1}u_{i_2} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m Fu_{i_1}u_{i_2}u_{i_3} \\
& + \dots + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{(k-1)}=1}^m Fu_{i_1}u_{i_2} \dots u_{i_{(k-1)}} + \dots) \text{Cay},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\mathcal{L}[V] = F\langle Z_m \rangle \mathcal{L} + F\langle Z_m \rangle \text{Cay} \cong M_2(F\langle Z_m \rangle) + F\langle Z_m \rangle \text{Cay},$$

onde $F\langle Z_m \rangle \text{Cay} = I \triangleleft \mathcal{L}[V]$ com $I^2 = 0$ e a álgebra quociente $\mathcal{L}[V]/I$ é a álgebra associativa matricial $\mathcal{L} = M_2(F)$. E como no exemplo 17, pode-se mostrar que o conjunto dos elementos $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}, m_1, m_2$ é uma base da álgebra alternativa tensorial $\mathcal{L}[V]$ sobre a álgebra associativa livre $F\langle Z_m \rangle$.

Exemplo 19 Agora vamos fixar $m = 1$ e vamos fazer variar n . Então, neste caso $V = u_1 \mathcal{L} + \sum_{i=1}^n \text{Cay}_i$. Aqui, como antes, vamos continuar usando (3.28) para reduzir relações. Além disso, denotamos $W \equiv V_c = \sum_{i=1}^n \text{Cay}_i$, então pela Proposição 22 $W^2 = \sum_{i \neq j}^n u_{ij} \mathcal{L}$ para $i \neq j = 1, \dots, n$, isto é, $W^2 \subseteq \mathcal{A}_a$. Se denotarmos novamente $P \equiv \sum_{i \neq j}^n u_{ij}$, temos os seguintes espaços homogêneos

$$V \star V = (u_1 \mathcal{L} + W) \star (u_1 \mathcal{L} + W) = u_1^2 \mathcal{L} + u_1 W + P \mathcal{L},$$

$$(V \star V) \star V = u_1^3 \mathcal{L} + u_1^2 W + u_1^2 W + u_1 P \mathcal{L} + u_1 P \mathcal{L} + P W = u_1^3 \mathcal{L} + u_1^2 W + u_1 P \mathcal{L} + P W,$$

$$\begin{aligned}
(V \star (V \star V)) \star V &= u_1^4 \mathcal{L} + u_1^3 W + u_1^2 P \mathcal{L} + u_1 P W + u_1^3 W + u_1^2 P \mathcal{L} + u_1 P W + P^2 \mathcal{L} \\
&= u_1^4 \mathcal{L} + u_1^3 W + u_1^2 P \mathcal{L} + u_1 P W + P^2 \mathcal{L},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V \star ((V \star V) \star (V \star V)) &= u_1^5 \mathcal{L} + u_1^4 W + u_1^3 P \mathcal{L} + u_1^2 P W + u_1 P^2 \mathcal{L} \\
&\quad + u_1^4 W + u_1^3 P \mathcal{L} + u_1^2 P W + u_1 P^2 \mathcal{L} + P^2 W \\
&= u_1^5 \mathcal{L} + u_1^4 W + u_1^3 P \mathcal{L} + u_1^2 P W + u_1 P^2 \mathcal{L} + P^2 W,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((V \star V) \star V) \star (V \star (V \star V)) &= u_1^6 \mathcal{L} + u_1^5 W + u_1^4 P \mathcal{L} + u_1^3 P W + u_1^2 P^2 \mathcal{L} + u_1 P^2 W \\
&\quad + u_1^5 W + u_1^4 P \mathcal{L} + u_1^3 P W + u_1^2 P^2 \mathcal{L} + u_1 P^2 W + P^3 \mathcal{L} \\
&= u_1^6 \mathcal{L} + u_1^5 W + u_1^4 P \mathcal{L} + u_1^3 P W + u_1^2 P^2 \mathcal{L} + u_1 P^2 W + P^3 \mathcal{L},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((V \star ((V \star V) \star V)) \star V) \star (V \star V) &= u_1^7 \mathcal{L} + u_1^6 W + u_1^5 P \mathcal{L} + u_1^4 P W + u_1^3 P^2 \mathcal{L} + u_1^2 P^2 W + u_1 P^3 \mathcal{L} \\
&\quad + u_1^6 W + u_1^5 P \mathcal{L} + u_1^4 P W + u_1^3 P^2 \mathcal{L} + u_1^2 P^2 W + u_1 P^3 \mathcal{L} + P^3 W \\
&= u_1^7 \mathcal{L} + u_1^6 W + u_1^5 P \mathcal{L} + u_1^4 P W + u_1^3 P^2 \mathcal{L} + u_1^2 P^2 W + u_1 P^3 \mathcal{L} + P^3 W
\end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Utilizando o processo de acima, podemos obter uma expressão geral para qualquer espaço homogêneo não-associativo de comprimento k , isto é, se k for par, temos

$$\sum_{s=0}^{(k-2)/2} [u_1^{k-2s} P^s \mathcal{L} + u_1^{k-(2s+1)} P^s W] + P^{k/2} \mathcal{L}.$$

Agora, se k for ímpar, tem-se

$$\sum_{s=0}^{(k-1)/2} [u_1^{k-2s} P^s \mathcal{L} + u_1^{k-(2s+1)} P^s W].$$

Portanto, somando adequadamente os espaços homogêneos, a álgebra tensorial $\mathcal{L}[V]$ fica da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[V] = & (F \cdot 1 + Fu + Fu^2 + Fu^3 + Fu^4 + Fu^5 + Fu^6 + Fu^7 \dots) \mathcal{L} \\ & + (F \cdot 1 + Fu + Fu^2 + Fu^3 + Fu^4 + Fu^5 + Fu^6 \dots) W \\ & + (F \cdot 1 + Fu + Fu^2 + Fu^3 + Fu^4 + Fu^5 \dots) P \mathcal{L} \\ & + (F \cdot 1 + Fu + Fu^2 + Fu^3 + Fu^4 \dots) P W \\ & + (F \cdot 1 + Fu + Fu^2 + Fu^3 \dots) P^2 \mathcal{L} \\ & + (F \cdot 1 + Fu + Fu^2 \dots) P^2 W \\ & + (F \cdot 1 + Fu + \dots) P^3 \mathcal{L} \\ & + (F \cdot 1 + \dots) P^3 W + \dots \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[V] = & F \langle u_1 \rangle \mathcal{L} + F \langle u_1 \rangle W \\ & + F \langle u_1 \rangle P \mathcal{L} + F \langle u_1 \rangle P W \\ & + F \langle u_1 \rangle P^2 \mathcal{L} + F \langle u_1 \rangle P^2 W \\ & + F \langle u_1 \rangle P^3 \mathcal{L} + F \langle u_1 \rangle P^3 W + \dots \\ = & F \langle u_1 \rangle (F \cdot 1 + F \cdot P + F \cdot P^2 + F \cdot P^3 + \dots) \mathcal{L} \\ & + F \langle u_1 \rangle (F \cdot 1 + F \cdot P + F \cdot P^2 + F \cdot P^3 + \dots) W \\ = & F \langle u_1 \rangle F[u_{ij}] \mathcal{L} + F \langle u_1 \rangle F[u_{ij}] W. \end{aligned}$$

Mas, por (3.28)

$$F[u_{ij}] W = F[u_{ij}] \text{Cay}_{1,2} + F[u_{13}, u_{23}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}] \text{Cay}_3 + \\ F[u_{14}, u_{24}, u_{34}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}] \text{Cay}_4 + \dots + F[u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}] \text{Cay}_n,$$

onde novamente como no caso puramente Cayley, os espaços $F[u_{ij}]$ para $i \neq j = 1, \dots, n$,

$$F[u_{13}, u_{23}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}], F[u_{14}, u_{24}, u_{34}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}], \dots, F[u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}]$$

não são álgebras de polinômios pois as variáveis u_{ij} 's satisfazem (3.26). Além disso, a álgebra livre $F \langle u_1 \rangle$ torna-se a álgebra de polinômios $F[u_1]$ pois as potências de u_1 comutam quando agem sobre os bimódulos irredutíveis de Cayley, isto bem do seguinte resultado conhecido $[Z_a, \mathcal{A}_c] = 0$.

No caso geral, usando os processos dos dois últimos casos de acima, não é difícil mostra

que se $V = V_a^m \oplus V_c^n = \sum_{i=1}^m u_i \mathcal{L} + \sum_{j=1}^n \text{Cay}_j$ temos a seguinte expressão da álgebra alternativa tensorial

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[V] \cong & M_2(QF[u_{ij}]) + \bar{Q}F[u_{ij}]\text{Cay}_{1,2} + \bar{Q}F[u_{13}, u_{23}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}]\text{Cay}_3 \\ & + \bar{Q}F[u_{14}, u_{24}, u_{34}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}]\text{Cay}_4 + \dots + \bar{Q}F[u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}]\text{Cay}_n, \end{aligned}$$

onde $Q = F\langle u_1, \dots, u_m \rangle$ vira a álgebra polinomial $\bar{Q} = F[u_1, \dots, u_m]$ quando age sobre os bimódulos irredutíveis de Cayley pois para quaisquer $u_k, u_l \in Z_a$ e $m_i \in \text{Cay}_i$, então pelos resultados $(Z_a, \mathcal{A}, \mathcal{A}) = [Z_a, \mathcal{A}_c] = 0$ do Lema 10 e pela \mathbb{Z}_2 -gradação de \mathcal{A} , tem-se

$$\begin{aligned} [u_k, u_l]m_i &= (u_k u_l)m_i - (u_l u_k)m_i \\ &= u_k(u_l m_i) - u_l(u_k m_i) \\ &= u_k(m_i u_l) - (u_k m_i)u_l \\ &= u_k(m_i u_l) - u_k(m_i u_l) \\ &= 0, \end{aligned}$$

Então, multiplicando a igualdade anterior pelo elemento $m_j \in \text{Cay}_j$ com $i, j \neq$, obtemos a relação

$$(3.30) \quad [u_k, u_l]u_{ij} = 0.$$

Além disso, se fazemos as seguintes denotações $P \equiv QF[u_{ij}]$ para $k = 1, \dots, m$ e $i \neq j = 1, \dots, n$, e as álgebras $\bar{P}_0 \equiv QF[u_{ij}] = F[u_k, u_{ij}]$,

$$\bar{P}_1 \equiv QF[u_{13}, u_{23}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}] = F[u_k, u_{13}, u_{23}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}],$$

$$\bar{P}_2 \equiv QF[u_{14}, u_{24}, u_{34}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}] = F[u_k, u_{14}, u_{24}, u_{34}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}]$$

e

$$\bar{P}_{n-2} \equiv QF[u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}] = F[u_k, u_{1n}, \dots, u_{(n-1)n}].$$

Temos

$$(3.31) \quad \mathcal{L}[V] \cong M_2(P) \oplus \bar{P}_0 \text{Cay}_{1,2} \oplus \bar{P}_1 \text{Cay}_3 \oplus \bar{P}_2 \text{Cay}_4 \oplus \dots \oplus \bar{P}_{n-2} \text{Cay}_n.$$

É claro que a álgebra $\mathcal{L}[V]$ de (3.31) não está imersa na álgebra de Cayley-Dickson split \mathbb{O} pois contém $M_2(P)$, onde P é associativa mas não é comutativa.

Especificamente, denote $R_{n,m} = S_n \otimes_F F\langle Z_m \rangle / J$, onde J é o ideal gerado pelo conjunto $\{u_{ij}[u_k, u_l] \mid 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k < l \leq m\}$, e seja $S_{n,m} = S_n \otimes_F F[Z_m]$. Então, por (3.31), a álgebra

$$M_2(R_{n,m}) + \sum_1^n S_{n,m} V_i$$

é isomorfa à álgebra tensorial $\mathcal{L}[V]$.

3.4 Respostas do problema de Nathan Jacobson

Portanto, de acordo aos três casos de acima, as respostas ao problema de N. Jacobson, sem qualquer restrição de dimensão e característica, são os seguintes:

Teorema 24 (O caso associativo) A álgebra $M_2(F\langle Z_m \rangle)$ é isomorfa à álgebra tensorial $M_2(F)[Reg_1 \oplus \cdots \oplus Reg_m]$.

Teorema 25 (O caso puramente Cayley) A subálgebra $M_2(S_n) + \sum_1^n S_n V_i$ da álgebra $\mathbb{O} \otimes_F F[X_n \cup Y_n]$, é isomorfa à álgebra tensorial $M_2(F)[Cay_1 \oplus \cdots \oplus Cay_n]$.

Teorema 26 (O caso geral) A álgebra $M_2(R_{n,m}) \oplus \sum_1^n S_{n,m} V_i$ é isomorfa à álgebra tensorial $M_2(F)[Cay_1 \oplus \cdots \oplus Cay_n \oplus Reg_1 \oplus \cdots \oplus Reg_m]$.

Corolário 27 Seja \mathcal{A} uma $M_2(F)$ -álgebra, $\mathcal{A} = M_2(F) \oplus V$. Então, $\mathcal{A} = \phi(M_2(F)[V])$, onde $\phi : M_2(F)[V] \rightarrow \mathcal{A}$ é o epimorfismo de $M_2(F)$ -álgebras que estende a aplicação identidade $id_V : V \rightarrow V$.

Especificamente, $V = V_a \oplus V_c$, onde $V_a = \bigoplus_{k=1}^m c_k M_2(F)$, $c_k \in Z_a$, $V_c = \bigoplus_{i=1}^n Cay_i$, $Cay_i \cdot Cay_j = b_{ij} M_2(F)$, $b_{ij} \in Z(\mathcal{A})$. Sejam $\bar{S}_n = alg\langle b_{ij} | 1 \leq i < j \leq n \rangle$ e $\bar{R}_{n,m} = \bar{S}_n \langle c_k | 1 \leq k \leq m \rangle$, respectivamente, subálgebras de $Z(\mathcal{A})$ e Z_a . Denote também $\bar{c}_k = c_k|_{V_c}$, e considere $\bar{S}_{n,m} = \bar{S}_n[\bar{c}_k | 1 \leq k \leq m]$; então $\mathcal{A} = M_2(\bar{R}_{n,m}) \oplus (\sum_{i=1}^n \bar{S}_{n,m} Cay_i)$.

Corolário 28 Se $n = 1$, então $\mathcal{A} = M_2(\mathcal{B}) \oplus Cay$, onde \mathcal{B} é associativa, $Cay^2 = 0$ e $[\mathcal{B}, Cay] = [\mathcal{B}, \mathcal{B}]Cay = 0$.

Corolário 29 Se pelo menos um dos b_{ij} no corolário 27 é invertível. Então, $n = 2$, $\bar{R}_{2,m} \subseteq Z(\mathcal{A})$ e $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{O} \otimes_F \bar{R}_{2,m}$.

Demonstração: Suponhamos que b_{ij} é invertível. De (3.30), temos

$$[c_k, c_l]b_{ij} = 0.$$

Então, $[c_k, c_l] = [c_k, c_l]b_{ij}b_{ij}^{-1} = 0$. Portanto, $\bar{R}_{n,m} \subseteq Z(\mathcal{A})$. Também, de (3.28)

$$Cay_k \subseteq b_{ij}^{-1}b_{ik}Cay_j + b_{ij}^{-1}b_{jk}Cay_i.$$

Assim, todas as componentes irredutíveis de V_c com índices diferentes de i, j , estão contidos em $Cay_i \oplus Cay_j$. Isto implica que, $n = 2$. Além disso, segue-se $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{O} \otimes_F \bar{R}_{2,m}$

Q.E.D.

Exemplo 20 Seja $T_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in F \right\}$ e considere $R = T_2[x]/I$, onde I é o ideal gerado pelo conjunto $\{x^2, xe_{12}\}$. Denote $\bar{x} = x + I \in R$, então

$$\mathcal{A} = M_2(R) \oplus F[\bar{x}, e_{11}, e_{22}](Cay_1 \oplus Cay_2)$$

com $b_{12} = \bar{x}$, é uma $M_2(F)$ -álgebra alternativa não-associativa de dimensão 36. Além disso, \mathcal{A} é a imagem homomórfica da álgebra tensorial $M_2(F)[Reg_1 \oplus Reg_2 \oplus Reg_3 \oplus Cay_1 \oplus Cay_2]$, com $\bar{S}_2 = F[\bar{x}]$, $\bar{R}_{3,2} = R$, $\bar{S}_{3,2} = F[\bar{x}, e_{11}, e_{22}]$.

3.5 Álgebras e bimódulos alternativos com involução

Seja \mathcal{A} um álgebra alternativa com involução $-$. Lembremos que um *bimódulo alternativo com involução* sobre \mathcal{A} , é um bimódulo alternativo V junto com um endomorfismo $v \mapsto v^*$ de V de período 2, tal que,

$$a \oplus v \mapsto \bar{a} \oplus v^*$$

é uma involução da extensão cisão nula $E = \mathcal{A} \oplus V$. O endomorfismo $v \mapsto v^*$ de V , é chamada a *involução* de V .

Vamos denotar por $(D, -)$ uma álgebra com composição D com involução $-$.

Exemplo 21 *Seja $\text{Reg } D$ o bimódulo regular de D . Então, os bimódulos regulares com involução $\text{Reg } D$ e $-\text{Reg } D$, são obtidas tomando o bimódulo regular Reg com a usual involução simplética ou seu negativo, isto é, os endomorfismos $a \mapsto \bar{a}$ e $a \mapsto -\bar{a}$ são as involuções de $\text{Reg } D$ e $-\text{Reg } D$, respectivamente.*

Exemplo 22 *Seja $\text{Cay } D$ o bimódulo de Cayley sobre D . Então, os bimódulos de Cayley com involução $\text{Cay } D$ e $-\text{Cay } D$, são obtidas de maneira semelhante da involução usual (chamada $-I$), induzida na álgebra de Cayley-Dickson $C(u, \beta, \gamma)$ no processo de duplicação de Cayley-Dickson [19], isto é, os endomorfismos $m \mapsto -m$ e $m \mapsto m$ são as involuções de $\text{Cay } D$ e $-\text{Cay } D$, respectivamente. O bimódulo de Cayley $\text{Cay } D$ é alternativo se, e somente se, D é associativo.*

Um caso particular dos exemplos 21 e 22, é o seguinte:

Exemplo 23 *Se $D = M_2(F)$ com a involução simplética. Então, temos os seguintes bimódulos irredutíveis não isomorfos:*

$$\text{Reg } D, \quad -\text{Reg } D \quad \text{e} \quad \text{Cay } D.$$

Observe que o bimódulo $-\text{Cay } D$ neste caso, é não alternativo. No entanto, o bimódulo $\text{Cay } D$ é alternativo não-associativo.

Consideremos o seguinte resultado provado por K. MacCrimmon [1] (veja o Teorema 9 do Cap.VII):

Teorema 30 (1) *Qualquer bimódulo alternativo unitário com involução sobre uma álgebra de composição $(D, -)$ é a soma das imagens homomórficas dos quatro bimódulos $\text{Reg } D$, $-\text{Reg } D$, $\text{Cay } D$, $-\text{Cay } D$, onde os últimos dois podem ser retirados se D for não-associativo.*
 (2) *Qualquer bimódulo alternativo unitário com involução sobre $(D, -)$ é completamente redutível e qualquer bimódulo irredutível é isomorfo a uma componente irredutível de $\text{Reg } D$, $-\text{Reg } D$, $\text{Cay } D$ ou $-\text{Cay } D$ se D for associativo e a uma componente irredutível de $\text{Reg } D$ ou $-\text{Reg } D$ se D for não-associativo (portanto uma álgebra de octônios).*

Voltando ao problema de Jacobson, suponhamos que a álgebra alternativa \mathcal{A} tem uma involução $*$ que estende a involução simplética de $\mathbb{H} \cong M_2(F)$, isto é, $*$ restrita a \mathbb{H} , é a involução simplética de \mathbb{H} , tal que, para todo $x \in \mathcal{A}$

$$x + x^* = t(x)1, \quad xx^* = x^*x = n(x)1;$$

onde $t(x) \in F$ e $n(x) \in F$ são o **traço** e a **norma** de x , respectivamente.

Ao considerarmos a álgebra alternativa \mathcal{A} como um bimódulo alternativo unitário com involução $*$ sobre \mathbb{H} , temos pelo Teorema 30, a decomposição

$$(3.32) \quad \mathcal{A} = \sum_i \oplus \text{Reg}_i \mathbb{H} \dot{+} \sum_j \oplus (-\text{Reg}_j \mathbb{H}) \dot{+} \sum_k \oplus \text{Cay}_k \mathbb{H} \dot{+} \sum_l \oplus (-\text{Cay}_l \mathbb{H}).$$

Isto implica, que o bimódulo \mathcal{A} contém dois conjuntos de elementos $\{u_i\}$ (as imagens de 1 no isomorfismo com Reg) e $\{v_j\}$ (as imagens de 1 no isomorfismo com $-\text{Reg}$), tais que,

$\text{Reg}_i \simeq u_i \mathbb{H}$ e $-\text{Reg}_j \simeq v_j \mathbb{H}$. Dos isomorfismos, é claro que $u_i, v_j \in Z_a$ e por [1] (veja o Lema 2 do Cap.VII)

$$u_i^* = u_i \quad \text{e} \quad v_j^* = -v_j \quad \text{para todo } i, j.$$

Além disso, $\text{Cay}_k = F.m_1^{(k)} + F.m_2^{(k)}$ e $-\text{Cay}_l = F.n_1^{(l)} + F.n_2^{(l)}$ são os bimódulos de Cayley irredutíveis de dimensão 2 sobre \mathbb{H} . Logo, de 3.32, temos

$$(3.33) \quad \mathcal{A} = \sum_i \oplus u_i \mathbb{H} \dot{+} \sum_j \oplus v_j \mathbb{H} \dot{+} \sum_k \oplus \text{Cay}_k \mathbb{H} \dot{+} \sum_l \oplus (-\text{Cay}_l \mathbb{H}).$$

Sejam $\text{Sym}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} | x^* = x\}$ e $\text{Skew}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} | x^* = -x\}$ os espaços dos elementos simétricos e antissimétricos de \mathcal{A} , respectivamente.

Se $u \in Z_a$ e $a, b \in \mathbb{H}$, então $t(u)1 = u^* + u \in \text{Sym}(\mathcal{A})$ e

$$0 = (t(u)1, a, b) = (u^* + u, a, b),$$

logo $(u^*, a, b) = -(u, a, b) = 0$. Também

$$[u^*, a] = [t(u)1 - u, a] = [u, a] = 0;$$

assim, Z_a é invariante sobre a involução $*$. Portanto

$$Z_a = (\text{Sym}(\mathcal{A}) \cap Z_a) \oplus (\text{Skew}(\mathcal{A}) \cap Z_a).$$

Pela Proposição 16 sabemos que o \mathbb{H} -bimódulo de Cayley \mathcal{A}_c coincide com o subespaço $(\mathcal{A}, \mathbb{H}, \mathbb{H})$. Assim, ao considerar $a, b \in \mathbb{H}$ tais que $\alpha = [a, b]^2 \neq 0$; então $1, a, b, ab$ formam uma base de \mathbb{H} sobre F . Portanto, na prova da Proposição 16 (dada no Lema 12 de [16]) tem-se $\mathcal{A}_c = (\mathcal{A}, a, b)$; logo

$$\mathcal{A}_c^* = (\mathcal{A}, a, b)^* \subseteq ((\mathcal{A}a)b)^* - (\mathcal{A}(ab))^* = \bar{b}(\bar{a}\mathcal{A}^*) - (\bar{b}\bar{a})\mathcal{A}^* = (\bar{b}, \bar{a}, \mathcal{A}^*) \subseteq (\mathbb{H}, \mathbb{H}, \mathcal{A}) = \mathcal{A}_c$$

e \mathcal{A}_c é invariante sobre a involução $*$. Portanto

$$\mathcal{A}_c = (\text{Sym}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_c) \oplus (\text{Skew}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_c).$$

Seja \mathfrak{M} uma variedade de álgebras e consideremos um bimódulo V para \mathcal{A} na classe \mathfrak{M} . Se $E = \mathcal{A} \oplus V$ é a extensão cisão nula de \mathcal{A} pelo bimódulo V , então definimos o **núcleo** $N(V)$ do bimódulo V , como a interseção do núcleo da extensão cisão nula com o bimódulo, isto é, $N(V) = E \cap V$.

Seja $w = (v, a, b) \in N(\mathcal{A}_c)$ para algum $v \in \mathcal{A}$. Então, por (3.18)

$$0 = (w, a, b) = ((v, a, b), a, b) = [a, b](v, a, b),$$

logo $\alpha w = [a, b]^2(v, a, b) = [a, b]([a, b](v, a, b)) = 0$ e assim $w = 0$. Portanto $N(\mathcal{A}_c) = 0$.

Suponhamos que a involução $*$ de \mathcal{A} é de tipo nuclear, isto é, todos os elementos simétricos estão contidos no núcleo (o centro associativo) de \mathcal{A} , $N(\mathcal{A})$. Agora, em \mathcal{A}_c precisamos que os elementos simétricos estejam no núcleo. Como o núcleo de \mathcal{A}_c é 0, a involução $*$ aplica cada elemento de \mathcal{A}_c no seu negativo, isto é, $m^* = -m$ para todo $m \in \mathcal{A}_c$. Assim, como para todo $m \in -\text{Cay}$ tem-se $m^* = m$, então $m = 0$. Logo, $-\text{Cay} = 0$.

Como $Z_a = (\text{Sym}(\mathcal{A}) \cap Z_a) \oplus (\text{Skew}(\mathcal{A}) \cap Z_a)$. Seja $v \in \text{Skew}(\mathcal{A}) \cap Z_a$, isto é, $v^* = -v$ e $av = va$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Lembre-se que na prova do Lema 10 temos mostrado que $[Z_a, \mathcal{A}_c] = 0$. Assim, ao considerar o elemento $s = vm_2^{(k)}$, onde $m_2^{(k)}$ é um dos elementos da

base de Cay_k , obtemos

$$s^* = (vm_2^{(k)})^* = (m_2^{(k)})^*v^* = (-m_2^{(k)})(-v) = m_2^{(k)}v = vm_2^{(k)} = s;$$

portanto $s \in N(\mathcal{A}_c) = 0$ e $um_2^{(k)} = 0$, o qual, implica facilmente que $v = 0$. Portanto, $\text{Skew}(\mathcal{A}) \cap Z_a = 0$ e Z_a é a subálgebra dos elementos $u \in \mathcal{A}$, tais que, $au = ua$ e $u^* = u$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Consequentemente, como $v_j^* = -v_j$, então $v_j = 0$ para todo j . Logo, $-\text{Reg} = 0$.

Assim, podemos retirar os bimódulos $-\text{Reg}$ e $-\text{Cay}$ da decomposição de \mathcal{A} , isto é,

$$\mathcal{A} = \sum_i \oplus u_i \mathbb{H} \dot{+} \sum_k \oplus \text{Cay}_k.$$

Portanto, se a álgebra alternativa \mathcal{A} tem uma involução de tipo nuclear $x \mapsto x^*$, que estende a involução simplética de \mathbb{H} , então obtemos os resultados da seção 3.4.

Capítulo 4

Teoremas de Fatorização de Kronecker para as superálgebras alternativas

H. M. Wedderburn mostrou que se uma álgebra associativa unitária \mathcal{A} contém uma subálgebra simples central de dimensão finita \mathcal{B} com o mesmo elemento identidade, então \mathcal{A} é isomorfa a um produto de Kronecker $S \otimes_F \mathcal{B}$, onde S é a subálgebra dos elementos que comutam com cada $b \in \mathcal{B}$. Em particular, se \mathcal{A} contém $M_n(F)$ como subálgebra com o mesmo elemento identidade, temos $\mathcal{A} \cong S \otimes_F M_n(F)$ onde S é a subálgebra de elementos que comutam com cada matriz unitária e_{ij} . Esse último resultado, é chamado “O Teorema de Coordenatização de Wedderburn” como tínhamos observado no capítulo 2. Kaplansky no Teorema 2 de [4] estendeu o resultado de Wedderburn para as álgebras alternativas \mathcal{A} e \mathcal{B} a álgebra de Cayley split. Jacobson no Teorema 1 de [2] deu uma nova prova do resultado de Kaplansky usando sua classificação dos bimódulos alternativos completamente redutíveis sobre corpos de característica diferente de 2. Esse resultado é conhecido como o Teorema de Fatorização de Kronecker de N. Jacobson.

No caso das superálgebras, M. López Díaz e I. Shestakov [7, 8] estudaram as representações das superálgebras alternativas e de Jordan simples excepcionais de característica 3 e por meio dessas representações, obtiveram uns análogos do Teorema de Fatorização de Kronecker para essas superálgebras. Similarmente, C. Martinez e E. Zelmanov [9] obtiveram um Teorema de Fatorização de Kronecker para a superálgebra de Kac excepcional K_{10} de dimensão 10.

Neste capítulo, provamos um Teorema de Fatorização de Kronecker para as superálgebras alternativas que contém a superálgebra associativa $M_{(1|1)}(F)$ com o mesmo elemento identidade. Como corolário, respondemos ao análogo do problema de N. Jacobson [2] (veja o Cap. 3) para as superálgebras alternativas, isto é, descrevemos a cada superálgebra alternativa que contém a superálgebra associativa $M_{(1|1)}(F)$ com o mesmo elemento identidade sobre corpos de característica diferentes de 2.

Além disso, provamos o Teorema de Fatorização de Kronecker de N. Jacobson que funciona para o caso geral. Também, provamos um Teorema de Fatorização de Kronecker para as superálgebras alternativas, cuja parte par contém \mathbb{O} com o mesmo elemento identidade.

M. Trushina e I. Shestakov [17] estudaram as representações das superálgebras alternativa simples $\mathbb{O}(4|4)$ ou $\mathbb{O}[u]$. Eles mostraram que cada bimódulo alternativo irredutível não-associativo fiel sobre essas superálgebras são isomorfos ao bimódulo regular ou a seu oposto das superálgebras $\mathbb{O}(4|4)$ ou $\mathbb{O}[u]$. Finalmente, provamos a redutibilidade completa dos bimódulos sobre essas superálgebras e provamos alguns análogos do Teorema de Fatorização de Kronecker para cada superálgebra alternativa que contenha $\mathbb{O}(4|4)$ ou $\mathbb{O}[u]$ com o mesmo elemento identidade.

4.1.1 Superálgebras alternativas

Lembremos, uma **superálgebra** é uma álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$, onde $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ e $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ são espaços de \mathcal{A} tais que $\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{A}_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}_2$. Os são espaços $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ e $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ são ditos como a parte par e ímpar, respectivamente, da \mathbb{Z}_2 -gradação de \mathcal{A} .

Como antes, \mathbb{H} denota a generalizada álgebra dos quaterniões.

Exemplo 24 A álgebra de Cayley-Dickson $\mathbb{O} = \mathbb{H} + v\mathbb{H}$ ($v^2 = \alpha \neq 0$) tem a estrutura natural de uma álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada, onde a generalizada álgebra dos quaterniões \mathbb{H} é a parte par e o \mathbb{H} -bimódulo de Cayley $v\mathbb{H}$ é a parte ímpar da \mathbb{Z}_2 -gradação de \mathbb{O} . Se $\mathbb{H} \cong M_2(F)$, temos a álgebra de Cayley-Dickson split e se \mathbb{H} é de divisão, temos a álgebra de Cayley-Dickson de divisão.

E como em [15]:

Exemplo 25 Seja Γ a álgebra de Grassmann sobre um corpo F gerada pelos elementos $1, e_1, \dots, e_n, \dots$ tais que

$$e_i^2 = 0, \quad e_i e_j = -e_j e_i.$$

Os produtos

$$1, \quad e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k,$$

formam uma base de Γ sobre F (consideremos 1 como o produto do conjunto vazio dos elementos e_i). Denote-se por $\Gamma_{\bar{0}}$ e $\Gamma_{\bar{1}}$ os espaços gerados pelos produtos de comprimento par e ímpar; então Γ é a soma direta desses espaços,

$$\Gamma = \Gamma_{\bar{0}} \oplus \Gamma_{\bar{1}},$$

onde

$$\Gamma_i \Gamma_j \subseteq \Gamma_{i+j \pmod{2}}, \quad i, j \in \{\bar{0}, \bar{1}\}.$$

Em outras palavras, Γ é uma álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada (ou superálgebra) sobre F .

Definição 7 Seja \mathcal{V} uma variedade de álgebras sobre F definida pelas identidades homogêneas (veja [19]). Uma superálgebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ é uma \mathcal{V} -**superálgebra** se sua **envolvente de Grassmann** $\Gamma(\mathcal{A}) = \Gamma_{\bar{0}} \otimes \mathcal{A}_{\bar{0}} + \Gamma_{\bar{1}} \otimes \mathcal{A}_{\bar{1}}$ pertence a \mathcal{V} . Em particular, \mathcal{A} é uma **superálgebra alternativa** se, e somente se, \mathcal{A} satisfaz as seguintes (super)identidades:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} (x, y, z) + (-1)^{|y||z|} (x, z, y) &= 0, \\ (x, y, z) + (-1)^{|x||y|} (y, x, z) &= 0, \end{aligned}$$

$$(a, a, x) = 0,$$

onde $a_0 \in \mathcal{A}_0$, $x, y, z \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ e $|x|$ denota a paridade de um elemento homogêneo x of \mathcal{A} : $|x| = i$ se $x \in \mathcal{A}_i$.

Observe que uma superálgebra alternativa não é o mesmo como uma álgebra alternativa \mathbb{Z}_2 -graduada: as superálgebras alternativas simples de característica 3, obtidas por I. Shestakov [16] não são álgebras alternativas.

Exemplo 26 A superálgebra de Grassmann Γ é uma superálgebra comutativa, pois sua envolvente de Grassmann $\Gamma(\Gamma) = \Gamma_{\bar{0}} \otimes \Gamma_{\bar{0}} + \Gamma_{\bar{1}} \otimes \Gamma_{\bar{1}}$ é comutativa. Isto vem do fato de que Γ satisfaz a seguinte identidade de comutatividade (ou supercomutatividade) graduada

$$ab = (-1)^{|a||b|}ba,$$

onde $a, b \in \Gamma_{\bar{0}} \cup \Gamma_{\bar{1}}$.

De aqui em diante denotaremos por \mathcal{A} a cada superálgebra alternativa sobre F . Denotaremos também a parte par de \mathcal{A} por \mathcal{B} e a parte ímpar de \mathcal{A} por M . Observamos que \mathcal{B} é uma subálgebra alternativa de \mathcal{A} e M é um \mathcal{B} -bimódulo alternativo.

C.T.C. Wall [18] mostrou que cada superálgebra associativa simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F é isomorfa a umas das seguintes superálgebras associativas:

$$\mathcal{A} = M_{(m|k)}(F), \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \right\}, \quad M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e

$$\mathcal{A} = Q(n) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}; \quad a, b \in M_n(F) \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \right\}, \quad M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Lembremos que no caso quando o corpo é de característica 2 qualquer álgebra alternativa \mathbb{Z}_2 -graduada é também uma superálgebra alternativa.

As superálgebras alternativas simples de característica 2 foram classificadas por I. Shestakov [16]. Nesse caso apareceram superálgebras simples não-triviais nem associativas. Assim, sobre um corpo de característica 2, qualquer tal superálgebra é isomorfa a uma das seguintes duas superálgebras obtidas do processo de Cayley-Dickson:

Exemplo 27 A superálgebra de Cayley-Dickson $\mathbb{O}(4|4) = \mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus v\mathbb{H}$, $v^2 = \gamma \neq 0$ ($\gamma \in F$) com a \mathbb{Z}_2 -graduação induzida pelo processo de duplicação de Cayley-Dickson aplicada a generalizada álgebra dos quatérnios \mathbb{H} , onde

$$(4.2) \quad \begin{aligned} (ab)v &= b(av), \\ v(ab) &= (vb)a, \\ (va)(vb) &= \alpha b\bar{a}. \end{aligned}$$

para todo $a, b \in \mathbb{H}$.

Exemplo 28 A álgebra de Cayley-Dickson dobrada $\mathbb{O}[u] = F[u] \otimes_F \mathbb{O} = \mathbb{O} \oplus \mathbb{O}u$, onde $F[u] = F + Fu$, $0 \neq \gamma = u^2 \in F$.

4.1.2 Superimódulos alternativos

Os superbimódulos alternativos estão definidos de maneira semelhante ao caso não-graduado. Um bimódulo $V = V_0 \oplus V_1$ sobre uma superálgebra alternativa $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus M$ é chamado um \mathcal{A} -superbimódulo alternativo se, a extensão cisão nula $\mathcal{A} \oplus V = (\mathcal{B} \oplus V_0) \oplus (M \oplus V_1)$ é uma superálgebra alternativa.

Como no caso das álgebras, o problema principal da teoria de representações de superálgebras, é a descrição dos superbimódulos irredutíveis. Para as álgebras alternativas, tais bimódulos estão sempre definidos sobre álgebras simples ou sobre uma soma direta de duas álgebras simples, e no último caso, o bimódulo é associativo. Depois de isso, outro fato importante é mostrar a redutibilidade completa dos superbimódulos.

4.2 Um análogo do problema de Nathan Jacobson para as superálgebras alternativas

Sejam $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus M$ uma superálgebra alternativa com identidade 1 sobre F e $e_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, \dots, n$ um sistema idempotentes ortogonais dois a dois, tais que, $e_1 + \dots + e_n = 1$. Além disso, seja $\mathcal{A} = \sum \mathcal{A}_{ij}$ a decomposição de Peirce de \mathcal{A} relativo a esse sistema de idempotentes $\{e_i\}$.

Assim, temos a seguinte generalização para superálgebras alternativas do Teorema 10.

Teorema 31 *Seja $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus M$ uma superálgebra alternativa com elemento identidade 1 que contém um sistema de idempotentes ortogonais dois a dois e não nulos e_1, \dots, e_n tais que $1 = e_1 + \dots + e_n$. Suponha que para cada $i \neq j$ existem $a_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$ e $b_{ji} \in \mathcal{A}_{ji}$ tais que*

$$a_{ij}b_{ji} = e_i \quad e \quad b_{ji}a_{ij} = e_j.$$

Então, se $n \geq 3$, \mathcal{A} é uma superálgebra associativa.

Demonstração: Seja $\Gamma(\mathcal{A}) = \mathcal{B} \otimes \Gamma_{\bar{0}} + M \otimes \Gamma_{\bar{1}}$ a envolvente de Grassmann da superálgebra \mathcal{A} . Como \mathcal{A} é uma superálgebra alternativa, resulta que $\Gamma(\mathcal{A})$ é uma álgebra alternativa. Note

$$\Gamma(\mathcal{A}) \supset \mathcal{B} \otimes \Gamma_{\bar{0}} \supseteq \{\tilde{e}_i := e_i \otimes 1; i = 1, \dots, n\}$$

onde $\tilde{e}_i^2 = (e_i \otimes 1)^2 = e_i \otimes 1 = \tilde{e}_i$, $\tilde{e}_i\tilde{e}_j = (e_i \otimes 1)(e_j \otimes 1) = e_ie_j \otimes 1 = 0$ para $i \neq j$ e $\sum_{i=1}^n \tilde{e}_i = \sum_{i=1}^n (e_i \otimes 1) = 1 \otimes 1 = 1_{\Gamma(\mathcal{A})}$; assim, $\Gamma(\mathcal{A})$ contém um sistema de idempotentes ortogonais $\{\tilde{e}_i\}$. Além disso, pela hipótese, para cada $i \neq j$ existem $a_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$ e $b_{ji} \in \mathcal{A}_{ji}$ tais que $a_{ij}b_{ji} = e_i$ e $b_{ji}a_{ij} = e_j$, então

$$\tilde{a}_{ij}\tilde{b}_{ji} = (a_{ij} \otimes 1)(b_{ji} \otimes 1) = a_{ij}b_{ji} \otimes 1 = e_i \otimes 1 = \tilde{e}_i$$

e

$$\tilde{b}_{ji}\tilde{a}_{ij} = (b_{ji} \otimes 1)(a_{ij} \otimes 1) = b_{ji}a_{ij} \otimes 1 = e_j \otimes 1 = \tilde{e}_j,$$

onde \tilde{a}_{ij} e \tilde{b}_{ji} pertencem à decomposição de Peirce de $\Gamma(\mathcal{A})$ relativo ao idempotente $1_{\Gamma(\mathcal{A})}$. Então, como $n \geq 3$, $\Gamma(\mathcal{A})$ é uma álgebra alternativa que satisfaz as condições do Teorema 10. Portanto, $\Gamma(\mathcal{A})$ é uma álgebra associativa e, conseqüentemente, \mathcal{A} é uma superálgebra associativa.

Q.E.D.

Corolário 32 *Seja $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus M$ uma superálgebra alternativa com elemento identidade que contém a superálgebra associativa $M_{(m|k)}(F)$ com o mesmo elemento identidade. Se $m + k \geq 3$, então \mathcal{A} é uma superálgebra associativa e*

$$\mathcal{A} \cong M_{(m|k)}(F) \otimes_F Z \cong M_{(m|k)}(Z)$$

onde Z é uma superálgebra associativa; além disso,

$$\mathcal{B} = (M_{(m|k)}(F))_{\bar{0}} \otimes_F Z_{\bar{0}} + (M_{(m|k)}(F))_{\bar{1}} \otimes_F Z_{\bar{1}}$$

e

$$M = (M_{(m|k)}(F))_{\bar{1}} \otimes_F Z_{\bar{0}} + (M_{(m|k)}(F))_{\bar{0}} \otimes_F Z_{\bar{1}}.$$

Exemplo 29 Consideremos a superálgebra associativa $\mathcal{A} = M_{(m|k)}(\mathbb{C})$ sobre \mathbb{R} tal que \mathcal{A} contém $M_{(m|k)}(\mathbb{R})$, então

$$\mathcal{A} \cong M_{(m|k)}(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} Z \cong M_{(m|k)}(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

onde $Z = Z_{\bar{0}} \oplus Z_{\bar{1}} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} = \mathbb{C}$. Além disso,

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} M_m(\mathbb{R}) & M_{m \times k}(i\mathbb{R}) \\ M_{k \times m}(i\mathbb{R}) & M_k(\mathbb{R}) \end{bmatrix} \quad e \quad M = \begin{bmatrix} M_m(i\mathbb{R}) & M_{m \times k}(\mathbb{R}) \\ M_{k \times m}(\mathbb{R}) & M_k(i\mathbb{R}) \end{bmatrix}$$

Corolário 33 Cada superbimódulo alternativo unitário sobre $M_{(m|k)}(F)$ ($m + k \geq 3$) é associativo.

Consequentemente, a partir do Corolário 32 surge naturalmente o análogo do problema de Nathan Jacobson [2] para as superálgebras alternativas quando $m + k = 2$:

Descrever as superálgebras alternativas que contém $M_{(1|1)}(F)$ com o mesmo elemento identidade.

4.3 Teoremas de Fatorização de Kronecker

Seja F um corpo de característica arbitrária. O seguinte resultado é conhecido como o Teorema de Fatorização de Kronecker de Nathan Jacobson.

Teorema 34 Seja \mathcal{A} uma álgebra alternativa com elemento identidade, tal que, \mathcal{A} contém \mathbb{O} com o mesmo elemento identidade. Então, $\mathcal{A} \cong Z \otimes_F \mathbb{O}$ para uma certa álgebra associativa e comutativa Z .

Demonstração: No caso $\text{Car } F \neq 2$, o resultado foi mostrado por N. Jacobson [2]. Daremos outra prova que funciona para o caso geral.

Consideremos \mathcal{A} como um \mathbb{O} -bimódulo alternativo unitário. Em particular, podemos considerar \mathcal{A} como um \mathbb{H} -bimódulo alternativo unitário, então pela Proposição 16

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_a \oplus \mathcal{A}_c,$$

onde \mathcal{A}_a é um bimódulo associativo e \mathcal{A}_c é um bimódulo de Cayley. Sabemos que \mathcal{A}_a contém um conjunto de elementos $\{u_i\}$ (as imagens de 1 no isomorfismo com $\text{Reg } \mathbb{H}$), tal que, $\mathcal{A}_a = \sum u_i \mathbb{H}$, onde $u_i \in Z_a = \{a \in \mathcal{A}_a \mid [a, \mathbb{H}] = 0\}$. Além disso, pelo Lema 10

$$(Z_a, \mathcal{A}, \mathcal{A}) = [Z_a, \mathcal{A}_c] = 0$$

e, como \mathcal{A} contém \mathbb{O} ; em particular $(Z_a, Z_a, \mathbb{O}) = (Z_a, \mathbb{O}, \mathbb{O}) = 0$.

Seja $\mathcal{B} = \sum u_i \mathbb{O}$. É claro que \mathcal{B} é um \mathbb{O} -subbimódulo de \mathcal{A} e

$$\mathcal{B} \supseteq \sum u_i \mathbb{H} = \mathcal{A}_a.$$

Sabemos que a álgebra de Cayley-Dickson \mathbb{O} tem a decomposição $\mathbb{H} \oplus v\mathbb{H}$, onde $v^2 = \gamma \neq 0$ ($\gamma \in F$) e por (4.2)

$$(vx)(vy) = \gamma y\bar{x}$$

para todo $x, y \in \mathbb{H}$. Escolha $a, b \in \mathbb{H}$, tais que, $\alpha = [a, b]^2 \neq 0$ ($\alpha \in F$). Seja $w \in \mathcal{A}_c$, logo

$$\begin{aligned} \alpha\gamma w &= w(\gamma[a, b]\overline{[b, a]}) = w((v[\bar{b}, \bar{a}])(v[a, b])) \\ &= (w \circ (v[\bar{b}, \bar{a}]))(v[a, b]) - (v[\bar{b}, \bar{a}])(w(v[a, b])). \end{aligned}$$

É claro que $v\mathbb{H}$ está contido em \mathcal{A}_c . Assim, pelo Lema 8, sabemos que $\mathcal{A}_c\mathcal{A}_c \subseteq \mathcal{A}_a$, então $w \circ (v[\bar{b}, \bar{a}]) \in \mathcal{A}_a$ e $w(v[a, b]) \in \mathcal{A}_a$; portanto, $\alpha\gamma w \in \mathcal{B}$ e como $\alpha, \gamma \neq 0$, temos $w \in \mathcal{B}$. Logo, $\mathcal{A}_c \subseteq \mathcal{B}$. Então, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Como cada $u_i\mathbb{O}$ é irredutível, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ é completamente redutível.

De $[Z_a, \mathcal{A}_c] = 0$, temos $[Z_a, v\mathbb{H}] = 0$ pois $v\mathbb{H}$ esta contido em \mathcal{A}_c . Então,

$$[Z_a, \mathbb{O}] = 0.$$

Como $\mathcal{A} = \sum u_i\mathbb{O}$, cada elemento de \mathcal{A} pode ser escrito em uma única forma, da forma $\sum u_i a_i$ com $a_i \in \mathbb{O}$. Pelo Lema 9, Z_a é uma álgebra associativa. Por outro lado, se $x = \sum u_i a_i \in Z_a$, $a_i \in \mathbb{O}$. Então, $ax = xa$ para todo $a \in \mathbb{O}$, isto é,

$$\begin{aligned} \sum a u_i a_i &= \sum u_i a_i a, \\ \sum u_i a a_i &= \sum u_i a_i a; \end{aligned}$$

portanto $aa_i = a_i a$. Como \mathbb{O} é central, isso, implica $a_i = \lambda_i 1$, onde $\lambda_i \in F$. Portanto, Z_a é o espaço gerado pelos u_i , isto é, $Z_a = \sum F u_i$. Logo, é claro que $\mathcal{A} = Z_a \otimes_F \mathbb{O}$.

Fixemos elementos arbitrários $x, y \in Z_a$ e $a, b, c \in \mathbb{O}$. Aplicando a linearização de (3.18), temos

$$\begin{aligned} [x, y](a, b, c) &= -[a, y](x, b, c) - [x, b](a, y, c) - [a, b](x, y, c) + (x, y, (a, b, c)) \\ &\quad + (a, y, (x, b, c)) + (x, b, (a, y, c)) + (a, b, (x, y, c)) = 0. \end{aligned}$$

Podemos escrever o produto anterior como $[x, y] \otimes (a, b, c) = 0$. Assim, como \mathbb{O} é não associativa, existem $a, b, c \in \mathbb{O}$, tais que, $(a, b, c) \neq 0$. Então, $[x, y] = 0$ e $[Z_a, Z_a] = 0$; portanto, Z_a é uma álgebra associativa e comutativa.

Se denotamos $Z = Z_a$, temos $\mathcal{A} \cong Z \otimes_F \mathbb{O}$.

Isso prova o Teorema.

Q.E.D.

Com a ajuda do Teorema 34, podemos classificar aos bimódulos alternativos unitários sobre a álgebra de Cayley-Dickson \mathbb{O} .

Teorema 35 *Cada bimódulo alternativo unitário sobre \mathbb{O} é completamente redutível.*

Demonstração: No caso $\text{Car } F \neq 2$, o resultado foi mostrado por N. Jacobson [3]. Daremos outra prova que funciona para o caso geral.

Seja V um bimódulo alternativo unitário sobre \mathbb{O} . A extensão cisão nula $E = \mathbb{O} \oplus V$ de \mathbb{O} pelo bimódulo V é uma álgebra alternativa que contém \mathbb{O} como uma subálgebra unitária. Então, pela demonstração do Teorema 34, temos $E = \sum \oplus \text{Reg } \mathbb{O}$. Portanto, $V = \sum \oplus \text{Reg } \mathbb{O}$, isto mostra que, V é completamente redutível.

Isto prova o Teorema.

Q.E.D.

A seguir, generalizamos o Teorema 34 para as superálgebras alternativas unitárias, mas para isso precisamos primeiro o seguinte resultado.

Lema 17 *Seja $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus M$ uma superálgebra alternativa tal que \mathcal{A} contém uma subsuperálgebra U separável de dimensão finita. Consideremos $\Omega = \{a \in \mathcal{A} : [a, U] = 0\}$, onde $[a, u] = au - (-1)^{|a||u|}ua$ para todo $u \in U$. Então, Ω é uma subsuperálgebra de \mathcal{A} e*

$$(au)(bv) = (-1)^{|u||b|}(ab)(uv)$$

é válida para todo $a, b \in U$ e $u, v \in \Omega$.

Demonstração: Considere as envolventes de Grassmann $\Gamma(\mathcal{A})$ e $\Gamma(U)$, respectivamente de \mathcal{A} e U . Assim, $\Gamma(\mathcal{A})$ é uma álgebra alternativa que contém uma subálgebra separável de dimensão finita $\Gamma(U)$. Portanto, pelo Lema 1 de [2], o conjunto

$$\Theta = \{\tilde{a} \in \Gamma(\mathcal{A}) : [\tilde{a}, \Gamma(U)] = 0\}$$

é uma subálgebra de $\Gamma(\mathcal{A})$. Além disso, $(\Gamma(\mathcal{A}), \Gamma(U), \Theta) = 0$.

Vamos mostrar que $\Theta = \Gamma(\Omega)$. Seja \tilde{a} um elemento homogêneo de Θ , isto é, $\tilde{a} = g_a \otimes a$ onde $g_a \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e $a \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ tem a mesma paridade. Então, para todo elemento homogêneo $\tilde{x} = g_x \otimes x \in \Gamma(U)$

$$0 = [\tilde{a}, \tilde{x}] = g_a g_x \otimes (ax - (-1)^{|a||x|}xa) = g_a g_x \otimes [a, x]$$

e como $g_a g_x$ é um elemento da base da álgebra de Grassmann, temos $[a, x] = 0$ para todo $x \in U_0 \cup U_1$. Logo, $a \in \Omega$; portanto $\tilde{a} \in \Gamma(\Omega)$ e $\Theta \subseteq \Gamma(\Omega)$. Agora, seja \tilde{a} um elemento homogêneo de $\Gamma(\Omega)$, isto é, $\tilde{a} = g_a \otimes a$ para $a \in \Omega_0 \cup \Omega_1$. Então, $[a, x] = 0$ para todo $x \in U_0 \cup U_1$. Assim,

$$[\tilde{a}, \tilde{x}] = [g_a \otimes a, g_x \otimes x] = g_a g_x \otimes [a, x] = 0$$

para todo $\tilde{x} \in \Gamma(U)$. Logo, $\tilde{a} \in \Theta$; portanto $\Gamma(\Omega) \subseteq \Theta$.

Assim, $(\Gamma(\mathcal{A}), \Gamma(U), \Gamma(\Omega)) = 0$. Voltando para as superálgebras, Ω é uma subsuperálgebra de \mathcal{B} e a última igualdade implica $(\mathcal{A}, U, \Omega) = 0$. Além disso, pelo Lema 1 de [2] $(\tilde{a}\tilde{u})(\tilde{b}\tilde{v}) = (\tilde{a}\tilde{b})(\tilde{u}\tilde{v})$ para to $\tilde{a}, \tilde{b} \in \Gamma(U)$ e $\tilde{u}, \tilde{v} \in \Gamma(\Omega)$, isto é, $\tilde{a} = g_a \otimes a$, $\tilde{b} = g_b \otimes b$, $\tilde{u} = g_u \otimes u$, $\tilde{v} = g_v \otimes v$

$$(\tilde{a}\tilde{u})(\tilde{b}\tilde{v}) = (\tilde{a}\tilde{b})(\tilde{u}\tilde{v}),$$

$$(g_a g_u \otimes au)(g_b g_v \otimes bv) = (g_a g_b \otimes ab)(g_u g_v \otimes uv),$$

$$g_a g_u g_b g_v \otimes (au)(bv) = g_a g_b g_u g_v \otimes (ab)(uv),$$

mas $g_b g_u = (-1)^{|b||u|}g_u g_b$. Então, $g_a g_u g_b g_v \otimes ((au)(bv) - (-1)^{|b||u|}(ab)(uv)) = 0$ e, como $g_a g_u g_b g_v$ é um elemento da base de Γ , temos $(au)(bv) = (-1)^{|b||u|}(ab)(uv)$ para todo $a, b \in U$ e $u, v \in \Omega$.

Isso prova o Lema.

Q.E.D.

No que segue, provamos um Teorema de Fatorização de Kronecker para as superálgebras alternativas, onde a parte par da superálgebra contém \mathbb{O} com o mesmo elemento identidade.

Teorema 36 *Seja $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus M$ uma superálgebra alternativa, tal que, \mathcal{B} contém \mathbb{O} e ambos tem o mesmo elemento identidade de \mathcal{A} . Então, $\mathcal{A} \cong \Omega \otimes_F \mathbb{O}$ para uma certa superálgebra associativa e comutativa Ω .*

Demonstração: Sabemos que \mathcal{B} é uma subálgebra alternativa de \mathcal{A} que contém \mathbb{O} e ambos têm a mesma identidade de \mathcal{A} . Consideremos \mathcal{B} como um \mathbb{O} -bimódulo alternativo unitário. Então, pelo Teorema 35, \mathcal{B} é completamente redutível, isto implica que, o bimódulo \mathcal{B} contém um conjunto de elementos $\{u_i\}$ (as imagens de 1 nos isomorfismos com $\text{Reg } \mathbb{O}$), tais que, $\mathcal{B} = \sum u_i \mathbb{O}$ e cada elemento de \mathcal{B} pode ser escrito em uma única forma, da forma $\sum u_i a_i$ onde $a_i \in \mathbb{O}$.

Além disso, como \mathcal{A} é uma superálgebra alternativa, temos que, M é um \mathcal{B} -bimódulo alternativo unitário; em particular, M é um \mathbb{O} -bimódulo. Assim, como no paragrafo acima, o bimódulo M contém um conjunto de elementos $\{v_j\}$ (as imagens de 1 nos isomorfismos com $\text{Reg } \mathbb{O}$), tais que, $M = \sum v_j \mathbb{O}$ e cada elemento de M pode ser escrito em uma única forma, da forma $\sum v_j a_j$ onde $a_j \in \mathbb{O}$.

Seja $\Omega = \{x \in \mathcal{A}; [x, \mathbb{O}] = 0\}$. Pelo Lema 17, Ω é uma subsuperálgebra e $(\mathcal{A}, \mathbb{O}, \Omega) = 0$; em particular $(\Omega, \mathbb{O}, \Omega) = (\mathbb{O}, \mathbb{O}, \Omega) = 0$. Claramente $u_i, v_j \in \Omega$. Por outro lado, seja $x = \sum u_i a_i + \sum v_j a_j \in \Omega$, $a_i, a_j \in \mathbb{O}$. Então, $ax = xa$ para todo $a \in \mathbb{O}$, isto é,

$$\begin{aligned} \sum au_i a_i + \sum av_j a_j &= \sum u_i a_i a + \sum v_j a_j a, \\ \sum u_i a a_i + \sum v_j a a_j &= \sum u_i a_i a + \sum v_j a_j a. \end{aligned}$$

Portanto, $aa_i = a_i a$ e $aa_j = a_j a$. Como \mathbb{O} é central, isso implica, $a_i = \lambda_i 1$ e $a_j = \lambda_j 1$, onde λ_i e λ_j estão no corpo F . Portanto, Ω é o espaço gerado pelos u_i e os v_j , isto é,

$$\Omega = \sum F u_i \oplus \sum F v_j.$$

Logo, é claro que $\mathcal{A} = \Omega \otimes_F \mathbb{O}$.

Fixemos elementos arbitrários $x, y, z \in \Omega$ e $a, b, c \in \mathbb{O}$. Como \mathbb{O} contém \mathbb{H} , escolha elementos $a, b \in \mathbb{H}$ tais que $[a, b]^2 = \alpha \in F$, $\alpha \neq 0$. Então, pela superlinearização de (3.18), obtemos

$$\begin{aligned} [a, b](x, y, z) &= \pm [a, y](x, b, z) \pm [x, b](a, y, z) \pm [x, y](a, b, z) \pm (a, b, (x, y, z)) \\ &\quad \pm (a, y, (x, b, z)) \pm (x, b, (a, y, z)) \pm (x, y, (a, b, z)) = 0. \end{aligned}$$

Similarmente, $(x, y, z)[a, b] = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha(x, y, z) = [a, b]^2(x, y, z) &= [a, b]([a, b](x, y, z)) \\ &\quad \pm ([a, b](x, y, z))[a, b] - [a, b]((x, y, z)[a, b])) = 0 \end{aligned}$$

e $(x, y, z) = 0$; portanto, Ω é associativa.

Aplicando novamente a superlinearização de (4.18), temos

$$\begin{aligned} [x, y](a, b, c) &= \pm [a, y](x, b, c) \pm [x, b](a, y, c) \pm [a, b](x, y, c) \pm (x, y, (a, b, c)) \\ &\quad \pm (a, y, (x, b, c)) \pm (x, b, (a, y, c)) \pm (a, b, (x, y, c)) = 0. \end{aligned}$$

Podemos escrever o produto anterior como $[x, y] \otimes (a, b, c) = 0$. Assim, como \mathbb{O} é não associativa, existem $a, b, c \in \mathbb{O}$, tais que, $(a, b, c) \neq 0$. Então, $[x, y] = 0$ e $[\Omega, \Omega] = 0$; portanto, Ω é uma superálgebra associativa e comutativa.

Isso prova o Teorema.

Q.E.D.

Seja \mathcal{A} uma arbitrária superálgebra e U uma subsuperálgebra de \mathcal{A} . O conjunto

$$C_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \{a \in \mathcal{A} \mid [a, \mathcal{B}] = 0\}$$

é chamado o *centralizador* de U em \mathcal{A} .

Usando a envolvente de Grassmann e a definição de centralizador, podemos dar uma outra demonstração do teorema 36:

Demonstração: Consideremos a envolvente de Grassmann $\Gamma(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} . Identificando \mathbb{O} com $1 \otimes \mathbb{O} \subseteq \Gamma_0 \otimes \mathcal{B}$, concluímos, pelo Teorema 34 que, existe uma álgebra associativa e comutativa Z tal que $\Gamma(\mathcal{A}) \cong Z \otimes \mathbb{O}$, onde Z é o centralizador de \mathbb{O} em $\Gamma(\mathcal{A})$.

Denotemos por Ω o centralizador de \mathbb{O} em \mathcal{A} . Seja \tilde{a} um elemento homogêneo de Z , isto é, $\tilde{a} = g_a \otimes a$ onde $a \in \mathcal{A}$ é um elemento homogêneo, tal que, $[\tilde{a}, x] = 0$ para todo $x \in \mathbb{O}$. Como $x = 1 \otimes x$, então $0 = [\tilde{a}, x] = [g_a \otimes a, 1 \otimes x] = g_a \otimes [a, x]$ e como g_a é um elemento da base da álgebra de Grassmann, temos $[a, x] = 0$ para todo $x \in \mathbb{O}$. Logo, $a \in \Omega$; portanto $\tilde{a} \in \Gamma(\Omega)$ e $Z \subseteq \Gamma(\Omega)$. Agora, seja $\tilde{a} \in \Gamma(\Omega)$, isto é, $\tilde{a} = g_a \otimes a$ para $a \in \Omega$ homogêneo. Então,

$$[\tilde{a}, x] = [g_a \otimes a, 1 \otimes x] = g_a \otimes [a, x] = 0$$

para todo $x \in \mathbb{O}$. Logo, $\tilde{a} \in Z$ e $\Gamma(\Omega) \subseteq Z$. Assim, $Z = \Gamma(\Omega)$, isto é, o centralizador de \mathbb{O} na envolvente de Grassmann de \mathcal{A} é a envolvente de Grassmann do centralizador de \mathbb{O} em \mathcal{A} ; portanto $\mathcal{A} \cong (\Omega_0 + \Omega_1) \otimes_F \mathbb{O}$, onde $\Omega = \Omega_0 + \Omega_1$ é uma superálgebra associativa e comutativa de \mathcal{A} .

Q.E.D.

A seguir, vamos supor que a característica do corpo F é diferente de 2.

N. A. Pisarenko [11] mostrou que cada bimódulo alternativo unitário sobre $M_{(1|1)}(F)$ é associativo e completamente redutível e, os únicos $M_{(1|1)}(F)$ -bimódulos irredutíveis são o bimódulo regular $\text{Reg } M_{(1|1)}(F)$ e seu oposto.

Vamos provar para a superálgebra associativa unitária $M_{(1|1)}(F)$ um análogo do teorema de Fatorização de Kronecker de N. Jacobson [2].

Teorema 37 *Seja \mathcal{A} uma superálgebra alternativa tal que \mathcal{A} contém $M_{(1|1)}(F)$ com o mesmo elemento identidade. Então, $\mathcal{A} \cong U \tilde{\otimes}_F M_{(1|1)}(F)$ para uma certa superálgebra associativa U .*

Demonstração: Considere \mathcal{A} como um $M_{(1|1)}(F)$ -bimódulo alternativo unitário. Por [11], temos $\mathcal{A} = \sum_i u_i M_{(1|1)}(F)$, onde $u_i \in Z_a(\mathcal{A}) = \{u \in \mathcal{A} : [u, M_{(1|1)}(F)] = 0\}$. Se $U = Z_a$. Então, $\mathcal{A} = U M_{(1|1)}(F)$ e mostraremos que U é a superálgebra desejada.

Primeiro mostraremos que U é uma subsuperálgebra de \mathcal{A} . Consideremos elementos arbitrários $u, v, w \in U$ e $a, b, c \in M_{(1|1)}(F)$. Assim, pelo fato que \mathcal{A} é um $M_{(1|1)}(F)$ -bimódulo associativo, isto é, $(\mathcal{A}, M_{(1|1)}(F), M_{(1|1)}(F)) = 0$ e, pelas superlinearizações de (3.18) e (3.19), temos

$$\begin{aligned} [a, b](u, v, c) &= \pm [u_i, b](a, v, c) \pm [a, v](u, b, c) \pm [u, v](a, b, c) \pm (a, b, (u, v, c)) \\ &\quad \pm (u, b, (a, v, c)) \pm (a, v, (u, b, c)) \pm (u, v, (a, b, c)) \\ &= \pm (a, b, (u, v, c)) \\ &= \pm ((u, a, b), v, c) \pm (u, (v, a, b), c) \pm (u, v, (c, a, b)) \\ &\quad \pm [v, (u, c, [a, b])] \pm ([u, c], v, [a, b]) = 0. \end{aligned}$$

Similarmente $(u, v, c)[a, b] = 0$. Escolhendo elementos homogêneos $a, b \in M_{(1|1)}(F)$ tais que $[a, b]^2 = \alpha \in F$, $\alpha \neq 0$. Então, usando a superidentidade que define a uma superálgebra alternativa, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha(u, v, c) = [a, b]^2(u, v, c) &= [a, b]([a, b](u, v, c)) \\ &\pm(([a, b](u, v, c))[a, b] - [a, b]((u, v, c)[a, b])) = 0 \end{aligned}$$

e $(u, v, c) = 0$. Assim, $(U, U, M_{(1|1)}(F)) = 0$. Logo, pela seguinte identidade

$$(4.3) \quad [xy, z] - x[y, z] - (-1)^{|y||z|}[x, z]y - 3(x, y, z) = 0$$

que é válida em toda superálgebra alternativa (veja [15])

$$[uv, c] = \pm u[v, c] \pm [u, c]v \pm 3(u, v, c) = 0;$$

portanto $UU \subseteq U$.

Além disso, de novo pela superlinearização de (3.18), temos

$$\begin{aligned} [a, b](u, v, w) &= \pm[u_i, b](a, v, w) \pm [a, v](u, b, w) \pm [u, v](a, b, w) \pm (a, b, (u, v, w)) \\ &\pm(u, b, (a, v, w)) \pm (a, v, (u, b, w)) \pm (u, v, (a, b, w)) = 0. \end{aligned}$$

Similarmente $(u, v, w)[a, b] = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha(u, v, w) = [a, b]^2(u, v, w) &= [a, b]([a, b](u, v, w)) \\ &\pm(([a, b](u, v, w))[a, b] - [a, b]((u, v, w)[a, b])) = 0, \end{aligned}$$

o qual, implica $(u, v, w) = 0$. Portanto, U é associativa.

É claro que \mathcal{A} é a imagem homomórfica de $U \widetilde{\otimes}_F M_{(1|1)}(F)$. Suponha que $w = u_1 e_{11} + u_2 e_{22} + u_{12} e_{12} + u_{21} e_{21} = 0$ para alguns $u_i, u_{ij} \in U$. Então, como \mathcal{A} é $M_{(1|1)}(F)$ -bimódulo associativo, temos

$$0 = we_{11} = u_1 e_{11} + u_{21} e_{21}$$

$$0 = we_{22} = u_2 e_{22} + u_{12} e_{12}.$$

Multiplicar à primeira equação separadamente pela esquerda por e_{11} e e_{12} , assim $0 = u_1 e_{11}$ e $0 = u_{21} e_{11}$. Logo,

$$0 = (e_{21}(u_1 e_{11}))e_{12} = u_1 e_{22},$$

$$0 = (e_{21}(u_{21} e_{11}))e_{12} = u_{21} e_{22}.$$

Então,

$$0 = u_1 e_{11} + u_1 e_{22} = u_1$$

$$0 = u_{21} e_{11} + u_{21} e_{22} = u_{21}.$$

Similarmente, de $0 = we_{22} = u_2 e_{22} + u_{12} e_{12}$ segue $u_2 = u_{12} = 0$. Portanto, $\mathcal{B} \cong U \widetilde{\otimes}_F M_{(1|1)}(F)$.

Isto prova o Teorema.

Q.E.D.

Corolário 38 *Seja \mathcal{A} uma superálgebra alternativa, tal que, \mathcal{A} contém $M_{(1|1)}(F)$ com o mesmo elemento identidade. Então, \mathcal{A} é uma superálgebra associativa.*

O corolário 38 responde ao análogo do problema de N. Jacobson para as superálgebras alternativas sobre corpos de característica diferente de 2.

Observação 39 *Se a característica do corpo F for 2, a superálgebra $M_{(1|1)}(F)$ possui um bimódulo de Cayley irredutível unitário que não é associativo (veja, [17]).*

No que segue, vamos supor que a característica do corpo F é igual a 2.

Maria Trushina e Ivan Shestakov [17] mostraram os seguintes resultados:

Teorema 40 *Seja V um bimódulo alternativo irredutível fiel sobre a superálgebra $\mathbb{O}(4|4)$. Então, V é isomorfo a $\text{Reg}\mathbb{O}(4|4)$ ou a seu oposto.*

Teorema 41 *Seja V um bimódulo alternativo irredutível fiel sobre a superálgebra $\mathbb{O}[u]$. Então, V é isomorfo a $\text{Reg}\mathbb{O}[u]$ ou a seu oposto.*

Nos seguintes resultados vamos descrever a redutibilidade completa dos bimódulos alternativos unitários sobre as superálgebras alternativas simples $\mathbb{O}(4|4)$ e $\mathbb{O}[u]$. Dividimos as provas em uma sequencia de Lemas.

Seja V um bimódulo alternativo unitário sobre a superálgebra $\mathbb{O}(4|4) = \mathbb{H} + M$, onde $M = v\mathbb{H}$. Pela Proposição 16, $V = V_a \oplus V_c$, onde V_a é um \mathbb{H} -bimódulo associativo unitário e V_c é um \mathbb{H} -bimódulo de Cayley.

Os enunciados e as demonstrações dos Lemas 18 e 19 são análogos a dos Lemas 3.1 e 3.2 de [8], por isso, vamos omitir suas demonstrações.

Lema 18 *Seja $V = V_a \oplus V_c$ um superbimódulo alternativo unitário sobre $\mathbb{O}(4|4) = \mathbb{H} + M$. Então, para qualquer $v \in V_c$, $m \in M$, $a \in \mathbb{H}$,*

$$(4.4) \quad (vm)a = (av)m, \quad a(mv) = m(va)$$

e para quaisquer $u \in V_a$, $m \in M$, $a, b \in \mathbb{H}$,

$$(4.5) \quad (um)a = (u\bar{a})m$$

$$(4.6) \quad a(mu) = m(\bar{a}u),$$

$$(4.7) \quad ((um)a)b = (um)(ba),$$

$$(4.8) \quad b(a(mu)) = (ab)(mu),$$

$$(4.9) \quad (um, a, b) = (um)[b, a],$$

$$(4.10) \quad (b, a, mu) = [b, a](mu),$$

Lema 19 *Seja $V = V_a \oplus V_c$ um superbimódulo alternativo unitário sobre $\mathbb{O}(4|4) = \mathbb{H} + M$. Então, V_aM , MV_c , V_cM e MV_c são subespaços \mathbb{H} -invariantes. Além disso, $V_aM + MV_a \subseteq V_c$ e $V_cM + MV_c \subseteq V_a$.*

Corolário 42 *Nas notações dos Lemas 18 e 19, $V_a \neq 0$.*

Demonstração: Suponha que $V_a = 0$, então pelo Lema 19 $VM = MV = 0$. Escolha $a, b \in \mathbb{H}$, tais que, $\alpha = [a, b]^2 \neq 0$ ($\alpha \in F$). Para qualquer $w \in V$, por (4.2)

$$\begin{aligned} \alpha\gamma w &= w(\gamma[a, b]\overline{[b, a]}) \\ &= w((v[\bar{b}, \bar{a}])(v[a, b])) \\ &= (w(v[\bar{b}, \bar{a}])(v[a, b])) + ((v[\bar{b}, \bar{a}])w)(v[a, b]) - (v[\bar{b}, \bar{a}])(w(v[a, b])) = 0. \end{aligned}$$

Como $\alpha, \gamma \neq 0$, temos $w = 0$, uma contradição.

Q.E.D.

Lema 20 *Seja $V = V_a \oplus V_c$ um superbimódulo alternativo unitário sobre $\mathbb{O}(4|4) = \mathbb{H} + M$ e $Z_a = \{v \in V_a \mid [v, \mathbb{H}] = 0\}$. Então, $Z_a \neq 0$ e satisfaz as seguintes condições:*

- i) $[Z_a, \mathbb{O}(4|4)] = 0$,
- ii) $(Z_a, \mathbb{O}(4|4), \mathbb{O}(4|4)) = 0$.

Demonstração: Pelo Corolário 42, $V_a \neq 0$ e é um \mathbb{H} -bimódulo associativo unitário completamente redutível, isto é, $V_a = \sum \oplus W_i$, onde $W_i \simeq \text{Reg } \mathbb{H}$. Assim, V_a contem uma família $\{u_i\}$ (as imagens de 1 no isomorfismo com $\text{Reg } \mathbb{H}$), tais que, $V_a = \sum \oplus u_i \mathbb{H}$. Agora, é claro que $Z_a \neq 0$.

Fixemos elementos arbitrários $u, v, w \in Z_a$, $m, n \in M$ e $a, b, c \in \mathbb{H}$. Vamos mostrar primeiro que

$$(4.11) \quad (Z_a, \mathbb{H}, M) = 0.$$

Pelos Lemas 18 e 19, temos

$$(a, u, m) = (au)m - a(um) = (au)m - (um)\bar{a} \stackrel{(5.5)}{=} (au)m - (ua)m = [a, u]m = 0,$$

o qual prova (4.11). Além disso, pela superlinearização de (3.21)

$$([u, m], a, b) = ([u, a], m, b) + [m, (u, a, b)] + [a, (u, m, b)] = 0.$$

Portanto, $([Z_a, M], \mathbb{H}, \mathbb{H}) = 0$, isto é, $[Z_a, M] \subseteq V_a$. Como $[Z_a, M] \subseteq V_c$, então

$$[Z_a, M] \subseteq V_a \cap V_c = 0,$$

o qual, implica $[Z_a, M] = 0$. Isto prova *i*).

Pelas superlinearizações de (3.18) e (3.19) e, escolhendo $a, b \in \mathbb{H}$ tais que $[a, b]^2 = \alpha \in F$, $\alpha \neq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} [a, b](u, m, n) &= [u, b](a, m, n) + [a, m](u, b, n) + [u, m](a, b, n) + (a, b, (u, m, n)) \\ &\quad + (u, b, (a, m, n)) + (a, m, (u, b, n)) + (u, m, (a, b, n)) \\ &= (u, m, (a, b, n)) \\ &= ((u, m, a), b, n) + ((u, b, n), m, a) + (u, (m, b, n), a) \\ &\quad + [m, (u, a, [b, n])] + ([u, a], m, [b, n]) = 0. \end{aligned}$$

De forma análoga, $(u, m, n)[a, b] = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha(u, m, n) = [a, b]^2(u, m, n) &= [a, b]([a, b](u, m, n)) \\ &\quad + (([a, b](u, m, n))[a, b] - [a, b]((u, m, n)[a, b])) = 0 \end{aligned}$$

e $(u, m, n) = 0$; assim $(Z_a, M, M) = 0$. Isto prova *ii*).

Isto prova o Lema.

Q.E.D.

Teorema 43 *Cada bimódulo alternativo unitário sobre a superálgebra $\mathbb{O}(4|4)$ é completamente redutível.*

Demonstração: Seja V um $\mathbb{O}(4|4)$ -bimódulo alternativo unitário. Então, pela Proposição 16, $V = V_a \oplus V_c$, onde V_a é um \mathbb{H} -bimódulo associativo e V_c é um \mathbb{H} -bimódulo de Cayley. Além disso, o bimódulo V_a é isomorfo a uma soma direta de \mathbb{H} -bimódulos regulares: $V_a = \bigoplus_i V_i$, onde para cada i , $V_i = u_i \mathbb{H}$ e $u_i \in Z_a(V_i)$ é a imagem da identidade 1 no isomorfismo $\varphi : a \mapsto u_i a$ dos \mathbb{H} -bimódulos $\text{Reg } \mathbb{H}$ e V_i . Em particular, como $1a = a1$ para todo $a \in \mathbb{H}$, aplicando φ temos $u_i a = a u_i$; assim $[u_i, \mathbb{H}] = 0$. Portanto, $u_i \in Z_a = Z_a(V) = \{v \in V_a : [v, \mathbb{H}] = 0\}$. Pelo Lema 20, temos $Z_a \neq 0$ e

$$(Z_a, \mathbb{O}(4|4), \mathbb{O}(4|4)) = [Z_a, \mathbb{O}(4|4)] = 0.$$

Consideremos $W = \sum_i u_i \mathbb{O}(4|4)$. É claro que W é um $\mathbb{O}(4|4)$ -subbimódulo de V e

$$W = \sum_i u_i \mathbb{O}(4|4) \supseteq \sum_i u_i \mathbb{H} = V_a.$$

Seja $w \in V_c$. Então,

$$\begin{aligned} \alpha\beta w &= w(\alpha[a, b] \overline{[b, a]}) \\ &= w((v[\bar{b}, \bar{a}])(v[a, b])) \\ &= (w(v[\bar{b}, \bar{a}])(v[a, b])) + ((v[\bar{b}, \bar{a}])w)(v[a, b]) - (v[\bar{b}, \bar{a}])(w(v[a, b])). \end{aligned}$$

Pelo Lema 19 $w(v[\bar{b}, \bar{a}])(v[\bar{b}, \bar{a}])w$, $w(v[a, b]) \in V_a$; assim $w \in W$. Portanto, $V_c \subseteq W$ e $W = V$. Como cada bimódulo $u_i \mathbb{O}(4|4)$ é irredutível; portanto $V = W$ é completamente redutível.

Isto prova o Teorema.

Q.E.D.

Teorema 44 *Cada bimódulo alternativo unitário sobre a superálgebra $\mathbb{O}[u]$ é completamente redutível.*

Demonstração: Seja V um $\mathbb{O}[u]$ -bimódulo alternativo unitário. Como a álgebra de Cayley-Dickson \mathbb{O} é uma subálgebra da superálgebra alternativa $\mathbb{O}[u]$, podemos considerar V como um \mathbb{O} -bimódulo alternativo unitário. Então, pelo Teorema 35, V é completamente redutível, isto é, $V = \sum \oplus V_i$ e existe uma família $\{u_i\}$ de elementos de V (as imagens de 1 no isomorfismo com $\text{Reg } \mathbb{O}$), tais que, $[u_i, \mathbb{O}] = 0$ e $V_i = u_i \mathbb{O} \simeq \text{Reg } \mathbb{O}$. Além disso, na prova do Teorema 6.1 de [17] tem-se mostrado que $(V_i, u, \mathbb{O}[u]) = [V_i, u] = 0$ para cada i ; assim $[u_i, u] = 0$. Então, pela superlinearização de (3.15) e para todo $a \in \mathbb{O}$, temos

$$[u_i, au] = [u_i, a]u + a[u_i, u] + 3(u_i, a, u) = 0;$$

assim $[u_i, \mathbb{O}u] = 0$. Portanto, $[u_i, \mathbb{O}[u]] = [u_i, \mathbb{O}] + [u_i, \mathbb{O}u] = 0$.

Também, pela superlinearização de (3.15)

$$3(\mathbb{O}[u], \mathbb{O}[u], u_i) \subseteq [\mathbb{O}[u]\mathbb{O}[u], u_i] + \mathbb{O}[u][\mathbb{O}[u], u_i] + [\mathbb{O}[u], u_i]\mathbb{O}[u] = 0;$$

portanto $(\mathbb{O}[u], \mathbb{O}[u], u_i) = 0$.

Consideremos $W = \sum_i u_i \mathbb{O}[u]$. É claro que W é um $\mathbb{O}[u]$ -subbimódulo de V e

$$W = \sum_i u_i \mathbb{O}[u] \supseteq \sum_i u_i \mathbb{O} = V.$$

Como cada bimódulo $u_i \mathbb{O}[u]$ é irredutível; portanto $V = W$ é completamente redutível.

Isto prova o Teorema.

Q.E.D.

No que segue, provamos para as superálgebras alternativas simples $\mathbb{O}(4|4)$ e $\mathbb{O}[u]$ uns análogos do Teorema de Fatorização de Kronecker.

Teorema 45 *Seja \mathcal{A} uma superálgebra alternativa, tal que, \mathcal{A} contem $\mathbb{O}(4|4)$ com o mesmo elemento identidade. Então, $\mathcal{A} \cong U \otimes_F \mathbb{O}(4|4)$ para uma certa superálgebra associativa e comutativa U .*

Demonstração: Considere \mathcal{A} como um $\mathbb{O}(4|4)$ -bimódulo alternativo unitário. Pelo Teorema 43, $\mathcal{A} = \sum_i u_i \mathbb{O}(4|4)$, onde $u_i \in Z_a = Z_a(\mathcal{A}) = \{u \in \mathcal{A} : [u, \mathbb{O}(4|4)] = 0\}$ é um elemento homogêneo. Se denotamos $U = Z_a$. Então, $\mathcal{A} = U \mathbb{O}(4|4)$. Além disso, pelo Lema 20, $U \neq 0$ e $[U, \mathbb{O}(4|4)] = (U, \mathbb{O}(4|4), \mathbb{O}(4|4)) = 0$. Mostraremos que U é a desejada superálgebra.

Fixemos elementos arbitrários $u, w \in U$, $a, b, c \in \mathbb{O}(4|4)$ e $m \in M = v\mathbb{H}$.

Se $a, b, c \in \mathbb{H}$. Então, pela superlinearização de (3.18) e (3.19), e escolhendo $a, b \in \mathbb{H}$, tais que, $[a, b]^2 = \alpha \in F$, $\alpha \neq 0$, temos para qualquer $x \in U$

$$\begin{aligned} [a, b](u, x, c) &= [u, b](a, x, c) + [a, x](u, b, c) + [u, x](a, b, c) + (a, b, (u, x, c)) \\ &\quad + (u, b, (a, x, c)) + (a, x, (u, b, c)) + (u, x, (a, b, c)) \\ &= (a, b, (u, x, c)) \\ &= ((u, a, b), x, c) + (u, (x, a, b), c) + (u, x, (c, a, b)) \\ &\quad + [x, (u, c, [a, b])] + ([u, c], x, [a, b]) = 0. \end{aligned}$$

De forma análoga, $(u, x, c)[a, b] = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha(u, x, c) &= [a, b]^2(u, x, c) \\ &= [a, b]([a, b](u, x, c)) + (([a, b](u, x, c))[a, b] - [a, b]((u, x, c)[a, b])) = 0; \end{aligned}$$

assim, $(u, x, c) = 0$; portanto $(U, U, \mathbb{H}) = 0$. Novamente, pela superlinearização de (3.18) e (3.19)

$$\begin{aligned} [a, b](u, n, v) &= [u, b](a, n, v) + [a, n](u, b, v) + [u, n](a, b, v) + (a, b, (u, n, v)) \\ &\quad + (u, b, (a, n, v)) + (a, n, (u, b, v)) + (u, n, (a, b, v)) \\ &= (a, b, (u, n, v)) \\ &= ((u, n, a), b, v) + ((u, b, v), n, a) + (u, (n, b, v), a) \\ &\quad + [n, (u, a, [b, v])] + ([u, a], n, [b, v]) = 0. \end{aligned}$$

Similarmente, $(u, n, v)[a, b] = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha(u, n, v) &= [a, b]^2(u, n, v) \\ &= [a, b]([a, b](u, n, v)) + ([a, b](u, n, v))[a, b] + [a, b]((u, n, v)[a, b]) = 0 \end{aligned}$$

e $(u, n, v) = 0$; logo, $(U, M, U) = 0$. Portanto, $(U, U, \mathbb{O}(4|4)) = 0$.

Além disso, pela superlinearização de (3.15)

$$[uv, a] = u[v, a] + [u, a]v + 3(u, v, a) = 0,$$

temos $U^2 \subseteq U$. Portanto, U é uma subsuperálgebra de \mathcal{A} .

Seja $x = \sum u_i a_i \in U$, $a_i \in \mathbb{O}(4|4)$. Então, $ax = xa$ para todo $a \in \mathbb{O}(4|4)$, isto é,

$$\sum a u_i a_i = \sum u_i a_i a,$$

$$\sum u_i a a_i = \sum u_i a_i a.$$

Portanto, $aa_i = a_i a$ e $aa_j = a_j a$. Como $\mathbb{O}(4|4)$ é central, isso, implica $a_i = \lambda_i 1$ e $a_j = \lambda_j 1$, onde λ_i e λ_j estão no corpo F . Portanto, U é o espaço gerado pelos u_i . Logo, é claro que $\mathcal{A} \cong U \otimes_F \mathbb{O}(4|4)$.

Escolha $a, b \in \mathbb{H}$, tais que, $[a, b]^2 = \alpha \in F$, $\alpha \neq 0$. Pela superlinearização de (3.18), obtemos

$$\begin{aligned} [a, b](u, v, w) &= [a, v](u, b, w) + [u, b](a, v, w) + [u, v](a, b, w) + (a, b, (u, v, w)) \\ &\quad + (a, v, (u, b, w)) + (u, b, (a, v, w)) + (u, v, (a, b, w)) = 0. \end{aligned}$$

Similarmente, $(u, v, w)[a, b] = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \alpha(u, v, w) = [a, b]^2(u, v, w) &= [a, b]([a, b](u, v, w)) \\ &\quad + (([a, b](u, v, w))[a, b] - [a, b]((u, v, w)[a, b])) = 0 \end{aligned}$$

e $(u, v, w) = 0$. Portanto, U é associativo.

Aplicando novamente a superlinearização de (3.18), temos

$$\begin{aligned} [u, v](a, b, c) &= [a, v](u, b, c) + [u, b](a, v, c) + [a, b](u, v, c) + (u, v, (a, b, c)) \\ &\quad + (a, v, (u, b, c)) + (u, b, (a, v, c)) + (a, b, (u, v, c)) = 0. \end{aligned}$$

Podemos escrever o produto anterior como $[u, v] \otimes (a, b, c) = 0$. Assim, como $\mathbb{O}(4|4)$ é não associativa, existem $a, b, c \in \mathbb{O}(4|4)$, tais que, $(a, b, c) \neq 0$. Então, $[u, v] = 0$ e $[U, U] = 0$; portanto, U é uma superálgebra associativa e comutativa.

Isto prova o Teorema.

Q.E.D.

Teorema 46 *Seja \mathcal{A} uma superálgebra alternativa, tal que, \mathcal{A} contém $\mathbb{O}[u]$ com o mesmo elemento identidade. Então, $\mathcal{A} \cong \mathcal{U} \otimes_F \mathbb{O}[u]$ para uma certa superálgebra associativa e comutativa \mathcal{U} .*

Demonstração: Considere \mathcal{A} como um $\mathbb{O}[u]$ -bimódulo alternativo unitário. Então, pelo Teorema 44, $\mathcal{A} = \sum_i u_i \mathbb{O}[u]$, onde $u_i \in Z_a = \{x \in \mathcal{A} : [x, \mathbb{O}[u]] = 0\}$ é um elemento homogêneo. Denotemos $\mathcal{U} = Z_a$. Então, $\mathcal{A} = \mathcal{U} \mathbb{O}[u]$, mostraremos que \mathcal{U} é a desejada superálgebra.

Provamos primeiro que \mathcal{U} é uma subsuperálgebra de \mathcal{A} . Fixemos elementos arbitrários $x, y, z \in \mathcal{U}$ e $a, b, c \in \mathbb{O}[u]$. Então, $\mathcal{U} \neq 0$ e $[\mathcal{U}, \mathbb{O}[u]] = 0$. Então, pela superlinearização de (3.15)

$$3(\mathbb{O}[u], \mathbb{O}[u], \mathcal{U}) \subseteq [\mathbb{O}[u] \mathbb{O}[u], \mathcal{U}] + \mathbb{O}[u][\mathbb{O}[u], \mathcal{U}] + [\mathbb{O}[u], \mathcal{U}] \mathbb{O}[u] = 0;$$

portanto $(\mathbb{O}[u], \mathbb{O}[u], \mathcal{U}) = 0$. Em particular, $(\mathbb{O}, \mathbb{O}, \mathcal{U}) = 0$. Assim, como na prova do Teorema 44, obtemos $(\mathbb{O}, \mathcal{U}, \mathcal{U}) = 0$.

Seja $x = \sum u_i a_i \in \mathcal{U}$, $a_i \in \mathbb{O}[u]$. Então, $ax = xa$ para todo $a \in \mathbb{O}[u]$, isto é,

$$\sum a u_i a_i = \sum u_i a_i a,$$

$$\sum u_i a a_i = \sum u_i a_i a.$$

Portanto, $aa_i = a_i a$ e $aa_j = a_j a$. Como $\mathbb{O}[u]$ é central, isso, implica $a_i = \lambda_i 1$ e $a_j = \lambda_j 1$, onde λ_i e λ_j estão no corpo F . Portanto, U é o espaço gerado pelos u_i . Portanto, é claro que $\mathcal{A} \cong \mathcal{U} \otimes_F \mathbb{O}[u]$.

Pela superlinearização de (3.18) e (3.19), e escolhendo $a, b \in \mathbb{H}$ tais que $[a, b]^2 = \alpha \in F$, $\alpha \neq 0$ obtemos

$$\begin{aligned} [a, b](\mathcal{U}, u, \mathcal{U}) &\subseteq [\mathcal{U}, b](a, u, \mathcal{U}) + [a, u](\mathcal{U}, b, \mathcal{U}) + [\mathcal{U}, u](a, b, \mathcal{U}) + (a, b, (\mathcal{U}, u, \mathcal{U})) \\ &\quad + (\mathcal{U}, b, (a, u, \mathcal{U})) + (a, u, (\mathcal{U}, b, \mathcal{U})) + (\mathcal{U}, u, (a, b, \mathcal{U})) \\ &= (a, b, (\mathcal{U}, u, \mathcal{U})) \\ &\subseteq ((\mathcal{U}, a, b), u, \mathcal{U}) + (\mathcal{U}, (u, a, b), \mathcal{U}) + (\mathcal{U}, u, (\mathcal{U}, a, b)) \\ &\quad + [u, (\mathcal{U}, \mathcal{U}, [a, b])] - ([\mathcal{U}, \mathcal{U}], u, [a, b]) = 0 \end{aligned}$$

pois $(\mathcal{U}, \mathcal{U}, [a, b]) \subseteq \mathcal{A}$ e $[\mathcal{U}, \mathcal{U}] \subseteq \mathcal{A}$. Similarmente, $(\mathcal{U}, u, \mathcal{U})[a, b] = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{U}, u, \mathcal{U}) = [a, b]^2(\mathcal{U}, u, \mathcal{U}) &= [a, b]([a, b](\mathcal{U}, u, \mathcal{U})) \\ &\quad + (([a, b](\mathcal{U}, u, \mathcal{U})) [a, b] - [a, b]((\mathcal{U}, u, \mathcal{U})[a, b])) = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, $(\mathcal{U}, u, \mathcal{U}) = 0$. Também, pela superlinearização de (3.15)

$$\begin{aligned} [[x, y], a] &= [xy, a] + [yx, a] \\ &= x[y, a] + [x, a]y + 3(x, y, a) \\ &\quad + y[x, a] + [y, a]x + 3(y, x, a) = 6(x, y, a) = 0, \end{aligned}$$

isto é, $[[\mathcal{U}, \mathcal{U}], \mathbb{O}[u]] = 0$; portanto $[\mathcal{U}, \mathcal{U}] \subseteq \mathcal{U}$. Assim, pela superlinearização de (3.16)

$$(\mathbb{O}u, \mathcal{U}, \mathcal{U}) \subseteq \mathbb{O}(u, \mathcal{U}, \mathcal{U}) + (\mathbb{O}, \mathcal{U}, \mathcal{U})u + (\mathbb{O}, u, [\mathcal{U}, \mathcal{U}]) = 0;$$

e $(\mathbb{O}u, \mathcal{U}, \mathcal{U}) = 0$. Portanto, $(\mathbb{O}[u], \mathcal{U}, \mathcal{U}) = (\mathbb{O}, \mathcal{U}, \mathcal{U}) + (\mathbb{O}u, \mathcal{U}, \mathcal{U}) = 0$.

Agora, novamente pela superlinearização de (3.15) temos

$$[xy, a] = x[y, a] + [x, a]y + 3(x, y, a) = 0;$$

portanto $\mathcal{U}^2 \subseteq \mathcal{U}$. Além disso, pela superlinearização de (3.18), obtemos

$$\begin{aligned} [a, b](x, y, z) &= [a, y](x, b, z) + [x, b](a, y, z) + [x, y](a, b, z) + (a, b, (x, y, z)) \\ &\quad + (a, y, (x, b, z)) + (x, b, (a, y, z)) + (x, y, (a, b, z)) = 0. \end{aligned}$$

Similarmente, $(x, y, z)[a, b] = 0$. Escolha $a, b \in \mathbb{H}$ tais que $[a, b]^2 = \alpha \in F$, $\alpha \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned} \alpha(x, y, z) = [a, b]^2(x, y, z) &= [a, b]([a, b](x, y, z)) \\ &\quad + (([a, b](x, y, z)) [a, b] - [a, b]((x, y, z)[a, b])) = 0 \end{aligned}$$

e $(x, y, z) = 0$; portanto, \mathcal{U} é associativa.

Finalmente, pela superlinearização de (3.18), temos

$$\begin{aligned} [x, y](a, b, c) &= [a, y](x, b, c) + [x, b](a, y, c) + [a, b](x, y, c) + (x, y, (a, b, c)) \\ &\quad + (a, y, (x, b, c)) + (x, b, (a, y, c)) + (a, b, (x, y, c)) = 0. \end{aligned}$$

Podemos escrever o produto anterior como $[x, y] \otimes (a, b, c) = 0$. Assim, como $\mathbb{O}[u]$ é não associativa, existem $a, b, c \in \mathbb{O}[u]$, tais que, $(a, b, c) \neq 0$. Então, $[x, y] = 0$ e $[\mathcal{U}, \mathcal{U}] = 0$; portanto, \mathcal{U} é uma superálgebra associativa e comutativa.

Isto prova o teorema.

Referências Bibliográficas

- [1] *N. Jacobson*, Structure and Representations of Jordan Algebras. AMS, Providence, RI, 1968. [1](#), [62](#), [63](#)
- [2] *N. Jacobson*, A Kronecker factorization theorem for Cayley algebras and the exceptional simple Jordan algebra. Amer. J. Math. 76, (1954). 447-452. [1](#), [2](#), [31](#), [34](#), [65](#), [69](#), [71](#), [73](#)
- [3] *N. Jacobson*, Structure of alternative and Jordan bimodules. Osaka Math. J. 6, (1954). 1-71. [1](#), [2](#), [30](#), [31](#), [52](#), [70](#)
- [4] *I. Kaplansky*, Semi-simple alternative rings, Portugal. Math.10 (1966), 37-50. [1](#), [65](#)
- [5] *I. Kashuba, S. Ovsienko, I. Shestakov*. Representation type of Jordan algebras. Adv. Math. 226 (2011), no. 1, 385-418. [31](#), [49](#), [50](#)
- [6] E. N. Kuzmin, I. P. Shestakov, *Nonassociative structures*, VINITI, Itogi nauki i tekhniki, seria "Fundamental Branches", v.57, 179-266, Moscow, 1990; English transl. in "Encyclopaedia of Math. Sciences, v.57, Algebra VI, 199-280", edited by A.I.Kostrikin and I.R.Shafarevich, Springer-Verlag. [1](#), [2](#), [5](#)
- [7] *López-Díaz, M. C., Shestakov, Ivan P.*, Representations of exceptional simple Jordan superalgebras of characteristic 3. Comm. Algebra 33 (2005), no. 1, 331-337. [65](#)
- [8] *López-Díaz, M. C., Shestakov, Ivan P.*, Representations of exceptional simple alternative superalgebras of characteristic 3. Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), no. 7, 2745-2758. [36](#), [65](#), [75](#)
- [9] *Martínez, C., Zelmanov, E.*, A Kronecker factorization theorem for the exceptional Jordan superalgebra. Journal of Pure and Applied Algebra 177 (2003) no.1, 71-78. [65](#)
- [10] *R. S. Pierce*, Associative algebras. Springer-Verlag, N.Y., 1982. [36](#)
- [11] N. A. Pisarenko, The structure of alternative superbimodules. Algebra and Logic 33 (1995), no. 6, 386-397. [73](#)
- [12] *R. D. Schafer*, An introduction to nonassociative algebras. Academic Press, N.Y., 1966. [1](#), [2](#), [5](#), [26](#)
- [13] *R. D. Schafer*, Alternative algebras over an arbitrary field. Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943), 549-555. [31](#)
- [14] *R. D. Schafer*, Representations of alternative algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 1-17. [31](#)
- [15] *I. P. Shestakov*, Alternative and Jordan superalgebras. Siberian Adv. Math. 9 (1999), no. 2, 83-99. [2](#), [5](#), [66](#), [74](#)

- [16] *I. P. Shestakov*, Prime Alternative superalgebras of arbitrary characteristic, *Algebra i Logika*. 36 (1997), no. 6, 675-716; English transl.: *Algebra and Logic* 36, no.6 (1997), 389-420. 2, 31, 35, 38, 41, 47, 48, 63, 66, 67
- [17] *Trushina, M. N., Shestakov, I. P.*, Irreducible bimodules over alternative algebras and superalgebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* 368 (2016), no. 7, 4657-4684. 65, 75, 77
- [18] *C. T. C. Wall*, Graded Brauer groups. *Portugal. J. Reine Angew Math.* 213(1964). 2, 67
- [19] *K. Zhevlakov, I. Shestakov, A. Slin'ko, A. Štirshov*, Rings that are nearly associative, Academic Press, N.Y., 1982. 1, 2, 5, 6, 11, 15, 31, 32, 33, 38, 55, 62, 66