

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
ESCUELA DE GRADUADOS  
CONCEPCIÓN-CHILE



OPTIMIZACIÓN DE ALGORITMOS  
DE INTERSECCIÓN DE SUPERFICIES

Tesis para optar el grado de  
Doctor en Ciencias Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática

José Manuel Olivencia Quiñones

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

2002

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
ESCUELA DE GRADUADOS  
CONCEPCIÓN-CHILE

OPTIMIZACIÓN DE ALGORITMOS  
DE INTERSECCIÓN DE SUPERFICIES

Tesis para optar el grado de  
Doctor en Ciencias Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática

José Manuel Olivencia Quiñones

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA  
2002

# Índice

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>1 Marco Teórico</b>	<b>6</b>
1.1 Geometría Diferencial . . . . .	6
1.1.1 Geometría Diferencial de Curvas . . . . .	6
1.1.2 Geometría Diferencial de Superficies . . . . .	11
1.2 Representaciones de Bézier . . . . .	15
1.2.1 Curvas de Bézier . . . . .	15
1.2.2 Superficies de Bézier . . . . .	16
<b>2 Formulación del Problema</b>	<b>20</b>
2.1 Métodos de Trazado . . . . .	20
2.1.1 Fase de Búsqueda . . . . .	20
2.1.2 Fase de Trazado . . . . .	23
2.1.3 Fase de Ordenamiento . . . . .	27
2.2 El Problema . . . . .	29
<b>3 Resolviendo el Problema</b>	<b>33</b>
3.1 Sobre el Círculo Osculador . . . . .	34
3.2 Estimación del Error . . . . .	44
3.3 Solución Simbólica del Sistema de Frenet . . . . .	45
3.4 Control del Error . . . . .	50
3.5 Interpolación Adaptativa . . . . .	67
3.6 Algoritmo y Aplicaciones . . . . .	71
3.6.1 Algoritmo . . . . .	71
3.6.2 Aplicaciones . . . . .	76
<b>Conclusiones</b>	<b>88</b>
<b>A Geometría Diferencial de la Intersección</b>	<b>90</b>

<b>B La Exponencial de una Matriz</b>	<b>93</b>
B.1 Introducción . . . . .	93
B.2 Preliminares . . . . .	94
B.3 Fórmulas de Representación de Soluciones . . . . .	96
B.3.1 Autovalores Reales . . . . .	97
B.3.2 Autovalores Complejos . . . . .	98
B.4 Algoritmos y Ejemplos . . . . .	99
B.4.1 Algoritmos . . . . .	99
B.4.2 Ejemplo I . . . . .	101
B.4.3 Ejemplo II . . . . .	102
<hr/>	
<b>Bibliografía</b>	<b>104</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>107</b>

# Resumen

En general, no existe una representación en forma exacta de la intersección de dos superficies, que puede ser descompuesta en una o varias componentes. Por consiguiente, sólo los métodos aproximantes son capaces de proporcionar el cálculo de la intersección. Dado que la intersección es aproximada, ésta contiene un error.

El cálculo de la intersección debe ser hecho tan exactamente como sea posible en la evaluación de fronteras, uno de los más importantes problemas en el modelado de sólidos. Las aplicaciones a la manufactura hacen necesario especificar una tolerancia de error de modo que la desviación de la aproximación con respecto a la intersección real se mantenga siempre dentro de la tolerancia especificada. No obstante estas necesidades, no se conocen métodos capaces de controlar confiablemente el error de la aproximación.

En esta tesis se estudia cómo optimizar el proceso del cálculo de la intersección de dos superficies paramétricas de forma libre en el sentido de la exactitud. Debido a su interés práctico, se aborda aquí el caso en el cual la intersección de superficies es no singular.

Se consigue proponer un método de trazado capaz de controlar el error de la aproximación generada y con tamaño de paso adaptativo, que permite una representación segmentada óptima de la curva, a ser mecanizada, que aproxima la intersección.

# Introducción

La intersección es un problema central en modelado geométrico. Muchas aplicaciones necesitan encontrar la intersección entre dos superficies: en el modelado de sólidos, en el método de elementos finitos, en la evaluación de superficies en diseño asistido por computador y en manufactura asistida por computador.

En el modelado de sólidos, la evaluación de las fronteras del sólido, es decir, la conversión de una representación en geometría de sólidos constructiva a una representación por fronteras es uno de los problemas más importantes [9]. La confiabilidad y exactitud del cálculo de las intersecciones deben ser tan altas como sea posible en la evaluación de las fronteras de los objetos. Con geometría de sólidos constructiva [17, 24], las primitivas son posicionadas en el espacio y combinadas con las operaciones regularizadas de conjuntos (unión, diferencia e intersección), a fin de producir objetos más complejos. Estas primitivas son en principio acotadas por superficies simples. Ejemplos de primitivas simples son los paralelepípedos, los cilindros, los conos, las esferas y los toros. Es cada vez más necesario usar primitivas más complicadas, por ejemplo primitivas acotadas por superficies paramétricas segmentadas. Con representación por fronteras [17, 24], los objetos son representados por sus fronteras finitas, es decir, las faces acotando los objetos, las aristas acotando las faces y los vértices acotando las aristas. La información geométrica y topológica es representada como un grafo. Los nodos del grafo contienen la información geométrica, por ejemplo las coordenadas de un vértice o la ecuación de la superficie que define una face. La información topológica es representada por los enlaces entre los diferentes nodos. Aplicaciones del modelado de sólidos, tales como la edición local o la generación de mallas para elementos finitos, se benefician de la disponibilidad explícita de las aristas y vértices del objeto. Por consiguiente se necesita poder convertir un árbol de geometría de sólidos constructiva a una representación por fronteras con un algoritmo de evaluación de fronteras, el cual calcula las curvas de intersección entre las superficies de las primitivas en una primera etapa. El cálculo de las curvas de intersección debe ser hecho tan exactamente como sea posible, para garantizar que no aparezcan problemas en la segunda etapa del algoritmo, esto es la combinación de las superficies recortadas para construir la superficie del objeto compuesto.

En manufactura asistida por computador, la trayectoria de la herramienta en las

máquinas de control numérico es calculada a partir de la representación por fronteras del modelo geométrico las que están compuestas por superficies recortadas por sus intersecciones. Este cálculo debe ser hecho de tal manera que la trayectoria de la herramienta se mantenga dentro de una tolerancia prefijada por el diseñador de la pieza que está siendo manufacturada. Pueden distinguirse dos fuentes de error que es necesario controlar a fin de satisfacer las tolerancias: la debida al proceso de mecanizado (deformación de la herramienta y de la máquina, posicionamiento del motor, error del control del movimiento, etc.) y la debida al propio modelado geométrico. Esta última fuente de error contribuye de manera significativa en el error de manufactura, particularmente en lo referente a la intersección de superficies.

Si las superficies son de forma libre, en general, no existe una representación en forma exacta de la intersección de superficies. Por consiguiente, sólo los métodos aproximantes resultan capaces de proporcionar el cálculo de la intersección. Dado que la intersección es aproximada, contiene un error que contribuye al error de manufactura.

En general, cuando la intersección de dos superficies no es vacía, ella puede ser una colección discreta de puntos, una colección de curvas, una colección de superficies, o una combinación de los tres últimos casos. Debido a su interés práctico, por ejemplo, para modelar sólidos acotados por superficies recortadas donde es importante determinar las curvas de la intersección de superficies [1], se aborda aquí el caso en el cual la intersección de superficies es una colección de curvas. Las argumentaciones serán desarrolladas para superficies paramétricas de forma libre que producen una intersección *no singular* (esto es, una intersección en la cual las superficies nunca son tangentes).

Los métodos existentes para calcular la intersección de superficies pueden ser agrupados en cuatro categorías principales: métodos algebraicos, métodos de subdivisión, métodos de discretización y métodos de trazado, cada cual con sus propias ventajas y desventajas [19].

Cuando una superficie es dada en forma implícita y la otra en forma paramétrica, con un *método algebraico* se puede insertar la forma paramétrica en la forma implícita para obtener una ecuación para la intersección. En vista de esto, si ambas superficies son dadas en forma paramétrica, resultaría natural tratar de implicitar una de ellas. Aunque la implicitación resulta posible para las representaciones polinomiales racionales, el usual alto grado de los polinomios resultantes involucra voluminosos cálculos, lo que contribuye a una pérdida de exactitud. Los métodos analíticos se perciben poco atractivos para aplicaciones prácticas con superficies paramétricas generales de forma libre.

Básicamente, un *método de subdivisión* realiza una descomposición recursiva del problema en problemas similares y más simples hasta que se alcance un nivel de simplicidad que permita una solución directa [16, 20, 22, 13]. Un ejemplo es la intersección de planos. Esto es seguido por una fase que conecta las soluciones individuales para

así formar la solución completa. Una dificultad de los métodos de subdivisión es la de conseguir una correcta conectividad en la vecindad de puntos singulares, así mismo segmentos cerrados pequeños de la intersección pueden ser pasados por alto. Además, si se usan los métodos de subdivisión para hacer evaluaciones de alta precisión de todo el conjunto de puntos de intersección, pueden conducir a una proliferación de datos y son consecuentemente lentos y poco atractivos. Muchas aplicaciones de diseño y manufactura asistidos por computador requieren de alta precisión.

Un *método de discretización* reduce la dimensionalidad de las intersecciones de superficies calculando, por ejemplo, las intersecciones de varias curvas isoparamétricas de una superficie, las que forman una malla en tal superficie, con la otra superficie [12, 24]. Se conectan entonces los puntos de intersección obtenidos para formar las diversas componentes de la solución. Para la intersección de superficies paramétricas, los métodos de discretización se reducen a la solución de un gran número de sistemas independientes de ecuaciones, en general no lineales. La reducción de la dimensionalidad del problema en los métodos de discretización involucra una elección apropiada de la resolución de la malla. Una elección inapropiada puede provocar que los métodos pasen por alto importantes características de la solución, tales como segmentos cerrados pequeños, y así proporcionar soluciones incorrectas.

La intersección de dos superficies puede ser descompuesta en una o varias componentes conexas. La etapa de pre-procesamiento de un *método de trazado* debe servir para detectar puntos sobre cada una de las componentes conexas de la intersección. Empezando en estos puntos, el método debe construir una secuencia de puntos que están sobre la intersección [3, 6, 7, 8]. Los puntos resultantes serán posteriormente interpolados, obteniéndose de esta manera una aproximación de la intersección. Como otros métodos, los métodos de trazado son usualmente combinados, por ejemplo, con métodos de discretización, como el método presentado por H. G. Timmer [24]. En particular, combinándolos con métodos de subdivisión [5, 26], ellos conducen a algoritmos poderosos. Una importante ventaja adicional de los métodos de trazado es su aplicabilidad a tipos arbitrarios de superficie, de manera que ellos son con mucho los más ampliamente utilizados.

No hay muchos algoritmos de intersección de superficies que aborden el problema de estimar y de controlar el error de aproximación de las curvas de intersección de superficies, el cual puede ser prefijado por los requerimientos de la manufactura asistida por computador. En sus métodos de intersección de superficies, Asteasu [2], Timmer [24], Patrikalakis [25] y Wu et al. [32] no abordan el problema. Lasser [21] lo comenta someramente en conexión a las aplicaciones a la manufactura. Chen et al. [12], Faux et al. [15], Sederberg et al. [27] y Stoyanov [30] abordan el problema, pero no alcanzan un control confiable del error de la aproximación.

Las causas de esta dificultad de controlar el error de los métodos referidos se mostrarán en este trabajo. En el proyecto de esta tesis se planteó como objetivo obtener una me-

didada del error de aproximación del interpolante de los puntos de intersección obtenidos por los métodos de trazado, así como la construcción de un método de intersección capaz de encontrar una aproximación dentro de una tolerancia de error especificada con el interpolante más adecuado. En tal sentido, se propone en este trabajo una manera razonablemente global de estimar el error de la aproximación de la intersección de superficies y una manera confiable de controlar este error a fin de mantenerlo debajo de una cota especificada por las consideraciones de la manufactura. Con esto se conseguirá proponer un método de trazado capaz de controlar el error de la aproximación y con tamaño de paso adaptativo.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: En el Capítulo 1 se presentan los fundamentos teóricos que serán necesarios para el desarrollo de este trabajo. En el Capítulo 2 se formula el problema que se discute en esta tesis. En el Capítulo 3 se discute la solución del problema planteado, concluyéndose con la propuesta de un nuevo método de trazado. En el Apéndice A se muestra cómo calcular las propiedades geométrico diferenciales de la intersección. En el Apéndice B se presenta un nuevo método para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, que es utilizado en las argumentaciones presentadas.

# Capítulo 1

## Marco Teórico

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos que se necesitarán para el desarrollo de este trabajo. Estos se refieren a la geometría diferencial tridimensional y a las representaciones de Bézier de curvas y superficies.

### 1.1 Geometría Diferencial

La geometría diferencial tridimensional se refiere al estudio de las curvas y superficies en  $\mathbb{R}^3$  usando las herramientas proporcionadas por el cálculo diferencial. En esta sección sólo se presentan los conceptos y resultados de la geometría diferencial de curvas y superficies que serán de utilidad para este trabajo.

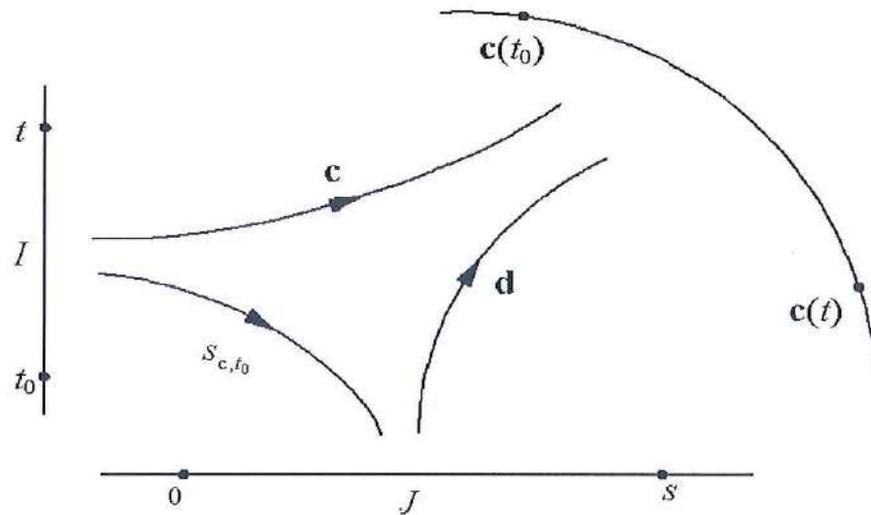
#### 1.1.1 Geometría Diferencial de Curvas

**Definición 1.1.1** Sea  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ . Una curva paramétrica en  $\mathbb{R}^3$  es una aplicación  $\mathbf{c}$  de  $I$  en  $\mathbb{R}^3$  de clase  $C^r$ .

Cada punto  $t \in I$  es llamado *parámetro* de la curva.  $\mathbf{c}^{(1)}(t) \in \mathbb{R}^3$  es el *vector tangente* (o *vector velocidad*) de la curva  $\mathbf{c}$  en  $t$ . El conjunto imagen  $\mathbf{c}(I) \subset \mathbb{R}^3$  es el *trazo* de la curva  $\mathbf{c}$ .

Dada  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva paramétrica. Para cada  $t \in I$  donde  $\mathbf{c}^{(1)}(t) \neq \mathbf{0}$ , se tiene bien definida una recta que pasa por  $\mathbf{c}(t)$  y está determinada por el vector  $\mathbf{c}^{(1)}(t)$ . Ésta es la llamada *recta tangente* a  $\mathbf{c}$  en  $t$ .

Para el estudio de la geometría diferencial de una curva es esencial que exista tal recta tangente en cada punto. Por consiguiente, llamando a cualquier punto  $t$  donde


 Figura 1.1: Parametrización por longitud de arco  $s$ .

$\mathbf{c}^{(1)}(t) = 0$  un *punto singular de orden 0* de  $\mathbf{c}$ , se restringirá la atención a curvas sin puntos singulares de orden 0.

**Definición 1.1.2** Una curva paramétrica  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es llamada *regular* si no tiene puntos singulares de orden 0.

Dado  $t \in I$ , la *longitud de arco* (desde el punto  $t_0 \in I$  hasta el punto  $t$ ) de una curva paramétrica regular  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es

$$s = s_{\mathbf{c},t_0}(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{c}^{(1)}(r)| dr,$$

donde  $|\mathbf{c}^{(1)}(r)|$  es la longitud del vector  $\mathbf{c}^{(1)}(r)$ . Como  $s_{\mathbf{c},t_0}^{(1)}(t) = |\mathbf{c}^{(1)}(t)| \neq 0$ , la función longitud de arco (desde  $t_0$ )  $s = s_{\mathbf{c},t_0}(t)$  tiene inversa diferenciable  $t = s_{\mathbf{c},t_0}^{-1}(s)$ ,  $s \in s_{\mathbf{c},t_0}(I) = J$  (ver Figura 1.1). Sea ahora  $\mathbf{d} = \mathbf{c} \circ s_{\mathbf{c},t_0}^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Claramente,  $\mathbf{d}(J) = \mathbf{c}(I)$ , esto es,  $\mathbf{d}$  tiene el mismo trazo de  $\mathbf{c}$ . Además,  $|\mathbf{d}^{(1)}(s)| = |\mathbf{c}^{(1)}(t)(s_{\mathbf{c},t_0}^{-1})^{(1)}(s)| = 1$ , de modo que

$$s_{\mathbf{d},0}(s) = \int_0^s dr = s.$$

Esto muestra que el parámetro  $s$  de la curva paramétrica regular  $\mathbf{d}$  (que tiene el mismo trazo de  $\mathbf{c}$ ) es la longitud de arco de  $\mathbf{d}$  desde 0 hasta  $s$  (es decir, la longitud de arco de  $\mathbf{c}$  desde  $t_0$  hasta  $t$ ). Se dice que  $\mathbf{d}$  es una *reparametrización* de  $\mathbf{c}$  por longitud de arco.

En otras palabras, dada una curva paramétrica regular  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  (no necesariamente parametrizada por longitud de arco), es posible obtener una curva  $\mathbf{d} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizada por longitud de arco la cual tiene el mismo trazo de  $\mathbf{c}$ .

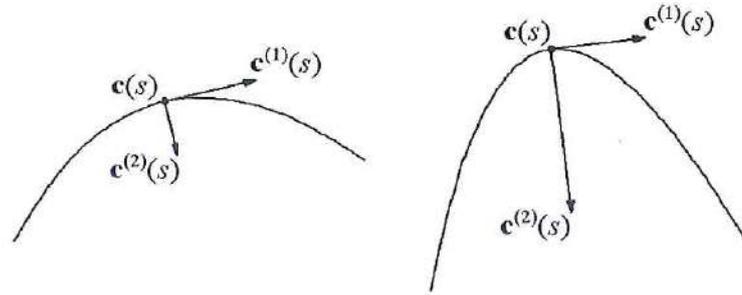


Figura 1.2: Curvatura  $\kappa(s) = |\mathbf{c}^{(2)}(s)|$  de una curva 3D parametrizada por longitud de arco  $s$ .

Así, no se pierde generalidad si se restringe la discusión a curvas parametrizadas por longitud de arco; como se ha visto, esta restricción no es esencial. Más aún, tampoco es esencial mencionar el origen de la longitud de arco  $s$ , puesto que los conceptos de curvas con los que se trabajará son definidos sólo en términos de las derivadas de  $\mathbf{c}$ .

Sea pues  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco  $s$ . Como el vector tangente  $\mathbf{c}^{(1)}(s)$  tiene longitud constante igual a 1, la longitud  $|\mathbf{c}^{(2)}(s)|$  de la segunda derivada mide la razón de cambio del ángulo que las tangentes de la vecindad hacen con la tangente en  $s$ . Por consiguiente,  $\mathbf{c}^{(2)}(s)$  proporciona una medida de qué tan rápidamente se aleja la curva de la recta tangente en  $s$ , en una vecindad de  $s$  (ver Figura 1.2). Esto sugiere la siguiente definición.

**Definición 1.1.3** Sea  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco  $s$ . El número real no negativo  $|\mathbf{c}^{(2)}(s)| = \kappa(s)$  es llamado la curvatura de  $\mathbf{c}$  en  $s$ .

En los puntos donde  $\kappa(s) \neq 0$ , queda bien definido un vector unitario  $\mathbf{n}(s)$ , en el mismo sentido de  $\mathbf{c}^{(2)}(s)$ , por  $\mathbf{c}^{(2)}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ . Naturalmente,  $\mathbf{c}^{(2)}(s)$  es ortogonal a  $\mathbf{c}^{(1)}(s)$ . Así pues,  $\mathbf{n}(s)$  es ortogonal a  $\mathbf{c}^{(1)}(s)$  y es llamado el *vector normal* de  $\mathbf{c}$  en  $s$ . El plano que pasa por  $\mathbf{c}(s)$  y está determinado por los vectores tangente unitario y normal  $\mathbf{c}^{(1)}(s)$  y  $\mathbf{n}(s)$  es llamado el *plano osculador* de  $\mathbf{c}$  en  $s$ .

En los puntos donde  $\kappa(s) = 0$ , el vector normal (y por consiguiente el plano osculador) no está definido. Para proceder con el análisis local de curvas se necesita, esencialmente, el plano osculador. Por consiguiente, es conveniente decir que  $s \in I$  es un *punto singular de orden 1* si  $\mathbf{c}^{(2)}(s) = 0$ .

En lo que sigue, la discusión se restringirá a curvas parametrizadas por longitud de arco sin puntos singulares de orden 1. Se denotará por  $\mathbf{t}(s) = \mathbf{c}^{(1)}(s)$  al *vector tangente unitario* de  $\mathbf{c}$  en  $s$ . Así,  $\mathbf{t}^{(1)}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ .

El vector  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$  es normal al plano osculador y es llamado el *vector binormal* de  $\mathbf{c}$  en  $s$ . Como  $\mathbf{b}(s)$  es un vector unitario, la longitud  $|\mathbf{b}^{(1)}(s)|$  mide la razón de cambio de los planos osculadores vecinos con el plano osculador en  $s$ ; es decir  $\mathbf{b}^{(1)}(s)$  proporciona una medida de qué tan rápidamente se aleja la curva del plano osculador en  $s$ .

Para calcular  $\mathbf{b}^{(1)}(s)$ , se puede ver que, por un lado,  $\mathbf{b}^{(1)}(s)$  es ortogonal a  $\mathbf{b}(s)$  y, por otro lado

$$\begin{aligned}\mathbf{b}^{(1)}(s) &= \mathbf{t}^{(1)}(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}^{(1)}(s) \\ &= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}^{(1)}(s),\end{aligned}$$

esto es,  $\mathbf{b}^{(1)}(s)$  es ortogonal a  $\mathbf{t}(s)$ . Por lo tanto,  $\mathbf{b}^{(1)}(s)$  es paralelo a  $\mathbf{n}(s)$ , en otras palabras  $\mathbf{b}^{(1)}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$  para alguna función  $\tau(s)$ .

**Definición 1.1.4** Sea  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco  $s$  tal que  $\mathbf{c}^{(2)}(s) \neq 0$ ,  $s \in I$ . El número real  $\tau(s)$  definido por  $\mathbf{b}^{(1)}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$  es llamado la *torsión* de  $\mathbf{c}$  en  $s$ .

En resumidas cuentas, para cada valor del parámetro  $s$  se tienen asociados tres vectores ortogonales unitarios  $\mathbf{t}(s)$ ,  $\mathbf{n}(s)$ ,  $\mathbf{b}(s)$ . El triedro  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$  es llamado la *base de Frenet* de  $\mathbf{c}$  en  $s$ . Las derivadas  $\mathbf{t}^{(1)}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$  y  $\mathbf{b}^{(1)}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$  de los vectores  $\mathbf{t}(s)$  y  $\mathbf{b}(s)$ , cuando son expresadas en la base  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ , dan entidades geométricas (la curvatura  $\kappa$  y la torsión  $\tau$ ) las cuales proporcionan información acerca del comportamiento de  $\mathbf{c}$  en una vecindad de  $s$ .

La búsqueda de otras entidades geométricas locales pasaría por calcular  $\mathbf{n}^{(1)}(s)$ . No obstante, como  $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s)$ , se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{n}^{(1)}(s) &= \mathbf{b}^{(1)}(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}^{(1)}(s) \\ &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s),\end{aligned}$$

se obtiene nuevamente la curvatura  $\kappa$  y la torsión  $\tau$ .

El sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^{(1)}(s) &= \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}^{(1)}(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}^{(1)}(s) &= \tau(s)\mathbf{n}(s),\end{aligned}$$

es llamado el *sistema de Frenet*. En este contexto, la siguiente terminología es usual: el plano que pasa por  $\mathbf{c}(s)$  y está determinado por los vectores  $\mathbf{t}(s)$  y  $\mathbf{b}(s)$  es llamado el *plano rectificante* de  $\mathbf{c}$  en  $s$  y el plano que pasa por  $\mathbf{c}(s)$  y está determinado por los vectores  $\mathbf{n}(s)$  y  $\mathbf{b}(s)$  es llamado el *plano normal* de  $\mathbf{c}$  en  $s$ . Las rectas que pasan por

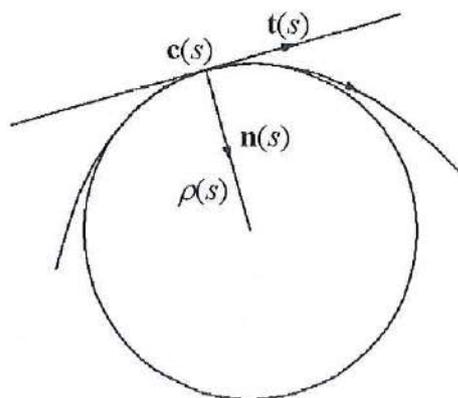


Figura 1.3: Círculo osculador.

$c(s)$  y están determinadas por los vectores  $\mathbf{n}(s)$  y  $\mathbf{b}(s)$  son llamadas la *normal principal* y la *binormal* respectivamente de  $\mathbf{c}$  en  $s$ . El inverso multiplicativo  $\rho(s) = 1/\kappa(s)$  de la curvatura  $\kappa(s)$  es llamado el *radio de curvatura* de  $\mathbf{c}$  en  $s$ . El círculo contenido en el plano osculador de  $\mathbf{c}$  en  $s$  con centro en el punto  $\mathbf{c}(s) + \rho(s)\mathbf{n}(s)$  y radio  $\rho(s)$  es llamado el *círculo osculador* de  $\mathbf{c}$  en  $s$  (ver Figura 1.3).

Físicamente, se puede pensar de una curva en  $\mathbb{R}^3$  como si fuera obtenida a partir de un segmento de recta curvándolo (curvatura) y retorciéndolo (torsión). Después de reflexionar sobre esto, se puede conjeturar, de una manera muy natural, el siguiente enunciado, el cual, burdamente hablando, muestra que la curvatura  $\kappa$  y la torsión  $\tau$  describen completamente el comportamiento local de una curva. Exagerando:  $\kappa$  y  $\tau$  son la curva.

**Teorema 1.1.1 (Teorema fundamental de las curvas)** *Dadas las funciones diferenciables  $\kappa(s) > 0$  y  $\tau(s)$ ,  $s \in I$ , existe una curva, parametrizada por longitud de arco  $s$ ,  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $\kappa(s)$  es la curvatura y  $\tau(s)$  es la torsión de  $\mathbf{c}$  en  $s$ . Más aún, cualquier otra curva  $\bar{\mathbf{c}}$ , que satisfaga las mismas condiciones, difiere de  $\mathbf{c}$  por un movimiento rígido, es decir, existe una aplicación lineal ortogonal  $C$  de  $\mathbb{R}^3$ , con determinante positivo y un vector  $\mathbf{a}$  tal que  $\bar{\mathbf{c}} = C \circ \mathbf{c} + \mathbf{a}$ .*

Una prueba de este enunciado, así como una discusión de los conceptos y resultados vertidos en las líneas precedentes, puede encontrarse en [11].

Naturalmente, es posible extender todos los conceptos locales definidos precedentemente, así como sus consecuentes resultados, a curvas regulares con parámetro arbitrario. Así, se dice que la curvatura  $\kappa(t)$  de  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  en  $t \in I$  es la curvatura de una reparametrización  $\mathbf{d} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $\mathbf{c}(I)$  por longitud de arco en el punto correspondiente a  $s = s(t)$ . Esto es claramente independiente de la elección de  $\mathbf{d}$  y hace ver

que la restricción, hecha anteriormente, de considerar sólo curvas parametrizadas por longitud de arco no era esencial.

En tal sentido, es posible obtener fórmulas explícitas para las entidades geométricas, la curvatura y la torsión, en términos de un parámetro arbitrario:

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{c}^{(1)}(t) \times \mathbf{c}^{(2)}(t)|}{|\mathbf{c}^{(1)}(t)|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{(\mathbf{c}^{(1)}(t) \times \mathbf{c}^{(2)}(t)) \cdot \mathbf{c}^{(3)}(t)}{|\mathbf{c}^{(1)}(t) \times \mathbf{c}^{(2)}(t)|^2}.$$

### 1.1.2 Geometría Diferencial de Superficies

**Definición 1.1.5** Una superficie paramétrica regular o simplemente una superficie es una aplicación  $\mathbf{S} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ , tal que  $\mathbf{S}$  es diferenciable de clase  $C^r$  y para todo  $\mathbf{q} = (u, v) \in U$ , la diferencial de  $\mathbf{S}$  en  $\mathbf{q}$ ,  $d\mathbf{S}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva.

Las componentes del par  $(u, v) \in U$  son los *parámetros* de la superficie. El subconjunto  $\mathbf{S}(U)$  de  $\mathbb{R}^3$  es el *trazo* de la superficie  $\mathbf{S}$ . Fijado  $(u_0, v_0) \in U$ , las curvas  $u \mapsto \mathbf{S}(u, v_0)$  y  $v \mapsto \mathbf{S}(u_0, v)$  son llamadas *curvas coordenadas* o *isoparamétricas* de  $\mathbf{S}$  en  $\mathbf{q} = (u_0, v_0)$ , siendo  $d\mathbf{S}(\mathbf{q})(\mathbf{e}_1) = \mathbf{S}_u(u_0, v_0)$  y  $d\mathbf{S}(\mathbf{q})(\mathbf{e}_2) = \mathbf{S}_v(u_0, v_0)$  sus *vectores tangentes canónicos* respectivamente en  $u_0$  y  $v_0$ .  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ .

Si se considera  $u$  y  $v$  como funciones diferenciables de un parámetro  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , se obtiene una curva diferenciable  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{S}(u(t), v(t))$  cuyo trazo está contenido en el trazo de la superficie  $\mathbf{S}$ . Se dice, en este caso, que  $\mathbf{c}$  es una curva de la superficie. Las curvas coordenadas son curvas de la superficie.

**Definición 1.1.6** Si  $\mathbf{S}(u, v)$  es una superficie, se dice que un vector  $\mathbf{w}$  de  $\mathbb{R}^3$  es un vector tangente a  $\mathbf{S}$  en  $(u_0, v_0)$  si  $\mathbf{w} = \mathbf{c}^{(1)}(t_0)$ , donde  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{S}(u(t), v(t))$  es una curva de la superficie, tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ .

Los vectores  $\mathbf{S}_u(u_0, v_0)$  y  $\mathbf{S}_v(u_0, v_0)$  son vectores tangentes a  $\mathbf{S}$  en  $(u_0, v_0)$ , ya que son tangentes a las curvas coordenadas.

**Definición 1.1.7** El plano tangente a  $\mathbf{S}$  en  $(u_0, v_0)$  es el conjunto de todos los vectores tangentes a  $\mathbf{S}$  en  $(u_0, v_0)$ , el que es denotado por  $T(\mathbf{q})\mathbf{S}$ , donde  $\mathbf{q} = (u_0, v_0)$ .

El plano tangente  $T(\mathbf{q})\mathbf{S}$  es el espacio vectorial de dimensión 2 generado por los vectores  $\mathbf{S}_u(u_0, v_0)$ ,  $\mathbf{S}_v(u_0, v_0)$  (ver Figura 1.4). Variando  $(u, v)$  en  $U$  se tiene una aplicación diferenciable  $\mathbf{N} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  denominada *aplicación normal de Gauss* definida por

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v}{|\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v|}(u, v),$$

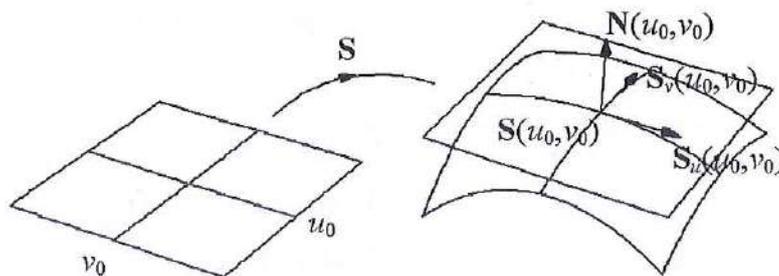


Figura 1.4: Plano tangente con vector normal.

cuya imagen, la llamada *imagen esférica* de la superficie  $S$ , está contenida en la esfera unitaria centrada en el origen.

**Definición 1.1.8** Sea  $S : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie. Para todo  $\mathbf{q} \in U$  la aplicación  $I(\mathbf{q}) : T(\mathbf{q})S \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $I(\mathbf{q})(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{w}|^2$  es denominada la primera forma cuadrática de  $S$  en  $\mathbf{q}$ .

Las funciones  $E, F, G$  de  $U$  en  $\mathbb{R}$  definidas por  $E(u, v) = (\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_u)(u, v)$ ,  $F(u, v) = (\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_v)(u, v)$ ,  $G(u, v) = (\mathbf{S}_v \cdot \mathbf{S}_v)(u, v)$ , son denominadas *coeficientes de la primera forma cuadrática*. Siendo  $\mathbf{q} = (u_0, v_0)$ , si un vector  $\mathbf{w} \in T(\mathbf{q})S$  es expresado como  $\mathbf{w} = a\mathbf{S}_u(\mathbf{q}) + b\mathbf{S}_v(\mathbf{q})$  donde  $a, b \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$I(\mathbf{q})(\mathbf{w}) = a^2 E(\mathbf{q}) + 2abF(\mathbf{q}) + b^2 G(\mathbf{q}).$$

**Definición 1.1.9** Sea  $S : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie. Fijado  $\mathbf{q} = (u_0, v_0) \in U$ , la segunda forma cuadrática de  $S$  en  $\mathbf{q}$  es una aplicación  $\mathbf{II}(\mathbf{q}) : T(\mathbf{q})S \rightarrow \mathbb{R}$ , que para cada vector  $\mathbf{w} \in T(\mathbf{q})S$  asocia  $\mathbf{II}(\mathbf{q})(\mathbf{w})$  de la siguiente forma: si  $\mathbf{c}(t) = S(u(t), v(t))$  es una curva de la superficie, tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{c}^{(1)}(t_0) = \mathbf{w}$  entonces, se define  $\mathbf{II}(\mathbf{q})(\mathbf{w}) = \mathbf{c}^{(2)}(t_0) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{q})$ .

Observar que  $\mathbf{II}(\mathbf{q})(\mathbf{w})$  no depende de la curva  $\mathbf{c}$  escogida con vector tangente  $\mathbf{w}$ .

Las funciones  $e, f, g$  de  $U$  en  $\mathbb{R}$  definidas por  $e(u, v) = (\mathbf{S}_{uu} \cdot \mathbf{N})(u, v)$ ,  $f(u, v) = (\mathbf{S}_{uv} \cdot \mathbf{N})(u, v)$ ,  $g(u, v) = (\mathbf{S}_{vv} \cdot \mathbf{N})(u, v)$ , son denominadas *coeficientes de la segunda forma cuadrática*. Siendo  $\mathbf{q} = (u_0, v_0)$ , si un vector  $\mathbf{w} \in T(\mathbf{q})S$  es expresado como  $\mathbf{w} = a\mathbf{S}_u(\mathbf{q}) + b\mathbf{S}_v(\mathbf{q})$  donde  $a, b \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$\mathbf{II}(\mathbf{q})(\mathbf{w}) = a^2 e(\mathbf{q}) + 2abf(\mathbf{q}) + b^2 g(\mathbf{q}).$$

**Definición 1.1.10** Sea  $S : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie y  $\mathbf{q} = (u_0, v_0)$ . La función curvatura normal en  $\mathbf{q}$  es una aplicación  $\kappa_n(\mathbf{q}) : T(\mathbf{q})S - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  que para cada

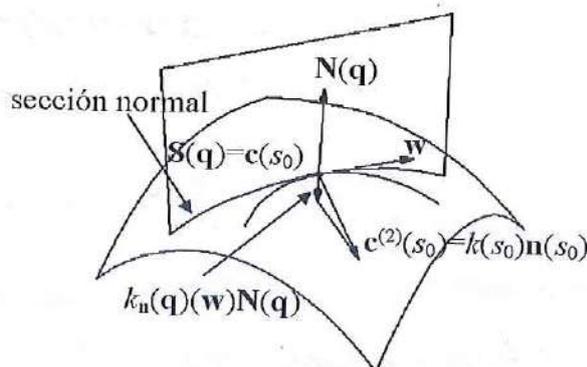


Figura 1.5: Curvatura normal y sección normal.

vector  $\mathbf{w} \in T(\mathbf{q})\mathbf{S}$  no nulo, asocia

$$\kappa_n(\mathbf{q})(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{II}(\mathbf{q})(\mathbf{w})}{\mathbf{I}(\mathbf{q})(\mathbf{w})}.$$

Si  $\mathbf{w} \in T(\mathbf{q})\mathbf{S} - \{0\}$  se tiene que  $\kappa_n(\mathbf{q})(\lambda\mathbf{w}) = \kappa_n(\mathbf{q})(\mathbf{w})$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Como consecuencia de este hecho, se puede hablar de la curvatura normal en  $\mathbf{q}$  según una dirección tangente a la superficie  $\mathbf{S}$ .

Como  $\mathbf{II}(\mathbf{q})(\mathbf{w})$  y  $\kappa_n(\mathbf{q})(\mathbf{w})$  no dependen de la curva  $\mathbf{c}$  escogida, se pueden aplicar a la curva más conveniente. Esta curva es la llamada *sección normal* de la superficie determinada por  $\mathbf{w}$ , la cual es obtenida por la intersección del trazo de  $\mathbf{S}$  suficientemente próximo de  $(u_0, v_0)$ , con el plano que pasa por  $\mathbf{S}(u_0, v_0)$ , ortogonal a  $\mathbf{w} \times \mathbf{N}(u_0, v_0)$ . En estas condiciones, la sección normal es el trazo de una curva regular plana  $\mathbf{s}(s) = \mathbf{S}(u(s), v(s))$  parametrizada por longitud de arco, tal que  $(u(s_0), v(s_0)) = (u_0, v_0)$  y  $\mathbf{s}^{(1)}(s_0) = \mathbf{w}$ . Si  $\kappa(s_0) = 0$ , es decir,  $\mathbf{s}^{(2)}(s_0) = 0$  entonces,  $\kappa_n(\mathbf{q})(\mathbf{w}) = \mathbf{II}(\mathbf{q})(\mathbf{w}) = 0$ . Si  $\kappa(s_0) > 0$ , se tiene que  $\mathbf{n}(s_0) = \pm\mathbf{N}(u_0, v_0)$  y por tanto se sigue que

$$\kappa_n(\mathbf{q})(\mathbf{w}) = \mathbf{II}(\mathbf{q})(\mathbf{w}) = \pm\kappa(s_0).$$

De esto, se concluye que, si  $\mathbf{w}$  es un vector unitario tangente a la superficie  $\mathbf{S}$  en  $\mathbf{q}$  entonces,  $|\kappa_n(\mathbf{q})(\mathbf{w})|$  es igual a la curvatura de la sección normal en  $\mathbf{q}$  determinada por  $\mathbf{w}$  (ver Figura 1.5). Si  $\mathbf{w} \neq 0$  es un vector cualquiera de  $T(\mathbf{q})\mathbf{S}$  entonces  $\mathbf{II}(\mathbf{q})(\mathbf{w}) = |\mathbf{w}|^2\kappa_n(\mathbf{q})(\mathbf{w})$ .

**Teorema 1.1.2** Sean  $\mathbf{S}(u, v)$  una superficie y  $\kappa_n(\mathbf{q})$  la función curvatura normal de  $\mathbf{S}$  en  $\mathbf{q} = (u_0, v_0)$ . Existen vectores unitarios y ortogonales  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T(\mathbf{q})\mathbf{S}$  tales que  $\kappa_1(\mathbf{q}) = \kappa_n(\mathbf{q})(\mathbf{v}_1)$  y  $\kappa_2(\mathbf{q}) = \kappa_n(\mathbf{q})(\mathbf{v}_2)$  son los valores mínimo y máximo respectivamente, de la función  $\kappa_n(\mathbf{q})$ .

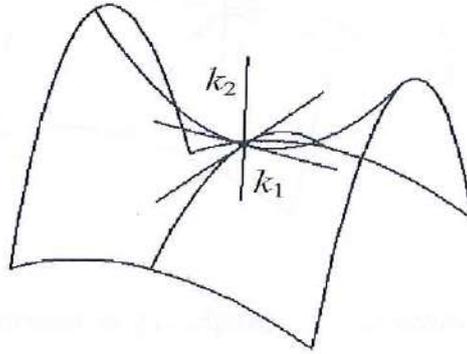


Figura 1.6: Curvaturas principales y direcciones principales.

Una prueba de este enunciado, así como una discusión de los conceptos y resultados acerca de las superficies vertidos en las líneas precedentes, puede encontrarse en [31].

Los vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  son llamados *vectores principales* de  $\mathbf{S}$  en  $\mathbf{q}$  y las curvaturas  $\kappa_1(\mathbf{q}), \kappa_2(\mathbf{q})$  son las *curvaturas principales* de  $\mathbf{S}$  en  $\mathbf{q}$ . Las direcciones de  $T(\mathbf{q})\mathbf{S}$  determinadas por vectores principales son las *direcciones principales* (ver Figura 1.6). El producto de las curvaturas principales  $K(\mathbf{q}) = \kappa_1(\mathbf{q})\kappa_2(\mathbf{q})$  es la *curvatura gaussiana* de  $\mathbf{S}$  en  $\mathbf{q}$  y la semisuma  $H(\mathbf{q}) = \frac{\kappa_1(\mathbf{q}) + \kappa_2(\mathbf{q})}{2}$  es la *curvatura media* de  $\mathbf{S}$  en  $\mathbf{q}$ .

De estas definiciones se sigue que las curvaturas principales de  $\mathbf{S}$  en  $\mathbf{q}$  son las soluciones de la ecuación cuadrática

$$x^2 - 2H(\mathbf{q})x + K(\mathbf{q}) = 0.$$

Las curvaturas principales  $\kappa_1(\mathbf{q})$  y  $\kappa_2(\mathbf{q})$  determinan la curvatura normal en cualquier dirección. Más precisamente, se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.3 (Fórmula de Euler)** *Sea  $\mathbf{q} = (u_0, v_0)$  un punto en el dominio de la superficie  $\mathbf{S}(u, v)$ . Sean  $\kappa_1(\mathbf{q}), \kappa_2(\mathbf{q})$  las curvaturas principales de  $\mathbf{S}$  en  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  vectores principales de  $\mathbf{S}$  en  $\mathbf{q}$ . Para todo vector  $\mathbf{w} \in T(\mathbf{q})\mathbf{S}$  tal que  $|\mathbf{w}| = 1$ , si*

$$\mathbf{w} = (\cos \theta)\mathbf{v}_1 + (\sin \theta)\mathbf{v}_2$$

entonces

$$\kappa_n(\mathbf{q})(\mathbf{w}) = \kappa_1(\mathbf{q}) \cos^2 \theta + \kappa_2(\mathbf{q}) \sin^2 \theta.$$

Se puede obtener  $H(\mathbf{q})$  y  $K(\mathbf{q})$  a partir de los coeficientes de la primera y segunda formas cuadráticas

**Teorema 1.1.4** *Sea  $\mathbf{S}(u, v)$  una superficie, entonces*

$$H(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}(\mathbf{q}), \quad K(\mathbf{q}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(\mathbf{q}).$$

Esto permite calcular  $H(\mathbf{q})$  y  $K(\mathbf{q})$  a partir de los coeficientes de la primera y segunda formas cuadráticas. En seguida, resolviendo la ecuación

$$x^2 - 2H(\mathbf{q})x + K(\mathbf{q}) = 0$$

se obtienen las curvaturas principales  $\kappa_1(\mathbf{q})$  y  $\kappa_2(\mathbf{q})$  de la superficie, en el punto  $\mathbf{q}$ .

## 1.2 Representaciones de Bézier

El objetivo de esta sección es dar las definiciones básicas y las notaciones acerca de las curvas y superficies de Bézier necesarias en este trabajo. Una presentación más detallada puede ser encontrada en [19, 14, 18]. Una lectura muy agradable de estos conceptos puede hacerse en [10].

Las representaciones de Bézier utilizan como funciones base a los polinomios de Bernstein.

Los  $n + 1$  *polinomios de Bernstein* de grado  $n$  en  $t \in [0, 1]$  son definidos por

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, \quad i = 0(1)n.$$

### 1.2.1 Curvas de Bézier

Aunque la teoría de curvas de Bézier puede desarrollarse en general para cualquier dominio paramétrico, por simplicidad de exposición se utiliza en esta sección el dominio dado por el intervalo  $[0, 1]$ . Se puede pasar de un dominio a otro por medio de un simple cambio de parámetro. Las propiedades geométricas de las curvas de Bézier son invariantes por reparametrizaciones. De hecho en la Sección 3.5 es conveniente utilizar el parámetro longitud de arco.

Dados, para  $i = 0(1)n$ , los puntos  $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ . Una *curva de Bézier* polinomial de grado  $n$  en  $t \in [0, 1]$  es definida por

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) \in \mathbb{R}^3.$$

Los coeficientes  $\mathbf{b}_i$  son los *puntos de control*, y si se conectan por segmentos de recta de acuerdo al ordenamiento natural de sus índices, se obtiene el *polígono de control* asociado.

A fin de evaluar una curva de Bézier polinomial se introduce el operador  $E$  definido por

$$E\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1}, \quad E^m E^n = E^{m+n}, \quad Et = tE, \quad E^0 = 1, \quad EE^{-1} = 1.$$

En ese sentido, se tiene

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) = (1 - t + tE)^n \mathbf{b}_0.$$

Ahora, para  $m = 0(1)n - 1$  y  $\alpha = 1(1)n$ , escribiendo

$$\mathbf{b}_m(t^\alpha) = E^m (1 - t + tE)^\alpha \mathbf{b}_0,$$

se tiene

$$\mathbf{b}_m(t^\alpha) = (1 - t)\mathbf{b}_m(t^{\alpha-1}) + t\mathbf{b}_{m+1}(t^{\alpha-1}).$$

Particularmente

$$\mathbf{b}_0(t^n) = (1 - t + tE)^n \mathbf{b}_0 = \mathbf{x}(t).$$

Aquí,

$$\mathbf{b}_i(t^0) = \mathbf{b}_i, \quad i = 0(1)n.$$

Esto es conocido como el *algoritmo de de Casteljau*. Para ilustrar el algoritmo, es conveniente considerar el siguiente esquema (de de Casteljau):

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0(t^0) & \mathbf{b}_0(t^1) & \mathbf{b}_0(t^2) & \mathbf{b}_0(t^3) = \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1(t^0) & \mathbf{b}_1(t^1) & \mathbf{b}_1(t^2) & \\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2(t^0) & \mathbf{b}_2(t^1) & & \\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_3(t^0) & & & \end{array}$$

En la dirección horizontal se multiplica por  $1 - t$  y en la dirección diagonal por  $t$  (ver Figura 1.7). Usando el algoritmo de de Casteljau, una curva de Bézier puede ser subdividida en dos segmentos de curva de Bézier que se unen (hasta la derivada  $n$ -ésima) en el punto correspondiente a  $t$ . Los puntos de control de los dos nuevos segmentos de curva de Bézier son dados por las entradas en la frontera del esquema de de Casteljau. Dos curvas de Bézier polinomiales abiertas de grado  $n$  impar pueden ser unidas por sus extremos con continuidad geométrica de clase  $C^{\frac{n-1}{2}}$ .

### 1.2.2 Superficies de Bézier

Al igual que para las curvas de Bézier, la teoría de superficies de Bézier puede desarrollarse, sin variación de sus propiedades geométricas, para cualquier dominio paramétrico y es por simplicidad de exposición que se utiliza en esta sección el dominio dado por  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Dados, para  $i = 0(1)m$ ,  $j = 0(1)n$ , los puntos  $\mathbf{b}_{i,j} \in \mathbb{R}^3$ . Una *superficie de Bézier* polinomial (producto tensorial) de grado  $(m, n)$  en  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$  es definida por

$$\mathbf{X}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v) \in \mathbb{R}^3.$$

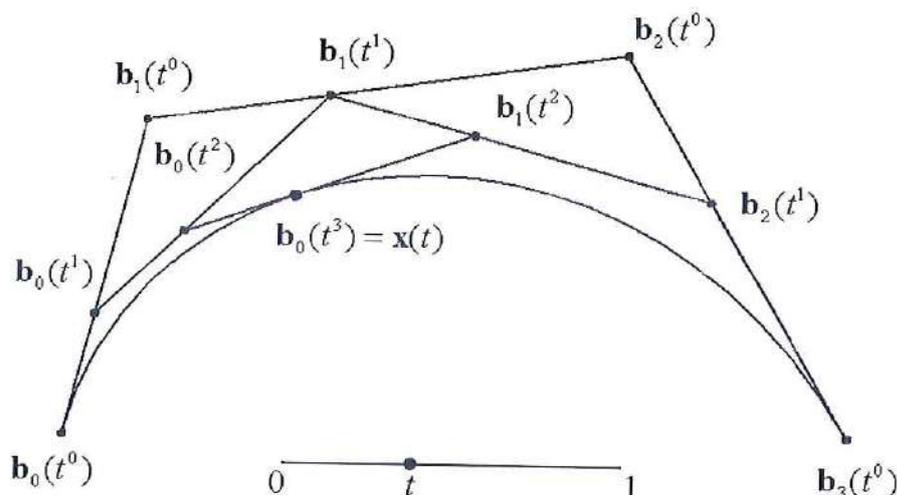


Figura 1.7: Algoritmo de de Casteljau y curva de Bézier.

Los coeficientes  $\mathbf{b}_{i,j}$  son los *puntos de control*, y si se conectan por segmentos de recta de acuerdo al ordenamiento natural de sus índices, se obtiene el *poliedro de control* asociado.

A lo largo de la curva isoparamétrica  $v = v_*$ , la superficie se reduce a una curva de Bézier

$$\mathbf{X}(u, v_*) = \sum_{i=0}^m \left( \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_j^n(v_*) \right) B_i^m(u),$$

con puntos de control

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i(v_*) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_j^n(v_*).$$

Ahora, para  $i = 0(1)m$ ,  $h = 0(1)n - 1$  y  $\alpha = 1(1)n$ , se puede escribir

$$\mathbf{b}_{i,h}(v_*^\alpha) = (1 - v_*) \mathbf{b}_{i,h}(v_*^{\alpha-1}) + v_* \mathbf{b}_{i,h+1}(v_*^{\alpha-1}).$$

Particularmente

$$\mathbf{b}_{i,0}(v_*^n) = \mathbf{b}_i(v_*) = \mathbf{b}_i.$$

Aquí,

$$\mathbf{b}_{i,j}(v_*^0) = \mathbf{b}_{i,j}.$$

Éste es el algoritmo de de Casteljau aplicado al cálculo del punto de control  $\mathbf{b}_i$ . Se

puede ilustrar de nuevo el algoritmo:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{b}_{i,0} = \mathbf{b}_{i,0}(v_*^0) & \mathbf{b}_{i,0}(v_*^1) & \mathbf{b}_{i,0}(v_*^2) & \mathbf{b}_{i,0}(v_*^3) = \mathbf{b}_i(v_*) = \mathbf{b}_i \\ \mathbf{b}_{i,1} = \mathbf{b}_{i,1}(v_*^0) & \mathbf{b}_{i,1}(v_*^1) & \mathbf{b}_{i,1}(v_*^2) & \\ \mathbf{b}_{i,2} = \mathbf{b}_{i,2}(v_*^0) & \mathbf{b}_{i,2}(v_*^1) & & \\ \mathbf{b}_{i,3} = \mathbf{b}_{i,3}(v_*^0) & & & \end{array}$$

Entonces se usa el algoritmo de nuevo para  $u$  con estos puntos de control  $\mathbf{b}_i$  para producir el valor de la superficie

$$\mathbf{X}(u, v_*) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i(v_*) B_i^m(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i B_i^m(u).$$

Así, para  $k = 0(1)m - 1$  y  $\gamma = 1(1)m$ , se puede escribir

$$\mathbf{b}_k(u^\gamma) = (1 - u)\mathbf{b}_k(u^{\gamma-1}) + u\mathbf{b}_{k+1}(u^{\gamma-1}).$$

Particularmente

$$\mathbf{b}_0(u^m) = \mathbf{X}(u, v_*).$$

Aquí,

$$\mathbf{b}_i(u^0) = \mathbf{b}_i, \quad i = 0(1)m.$$

Nuevamente, se puede ilustrar el algoritmo:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0(u^0) & \mathbf{b}_0(u^1) & \mathbf{b}_0(u^2) & \mathbf{b}_0(u^3) = \mathbf{X}(u, v_*) \\ \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1(u^0) & \mathbf{b}_1(u^1) & \mathbf{b}_1(u^2) & \\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2(u^0) & \mathbf{b}_2(u^1) & & \\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_3(u^0) & & & \end{array}$$

En la Figura 1.8 se muestra una superficie con su poliedro de control. Una superficie de Bézier polinomial (producto tensorial) está enteramente contenida en la envolvente convexa de sus puntos de control. El algoritmo de de Casteljau puede ser usado para subdividir una superficie de Bézier en dos parches spline. Supóngase que el dominio rectangular de un parche de Bézier es subdividido en dos subrectángulos por una línea recta para  $u$  constante. Esa línea se aplica en una curva isoparamétrica sobre el parche, el que es así subdividido en dos subparches. Estos dos subparches, siendo partes de una superficie global, se unen con continuidad  $C^n$ . Por consiguiente, todas sus filas de puntos de control deben ser polígonos de control de grado  $n$  segmentadas  $C^n$ . Esas curvas están relacionadas entre ellas por el proceso de subdivisión para curvas. Se puede interpretar todas las filas del poliedro de control como polígonos de control de curvas de Bézier. Se subdivide cada una de estas curvas en  $u$ . Los puntos de control resultantes forman los dos poliedros de Bézier deseados. La subdivisión a lo largo de una curva isoparamétrica para  $v$  constante es tratada análogamente. Es posible elevar el grado  $(m, n)$  de una superficie de Bézier polinomial (producto



Figura 1.8: Superficie de Bézier y su poliedro de control.

tensorial)  $\mathbf{X}(u, v)$ . Si  $\mathbf{b}_{i,j}$  son los puntos de control de la superficie, la elevación del grado de  $m$  a  $m+1$  en la dirección  $u$  conduce a los nuevos puntos de control

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,j}^* &= \mathbf{b}_{0,j}, \\ \mathbf{b}_{i,j}^* &= \mathbf{b}_{i,j} + \frac{i}{m+1}(\mathbf{b}_{i-1,j} - \mathbf{b}_{i,j}), \quad i = 1(1)m, \\ \mathbf{b}_{m+1,j}^* &= \mathbf{b}_{m,j}, \end{aligned}$$

para  $j = 1(1)n$ . Análogamente, se procede para elevar el grado de  $n$  a  $n+1$  en la dirección  $v$ .

## Capítulo 2

# Formulación del Problema

En este capítulo es formulado el problema que se aborda en esta tesis. Se verá que los métodos de trazado, cuyo tamaño de paso es determinado con la información local proporcionada por las superficies, presentan problemas en controlar confiablemente el error de la aproximación obtenida al interpolar los puntos obtenidos por el trazado.

### 2.1 Métodos de Trazado

El primer método de trazado, para calcular la intersección no tangencial entre dos superficies paramétricas de forma libre, del que se tiene conocimiento, es el desarrollado por H. G. Timmer en 1977 (ver [24]). Hay otros enfoques, pero éste sirve tan bien como cualquier otro para ilustrar el problema.

Timmer sugiere descomponer el proceso en tres fases consecutivas: una *fase de búsqueda*, una *fase de trazado* y una *fase de ordenamiento*.

#### 2.1.1 Fase de Búsqueda

La fase de búsqueda sirve para localizar puntos de la intersección que sirvan como puntos de inicio para la fase de trazado. Inicialmente se define una malla sobre una de las superficies y se determinan puntos de intersección de cada una de las curvas determinadas por la malla con la otra superficie.

En tal situación, el problema es encontrar las intersecciones de una curva con una superficie. Para realizar esto la estrategia es segmentar la curva y obtener la intersección de cada uno de tales segmentos de curva con la superficie.

Para calcular la intersección de un segmento de curva con una superficie lo que se hace

es observar si los vectores normales a la superficie hacia los extremos del segmento de curva tienen sentidos opuestos. Para esto se necesita calcular la distancia (normal) mínima de cada uno de tales puntos a la superficie.

Para realizar la fase de búsqueda se necesita pues de las tres rutinas que a continuación se pasa a describir.

**Obtención de  $(u_c, v_c)$  tal que  $S(u_c, v_c)$  sea un punto sobre  $S$  más cercano a  $P_c$**

Dado un punto  $P_c$ , esta rutina se efectúa encontrando (si existe) un punto  $(u_c, v_c)$ , en el dominio de la superficie  $S(u, v)$ , de manera que se satisfaga la condición de distancia mínima,

$$\min |S(u, v) - P_c|,$$

la que se calcula resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} S_u(u, v) \cdot (S(u, v) - P_c) &= 0, \\ S_v(u, v) \cdot (S(u, v) - P_c) &= 0, \end{aligned}$$

usando el método de Newton.

Este esquema de solución produce un punto  $(u_c, v_c)$  en el dominio de  $S(u, v)$  tal que el vector  $P_c - S(u_c, v_c)$  es normal a la superficie  $S(u, v)$  en el punto correspondiente a  $(u_c, v_c)$ , de manera que la distancia que se calcula es la longitud de tal vector normal, de ahí el nombre de distancia (normal) mínima.

La implementación del método de Newton involucra discretizar la superficie  $S$  en  $(dn_G, dn_G)$  segmentos, produciendo la llamada malla para distancia (normal) mínima, y usa, iterativamente, cada uno de los vértices de los cuadriláteros (curvilíneos) de la malla como puntos iniciales del método de Newton, hasta que encuentra (si existe) uno que provoca la convergencia que da una distancia (normal) mínima del punto  $P_c$  a la superficie  $S$ .

El éxito de esta rutina depende de una adecuada elección del número (suficientemente grande)  $dn_G$  de la malla para distancia (normal) mínima.

**Intersección de un  $[t_m, t_M]$ -segmento de  $Q(t)$  con una superficie  $S(u, v)$**

Esta rutina se efectúa encontrando valores paramétricos  $t_I$  y  $(u_I, v_I)$ , en el dominio del  $[t_m, t_M]$ -segmento de la curva  $Q(t)$  y de la superficie  $S(u, v)$  respectivamente, de manera que se satisfaga la condición de intersección

$$Q(t) - S(u, v) = 0,$$

que constituye un sistema de tres ecuaciones (una para cada componente), que se resuelve usando el método de Newton.

La implementación del método de Newton involucra dividir el dominio del  $[t_m, t_M]$ -segmento. Cada uno de los parámetros de subdivisión del segmento junto con los parámetros  $(u_m, v_m)$  de la superficie  $\mathbf{S}$  tal que  $\mathbf{S}(u_m, v_m)$  sea un punto sobre  $\mathbf{S}$  más cercano a  $\mathbf{Q}(t_m)$  son usados como puntos de inicio del método de Newton.

El éxito de esta rutina depende de una adecuada elección del número (suficientemente grande)  $dn_G$  de la malla para distancia (normal) mínima y de que el  $[t_m, t_M]$ -segmento de  $\mathbf{Q}(t)$  sea suficientemente pequeño, así como de la subdivisión que se haga del dominio del segmento.

### Intersecciones de una curva $\mathbf{Q}(t)$ con una superficie $\mathbf{S}(u, v)$

Para calcular las intersecciones de una curva  $\mathbf{Q}(t)$  con una superficie  $\mathbf{S}(u, v)$  se divide la curva en  $m_G$  segmentos, suficientemente pequeños. Tomando los extremos  $\mathbf{Q}_a$  y  $\mathbf{Q}_{a+1}$ , inicial y final respectivamente, de cada  $m_G$ -segmento, se procede a calcular  $(u_a, v_a)$  tal que  $\mathbf{S}(u_a, v_a)$  sea un punto sobre  $\mathbf{S}$  más cercano a  $\mathbf{Q}_a$  y  $(u_{a+1}, v_{a+1})$  tal que  $\mathbf{S}(u_{a+1}, v_{a+1})$  sea un punto sobre  $\mathbf{S}$  más cercano a  $\mathbf{Q}_{a+1}$ .

Escribiendo  $(X_c, Y_c, Z_c) = \mathbf{S}(u_c, v_c) - \mathbf{Q}_c$ , si  $X_a X_{a+1} < 0$ ,  $Y_a Y_{a+1} < 0$ ,  $Z_a Z_{a+1} < 0$ , es decir, si los sentidos de los correspondientes vectores normales son opuestos, es razonable pensar en que hay intersección del  $m_G$ -segmento con la superficie  $\mathbf{S}$ . En tal caso, se usa la rutina anterior para obtener la intersección del  $m_G$ -segmento con la superficie  $\mathbf{S}$ , tomando como puntos de inicio del método de Newton el parámetro  $t_a$  de la curva correspondiente al punto inicial  $\mathbf{Q}(t_a)$  del  $m_G$ -segmento y los parámetros  $(u_a, v_a)$  correspondientes al pie de la normal  $\mathbf{S}(u_a, v_a)$  del punto inicial del  $m_G$ -segmento sobre la superficie  $\mathbf{S}$ .

El éxito de esta rutina depende de una adecuada elección del número (suficientemente grande)  $dn_G$  de la malla para distancia (normal) mínima y del número (suficientemente grande)  $m_G$  de segmentos de la curva  $\mathbf{Q}(t)$ , así como de la subdivisión que se hace del dominio de cada uno de los  $m_G$ -segmentos.

Dadas pues dos superficies  $\mathbf{S}^1(u_1, v_1)$ ,  $\mathbf{S}^2(u_2, v_2)$ , en la fase de búsqueda se discretiza una de las superficies, por ejemplo  $\mathbf{S}^1$ , en  $(n_G, n_G)$  segmentos, produciendo la malla de búsqueda. Tomando primero las curvas isoparamétricas de  $u$  constante, luego las curvas isoparamétricas de  $v$  constante correspondientes a la malla de búsqueda, se obtienen, usando las rutinas que se acaba de describir, las intersecciones de cada una de tales curvas coordenadas de la superficie  $\mathbf{S}^1$  con la superficie  $\mathbf{S}^2$ , como se muestra en la Figura 2.1.

El éxito de la fase de búsqueda depende de una adecuada elección del número (sufi-

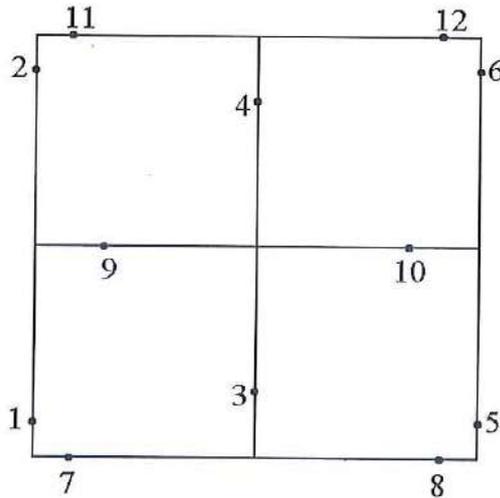


Figura 2.1: Malla de búsqueda sobre una superficie con  $n_G = 2$ .

cientemente grande)  $n_G$  de la malla de búsqueda, del número (suficientemente grande)  $dn_G$  de la malla para distancia (normal) mínima y del número (suficientemente grande)  $m_G$  de segmentos de la curva coordenada en proceso.

### 2.1.2 Fase de Trazado

La fase de búsqueda recién descrita produce un conjunto finito de puntos de intersección que caen sobre las curvas determinadas por la malla de búsqueda, las que constituyen fronteras de regiones sobre la superficie en la que está definida la malla de búsqueda.

La fase de trazado calcula porciones de la curva de intersección en la forma de secuencias de puntos que pertenecen a la intersección de las dos superficies. La estrategia en la fase de trazado es crear, en cada una de las regiones determinadas por la malla de búsqueda cuya frontera posee puntos de intersección producidos por la fase de búsqueda, secuencias de puntos, que pertenecen a la intersección de las dos superficies, que se inician y terminan en puntos localizados por la fase de búsqueda.

Para crear, en una de las regiones cuya frontera posee puntos de intersección producidos por la fase de búsqueda, una de tales secuencias de puntos que pertenecen a la intersección se determinan, en primer lugar, todos los puntos producidos por la fase de búsqueda que pertenecen a la frontera de la región en consideración.

En uno de tales puntos frontera, se determina el vector tangente de la curva de intersección, orientado de manera que apunte hacia el interior de la región.

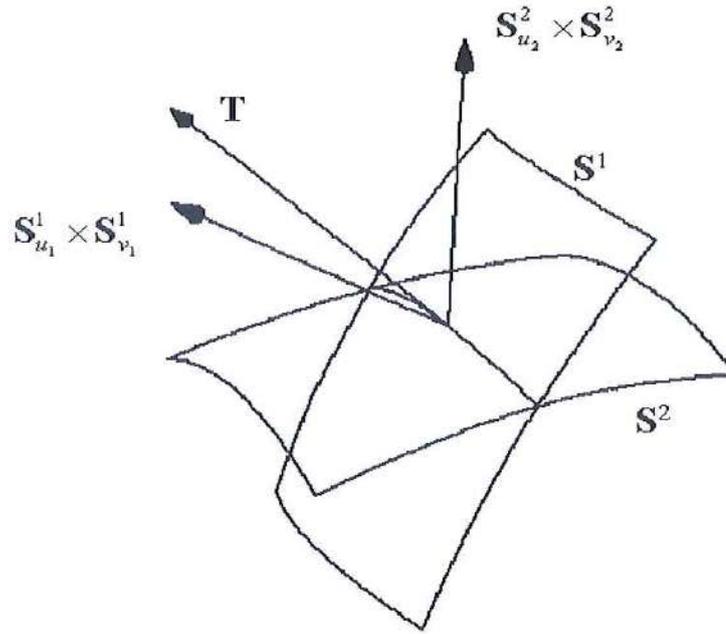


Figura 2.2: Determinación de un vector tangente de la intersección.

Siendo  $S^1(u_1, v_1)$ ,  $S^2(u_2, v_2)$  ambas superficies, se obtiene

$$\mathbf{T} = \nu(\mathbf{S}_{u_1}^1 \times \mathbf{S}_{v_1}^1) \times (\mathbf{S}_{u_2}^2 \times \mathbf{S}_{v_2}^2),$$

donde  $\nu = \pm 1$  de modo que  $\mathbf{T}$  apunte hacia el interior de la región (ver Figura 2.2). Se obtiene así

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|}, \quad (2.1)$$

el vector tangente unitario  $\mathbf{c}^{(1)}(s)$  de la curva intersección  $\mathbf{c}(s)$  parametrizada por longitud de arco en el punto correspondiente al parámetro  $s$ .

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = \mathbf{c}^{(1)}(s) &= \mathbf{S}_{u_1}^1 u_1^{(1)}(s) + \mathbf{S}_{v_1}^1 v_1^{(1)}(s) \\ &= \mathbf{S}_{u_2}^2 u_2^{(1)}(s) + \mathbf{S}_{v_2}^2 v_2^{(1)}(s), \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_{u_1}^1 \times \mathbf{S}_{v_1}^1) u_1^{(1)} &= \mathbf{t} \times \mathbf{S}_{v_1}^1, \\ (\mathbf{S}_{u_1}^1 \times \mathbf{S}_{v_1}^1) v_1^{(1)} &= \mathbf{S}_{u_1}^1 \times \mathbf{t}, \\ (\mathbf{S}_{u_2}^2 \times \mathbf{S}_{v_2}^2) u_2^{(1)} &= \mathbf{t} \times \mathbf{S}_{v_2}^2, \\ (\mathbf{S}_{u_2}^2 \times \mathbf{S}_{v_2}^2) v_2^{(1)} &= \mathbf{S}_{u_2}^2 \times \mathbf{t}, \end{aligned}$$

de donde, como  $\mathbf{S}_{u_1}^1 \times \mathbf{S}_{v_1}^1 \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{S}_{u_2}^2 \times \mathbf{S}_{v_2}^2 \neq \mathbf{0}$ , por ser  $\mathbf{S}^1(u_1, v_1)$ ,  $\mathbf{S}^2(u_2, v_2)$  superficies, es posible obtener  $u_1^{(1)}$ ,  $v_1^{(1)}$ ,  $u_2^{(1)}$ ,  $v_2^{(1)}$ .

Derivando con respecto al parámetro longitud de arco  $s$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \frac{d}{ds} ((\mathbf{S}_{u_1}^1 \times \mathbf{S}_{v_1}^1) \times (\mathbf{S}_{u_2}^2 \times \mathbf{S}_{v_2}^2)) \\ &= ((\mathbf{S}_{u_1 u_1}^1 \times \mathbf{S}_{v_1}^1 + \mathbf{S}_{u_1}^1 \times \mathbf{S}_{u_1 v_1}^1) \times (\mathbf{S}_{u_2}^2 \times \mathbf{S}_{v_2}^2)) u_1^{(1)} \\ &+ ((\mathbf{S}_{u_1 v_1}^1 \times \mathbf{S}_{v_1}^1 + \mathbf{S}_{u_1}^1 \times \mathbf{S}_{v_1 v_1}^1) \times (\mathbf{S}_{u_2}^2 \times \mathbf{S}_{v_2}^2)) v_1^{(1)} \\ &+ ((\mathbf{S}_{u_1}^1 \times \mathbf{S}_{v_1}^1) \times (\mathbf{S}_{u_2 u_2}^2 \times \mathbf{S}_{v_2}^2 + \mathbf{S}_{u_2}^2 \times \mathbf{S}_{u_2 v_2}^2)) u_2^{(1)} \\ &+ ((\mathbf{S}_{u_1}^1 \times \mathbf{S}_{v_1}^1) \times (\mathbf{S}_{u_2 v_2}^2 \times \mathbf{S}_{v_2}^2 + \mathbf{S}_{u_2}^2 \times \mathbf{S}_{v_2 v_2}^2)) v_2^{(1)}, \end{aligned}$$

de donde, derivando también con respecto al parámetro longitud de arco  $s$ ,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{T}|} \left( \frac{d\mathbf{T}}{ds} - \left( \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right) \mathbf{t} \right),$$

se obtiene, por definición,

$$\kappa = \left| \frac{dt}{ds} \right|,$$

la curvatura  $|\mathbf{c}^{(2)}(s)|$  de la curva de intersección  $\mathbf{c}(s)$  parametrizada por longitud de arco en el punto correspondiente al parámetro  $s$ .

Tomando  $\Delta\theta$  el ángulo que forma  $\mathbf{T}$  con el siguiente vector tangente en el sentido de avance de la curva intersección de ambas superficies, y para un punto suficientemente cercano, se determina así el tamaño de paso como

$$\Delta s = \frac{\Delta\theta}{\kappa}.$$

Como para cualquier parámetro  $r$  se tiene

$$r(s + \Delta s) \approx r(s) + r^{(1)}(s)\Delta s,$$

se puede considerar que, para  $\Delta s$  suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned} u_1(s + \Delta s) &= u_1(s) + u_1^{(1)}(s)\Delta s, \\ v_1(s + \Delta s) &= v_1(s) + v_1^{(1)}(s)\Delta s, \\ u_2(s + \Delta s) &= u_2(s) + u_2^{(1)}(s)\Delta s, \\ v_2(s + \Delta s) &= v_2(s) + v_2^{(1)}(s)\Delta s. \end{aligned}$$

Estos nuevos valores de los parámetros,  $u_1(s + \Delta s)$ ,  $v_1(s + \Delta s)$ ,  $u_2(s + \Delta s)$ ,  $v_2(s + \Delta s)$ , permiten determinar puntos  $\mathbf{S}^1(u_1(s + \Delta s), v_1(s + \Delta s))$ ,  $\mathbf{S}^2(u_2(s + \Delta s), v_2(s + \Delta s))$ ,

sobre cada una de las superficies, que están suficientemente cercanos como para que sirvan como puntos de inicio de un método iterativo que permita hallar la intersección de ambas superficies.

Para realizar la fase de trazado se necesita pues de la rutina que se describe a continuación.

**Intersección de un  $[u_{1_m}, u_{1_M}] \times [v_{1_m}, v_{1_M}]$ -segmento de una superficie  $S^1(u_1, v_1)$  con una superficie  $S^2(u_2, v_2)$**

La intersección de  $[u_{1_m}, u_{1_M}] \times [v_{1_m}, v_{1_M}]$ -segmento de una superficie  $S^1(u_1, v_1)$  con una superficie  $S^2(u_2, v_2)$  se obtiene encontrando  $(u_{1_i}, v_{1_i})$  y  $(u_{2_i}, v_{2_i})$  en el dominio del  $[u_{1_m}, u_{1_M}] \times [v_{1_m}, v_{1_M}]$ -segmento de  $S^1(u_1, v_1)$  y de  $S^2(u_2, v_2)$  respectivamente, de manera que se satisfaga la condición de intersección

$$S^1(u_1, v_1) - S^2(u_2, v_2) = 0$$

que constituye un sistema de tres ecuaciones en cuatro incógnitas. Se resuelve este problema de intersección, manteniendo fijo uno de los parámetros, lo que configura sistemas de tres ecuaciones en tres incógnitas. Usando, en cada uno de estos casos, el método de Newton, escribiendo  $\mathbf{r} = S^1(u_1, v_1) - S^2(u_2, v_2)$ , se tiene:

Para  $u_1$  constante,  $D_{u_1} = S_{v_1}^1 \cdot S_{u_2}^2 \times S_{v_2}^2$ ,

$$\begin{aligned} u_{1_{i+1}} &= u_{1_i}, & v_{1_{i+1}} &= v_{1_i} - \left( \frac{S_{u_2}^2 \cdot S_{v_2}^2 \times \mathbf{r}}{D_{u_1}} \right)_i, \\ u_{2_{i+1}} &= u_{2_i} + \left( \frac{S_{v_2}^2 \cdot S_{v_1}^1 \times \mathbf{r}}{D_{u_1}} \right)_i, & v_{2_{i+1}} &= v_{2_i} + \left( \frac{S_{v_1}^1 \cdot S_{u_2}^2 \times \mathbf{r}}{D_{u_1}} \right)_i. \end{aligned}$$

Para  $v_1$  constante,  $D_{v_1} = S_{u_1}^1 \cdot S_{u_2}^2 \times S_{v_2}^2$ ,

$$\begin{aligned} u_{1_{i+1}} &= u_{1_i} - \left( \frac{S_{u_2}^2 \cdot S_{v_2}^2 \times \mathbf{r}}{D_{v_1}} \right)_i, & v_{1_{i+1}} &= v_{1_i}, \\ u_{2_{i+1}} &= u_{2_i} + \left( \frac{S_{v_2}^2 \cdot S_{u_1}^1 \times \mathbf{r}}{D_{v_1}} \right)_i, & v_{2_{i+1}} &= v_{2_i} + \left( \frac{S_{u_1}^1 \cdot S_{u_2}^2 \times \mathbf{r}}{D_{v_1}} \right)_i. \end{aligned}$$

Para  $u_2$  constante,  $D_{u_2} = -S_{v_2}^2 \cdot S_{u_1}^1 \times S_{v_1}^1$ ,

$$\begin{aligned} u_{1_{i+1}} &= u_{1_i} + \left( \frac{S_{v_1}^1 \cdot S_{v_2}^2 \times \mathbf{r}}{D_{u_2}} \right)_i, & v_{1_{i+1}} &= v_{1_i} + \left( \frac{S_{v_2}^2 \cdot S_{u_1}^1 \times \mathbf{r}}{D_{u_2}} \right)_i, \\ u_{2_{i+1}} &= u_{2_i}, & v_{2_{i+1}} &= v_{2_i} - \left( \frac{S_{u_1}^1 \cdot S_{v_1}^1 \times \mathbf{r}}{D_{u_2}} \right)_i. \end{aligned}$$

Para  $v_2$  constante,  $D_{v_2} = -\mathbf{S}_{u_2}^2 \cdot \mathbf{S}_{u_1}^1 \times \mathbf{S}_{v_1}^1$ ,

$$\begin{aligned} u_{1_{i+1}} &= u_{1_i} + \left( \frac{\mathbf{S}_{v_1}^1 \cdot \mathbf{S}_{u_2}^2 \times \mathbf{r}}{D_{v_2}} \right)_i, & v_{1_{i+1}} &= v_{1_i} + \left( \frac{\mathbf{S}_{u_2}^2 \cdot \mathbf{S}_{u_1}^1 \times \mathbf{r}}{D_{v_2}} \right)_i, \\ u_{2_{i+1}} &= u_{2_i} - \left( \frac{\mathbf{S}_{u_1}^1 \cdot \mathbf{S}_{v_1}^1 \times \mathbf{r}}{D_{v_2}} \right)_i, & v_{2_{i+1}} &= v_{2_i}. \end{aligned}$$

El parámetro que es fijado es aquél que produce el denominador de mayor valor absoluto en el último punto convergido.

El éxito de esta rutina depende de una adecuada elección de los puntos de inicio del método de Newton y de que el  $[u_{1_m}, u_{1_M}] \times [v_{1_m}, v_{1_M}]$ -segmento de  $\mathbf{S}^1(u_1, v_1)$  sea suficientemente pequeño.

Se obtiene de esta manera un nuevo punto de intersección de ambas superficies  $\mathbf{S}^1(u_1, v_1)$ ,  $\mathbf{S}^2(u_2, v_2)$ , en el que se determina el nuevo vector tangente de la curva de intersección  $\mathbf{c}(s)$

$$\mathbf{T} = \nu(\mathbf{S}_{u_1}^1 \times \mathbf{S}_{v_1}^1) \times (\mathbf{S}_{u_2}^2 \times \mathbf{S}_{v_2}^2),$$

donde  $\nu = \pm 1$  de modo que el ángulo  $\Delta\theta$  que forma con el anterior vector tangente sea suficientemente pequeño.

Se repite el proceso desde la obtención de  $\mathbf{t}$ , en (2.1), el vector tangente unitario de la curva intersección parametrizada por longitud de arco en el punto correspondiente, hasta terminar con la secuencia de puntos. El punto final de la secuencia de puntos es excluido del resto del proceso para la región.

Tomando otro punto frontera se determina el vector tangente de la curva de intersección, orientado de manera que apunte hacia el interior de la región, repitiéndose el proceso hasta agotar todos los puntos de intersección producidos por la fase de búsqueda que caen sobre la frontera de la región en consideración (ver Figura 2.3). Se repite el proceso para cada región determinada por la malla de búsqueda cuya frontera posee puntos de intersección producidos por la fase de búsqueda.

El éxito de este proceso de trazado depende, naturalmente, del éxito de la fase de búsqueda y del valor del ángulo entre dos vectores tangentes consecutivos orientados en el sentido de avance del segmento, como se señala en el procedimiento sugerido por Timmer de selección del tamaño de paso. En buena cuenta, de una buena elección del tamaño de paso.

### 2.1.3 Fase de Ordenamiento

La fase de trazado genera un conjunto de segmentos aparentemente disjuntos, en la forma de secuencias de puntos. La fase de ordenamiento une consecutivamente en

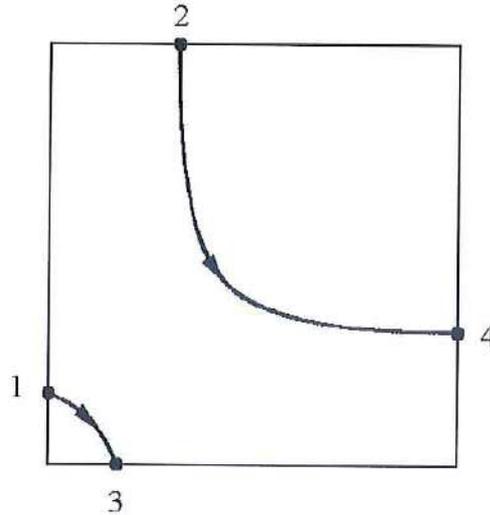


Figura 2.3: Curvas dentro de una región determinada por la malla de búsqueda.

segmentos disjuntos las secuencias de puntos que han sido ya creadas en la fase de trazado y las que se disponen en un arreglo para su procesamiento en esta fase de ordenamiento.

La estrategia de esta fase es muy simple, se ocupa solamente de comparar los extremos de los segmentos.

Tomando uno de los extremos del primer segmento del arreglo se compara con los extremos de los otros. Si éste coincide con el extremo de algún otro segmento, se efectúa la unión, configurándose de esta manera un nuevo primer segmento que reemplazará a los dos que le dieron origen. Observar que esto puede cambiar el sentido de trazado de alguno de los segmentos, lo que obviamente no representa ningún problema. Si ninguno de los extremos de este primer segmento coincide con ninguno de los extremos de los siguientes segmentos del arreglo, se tiene un segmento disjunto. Si sus propios extremos coinciden, se trata de un segmento cerrado.

Tomando el siguiente segmento del arreglo, si lo hubiera, como el primer segmento de un nuevo arreglo se efectúa nuevamente el procedimiento indicado hasta agotar todos los segmentos del arreglo.

Un método de trazado, como el que se acaba de mostrar, debe pues construir una secuencia de puntos que están sobre (o cerca de) la curva de intersección, empezando en un punto dado y terminando en un punto también dado. La idea es ir avanzando en la dirección de la curva de intersección con un tamaño de paso adecuado. La dirección en la cual ir avanzando y el tamaño de los pasos pueden ser calculados

usando la geometría diferencial local de las dos superficies.

Debe haberse podido percibir que el problema de intersección de dos superficies es en general subdeterminado, es decir, tiene demasiados grados de libertad. Este problema puede ser de algún modo aliviado imponiendo condiciones adicionales arbitrarias, que incluso podrían ayudar en la determinación adecuada del tamaño de paso.

Tales condiciones pueden ser interpretadas como una superficie suplementaria  $S^3$ , la cual interseca a la curva de intersección en un punto que está a una distancia prefijada del último punto de intersección encontrado. Una buena elección para  $S^3$  sería, por ejemplo, una esfera con centro en el último punto encontrado y con un radio dependiente de la curvatura de la curva de intersección en el último punto encontrado [15].

A causa del resultante ahorro computacional, podría usarse un plano perpendicular a la tangente de la curva de intersección en el último punto encontrado a una distancia que también dependa de la curvatura de la curva de intersección en el último punto encontrado [7, 15].

En [2] y [12], el siguiente punto de inicio para la subsecuente iteración de Newton, es calculado usando el círculo de curvatura (en lugar de la recta tangente) que pasa a través del último punto encontrado. En [8], el círculo de curvatura es calculado directamente a partir del último punto encontrado y de dos puntos vecinos a ambos lados del último punto encontrado, sin hacer uso de las segundas derivadas parciales. Así mismo, en [32], se propone un método de trazado en el cual se avanza a lo largo de un aproximante del círculo osculador en el último punto encontrado.

En [30], la aproximación inicial del siguiente punto cae sobre una parábola que aproxima la curva de intersección en una vecindad del último punto encontrado. La longitud de la parábola entre los dos puntos es evaluada de modo que su desviación máxima de la cuerda que une los puntos no sea mayor que una tolerancia de desviación dada.

## 2.2 El Problema

El método propuesto por Timmer no aborda el problema sobre el control del error de la aproximación, es decir, el problema de cómo construir un interpolante que aproxime la curva de intersección con una tolerancia de error dada. Esta característica es compartida por un buen grupo de los métodos conocidos para calcular la intersección entre dos superficies (ver, por ejemplo [2, 25, 32]).

Como otros métodos que no abordan el problema de control del error, el método de Timmer permite obtener un interpolante lineal de la curva de intersección, pero esto siempre que el valor de  $\Delta\theta$  y consecuentemente el tamaño de paso  $\Delta s$  sea lo suficientemente pequeño como para garantizar la convergencia de la iteración de Newton

involucrada en el cálculo de un punto de la intersección, lo que tampoco significa controlar el error. Si tal valor es demasiado grande se corre el riesgo de que la iteración de Newton no tenga posibilidades de convergencia.

Los métodos que usan geometría diferencial local, como el valor de la curvatura en el último punto encontrado, para proponer un tamaño de paso adaptativo en la generación de los subsecuentes puntos de la intersección pueden fallar en satisfacer la tolerancia de error prefijada.

Existe siempre el riesgo de que el tamaño de paso no sea lo suficientemente pequeño como para que se pueda satisfacer la tolerancia permitida. Más aún, existe siempre la posibilidad de que la curva presente cambios bruscos en el valor de la curvatura, sobre todo si ésta aumenta, como se verá posteriormente. Notar que, con estos métodos, sólo se evalúa la curvatura en un conjunto finito de puntos, de manera que no se dispone de información de lo que pueda pasar con la curvatura en los puntos intermedios. Podría suceder que la curva real esté muy alejada del interpolante, haciendo fracasar cualquier intento de controlar el error en esta forma.

Para precisar esta discusión se puede tomar como ejemplo el método desarrollado por Faux y Pratt [15]. Se asume en este método un esquema de interpolación lineal como el usado en las máquinas de ploteo vectorial y en muchas máquinas de control numérico. La curva de intersección es entonces aproximada por una secuencia de segmentos lineales. En tal caso, es usual poner límites a la desviación máxima  $\epsilon$  entre la curva de intersección real y la cuerda entre puntos sucesivos, medida ortogonal a la cuerda. Para pasos pequeños, parece razonable aproximar la curva por su círculo osculador, de modo que la curvatura local de la curva de intersección puede ser usada para determinar el tamaño de paso. Si  $\Delta s$  es el tamaño de paso y  $r$  es el radio de curvatura en el último punto encontrado, Faux y Pratt [15] sugieren que

$$\Delta s = \sqrt{4\epsilon(2r - \epsilon)}.$$

Para mostrar las dificultades de este método basta asumir que la curva de intersección (en general desconocida) es la curva de Bézier polinomial con puntos de control dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= (0, 5, 0), & \mathbf{b}_1 &= (-10, -3, 0), & \mathbf{b}_2 &= (-33, 10, 0), \\ \mathbf{b}_3 &= (-12, 25, 0), & \mathbf{b}_4 &= (3, 28, 0), & \mathbf{b}_5 &= (54, 30, 0). \end{aligned}$$

La longitud de esta curva es 96.913, de modo que  $\epsilon = 0.1$  es una tolerancia de error muy razonable. Al interpolar esta curva a fin de controlar adaptativamente el tamaño de paso de modo que el error de interpolación permanezca dentro de la tolerancia prefijada  $\epsilon = 0.1$  el método propuesto por Faux y Pratt da un error de 0.102942 con 19 puntos de interpolación (ver Figura 2.4 donde es también mostrado cómo es distribuido el error de interpolación). El problema se vuelve crítico si la curva es trazada en el sentido en que el valor de la curvatura aumenta (ver Figura 2.5, en que

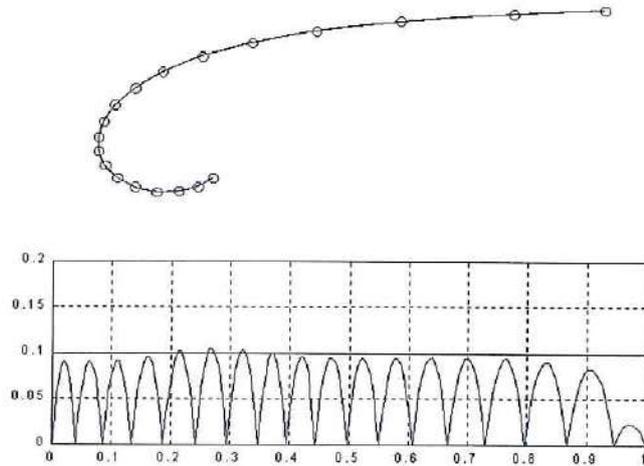


Figura 2.4: Interpolación de acuerdo al método propuesto por Faux y Pratt. El sentido del trazo de la curva es de izquierda a derecha.

se invirtió el sentido de trazo de la curva de Bézier polinomial dada). Aquí el error es de 0.186910 con 18 puntos de interpolación.

Esta limitación no es exclusividad de este método. En realidad, no es difícil encontrar contraejemplos a todos los métodos de trazado que sólo usan la información local de la curva de intersección para proponer un tamaño de paso adaptativo. Como señalan Chen y Ozsoy [12], es extremadamente difícil encontrar la relación precisa entre  $\epsilon$  y  $\Delta s$ .

La elección del tamaño de paso depende naturalmente de la aplicación y del esquema de interpolación a ser empleado posteriormente.

Las aplicaciones de manufactura hacen necesario especificar una tolerancia de error  $\epsilon$  de tal forma que la curva de intersección esté siempre a una distancia menor que  $\epsilon$  de la aproximación generada por la aproximación resultante de la interpolación de los puntos de intersección obtenidos por el trazado, esto para todos los puntos de la curva de intersección.

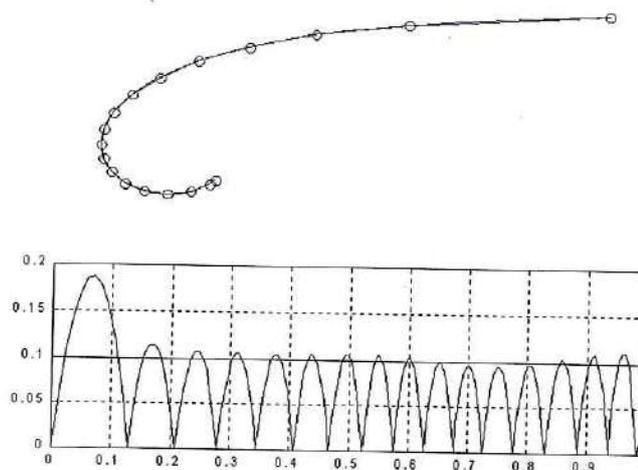


Figura 2.5: Interpolación de acuerdo al método propuesto por Faux y Pratt. El sentido del trazo de la curva es de derecha a izquierda.

## Capítulo 3

# Resolviendo el Problema

Este capítulo está dedicado a la solución del problema planteado en el Capítulo 2.

En la Sección 3.1 se muestran propiedades del círculo osculador que resultan relevantes al problema de intersección y aclaran completamente la razón por la cual los métodos de trazado conocidos tienen dificultades en satisfacer las tolerancias de error prefijadas.

Estas dificultades serían resueltas si se logra establecer una estimación razonablemente global de la curvatura que permita una estimación confiable del error de la aproximación. Esto se discute en la Sección 3.2 haciendo uso de las curvaturas normales de la curva de intersección sobre cada una de las superficies intersectantes.

En la Sección 3.3 se presenta una manera de resolver simbólicamente el sistema de Frenet, lo que será usado en la Sección 3.4. Para esto, se presenta en el Apéndice B un nuevo método para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Como es sabido, el sistema de Frenet es un sistema de este tipo.

Con la motivación de la Sección 3.1 y en base a los resultados de las secciones precedentes, se muestra en la Sección 3.4 una manera confiable de controlar el error del proceso de interpolación, lo que permite configurar un método de trazado capaz de realizar esta tarea. Esto es de interés puesto que para las aplicaciones a la manufactura es necesario especificar una tolerancia de error de modo que la desviación de la aproximación generada con el método con respecto a la intersección real se mantenga siempre dentro de la tolerancia especificada.

Para los procesos de manufactura realizados con máquinas de control numérico es también deseable tener el menor número posible de puntos de interpolación necesarios para aproximar la curva de intersección con una tolerancia de error prefijada. Por tal motivo, se propone en la Sección 3.5 un método cuyo objetivo es controlar el error del proceso de interpolación, haciendo uso de las propiedades de la geometría diferencial local de las superficies y de la curva de intersección entre ambas. Esto determina un interpolante con tamaño de paso adaptativo, que tiene como caso particular un

interpolante lineal. En el Apéndice A se muestra la manera de calcular las propiedades de geometría diferencial en los puntos de intersección, lo que es necesario para la construcción del interpolante de Hermite de la Sección 3.5.

En la Sección 3.6 se propone un algoritmo que viene a concretar el método de trazado que se ha propuesto en esta tesis y se muestran aplicaciones del método propuesto.

### 3.1 Sobre el Círculo Osculador

Una curva y su círculo osculador son aproximadamente congruentes en alguna vecindad de su punto de contacto tangencial [11]. El círculo osculador en el punto de contacto de una curva es el círculo que mejor aproxima a la curva en una vecindad del punto. Se puede decir aún más acerca del círculo osculador. En lo que sigue, una *vecindad reducida* del punto  $x_0$  en  $\mathbb{R}$  significará un subconjunto en  $\mathbb{R}$  de la forma  $(a, b) - \{x_0\}$  con  $x_0 \in (a, b)$  y  $a < b$ . Así mismo, una *vecindad reducida a la izquierda* de  $x_0$  será un subconjunto en  $\mathbb{R}$  de la forma  $(a, x_0)$  con  $a < x_0$  y un subconjunto en  $\mathbb{R}$  de la forma  $(x_0, b)$  con  $x_0 < b$  será una *vecindad reducida a la derecha* de  $x_0$ .

Se han podido percibir importantes propiedades locales del círculo osculador que, aparte de su propio interés, son relevantes al problema de intersección de superficies. Tales propiedades quedarán claramente establecidas probando el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.1** *Sea  $c$  una curva regular 3D definida sobre un intervalo abierto  $I$ , parametrizada por longitud de arco  $s$ , de curvatura  $\kappa(s)$  no nula para todo  $s$  en  $I$ . Fijado  $s_0$  en  $I$ .*

1. *Existe una vecindad reducida de  $s_0$ ,  $V'(s_0)$  en  $I$  tal que para todo  $s$  en  $V'(s_0)$ , la proyección ortogonal de  $\mathbf{c}(s)$  sobre el plano osculador de  $c$  en  $s_0$  pertenece al semiplano abierto de tal plano osculador determinado por la recta tangente a  $c$  en  $s_0$  que contiene al centro del círculo osculador de  $c$  en  $s_0$ . Además, existe una vecindad reducida a la izquierda (respectivamente derecha) de  $s_0$ ,  $V'_i(s_0)$  (respectivamente  $V'_d(s_0)$ ) en  $I$  tal que para todo  $s$  en  $V'_i(s_0)$  (respectivamente  $V'_d(s_0)$ ), el producto escalar de  $\mathbf{c}^{(1)}(s)$  por el vector normal  $\mathbf{n}(s_0)$  de  $c$  en  $s_0$  es negativo (respectivamente positivo). Más aún, existe una vecindad de  $s_0$ ,  $V(s_0)$  en  $I$  tal que para todo  $s$  en  $V(s_0)$ ,  $\mathbf{c}^{(2)}(s) \cdot \mathbf{n}(s_0) > 0$ .*
2. *Si  $\kappa^{(1)}(s_0) < 0$  (respectivamente  $\kappa^{(1)}(s_0) > 0$ ), existe una vecindad reducida a la izquierda de  $s_0$ ,  $V'_i(s_0)$  en  $I$  tal que para todo  $s$  en  $V'_i(s_0)$ , la proyección ortogonal de  $\mathbf{c}(s)$  sobre el plano osculador de  $c$  en  $s_0$  pertenece al interior (respectivamente exterior) del círculo osculador de  $c$  en  $s_0$ . Existe también una vecindad reducida a la derecha de  $s_0$ ,  $V'_d(s_0)$  en  $I$  tal que para todo  $s$  en  $V'_d(s_0)$ ,*

la proyección ortogonal de  $\mathbf{c}(s)$  sobre el plano osculador de  $\mathbf{c}$  en  $s_0$  pertenece al exterior (respectivamente interior) del círculo osculador de  $\mathbf{c}$  en  $s_0$ .

3. Para el caso en que  $\kappa^{(1)}(s_0) = 0$ . Si  $\kappa^{(2)}(s_0) < \kappa(s_0)\tau^2(s_0)$  (respectivamente  $\kappa^{(2)}(s_0) > \kappa(s_0)\tau^2(s_0)$ ), existe una vecindad reducida de  $s_0$ ,  $V'(s_0)$  en  $I$  tal que para todo  $s$  en  $V'(s_0)$ , la proyección ortogonal de  $\mathbf{c}(s)$  sobre el plano osculador de  $\mathbf{c}$  en  $s_0$  pertenece al exterior (respectivamente interior) del círculo osculador de  $\mathbf{c}$  en  $s_0$ .

*Prueba.* Sea  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$  una curva regular 3D definida sobre un intervalo abierto, parametrizada por longitud de arco  $s$ . Se puede asumir, sin pérdida de generalidad que el dominio de  $\mathbf{c}$  contiene al punto 0, es decir, se puede asumir que  $s_0 = 0$ . Se escribirá la curva, en una vecindad del 0, usando el triedro de Frenet [11]  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  en 0 como una base para  $\mathbb{R}^3$ . Es conveniente considerar ahora la expansión de Taylor hasta el orden 2,

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(0) + \mathbf{c}^{(1)}(0)s + \frac{\mathbf{c}^{(2)}(0)}{2}s^2 + \mathbf{R}_c^2(s),$$

donde

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}_c^2(s)}{s^2} = \mathbf{0}.$$

Desde que  $\mathbf{c}^{(1)}(0) = \mathbf{t}$  y  $\mathbf{c}^{(2)}(0) = \kappa\mathbf{n}$ , donde  $\kappa$  es la curvatura [11] de la curva paramétrica  $\mathbf{c}$  en el punto 0, se obtiene

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(0) + s\mathbf{t} + \frac{\kappa}{2}s^2\mathbf{n} + \mathbf{R}_c^2(s).$$

Se puede también asumir sin pérdida de generalidad que  $\mathbf{c}(0) = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{t} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ . Bajo estas suposiciones,  $\mathbf{c}(s) = (c_1(s), c_2(s), c_3(s))$  es dada por

$$\begin{aligned} c_1(s) &= s + R_{c_1}^2(s), \\ c_2(s) &= \frac{\kappa}{2}s^2 + R_{c_2}^2(s), \\ c_3(s) &= R_{c_3}^2(s), \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{R}_c^2 = (R_{c_1}^2, R_{c_2}^2, R_{c_3}^2)$ .

Considerando que  $\kappa > 0$  y  $s \neq 0$ , se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{\kappa}{2} + \frac{R_{c_2}^2(s)}{s^2} \right) = \frac{\kappa}{2} > 0.$$

Así, existe una vecindad reducida de 0 tal que

$$\frac{\kappa}{2} + \frac{R_{c_2}^2(s)}{s^2} > 0,$$

para todo  $s$  en esa vecindad reducida. Desde que

$$c_2(s) = s^2 \left( \frac{\kappa}{2} + \frac{R_{c_2}^2(s)}{s^2} \right),$$

se tiene que existe una vecindad reducida de 0 tal que  $c_2(s) > 0$ , para todo  $s$  en esa vecindad reducida. Naturalmente,  $c_2(0) = 0$ . Diferenciando  $c_2(s)$  con respecto a  $s$ ,

$$c_2^{(1)}(s) = \kappa s + \left( R_{c_2}^2 \right)^{(1)}(s),$$

donde

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\left( R_{c_2}^2 \right)^{(1)}(s)}{s} = 0.$$

Bajo las mismas suposiciones de antes, se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( \kappa + \frac{\left( R_{c_2}^2 \right)^{(1)}(s)}{s} \right) = \kappa > 0.$$

Así, existe una vecindad reducida de 0 tal que

$$\kappa + \frac{\left( R_{c_2}^2 \right)^{(1)}(s)}{s} > 0,$$

para todo  $s$  en esa vecindad reducida. Desde que

$$c_2^{(1)}(s) = s \left( \kappa + \frac{\left( R_{c_2}^2 \right)^{(1)}(s)}{s} \right),$$

se tiene que existe una vecindad reducida a la izquierda (respectivamente derecha) de 0 tal que  $c_2^{(1)}(s) < 0$  (respectivamente  $c_2^{(1)}(s) > 0$ ), para todo  $s$  en esa vecindad reducida lateral. Diferenciando nuevamente con respecto a  $s$ ,

$$c_2^{(2)}(s) = \kappa + \left( R_{c_2}^2 \right)^{(2)}(s),$$

donde

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( R_{c_2}^2 \right)^{(2)}(s) = 0,$$

se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( \kappa + \left( R_{c_2}^2 \right)^{(2)}(s) \right) = \kappa > 0.$$

Así, se tiene que existe una vecindad de 0 tal que  $c_2^{(2)}(s) > 0$  para todo  $s$  en esa vecindad. Esto concluye la prueba de (1).

Para probar (2) conviene considerar la expansión de Taylor hasta el orden 3,

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(0) + \mathbf{c}^{(1)}(0)s + \frac{\mathbf{c}^{(2)}(0)}{2}s^2 + \frac{\mathbf{c}^{(3)}(0)}{6}s^3 + \mathbf{R}_c^3(s),$$

donde

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}_c^3(s)}{s^3} = \mathbf{0}.$$

Desde que  $\mathbf{c}^{(3)}(0) = -\kappa^2 \mathbf{t} + \kappa^{(1)} \mathbf{n} - \kappa \tau \mathbf{b}$ , donde  $\tau$  es la torsión [11] de la curva paramétrica  $\mathbf{c}$  en el punto 0, con las suposiciones de antes,  $\mathbf{c}(s) = (c_1(s), c_2(s), c_3(s))$  es dada por

$$\begin{aligned} c_1(s) &= s - \frac{\kappa^2}{6}s^3 + R_{c_1}^3(s), \\ c_2(s) &= \frac{\kappa}{2}s^2 + \frac{\kappa^{(1)}}{6}s^3 + R_{c_2}^3(s), \\ c_3(s) &= -\frac{\kappa\tau}{6}s^3 + R_{c_3}^3(s), \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{R}_c^3 = (R_{c_1}^3, R_{c_2}^3, R_{c_3}^3)$ . Sea

$$\Theta(s) = \frac{1}{\kappa} \left( \cos \left( \kappa s - \frac{\pi}{2} \right), \sin \left( \kappa s - \frac{\pi}{2} \right), 0 \right) + \left( 0, \frac{1}{\kappa}, 0 \right)$$

una parametrización por longitud de arco  $s$  del círculo osculador de la curva  $\mathbf{c}(s)$  en  $s = 0$ , definida en una vecindad de 0. Bajo las mismas suposiciones, usando la expansión de Taylor hasta el orden 3,  $\Theta(s) = (\theta_1(s), \theta_2(s), \theta_3(s))$  es dada por

$$\begin{aligned} \theta_1(s) &= s - \frac{\kappa^2}{6}s^3 + R_{\theta_1}^3(s), \\ \theta_2(s) &= \frac{\kappa}{2}s^2 + R_{\theta_2}^3(s), \\ \theta_3(s) &= 0, \end{aligned}$$

donde  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_{\theta_j}^3(s)}{s^3} = 0$ , para  $j = 1(1)2$ . Para detectar la anunciada propiedad local del círculo osculador, es conveniente considerar la función  $y(s) = c_2(s) - \theta_2(s)$ . Por un cálculo directo se tiene

$$y(s) = \frac{\kappa^{(1)}}{6}s^3 + R^3(s),$$

donde

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R^3(s)}{s^3} = 0.$$

Como

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{\kappa^{(1)}}{6} + \frac{R^3(s)}{s^3} \right) = \frac{\kappa^{(1)}}{6},$$

se tiene que, si  $\kappa^{(1)} < 0$  (respectivamente  $\kappa^{(1)} > 0$ ), existe una vecindad reducida de 0 tal que

$$\frac{\kappa^{(1)}}{6} + \frac{R^3(s)}{s^3} < 0 \quad (\text{respectivamente } \frac{\kappa^{(1)}}{6} + \frac{R^3(s)}{s^3} > 0),$$

para todo  $s$  en esa vecindad reducida. Desde que

$$y(s) = s^3 \left( \frac{\kappa^{(1)}}{6} + \frac{R^3(s)}{s^3} \right),$$

se tiene que existe una vecindad reducida a la izquierda de 0 tal que  $y(s) > 0$  (respectivamente  $y(s) < 0$ ) y una vecindad reducida a la derecha de 0 tal que  $y(s) < 0$  (respectivamente  $y(s) > 0$ ), previsto que  $k^{(1)} < 0$  (respectivamente  $k^{(1)} > 0$ ), para todo  $s$  en esa vecindad reducida. Naturalmente,  $y(0) = 0$ . Esto concluye la prueba de (2).

Para ver el caso cuando  $\kappa^{(1)} = 0$ , es conveniente considerar las expansiones de Taylor hasta el orden 4. Bajo las mismas suposiciones de antes,  $\mathbf{c}(s) = (c_1(s), c_2(s), c_3(s))$  y  $\Theta(s) = (\theta_1(s), \theta_2(s), \theta_3(s))$  son dadas por

$$\begin{aligned} c_1(s) &= s - \frac{\kappa^2}{6}s^3 - \frac{\kappa\kappa^{(1)}}{8}s^4 + R_{c_1}^4(s), \\ c_2(s) &= \frac{\kappa}{2}s^2 + \frac{\kappa^{(1)}}{6}s^3 + \frac{\kappa^{(2)} - \kappa\tau^2 - \kappa^3}{24}s^4 + R_{c_2}^4(s), \\ c_3(s) &= -\frac{\kappa\tau}{6}s^3 - \frac{2\kappa^{(1)}\tau + \kappa\tau^{(1)}}{24}s^4 + R_{c_3}^4(s), \end{aligned}$$

donde  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_{c_j}^4(s)}{s^4} = 0$ , para  $j = 1(1)3$  y

$$\begin{aligned} \theta_1(s) &= s - \frac{\kappa^2}{6}s^3 + R_{\theta_1}^4(s), \\ \theta_2(s) &= \frac{\kappa}{2}s^2 - \frac{\kappa^3}{24}s^4 + R_{\theta_2}^4(s), \\ \theta_3(s) &= 0, \end{aligned}$$

donde  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_{\theta_j}^4(s)}{s^4} = 0$ , para  $j = 1(1)2$ . Puesto que  $\kappa^{(1)} = 0$ ,  $y(s) = c_2(s) - \theta_2(s)$  resulta en

$$y(s) = \frac{\kappa^{(2)} - \kappa\tau^2}{24}s^4 + R^4(s),$$

donde

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R^4(s)}{s^4} = 0.$$

Como

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{\kappa^{(2)} - \kappa\tau^2}{24} + \frac{R^4(s)}{s^4} \right) = \frac{\kappa^{(2)} - \kappa\tau^2}{24},$$

se tiene que, si  $\kappa^{(2)} - \kappa\tau^2 < 0$  (respectivamente  $\kappa^{(2)} - \kappa\tau^2 > 0$ ), existe una vecindad reducida de 0 tal que

$$\frac{\kappa^{(2)} - \kappa\tau^2}{24} + \frac{R^4(s)}{s^4} < 0 \quad (\text{respectivamente } \frac{\kappa^{(2)} - \kappa\tau^2}{24} + \frac{R^4(s)}{s^4} > 0),$$

para todo  $s$  en esa vecindad reducida. Desde que

$$y(s) = s^4 \left( \frac{\kappa^{(2)} - \kappa\tau^2}{24} + \frac{R^4(s)}{s^4} \right),$$

se tiene que existe una vecindad reducida de 0 tal que  $y(s) < 0$  (respectivamente  $y(s) > 0$ ), para todo  $s$  en esa vecindad reducida. Esto prueba (3) y concluye la prueba del teorema.  $\square$

**Observación 3.1.1** *Notar que, si  $\kappa^{(2)} < 0$  (la curvatura  $\kappa$  tiene un valor máximo en el punto de contacto),  $\kappa^{(2)} - \kappa\tau^2 < 0$ . Por consiguiente, existe una vecindad reducida de 0 tal que  $c_2(s) < \theta_2(s)$ , para todo  $s$  en esa vecindad reducida. La misma cosa ocurre si  $0 < \kappa^{(2)} < \kappa\tau^2$  (se dirá que la curvatura  $\kappa$  tiene un valor mínimo débil en el punto de contacto). Pero, si  $\kappa^{(2)} - \kappa\tau^2 > 0$  (se dirá que la curvatura  $\kappa$  tiene un valor mínimo fuerte en el punto de contacto), existe una vecindad reducida de 0 tal que  $c_2(s) > \theta_2(s)$ , para todo  $s$  en esa vecindad reducida.*

Como se había mencionado, existe un claro mensaje que se desprende del teorema recién probado que resultará relevante para el problema de intersección de superficies.

1. El resultado probado en la parte (1) del teorema significa que la proyección ortogonal de la curva sobre su plano osculador correspondiente al punto de contacto tangencial está localmente a un lado de la recta tangente a la curva en el punto de contacto, siendo localmente su concavidad hacia el centro del círculo osculador (ver Figuras 3.1, 3.2 y 3.3).
2. Aún más importante, para el problema de intersección de superficies, que el resultado probado en la parte (1) del teorema, es el probado en (2). Éste afirma que en alguna vecindad de su punto de contacto tangencial, la curva y el correspondiente círculo osculador tienen el siguiente comportamiento: Si la curvatura de la curva está disminuyendo o aumentando en el punto de contacto, la proyección ortogonal de la curva sobre su correspondiente plano osculador corta tangencialmente al círculo osculador en el punto de contacto. Si la curvatura está disminuyendo (respectivamente aumentando), va desde el interior (respectivamente exterior) al exterior (respectivamente interior) del círculo osculador (ver Figura 3.1). La curvatura es estrictamente decreciente (respectivamente creciente) en el sentido del trazo de la curva.

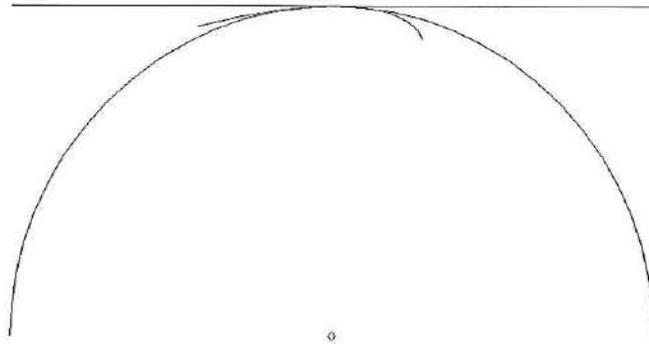


Figura 3.1: Curva con recta tangente y círculo osculador, cuando la curvatura disminuye o aumenta. Si disminuye (respectivamente aumenta), el trazo de la curva es hacia la izquierda (respectivamente derecha).

3. Mención especial merece el resultado probado en (3). Éste significa que si la curvatura no disminuye ni aumenta en el punto de contacto, la curvatura de la curva tiene un valor mínimo o un valor máximo en tal punto. En este caso, la proyección ortogonal de la curva sobre su plano osculador correspondiente al punto de contacto tangencial estará localmente, excepto el punto de contacto, en el interior (respectivamente exterior) del círculo osculador previsto que la curvatura tiene un valor mínimo fuerte (respectivamente mínimo débil o máximo) en tal punto (ver Figuras 3.2 y 3.3).

Es interesante notar que el círculo osculador es el único círculo tangente a la curva que posee la propiedad enunciada en la parte (2) del Teorema 3.1.1. Más precisamente, se tiene la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.1** *Sea  $c$  una curva regular 3D definida sobre un intervalo abierto  $I$ , parametrizada por longitud de arco  $s$ , con curvatura  $\kappa(s) > 0$  para todo  $s$  en  $I$ . Fijado  $s_0$  en  $I$ , sea  $\Theta$  una parametrización por longitud de arco  $s$  de un círculo con curvatura  $\kappa_\Theta$ , tal que  $c(s_0) = \Theta(s_0)$ ,  $c^{(1)}(s_0) = \Theta^{(1)}(s_0)$  y vector normal  $\mathbf{n}_\Theta(s_0)$  coincidente con el vector normal  $\mathbf{n}(s_0)$  de  $c$  en  $s_0$ . Si  $\kappa(s_0) < \kappa_\Theta$  (respectivamente  $\kappa(s_0) > \kappa_\Theta$ ), entonces existe una vecindad reducida de  $s_0$ ,  $V'(s_0)$  en  $I$  tal que para todo  $s$  en  $V'(s_0)$ , la proyección ortogonal de  $c(s)$  sobre el plano osculador de  $c$  en  $s_0$  pertenece al exterior (respectivamente interior) del círculo dado por  $\Theta$ .*

*Prueba.* Como ya es usual, puede asumirse, sin pérdida de generalidad, que  $s_0 = 0$ ,  $c(0) = (0, 0, 0)$ ,  $c^{(1)}(0) = (1, 0, 0)$  y  $\mathbf{n}(0) = (0, 1, 0)$ . Bajo estas suposiciones, usando las expansiones de Taylor en torno de 0 hasta el orden 2,  $c(s) = (c_1(s), c_2(s), c_3(s))$  y

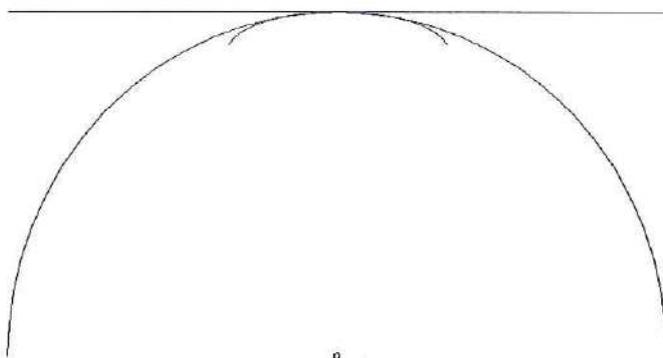


Figura 3.2: Curva con recta tangente y círculo osculador, cuando la curvatura es un valor mínimo fuerte.

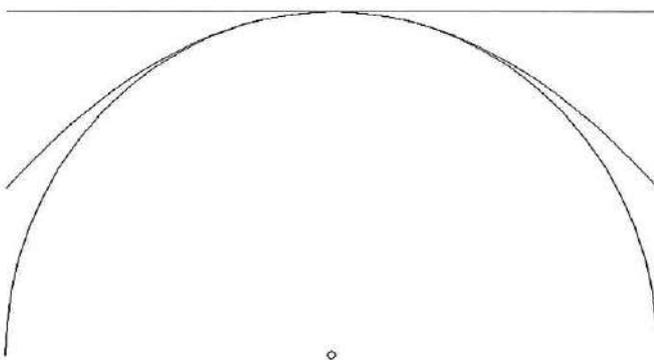


Figura 3.3: Curva con recta tangente y círculo osculador, cuando la curvatura es un valor mínimo débil o máximo.

$\Theta(s) = (\theta_1(s), \theta_2(s), \theta_3(s))$  son dadas por

$$\begin{aligned}c_1(s) &= s + R_{c_1}^2(s), \\c_2(s) &= \frac{\kappa(0)}{2}s^2 + R_{c_2}^2(s), \\c_3(s) &= R_{c_3}^2(s),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\theta_1(s) &= s + R_{\theta_1}^2(s), \\ \theta_2(s) &= \frac{\kappa_{\Theta}}{2}s^2 + R_{\theta_2}^2(s), \\ \theta_3(s) &= 0,\end{aligned}$$

respectivamente, donde  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_{c_j}^2(s)}{s^2} = 0$ , para  $j = 1(1)3$  y  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_{\theta_j}^2(s)}{s^2} = 0$ , para  $j = 1(1)2$ . Considerando  $y(s) = c_2(s) - \theta_2(s)$ , por un cálculo directo se tiene

$$y(s) = \frac{\kappa(0) - \kappa_{\Theta}}{2}s^2 + R^2(s),$$

donde

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R^2(s)}{s^2} = 0.$$

Como

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{\kappa(0) - \kappa_{\Theta}}{2} + \frac{R^2(s)}{s^2} \right) = \frac{\kappa(0) - \kappa_{\Theta}}{2},$$

se tiene que si  $\kappa(0) < \kappa_{\Theta}$  (respectivamente  $\kappa(0) > \kappa_{\Theta}$ ), existe una vecindad reducida de 0 tal que

$$\frac{\kappa(0) - \kappa_{\Theta}}{2} + \frac{R^2(s)}{s^2} < 0 \quad (\text{respectivamente } \frac{\kappa(0) - \kappa_{\Theta}}{2} + \frac{R^2(s)}{s^2} > 0),$$

para todo  $s$  en esa vecindad reducida. Desde que

$$y(s) = s^2 \left( \frac{\kappa(0) - \kappa_{\Theta}}{2} + \frac{R^2(s)}{s^2} \right),$$

se tiene que existe una vecindad reducida de 0 tal que  $y(s) < 0$  (respectivamente  $y(s) > 0$ ) para todo  $s$  en esa vecindad reducida.  $\square$

El significado de la proposición recién probada es que la proyección ortogonal de la curva sobre su plano osculador correspondiente al punto de contacto tangencial está localmente, excepto el punto de contacto, en el exterior (respectivamente interior) de cualquier círculo tangente a la curva, si la curvatura de la curva en el punto de

contacto es menor (respectivamente mayor) que la curvatura de tal círculo tangente. Cuando ambas curvaturas coinciden, se trata del círculo osculador.

Los métodos para calcular la intersección de superficies que usan argumentos de geometría diferencial local para proponer un tamaño de paso adaptativo en la generación de los puntos de la intersección pueden fallar en satisfacer la tolerancia de error prefijada. En principio, existe siempre el riesgo de que el tamaño de paso no sea lo suficientemente pequeño como para que pueda satisfacer la tolerancia prefijada.

A la luz del Teorema 3.1.1 y sobre la base de las consideraciones precedentes acerca del círculo osculador, puede ahora percibirse con claridad el problema menos evidente. Con la intención de resolver la dificultad de encontrar un tamaño de paso adaptativo que satisfaga la tolerancia permitida, se acostumbra aproximar la curva de intersección con su círculo osculador, el que reemplaza a la curva en una vecindad de su punto de contacto tangencial [12, 15]. En cualquier sentido del trazo, existe un tamaño de paso suficientemente pequeño (en general desconocido) que permite satisfacer la tolerancia prefijada, previsto que la proyección ortogonal de la curva sobre su plano osculador se encuentra, en una vecindad de su punto de contacto tangencial, entre la recta tangente y el círculo osculador. Esto puede ocurrir solamente cuando la curvatura tiene un valor mínimo débil o un valor máximo en el punto de contacto (ver Figura 3.3). En cualquier otro caso, existe siempre un sentido del trazo de la curva (ambos cuando la curvatura tiene un valor mínimo fuerte en el punto de contacto) en el cual la proyección ortogonal local sobre su correspondiente plano osculador cae en el interior del círculo osculador, puesto que la curvatura está aumentando (ver Figuras 3.1 y 3.2). En tales casos, que son prácticamente la totalidad, para cualquier tamaño de paso suficientemente pequeño, interesa considerar los arcos de esa longitud desde el punto de contacto, sobre la curva y sobre su círculo osculador puesto que la desviación máxima del arco sobre la curva a la cuerda que une sus extremos es mayor que la desviación máxima del arco sobre su círculo osculador a la cuerda que une sus extremos (ver Figura 3.1). Estas propiedades de la geometría local de las curvas provocan, naturalmente, que los métodos de trazado adaptativos que reemplazan localmente la curva por su círculo osculador pueden fallar en satisfacer una tolerancia prefijada.

Un problema similar se percibe cuando la aproximación inicial del próximo punto generado por un método de trazado cae sobre una parábola que está aproximando a la intersección en una vecindad del último punto encontrado [30]. La longitud de la parábola entre ambos puntos es calculada de manera que su desviación máxima de la cuerda que une los puntos no sea mayor que una tolerancia dada. Esto es hecho con la intención de que el subsecuente interpolante aproxime la intersección con la tolerancia requerida. El problema se presenta cuando se avanza en el sentido del trazo en el cual la curvatura de la curva está aumentando. En ese sentido, la curvatura de la parábola está precisamente disminuyendo, causando que la desviación máxima de la cuerda respecto a la curva sea mayor que la desviación máxima de la cuerda respecto al

correspondiente arco de la parábola.

## 3.2 Estimación del Error

En esta sección se propone un método para estimar el error del proceso de interpolación lineal de la intersección de superficies. Sin pérdida de generalidad, se puede considerar que la curva de intersección está parametrizada por longitud de arco. Haciendo uso de las curvaturas normales de la curva de intersección sobre cada una de las superficies, se consigue obtener una cota superior global para la curvatura de la curva de intersección.

**Teorema 3.2.1** *Sea  $c$  la porción de la curva de intersección 3D de dos superficies  $S^1$  y  $S^2$ , parametrizada por longitud de arco  $s$ , definida sobre  $[s_i, s_i + \Delta s]$  y sea  $p$  el polinomio lineal 3D, definido sobre  $[s_i, s_i + \Delta s]$  tal que*

$$p(s_i) = c(s_i), \quad p(s_i + \Delta s) = c(s_i + \Delta s).$$

*Si  $\sin \theta \geq c$  para algún  $c > 0$ , donde  $\theta$  es el ángulo de intersección de ambas superficies, entonces*

$$|c(s) - p(s)| \leq \frac{3}{8} \frac{|\kappa^1| + |\kappa^2|}{c} (\Delta s)^2, \quad (3.1)$$

*siendo  $|\kappa^i|$  el máximo de los valores absolutos de las curvaturas principales de la superficie  $S^i$ ,  $i = 1, 2$ .*

*Prueba.* Es conocido [19], que el error de interpolación lineal de  $p(s)$  en  $s$  es dado por

$$c(s) - p(s) = \frac{1}{2} (s - s_i) (s - s_i - \Delta s) \bar{c}^{(2)},$$

donde  $\bar{c}^{(2)} = (c_1^{(2)}(\xi_1), c_2^{(2)}(\xi_2), c_3^{(2)}(\xi_3))$ , con  $\xi_j, j = 1(1)3$  (en general desconocido) sobre  $[s_i, s_i + \Delta s]$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} |c(s) - p(s)| &\leq \frac{3}{8} \max |c^{(2)}(s)| (\Delta s)^2 \\ &= \frac{3}{8} \max \kappa(s) (\Delta s)^2. \end{aligned}$$

La curvatura  $\kappa$ , de la curva de intersección  $c$ , de las dos superficies  $S^1$  y  $S^2$ , puede ser expresada en términos de las curvaturas normales  $\kappa_n^1$  y  $\kappa_n^2$  de la curva sobre  $S^1$  y  $S^2$  respectivamente, con las normales unitarias  $N^1$  y  $N^2$ , a las dos superficies [11, 15, 33]. En efecto, considerando la base de Frenet [11]  $(t, n, b)$  asociada a la curva, se tiene

$$t = \pm \frac{N^1 \times N^2}{|N^1 \times N^2|}.$$

Como  $\mathbf{b} = -\mathbf{n} \times \mathbf{t}$ , se tiene, expandiendo el triple producto vectorial,

$$\begin{aligned}\kappa \mathbf{b} &= \mp \frac{\kappa \mathbf{n} \times (\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2)}{|\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2|} \\ &= \pm \frac{\kappa_n^1 \mathbf{N}^2 - \kappa_n^2 \mathbf{N}^1}{|\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2|}.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{|\kappa_n^1 \mathbf{N}^2 - \kappa_n^2 \mathbf{N}^1|}{|\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2|} \\ &\leq \frac{|\kappa_n^1| + |\kappa_n^2|}{|\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2|} \\ &\leq \frac{|\kappa^1| + |\kappa^2|}{\text{sen } \theta},\end{aligned}$$

dado que cada uno de los valores absolutos de las curvaturas normales  $|\kappa_n^i|$ , puede ser superiormente acotado por el máximo de los valores absolutos de las curvaturas principales de la superficie  $\mathbf{S}^i$ ,  $|\kappa^i|$ . Como las superficies no son tangenciales, es decir dado que  $\text{sen } \theta \geq c > 0$  para algún  $c > 0$ , se tiene

$$|\mathbf{c}(s) - \mathbf{p}(s)| \leq \frac{3}{8} \frac{|\kappa^1| + |\kappa^2|}{c} (\Delta s)^2.$$

□

El resultado del teorema recién probado proporciona una manera segura de estimar el error del proceso de interpolación lineal de la curva de intersección de las dos superficies.

Notar que

$$\bar{\kappa} = \frac{|\kappa^1| + |\kappa^2|}{c}$$

puede entenderse como la curvatura de la curva de mayor curvatura posible producida por la intersección de dos superficies  $\mathbf{S}^1$  y  $\mathbf{S}^2$  con un ángulo  $\theta$  tal que  $\text{sen } \theta \geq c > 0$  y tales que el máximo de los valores absolutos de sus curvaturas principales son  $|\kappa^1|$  y  $|\kappa^2|$  respectivamente.

### 3.3 Solución Simbólica del Sistema de Frenet

Antes de usar la estimación obtenida anteriormente para proponer un método confiable capaz de generar puntos de la intersección, que al ser posteriormente interpolados,

produzcan una poligonal que aproxima a la intersección con una tolerancia dada, será conveniente resolver simbólicamente el sistema de Frenet, lo que será usado en la Sección 3.4, que es donde se hace la propuesta del control del error.

En la resolución simbólica del sistema de Frenet se hará uso de los algoritmos presentados en el Apéndice B, puesto que el sistema de Frenet

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^{(1)}(s) &= \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}^{(1)}(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}^{(1)}(s) &= \tau(s)\mathbf{n}(s),\end{aligned}$$

puede considerarse como un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden,

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= \kappa x_4, \\ x_2^{(1)} &= \kappa x_5, \\ x_3^{(1)} &= \kappa x_6, \\ x_4^{(1)} &= -\kappa x_1 - \tau x_7, \\ x_5^{(1)} &= -\kappa x_2 - \tau x_8, \\ x_6^{(1)} &= -\kappa x_3 - \tau x_9, \\ x_7^{(1)} &= \tau x_4, \\ x_8^{(1)} &= \tau x_5, \\ x_9^{(1)} &= \tau x_6,\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{t} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{n} = (x_4, x_5, x_6)$ ,  $\mathbf{b} = (x_7, x_8, x_9)$ .

Denotando  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$  y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau \\ 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

el sistema anterior puede escribirse como

$$\mathbf{x}^{(1)} = A\mathbf{x}. \quad (3.2)$$

El polinomio característico de la matriz de coeficientes  $A$  es  $p(\lambda) = \lambda^3(\lambda^2 + \omega^2)^3$ , donde  $\omega = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ , de manera que la matriz  $A$  tiene a 0 como autovalor real de multiplicidad 3 y a  $\pm i\omega$  como autovalores complejos conjugados de multiplicidad 3.

Usando el Algoritmo 1 para construir soluciones asociadas al autovalor real 0, de multiplicidad 3, se nota que  $\mathcal{A} = A$ . Por simple inspección visual de la matriz  $A$  se ve de inmediato que  $\dim Im \mathcal{A} = 6$ , por consiguiente se tiene que  $\dim Ker \mathcal{A} = 3$ . Así,  $Ker \mathcal{A} = Ker \mathcal{A}^3$ , de manera que, en aplicación del Algoritmo 1, sólo hay que determinar una base  $\{\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_2^1, \mathbf{v}_3^1\}$  de  $Ker \mathcal{A}$ . No existe necesidad aquí de calcular  $\mathcal{A}^3$ . De hecho, se hubiera obtenido  $\mathcal{A}^3 = -\omega^2 \mathcal{A}$ . Un cálculo directo permite construir la base:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^1 &= (-\tau, 0, 0, 0, 0, 0, \kappa, 0, 0), \\ \mathbf{v}_2^1 &= (0, -\tau, 0, 0, 0, 0, 0, \kappa, 0), \\ \mathbf{v}_3^1 &= (0, 0, -\tau, 0, 0, 0, 0, 0, \kappa). \end{aligned}$$

Desde que  $\mathcal{A}\mathbf{v}_j^1 = 0$ , para  $j = 1, 2, 3$ , usando siempre el Algoritmo 1, se tiene que tres soluciones linealmente independientes del sistema (3.2) asociadas al autovalor real 0 de multiplicidad 3 son

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^1(s) &= (-\tau, 0, 0, 0, 0, 0, \kappa, 0, 0), \\ \mathbf{x}_2^1(s) &= (0, -\tau, 0, 0, 0, 0, 0, \kappa, 0), \\ \mathbf{x}_3^1(s) &= (0, 0, -\tau, 0, 0, 0, 0, 0, \kappa). \end{aligned}$$

Para construir seis soluciones linealmente independientes del sistema (3.2) asociadas a los autovalores complejos  $\pm i\omega$  de multiplicidad 3, se hará uso del Algoritmo 2. Lo primero es definir las matrices  $\mathcal{A} = A^2 + \omega^2 I = A^2 + (\kappa^2 + \tau^2)I$  y  $\tilde{\mathcal{A}} = A$ . Para evitar operaciones innecesarias es conveniente, recordando lo acontecido en el caso real, observar la matriz

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \tau^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa\tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa\tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa\tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa^2 \end{bmatrix}.$$

Puesto que la primera, la segunda y la tercera columnas son múltiplos de la séptima, octava y novena columnas respectivamente, la cuarta, quinta y sexta son nulas y  $\kappa \neq 0$ , se tiene que  $\dim Im \mathcal{A} = 3$ , de modo que  $\dim Ker \mathcal{A} = 6$ . Así,  $Ker \mathcal{A} = Ker \mathcal{A}^3$ .

En base al Algoritmo 2 sólo hay pues que determinar una base  $\{\mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^2, \mathbf{v}_3^2, \mathbf{v}_4^2, \mathbf{v}_5^2, \mathbf{v}_6^2\}$  de  $\text{Ker } \mathcal{A}$ . No existe, tal como sucedió en el caso real, necesidad de calcular  $\mathcal{A}^3$ . De hacerse el cálculo, se obtendría  $\mathcal{A}^2 = \omega^2 \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}^3 = \omega^4 \mathcal{A}$ . Cálculos directos permiten determinar la base:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1^2 &= (\kappa, 0, 0, 0, 0, 0, \tau, 0, 0), \\ \mathbf{v}_2^2 &= (0, \kappa, 0, 0, 0, 0, 0, \tau, 0), \\ \mathbf{v}_3^2 &= (0, 0, \kappa, 0, 0, 0, 0, 0, \tau), \\ \mathbf{v}_4^2 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \mathbf{v}_5^2 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), \\ \mathbf{v}_6^2 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

Desde que  $\mathcal{A}\mathbf{v}_j^2 = 0$ , para  $j = 1, \dots, 6$ , la expresión, dada por el Algoritmo 2, para calcular las seis soluciones buscadas,  $\mathbf{x}_j^2(s)$ ,  $j = 1, \dots, 6$ , se reduce a

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_j^2(s) &= (s_3 b_3^3 \omega^3 F_3(s) + s_2 a_2^2 \omega^2 F_2(s) A) \mathbf{v}_j^2 \\ &= 4\omega^3 \text{sen } \omega s \mathbf{v}_j^2 - 4\omega^2 \text{cos } \omega s A \mathbf{v}_j^2, \quad j = 1, \dots, 6.\end{aligned}$$

Observando ahora que

$$\begin{aligned}A\mathbf{v}_1^2 &= -\omega^2 \mathbf{v}_4^2, & A\mathbf{v}_2^2 &= -\omega^2 \mathbf{v}_5^2, & A\mathbf{v}_3^2 &= -\omega^2 \mathbf{v}_6^2, \\ A\mathbf{v}_4^2 &= \mathbf{v}_1^2, & A\mathbf{v}_5^2 &= \mathbf{v}_2^2, & A\mathbf{v}_6^2 &= \mathbf{v}_3^2,\end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1^2(s) &= 4\omega^3 \text{sen } \omega s \mathbf{v}_1^2 + 4\omega^4 \text{cos } \omega s \mathbf{v}_4^2, \\ \mathbf{x}_2^2(s) &= 4\omega^3 \text{sen } \omega s \mathbf{v}_2^2 + 4\omega^4 \text{cos } \omega s \mathbf{v}_5^2, \\ \mathbf{x}_3^2(s) &= 4\omega^3 \text{sen } \omega s \mathbf{v}_3^2 + 4\omega^4 \text{cos } \omega s \mathbf{v}_6^2, \\ \mathbf{x}_4^2(s) &= 4\omega^3 \text{sen } \omega s \mathbf{v}_4^2 - 4\omega^2 \text{cos } \omega s \mathbf{v}_1^2, \\ \mathbf{x}_5^2(s) &= 4\omega^3 \text{sen } \omega s \mathbf{v}_5^2 - 4\omega^2 \text{cos } \omega s \mathbf{v}_2^2, \\ \mathbf{x}_6^2(s) &= 4\omega^3 \text{sen } \omega s \mathbf{v}_6^2 - 4\omega^2 \text{cos } \omega s \mathbf{v}_3^2.\end{aligned}$$

Reemplazando la base  $\{\mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^2, \mathbf{v}_3^2, \mathbf{v}_4^2, \mathbf{v}_5^2, \mathbf{v}_6^2\}$  obtenida precedentemente y haciendo las simplificaciones, se tiene que seis soluciones linealmente independientes del sistema (3.2), asociadas a los autovalores complejos  $\pm i\omega$ , de multiplicidad 3 son dadas por

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1^2(s) &= (4\omega^3 \kappa \text{sen } \omega s, 0, 0, 4\omega^4 \text{cos } \omega s, 0, 0, 4\omega^3 \tau \text{sen } \omega s, 0, 0), \\ \mathbf{x}_2^2(s) &= (0, 4\omega^3 \kappa \text{sen } \omega s, 0, 0, 4\omega^4 \text{cos } \omega s, 0, 0, 4\omega^3 \tau \text{sen } \omega s, 0), \\ \mathbf{x}_3^2(s) &= (0, 0, 4\omega^3 \kappa \text{sen } \omega s, 0, 0, 4\omega^4 \text{cos } \omega s, 0, 0, 4\omega^3 \tau \text{sen } \omega s), \\ \mathbf{x}_4^2(s) &= (-4\omega^2 \kappa \text{cos } \omega s, 0, 0, 4\omega^3 \text{sen } \omega s, 0, 0, -4\omega^2 \tau \text{cos } \omega s, 0, 0), \\ \mathbf{x}_5^2(s) &= (0, -4\omega^2 \kappa \text{cos } \omega s, 0, 0, 4\omega^3 \text{sen } \omega s, 0, 0, -4\omega^2 \tau \text{cos } \omega s, 0), \\ \mathbf{x}_6^2(s) &= (0, 0, -4\omega^2 \kappa \text{cos } \omega s, 0, 0, 4\omega^3 \text{sen } \omega s, 0, 0, -4\omega^2 \tau \text{cos } \omega s).\end{aligned}$$

La solución general del sistema (3.2) será dada por

$$\mathbf{x} = c_1^1 \mathbf{x}_1^1 + c_2^1 \mathbf{x}_2^1 + c_3^1 \mathbf{x}_3^1 + c_1^2 \mathbf{x}_1^2 + c_2^2 \mathbf{x}_2^2 + c_3^2 \mathbf{x}_3^2 + c_4^2 \mathbf{x}_4^2 + c_5^2 \mathbf{x}_5^2 + c_6^2 \mathbf{x}_6^2,$$

donde  $c_1^1, c_2^1, c_3^1$  y  $c_1^2, c_2^2, c_3^2, c_4^2, c_5^2, c_6^2$  son escalares arbitrarios. Esto es, como  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ ,

$$\begin{aligned} x_1(s) &= 4c_1^2 \omega^3 \kappa \operatorname{sen} \omega s - 4c_4^2 \omega^2 \kappa \operatorname{cos} \omega s - c_1^1 \tau, \\ x_2(s) &= 4c_2^2 \omega^3 \kappa \operatorname{sen} \omega s - 4c_5^2 \omega^2 \kappa \operatorname{cos} \omega s - c_2^1 \tau, \\ x_3(s) &= 4c_3^2 \omega^3 \kappa \operatorname{sen} \omega s - 4c_6^2 \omega^2 \kappa \operatorname{cos} \omega s - c_3^1 \tau, \\ x_4(s) &= 4c_1^2 \omega^4 \operatorname{cos} \omega s + 4c_4^2 \omega^3 \operatorname{sen} \omega s, \\ x_5(s) &= 4c_2^2 \omega^4 \operatorname{cos} \omega s + 4c_5^2 \omega^3 \operatorname{sen} \omega s, \\ x_6(s) &= 4c_3^2 \omega^4 \operatorname{cos} \omega s + 4c_6^2 \omega^3 \operatorname{sen} \omega s, \\ x_7(s) &= 4c_1^2 \omega^3 \tau \operatorname{sen} \omega s - 4c_4^2 \omega^2 \tau \operatorname{cos} \omega s + c_1^1 \kappa, \\ x_8(s) &= 4c_2^2 \omega^3 \tau \operatorname{sen} \omega s - 4c_5^2 \omega^2 \tau \operatorname{cos} \omega s + c_2^1 \kappa, \\ x_9(s) &= 4c_3^2 \omega^3 \tau \operatorname{sen} \omega s - 4c_6^2 \omega^2 \tau \operatorname{cos} \omega s + c_3^1 \kappa. \end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1, & x_2(0) &= 0, & x_3(0) &= 0, \\ x_4(0) &= 0, & x_5(0) &= 1, & x_6(0) &= 0, \\ x_7(0) &= 0, & x_8(0) &= 0, & x_9(0) &= 1, \end{aligned}$$

se tendrá la solución única que resuelve el problema de valores iniciales

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1).$$

Observar que estas condiciones iniciales significan dar un triedro, ortonormal, orientado positivamente  $(\mathbf{t}(0), \mathbf{n}(0), \mathbf{b}(0))$  tal que

$$\mathbf{t}(0) = (1, 0, 0), \quad \mathbf{n}(0) = (0, 1, 0), \quad \mathbf{b}(0) = (0, 0, 1).$$

Se tiene pues que existe una familia de triedros  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ . El teorema fundamental de las curvas prueba que la familia  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$  es ortonormal y orientada positivamente.

Se determina de este modo, la solución única

$$\mathbf{t}(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s)) = \left( \frac{\kappa^2}{\omega^2} \operatorname{cos} \omega s + \frac{\tau^2}{\omega^2}, \frac{\kappa}{\omega} \operatorname{sen} \omega s, \frac{\kappa \tau}{\omega^2} \operatorname{cos} \omega s - \frac{\kappa \tau}{\omega^2} \right).$$

Se tiene así la función vector tangente unitario de una curva  $\mathbf{h}$  parametrizada por longitud de arco  $s$ . Integrando y exigiendo que  $\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}$ , se tiene finalmente que

$$\mathbf{h}(s) = \left( \frac{\kappa^2}{\omega^3} \operatorname{sen} \omega s + \frac{\tau^2}{\omega^2} s, -\frac{\kappa}{\omega^2} \operatorname{cos} \omega s + \frac{\kappa}{\omega^2}, \frac{\kappa \tau}{\omega^3} \operatorname{sen} \omega s - \frac{\kappa \tau}{\omega^2} s \right)$$

es la curva parametrizada por longitud de arco  $s$  tal que  $\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{h}^{(1)}(0) = \mathbf{t}(0) = (1, 0, 0)$ , con curvatura  $\kappa > 0$  y torsión arbitraria  $\tau$ . Además  $\mathbf{h}^{(2)}(0) = \kappa\mathbf{n}(0) = \kappa(0, 1, 0)$ .

### 3.4 Control del Error

Con la estimación obtenida anteriormente, en la Sección 3.2, se puede ahora sí pensar en proponer un método confiable para generar puntos de la intersección que, al ser posteriormente interpolados, producirán una poligonal que aproxima a la intersección con una tolerancia dada.

Sea  $\epsilon$  una tolerancia de error dada, por ejemplo, por criterios de manufactura o por otras consideraciones. El tamaño de paso  $\Delta s$  para generar puntos de la intersección que al ser interpolados producirán una poligonal que está a una distancia menor que  $\epsilon$  de la curva real de intersección es suficiente que, en base a (3.1), satisfaga

$$\Delta s < \sqrt{\frac{8\epsilon}{3\bar{\kappa}}}. \quad (3.3)$$

El objetivo es pues construir un método de trazado cuyo tamaño de paso  $\Delta s$  satisfaga (3.3). La idea es imaginar un arco circular de radio  $1/\bar{\kappa}$ , saliendo del punto  $\mathbf{c}(s_i)$  sobre la curva de intersección tangencialmente a la curva  $\mathbf{c}$  en  $s_i$  y en el mismo sentido que ella. Será conveniente tomar la longitud de este arco circular como  $\bar{l}$ , donde

$$\bar{l} \leq \sqrt{\frac{8\epsilon}{3\bar{\kappa}}} \quad y \quad \bar{l} < \frac{\pi}{2\bar{\kappa}}.$$

Lo que se tiene en mente es un arco circular con ángulo central  $\bar{\kappa}\bar{l}$  menor que  $\pi/2$  (ver Figura 3.4).

En tal sentido, como  $\bar{\kappa}\bar{l} < \pi/2$ , existen números reales positivos  $L$  y  $K$ , tales que  $L \leq \bar{l}$  y  $K = \frac{\pi}{2L}$ . Se tiene de esta manera un cuadrante de circunferencia de radio  $1/K$  y de longitud  $L$ , saliendo del punto  $\mathbf{c}(s_i)$  sobre la curva de intersección tangencialmente a la curva  $\mathbf{c}$  en  $s_i$  y en el mismo sentido que ella, como se muestra en la Figura 3.4.

Sin pérdida de generalidad, en lo que sigue, se puede suponer que  $s_i = 0$ ,  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{0}$ , que el vector tangente unitario a  $\mathbf{c}$  en 0 y el vector normal a  $\mathbf{c}$  en 0 son, respectivamente,  $\mathbf{t}(0) = \mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{n}(0) = \mathbf{e}_2$ . Naturalmente, debido a la orientación positiva de la base de Frenet ( $\mathbf{t}(0), \mathbf{n}(0), \mathbf{b}(0)$ ), se tendrá que  $\mathbf{b}(0) = \mathbf{e}_3$ , donde  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .

Será conveniente definir el plano  $\Pi$  de  $\mathbb{R}^3$ , dado por  $x = 1/K$ , como puede visualizarse en la Figura 3.4.

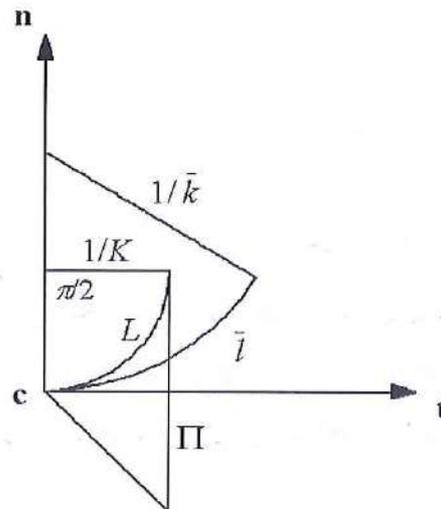


Figura 3.4: Control del error de interpolación lineal.

En el camino de lograr el objetivo de construir un método de trazado cuyo tamaño de paso  $\Delta s$  satisfaga (3.3), se ha probado que la curva  $\mathbf{h}$  parametrizada por longitud de arco, de curvatura  $\kappa \leq K$  y torsión arbitraria  $\tau$  que sale del punto  $\mathbf{c}(0)$  con vector tangente unitario  $\mathbf{t}(0)$  y vector normal  $\mathbf{n}(0)$ , interseca por primera vez al plano  $\Pi$  en el punto  $\mathbf{h}(s)$ , con  $s \leq L$ . Probar que el conjunto  $\Pi \cap \mathbf{h}(0, L]$  es unitario, previsto que  $\kappa \leq K$ , permitirá concluir que, si  $s$  es el menor valor del parámetro tal que  $\mathbf{h}(s) \in \Pi$ , entonces necesariamente se tendrá que  $s \leq L$ . Es por eso que se prueba la siguiente proposición.

**Proposición 3.4.1** *Sea  $\mathbf{h}$  la curva 3D, parametrizada por longitud de arco  $s$ , tal que  $\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{t}(0) = \mathbf{h}^{(1)}(0) = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{n}(0) = \mathbf{e}_2$  (y  $\mathbf{b}(0) = \mathbf{e}_3$ ), con curvatura  $\kappa > 0$  y torsión arbitraria  $\tau$  y sea  $\Pi$  el plano en  $\mathbb{R}^3$  definido por  $x = 1/K$ , donde  $K$  es tal que  $KL = \pi/2$ . Si  $\kappa \leq K$  entonces el conjunto  $\Pi \cap \mathbf{h}(0, L]$  es unitario.*

*Prueba.* En la Sección 3.3 se mostró que

$$\mathbf{h}(s) = \left( \frac{\kappa^2}{\omega^3} \sin \omega s + \frac{\tau^2}{\omega^2} s, -\frac{\kappa}{\omega^2} \cos \omega s + \frac{\kappa}{\omega^2}, \frac{\kappa \tau}{\omega^3} \sin \omega s - \frac{\kappa \tau}{\omega^2} s \right),$$

donde  $\omega = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ , es la curva parametrizada por longitud de arco  $s$  tal que  $\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{t}(0) = \mathbf{h}^{(1)}(0) = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{n}(0) = \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{b}(0) = \mathbf{e}_3$ , que tiene curvatura  $\kappa > 0$  y torsión  $\tau$  arbitraria. Por consiguiente, la intersección de  $\Pi$  con  $\mathbf{h}(0, L]$  quedaría descrita por

$$\frac{\kappa^2}{\omega^3} \sin \omega s + \frac{\tau^2}{\omega^2} s = \frac{1}{K}.$$

Definiendo la función  $F : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$F(s) = \frac{\kappa^2}{\omega^3} \operatorname{sen} \omega s + \frac{\tau^2}{\omega^2} s - \frac{1}{K},$$

desde que  $F(0) = -1/K < 0$ , la proposición quedará probada si se consigue probar que  $F(L) \geq 0$  y que  $F^{(1)}(s) > 0$ , para casi todo  $s$  en  $[0, L]$ .

A fin de probar que  $F(L) \geq 0$ , es decir,

$$\frac{\kappa^2}{\omega^3} \operatorname{sen} \omega L + \frac{\tau^2}{\omega^2} L - \frac{1}{K} \geq 0,$$

notar que

$$\begin{aligned} F(L) \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{\omega^3} \operatorname{sen} \omega L + \frac{\tau^2}{\omega^2} L - \frac{1}{K} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{\omega^2} L \frac{\operatorname{sen} \omega L}{\omega L} + \frac{\tau^2}{\omega^2} L - L \frac{1}{KL} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow L \left( \frac{\kappa^2}{\omega^2} \frac{\operatorname{sen} \omega L}{\omega L} + \frac{\tau^2}{\omega^2} - \frac{1}{\pi/2} \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{\omega^2} \frac{\operatorname{sen} \omega L}{\omega L} + \frac{\tau^2}{\omega^2} - \frac{2}{\pi} \geq 0. \end{aligned}$$

Lo que debe ser probado es pues

$$\frac{\kappa^2}{\omega^2} \frac{\operatorname{sen} \omega L}{\omega L} + \frac{\tau^2}{\omega^2} - \frac{2}{\pi} \geq 0. \quad (3.4)$$

Dependiendo del valor de  $\tau$  (y de  $\kappa$ , por supuesto, aunque  $\kappa \leq K$ ),  $\omega = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$  puede ser  $\omega < K$ ,  $\omega = K$  o  $\omega > K$ . Es conveniente dividir la prueba de la desigualdad (3.4) en esos tres casos. Naturalmente,  $\omega > 0$ , desde que  $\kappa > 0$ .

**Caso  $0 < \omega < K$ .**

Notar que la magnitud de  $\omega$  depende en gran medida de  $\tau$ , el que se está considerando arbitrario.

En este caso, naturalmente se tiene que  $0 < \omega L < KL = \pi/2$ , por lo que

$$\frac{\operatorname{sen} \omega L}{\omega L} > \frac{\operatorname{sen} \pi/2}{\pi/2}$$

desde que  $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$  es estrictamente decreciente en  $(0, \pi/2)$ .

Con esto en mente, y considerando que  $\kappa > 0$  y que  $\tau$  puede ser 0,

$$\frac{\kappa^2}{\omega^2} \frac{\operatorname{sen} \omega L}{\omega L} + \frac{\tau^2}{\omega^2} > \frac{\kappa^2}{\omega^2} \frac{\operatorname{sen} \pi/2}{\pi/2} + \frac{\tau^2}{\omega^2}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{\kappa^2 \operatorname{sen} \pi/2}{\omega^2 \pi/2} + \frac{\tau^2 \operatorname{sen} \pi/2}{\omega^2 \pi/2} \\
&= \left( \frac{\kappa^2}{\omega^2} + \frac{\tau^2}{\omega^2} \right) \frac{\operatorname{sen} \pi/2}{\pi/2} \\
&= \frac{\operatorname{sen} \pi/2}{\pi/2} \\
&= \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

Esto prueba (3.4) en este caso de  $0 < \omega < K$ , en el que nunca se cumple la igualdad.

**Caso  $\omega = K$ .**

Aquí  $\omega L = KL = \pi/2$ . Naturalmente  $\omega^2 = K^2$ , de modo que  $\tau^2 = K^2 - \kappa^2 \geq 0$ , pues  $\kappa \leq K$  y  $\omega^2 = \kappa^2 + \tau^2$ . Además  $\frac{\operatorname{sen} \omega L}{\omega L} = \frac{2}{\pi}$ , puesto que  $\omega L = \pi/2$ . Por consiguiente

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa^2 \operatorname{sen} \omega L}{\omega^2 \omega L} + \frac{\tau^2}{\omega^2} &\geq \frac{\kappa^2 \operatorname{sen} \omega L}{\omega^2 \omega L} + \frac{\tau^2 \operatorname{sen} \omega L}{\omega^2 \omega L} \\
&= \left( \frac{\kappa^2}{\omega^2} + \frac{\tau^2}{\omega^2} \right) \frac{\operatorname{sen} \omega L}{\omega L} \\
&= \frac{\operatorname{sen} \omega L}{\omega L} \\
&= \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

Lo que prueba (3.4) en este caso de  $\omega = K$ , en el que puede producirse la igualdad (sólo cuando  $\tau = 0$ ).

**Caso  $\omega > K$ .**

Para desarrollar el caso  $\omega > K$ , notar que

$$\begin{aligned}
F(L) \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{\kappa^2 \operatorname{sen} \omega L}{\omega^2 \omega L} + \frac{\tau^2}{\omega^2} \geq \frac{2}{\pi} \\
&\Leftrightarrow \frac{\kappa^2 \operatorname{sen} \omega L}{\omega^2 \omega L} + \frac{\omega^2 - \kappa^2}{\omega^2} \geq \frac{2}{\pi} \\
&\Leftrightarrow \frac{\kappa^2 \operatorname{sen} \omega L}{\omega^2 \omega L} + 1 - \frac{\kappa^2}{\omega^2} \geq \frac{2}{\pi} \\
&\Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{\omega^2} \left( \frac{\operatorname{sen} \omega L}{\omega L} - 1 \right) \geq \frac{2}{\pi} - 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{\operatorname{sen} \omega L}{\omega L} \right) \leq 1 - \frac{2}{\pi} \\
&\Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{\omega^2} \leq \frac{1 - \frac{2}{\pi}}{1 - \frac{\operatorname{sen} \omega L}{\omega L}}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\omega L)^2}{(\kappa L)^2} \geq \frac{1 - \frac{\text{sen } \omega L}{\omega L}}{1 - \frac{2}{\pi}}.$$

Escribiendo  $x = \omega L$  y desde que  $1 - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi-2}{\pi}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} F(L) \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{(\omega L)^2}{(\kappa L)^2} \geq \frac{1 - \frac{\text{sen } \omega L}{\omega L}}{1 - \frac{2}{\pi}} \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{(\kappa L)^2} \geq \frac{1 - \frac{\text{sen } x}{x}}{\frac{\pi-2}{\pi}} \\ &\Leftrightarrow x^2 \geq (\kappa L)^2 \frac{\pi}{\pi-2} \left(1 - \frac{\text{sen } x}{x}\right). \end{aligned}$$

Naturalmente, como  $(KL)^2 \geq (\kappa L)^2$ , si se consigue probar

$$x^2 > (KL)^2 \frac{\pi}{\pi-2} \left(1 - \frac{\text{sen } x}{x}\right),$$

quedará probado

$$x^2 > (\kappa L)^2 \frac{\pi}{\pi-2} \left(1 - \frac{\text{sen } x}{x}\right).$$

Desde que  $KL = \pi/2$  y  $x = \omega L > KL = \pi/2$ , lo que debe ser probado es

$$x^2 > \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\pi}{\pi-2} \left(1 - \frac{\text{sen } x}{x}\right), \quad (3.5)$$

previsto que  $x > \frac{\pi}{2}$ . Esto, naturalmente, probará (3.4) en este caso de  $\omega > K$ , en el que no se cumple la igualdad.

Desde que para todo número real positivo  $x$  se tiene

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 2 \frac{\pi}{\pi-2} > \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\pi}{\pi-2} \left(1 - \frac{\text{sen } x}{x}\right)$$

y, puesto que

$$x^2 > \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 2 \frac{\pi}{\pi-2} \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{2} \sqrt{2 \frac{\pi}{\pi-2}},$$

como

$$\pi < \frac{\pi}{2} \sqrt{2 \frac{\pi}{\pi-2}} < \frac{3\pi}{2},$$

la desigualdad (3.5) resulta obvia para  $x > \frac{\pi}{2} \sqrt{2 \frac{\pi}{\pi-2}}$  y, con mayor razón, para  $x \geq \frac{3\pi}{2}$ .

Sólo resta probar la desigualdad (3.5) para  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ , lo que requiere un poco más de cuidado. El intervalo  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  y el punto  $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$  ya fueron tratados en los casos  $\omega < K$  y  $\omega = K$  respectivamente, desde que  $x = \omega L$  y  $KL = \frac{\pi}{2}$ .

A fin de probar, en primer lugar, la desigualdad (3.5) para  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , es conveniente considerar las funciones

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\pi}{\pi - 2} \left(1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right).$$

Observar que  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) < g(\pi) < f(\pi)$ . Calculando sus derivadas,

$$f^{(1)}(x) = 2x, \quad g^{(1)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\pi}{\pi - 2} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^2},$$

se observa que  $g^{(1)}(\pi) < g^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) < f^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) < f^{(1)}(\pi)$ .

Obviamente,  $f^{(1)}(x) > 0$ , para todo  $x$  positivo y  $g^{(1)}(x) > 0$ , para todo  $x$  en  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , por lo menos. Así,  $f$  y  $g$  no tienen puntos críticos en  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , son estrictamente crecientes en  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ . Más aún, como  $f^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) < f^{(1)}(\pi)$ , se percibe que  $f$  es cóncava hacia arriba. Por otro lado, como  $g^{(1)}(\pi) < g^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , se puede percibir que  $g$  tiene algún punto de inflexión en  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ .

Se precisarán estas afirmaciones, calculando las segundas derivadas de las funciones  $f$  y  $g$ ,

$$f^{(2)}(x) = 2, \quad g^{(2)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\pi}{\pi - 2} \frac{x^2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x}{x^3}.$$

La concavidad hacia arriba de la función  $f$  es obvia. Para estudiar el comportamiento de la función  $g$ , es apropiado definir la función

$$G(x) = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x.$$

Con esto se tiene, más concisamente,

$$g^{(2)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\pi}{\pi - 2} \frac{G(x)}{x^3}.$$

Como  $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2 > 0$  y  $G(\pi) = -2\pi < 0$ , existe  $i \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  tal que  $G(i) = 0$  (esto por el teorema del valor intermedio, desde que  $G$  es continua en  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ). Naturalmente  $i$  es un punto de inflexión de  $g$ . Se verá a seguir que es el único punto de inflexión de  $g$  en  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , es decir, es la única solución de la ecuación  $G(x) = 0$  en  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .

En tal sentido, definiendo la función

$$d(x) = x \operatorname{sen} x + 2 \cos x,$$

puede verse que la ecuación  $d(x) = 0$  tiene una única solución en  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ , pues  $d^{(1)}(x) = x \cos x - \sin x < 0$  en  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ . Más aún, como  $d(\frac{3\pi}{4}) > 0$  y  $d(\pi) < 0$ , tal solución, que será denotada  $a$ , de  $d(x) = 0$  se encuentra en  $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$ . Naturalmente,  $d(x) > 0$  en  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ .

Ahora bien, en el conjunto  $(\frac{\pi}{2}, \pi) - \{a\}$  se tiene

$$\begin{aligned} G(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x = 2 \operatorname{sen} x \\ &\Leftrightarrow x(x \operatorname{sen} x + 2 \cos x) = 2 \operatorname{sen} x \\ &\Leftrightarrow xd(x) = 2 \operatorname{sen} x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 \operatorname{sen} x}{d(x)}. \end{aligned}$$

Definiendo ahora, en  $(\frac{\pi}{2}, \pi) - \{a\}$ , la función

$$H(x) = \frac{2 \operatorname{sen} x}{d(x)},$$

se tiene que

$$G(x) = 0 \Leftrightarrow x = H(x).$$

Calculando la derivada de  $H$ ,

$$H^{(1)}(x) = \frac{4 - 2 \operatorname{sen}^2 x}{(d(x))^2},$$

se ve inmediatamente que  $H^{(1)}(x) > 0$ , es decir,  $H$  es estrictamente creciente en su dominio. Por otra parte, observar que  $H(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi}$ ,  $H(\pi) = 0$  y que  $H(x) < 0$  en  $(a, \pi)$ . Ahora, calculando la segunda derivada de  $H$ ,

$$H^{(2)}(x) = \frac{4 \operatorname{sen}^3 x - 8x \cos x}{(d(x))^3},$$

se ve que  $H^{(2)}(x) > 0$  en  $(\frac{\pi}{2}, a)$ , de modo que  $H$  es cóncava hacia arriba en  $(\frac{\pi}{2}, a)$  y que  $H^{(2)}(x) < 0$  en  $(a, \pi)$ , de modo que  $H$  es cóncava hacia abajo en  $(a, \pi)$ . Además,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} H(x) = \lim_{d(x) \rightarrow 0^+} \frac{2 \operatorname{sen} x}{d(x)} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} H(x) = \lim_{d(x) \rightarrow 0^-} \frac{2 \operatorname{sen} x}{d(x)} = -\infty.$$

Así pues,  $x = H(x)$  tiene una única solución en  $(\frac{\pi}{2}, \pi) - \{a\}$ . En efecto, a modo de resumen, como  $H(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi} < \frac{\pi}{2}$ ,  $H(\pi) = 0$ ,  $H(x) < 0$  en  $(a, \pi)$ ,  $H$  es estrictamente creciente,  $H$  es cóncava hacia arriba en  $(\frac{\pi}{2}, a)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^-} H(x) = +\infty$ , se tiene que la solución es única y está en  $(\frac{\pi}{2}, a)$ . Más aún, como  $H(\frac{\pi}{2}) < \frac{\pi}{2}$  y  $H(\frac{3\pi}{4}) > \frac{3\pi}{4}$ , la solución única está en  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ . Esto prueba la unicidad del punto de inflexión  $i$  de la función  $g$ , en  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ .

Notar que, desde que  $i$  es el único punto de inflexión de  $g$  en  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ , si se consigue encontrar números reales  $m$  y  $n$  en  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  tales que  $m < i < n$  y  $f(m) > g(n)$ , esto concluirá la prueba de que  $f(x) > g(x)$  en  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

La búsqueda de tales números  $m$  y  $n$  puede proceder por un método de bisección en  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ . Concretamente, desde que  $i$  es la única solución de la ecuación  $G(x) = 0$  en  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ , siempre será posible encontrar números reales  $m$  y  $n$  tales que  $G(m)G(n) < 0$ , siendo  $m < n$ . La estrategia de la búsqueda es acercarse a la solución  $i$  tal como lo hace el conocido método de bisección y, en cada paso, evaluar  $f(m)$  y  $g(n)$  hasta que se satisfaga la condición  $f(m) > g(n)$ . Haciendo las cuentas, se obtiene finalmente  $m = \frac{21\pi}{32}$  y  $n = \frac{11\pi}{16}$ , puesto que  $G(\frac{21\pi}{32}) > 0$ ,  $G(\frac{11\pi}{16}) < 0$  y  $f(\frac{21\pi}{32}) > g(\frac{11\pi}{16})$ . Esto prueba la desigualdad (3.5) para  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

Para probar la desigualdad (3.5) en  $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2})$ , notar simplemente que  $f^{(2)}(x) > 0$ ,  $g^{(2)}(x) < 0$ , para todo  $x$  en  $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2})$  y  $f(\pi) > g(\frac{3\pi}{2})$ . Más aún,  $g$  tiene un único máximo local, denotado por  $e$ , en  $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ , de modo que  $g^{(1)}(x) > 0$  en  $(\pi, e)$  y  $g^{(1)}(x) < 0$  en  $(e, \frac{3\pi}{2})$ , naturalmente  $g^{(1)}(e) = 0$ . Así pues,  $f(x) > g(x)$ , para todo  $x$  en  $[\pi, \frac{3\pi}{2})$ .

Concluye así la prueba de (3.4) en el caso de  $\omega > K$ , en el que nunca se cumple la igualdad.

Finalmente, a fin de probar que  $F^{(1)}(s) > 0$ , para casi todo  $s$  en  $[0, L]$ , es decir,

$$\frac{\kappa^2}{\omega^2} \cos \omega s + \frac{\tau^2}{\omega^2} > 0,$$

para casi todo  $s$  en  $[0, L]$ , notar que

$$\begin{aligned} F^{(1)}(s) > 0 &\Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{\omega^2} \cos \omega s + \frac{\tau^2}{\omega^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \kappa^2 \cos \omega s + \tau^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \kappa^2 \cos \omega s + \omega^2 - \kappa^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \kappa^2(\cos \omega s - 1) + \omega^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \kappa^2(\cos \omega s - 1) > -\omega^2 \\ &\Leftrightarrow \kappa^2(1 - \cos \omega s) < \omega^2. \end{aligned}$$

Será suficiente dividir la prueba en los casos  $0 \leq \omega s < \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega s = \frac{\pi}{2}$  y  $\frac{\pi}{2} < \omega s < \pi$ .

**Caso**  $0 \leq \omega s < \frac{\pi}{2}$ .

Es inmediato, pues  $\kappa^2(1 - \cos \omega s) < \kappa^2 \leq \omega^2$ , dado que  $\tau$  puede ser 0.

**Caso**  $\omega s = \frac{\pi}{2}$ .

Es también inmediato,  $\kappa^2(1 - \cos \omega s) = \kappa^2 \leq \omega^2$ . Aunque es trivial, se destaca, pues en este caso podría producirse la igualdad  $F^{(1)}(s) = 0$ , pues  $\tau$  puede ser 0. En tal caso, desde que  $\kappa \leq K$ , se tendría  $\cos \kappa s = 0$ , es decir  $\kappa s = \frac{\pi}{2}$ , de modo que  $s = \frac{\pi}{2\kappa} \geq \frac{\pi}{2K} = L$ .

**Caso**  $\frac{\pi}{2} < \omega s < \pi$ .

Notar, en primer lugar, que

$$\begin{aligned} F^{(1)}(s) > 0 &\Leftrightarrow \kappa^2(1 - \cos \omega s) < \omega^2 \\ &\Leftrightarrow (\kappa L)^2(1 - \cos \omega s) < (\omega L)^2. \end{aligned}$$

Ahora, como  $\kappa \leq K$ ,  $s \leq L$ , se tiene inmediatamente que

$$(\kappa L)^2(1 - \cos \omega s) \leq (KL)^2(1 - \cos \omega s), \quad (\omega s)^2 \leq (\omega L)^2.$$

Por lo que será suficiente probar

$$(KL)^2(1 - \cos \omega s) < (\omega s)^2.$$

Escribiendo  $x = \omega s$  y notando que  $KL = \frac{\pi}{2}$ , lo que hay que probar es que

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (1 - \cos x) < x^2, \tag{3.6}$$

previsto que  $x > \frac{\pi}{2}$ . Desde que para todo número real  $x$  se tiene

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (1 - \cos x) \leq 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}$$

y, puesto que

$$\frac{\pi^2}{2} < x^2 \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

como

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{\sqrt{2}} < \pi$$

la desigualdad (3.6) es obvia para  $x > \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  y, con mayor razón, para  $x \geq \pi$ . Así, sólo hay que tomar cuidado en  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ . El intervalo  $[0, \frac{\pi}{2})$  y el punto  $\{\frac{\pi}{2}\}$  ya fueron tratados en los casos  $0 \leq \omega s < \frac{\pi}{2}$  y  $\omega s = \frac{\pi}{2}$  respectivamente.

Definiendo las funciones

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (1 - \cos x), \quad g(x) = x^2$$

se tiene de inmediato que  $f(\frac{\pi}{2}) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = g(\frac{\pi}{2})$ . Calculando sus derivadas

$$f^{(1)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin x, \quad g^{(1)}(x) = 2x,$$

se ve también de manera inmediata que  $f^{(1)}$  es estrictamente decreciente en  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  y que  $g^{(1)}$  es estrictamente creciente en  $(0, +\infty)$ . Ahora, como  $f^{(1)}(\frac{\pi}{2}) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$  y  $g^{(1)}(\frac{\pi}{2}) = \pi$ , se tiene que para todo  $x$  en  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ,

$$f^{(1)}(x) < f^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) < g^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) < g^{(1)}(x).$$

Así pues, dado que  $f(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2})$  y que  $f^{(1)}(x) < g^{(1)}(x)$ , para todo  $x$  en  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ , se tiene que  $f(x) < g(x)$ , para todo  $x$  en  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ . Esto prueba la desigualdad (3.6). Los casos considerados son suficientes para asegurar que  $F^{(1)}(s) > 0$  para casi todo  $s$  en  $[0, L]$ , puesto que si  $x \geq \pi$ , se tiene que

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (1 - \cos x) \leq \frac{\pi^2}{2} < \pi^2 \leq x^2.$$

Queda así probada la proposición. □

**Observación 3.4.1** *Es inmediato verificar que si en la Proposición 3.4.1 se considera cualquier plano  $\Pi$  de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $x = 1/R$ , donde  $R \geq K$ , entonces el conjunto  $\Pi \cap \mathbf{h}(0, L)$  es siempre unitario. En efecto, la intersección de  $\Pi$  con  $\mathbf{h}(0, L)$  queda descrita por  $\frac{\kappa^2}{\omega^3} \sin \omega s + \frac{\tau^2}{\omega^2} s = 1/R$ . Definiendo, como en la prueba de la Proposición 3.4.1, la función  $F : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  ahora por  $F(s) = \frac{\kappa^2}{\omega^3} \sin \omega s + \frac{\tau^2}{\omega^2} s - 1/R$ , se tiene  $F(0) = -1/R < 0$ ,  $F^{(1)}(s) > 0$  para casi todo  $s$  en  $[0, L]$  y, como  $R \geq K$ ,  $F(L) = \frac{\kappa^2}{\omega^3} \sin \omega L + \frac{\tau^2}{\omega^2} L - 1/R \geq \frac{\kappa^2}{\omega^3} \sin \omega L + \frac{\tau^2}{\omega^2} L - 1/K \geq 0$ , probado en la Proposición 3.4.1.*

**Observación 3.4.2** *Notar que  $F^{(1)}(s) = \frac{\kappa^2}{\omega^2} \cos \omega s + \frac{\tau^2}{\omega^2}$  es la componente del vector tangente  $\mathbf{h}^{(1)}(s)$  sobre el vector  $\mathbf{h}^{(1)}(0)$  normal al plano  $\Pi$ . Desde que  $F^{(1)}(s) > 0$  para casi todo  $s$  en  $[0, L]$ , previsto que  $\kappa \leq K$  siendo  $\tau$  arbitraria, esto significa que  $\mathbf{h}^{(1)}(s)$  casi nunca es ortogonal al vector normal al plano  $\Pi$  en  $[0, L]$ .*

**Observación 3.4.3** *Es bueno destacar que  $\Pi \cap \mathbf{h}(0, L] = \mathbf{h}(L)$  sólo cuando  $\tau = 0$  y  $R = K$ , en los demás casos  $\Pi \cap \mathbf{h}(0, L] = \mathbf{h}(s)$  siendo  $s < L$ . Así mismo,  $F^{(1)}(s) = 0$  sólo cuando  $s = L$ ,  $\tau = 0$  y  $R = K$ , en los demás casos  $F^{(1)}(s) > 0$  para todo  $s$  en  $[0, L]$ .*

Desde que las intersecciones no singulares de superficies se comportan localmente como  $\mathbf{h}$ , los resultados obtenidos, hasta el momento, permiten satisfacer los requerimientos de un buen número de aplicaciones prácticas.

Los argumentos desarrollados sientan las bases y señalan el camino a seguir a fin de ampliar el ámbito de aplicación a todos los casos de intersección no singular, lo que resolvería completamente el problema planteado.

En tal sentido, para efectuar la generalización de los resultados obtenidos, hasta ahora, a intersecciones no singulares formadas por curvas con curvatura y torsión variables, será esencial tener en cuenta el Teorema 3.4.1, de carácter global, que viene a generalizar, para curvas en  $\mathbb{R}^3$ , el teorema del valor medio del cálculo diferencial. El Teorema 3.4.1 está inspirado en el simple hecho que si  $[a, b]$  está incluido en el dominio de una curva  $\mathbf{f}$  parametrizada por longitud de arco, entonces, obviamente

$$|\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)| \leq b - a. \quad (3.7)$$

Más generalmente, si  $\mathbf{f}$  fuera una curva paramétrica regular (no necesariamente parametrizada por longitud de arco), tomando  $s : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  la longitud de arco de  $\mathbf{f}$  desde algún  $t_0$  en el dominio de  $\mathbf{f}$ , se tiene que  $\mathbf{f} = \Psi \circ s$ , donde  $\Psi$  está parametrizada por longitud de arco. Usando (3.7), el teorema del valor medio del cálculo diferencial y el primer teorema fundamental del cálculo,

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)| &= |\Psi(s(b)) - \Psi(s(a))| \\ &= |\Psi(\beta) - \Psi(\alpha)| \\ &\leq \beta - \alpha \\ &= s(b) - s(a) \\ &= (b - a)s^{(1)}(c) \\ &= (b - a)|\mathbf{f}^{(1)}(c)|, \end{aligned}$$

para algún  $c$  en  $(a, b)$ . Así, si  $[a, b]$  está incluido en el dominio de una curva paramétrica regular  $\mathbf{f}$ , entonces existe  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$|\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)| \leq (b - a)|\mathbf{f}^{(1)}(c)|.$$

La generalización a curvas paramétricas diferenciables (no necesariamente regulares) es posible (y necesaria) y requiere de argumentos menos geométricos.

**Teorema 3.4.1** Sea  $f$  una curva paramétrica diferenciable. Si el intervalo cerrado  $[a, b]$  está contenido en el dominio de  $f$ , entonces existe  $c$  en  $[a, b]$  tal que

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a)|f^{(1)}(c)|.$$

*Prueba.* Denotando  $M = \max_{a \leq t \leq b} |f^{(1)}(t)|$ , el teorema quedará probado si se consigue probar que para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a)M + \epsilon.$$

Claramente, para todo  $\epsilon > 0$ , el conjunto

$$E = \left\{ t \in [a, b], |f(u) - f(a)| \leq (u - a) \left( M + \frac{\epsilon}{b - a} \right) \quad \forall u \in [a, t] \right\}$$

es un intervalo cerrado  $[a, d]$  contenido en  $[a, b]$ , desde que es conexo, cerrado y  $a$  está en  $E$ . Sólo hay que probar que  $d = b$ . Suponiendo, por el absurdo, que  $d < b$ , se tendría un  $\delta > 0$  suficientemente pequeño tal que  $d + \delta < b$  y tal que  $0 \leq h < \delta$  implique que  $f(d + h) = f(d) + f^{(1)}(d)h + \mathbf{R}(h)$ , donde  $|\mathbf{R}(h)| \leq \frac{\epsilon}{b - a}h$  desde que  $f$  es diferenciable. De modo que, si  $0 \leq h < \delta$  se tiene

$$\begin{aligned} |f(d + h) - f(d)| &\leq |f^{(1)}(d)h| + |\mathbf{R}(h)| \\ &= |f^{(1)}(d)|h + |\mathbf{R}(h)| \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |f^{(1)}(t)|h + |\mathbf{R}(h)| \\ &\leq Mh + \frac{\epsilon}{b - a}h \\ &= \left( M + \frac{\epsilon}{b - a} \right) h. \end{aligned}$$

Como  $d$  está en  $E$ , se tiene también

$$|f(d) - f(a)| \leq (d - a) \left( M + \frac{\epsilon}{b - a} \right).$$

Por tanto, si  $0 \leq h < \delta$  se tiene que

$$\begin{aligned} |f(d + h) - f(a)| &\leq |f(d + h) - f(d)| + |f(d) - f(a)| \\ &\leq \left( M + \frac{\epsilon}{b - a} \right) h + (d - a) \left( M + \frac{\epsilon}{b - a} \right) \\ &= (d + h - a) \left( M + \frac{\epsilon}{b - a} \right). \end{aligned}$$

Esto muestra que todo  $d + h$  con  $0 \leq h < \delta$  también pertenece a  $E$ , lo que constituye una contradicción, que surgió de suponer que  $d < b$ , de modo que  $d = b$ . Así,  $E = [a, b]$ . Por consiguiente,

$$|f(u) - f(a)| \leq (u - a) \left( M + \frac{\epsilon}{b - a} \right) \quad \forall u \in [a, b].$$

En particular,

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)| &\leq (b-a) \left( M + \frac{\epsilon}{b-a} \right) \\ &= (b-a)M + \epsilon. \end{aligned}$$

□

La desigualdad enunciada en el Teorema 3.4.1 es pieza clave en la prueba del teorema siguiente. No obstante, para posibilitar su uso, es necesario refinar un poco la configuración geométrica visualizada en la Figura 3.4.

La idea básica fue imaginar un arco circular de radio  $1/\bar{\kappa}$ , saliendo del punto  $\mathbf{c}(s_i)$  sobre la curva de intersección tangencialmente a la curva  $\mathbf{c}$  en  $s_i$  y en el mismo sentido que ella. Para los fines de control del error fue conveniente tomar la longitud de este arco circular como  $\bar{l}$ , donde

$$\bar{l} \leq \sqrt{\frac{8\epsilon}{3\bar{\kappa}}} \quad \text{y} \quad \bar{l} < \frac{\pi}{2\bar{\kappa}}.$$

Tomando  $L$  positivo tal que  $L \leq \bar{l}$  (por ejemplo,  $L = \bar{l}$ ) y  $K = \frac{\pi}{2L}$ , como se verá luego, el refinamiento adecuado se consigue haciendo  $\bar{K} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}K$ .

El siguiente teorema es la versión general del Teorema 3.4.3 que permite lograr el objetivo propuesto.

**Teorema 3.4.2** *Dado  $K > 0$ , sea  $\mathbf{c}$  una curva regular parametrizada por longitud de arco cuyo dominio contiene a  $[s_i, s_i + m]$  y con curvatura  $\kappa$  siempre menor que  $K$ . Sea  $\mathbf{h}$  una parametrización por longitud de arco de la curva con curvatura  $\bar{K} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}K$  y torsión  $\tau$ , tal que  $\mathbf{h}(s_i) = \mathbf{c}(s_i)$ ,  $\mathbf{h}^{(1)}(s_i) = \mathbf{c}^{(1)}(s_i)$ . Sea  $\Pi$  el plano de  $\mathbb{R}^3$  definido por los puntos  $\mathbf{P}$  de  $\mathbb{R}^3$  que satisfacen  $(\mathbf{P} - \mathbf{c}(s_i)) \cdot \mathbf{c}^{(1)}(s_i) = d$ , con  $d \leq \min \left\{ \left( \mathbf{h} \left( s_i + \frac{\pi}{2\omega} \right) - \mathbf{h}(s_i) \right) \cdot \mathbf{c}^{(1)}(s_i), \frac{1}{\bar{K}} \right\}$ , siendo  $\omega = \sqrt{\bar{K}^2 + \tau^2}$ .*

1. Existe un único  $\Delta_{\mathbf{h}s} \in \left( 0, \frac{\pi}{2\omega} \right]$  tal que  $\mathbf{h}(s_i + \Delta_{\mathbf{h}s}) \in \Pi$ .
2. Si  $m > \Delta_{\mathbf{h}s}$ , entonces existe un único  $\Delta_s \in (0, \Delta_{\mathbf{h}s})$  tal que  $\mathbf{c}(s_i + \Delta_s) \in \Pi$ .

*Prueba.* Se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que  $s_i = 0$ ,  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{c}^{(1)}(0) = \mathbf{e}_1$  y que los vectores normales  $\mathbf{n}(0)$  y  $\mathbf{n}_{\mathbf{h}}(0)$  de  $\mathbf{c}$  y de  $\mathbf{h}$  en 0 coinciden con  $\mathbf{e}_2$ .

En tales condiciones, la curva  $\mathbf{h}$  parametrizada por longitud de arco con curvatura  $\bar{K} > 0$  y torsión arbitraria  $\tau$  es tal que  $\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{h}^{(1)}(0) = \mathbf{e}_1$  (y  $\mathbf{n}_{\mathbf{h}}(0) = \mathbf{e}_2$ ). El plano  $\Pi$  en  $\mathbb{R}^3$  queda definido por  $x = d$  con  $d \leq \min \left\{ \mathbf{h} \left( \frac{\pi}{2\omega} \right) \cdot \mathbf{e}_1, \frac{1}{\bar{K}} \right\} \leq \frac{1}{\bar{K}}$ . Por la Proposición 3.4.1, el conjunto  $\Pi \cap \mathbf{h} \left( 0, \frac{\pi}{2\bar{K}} \right]$  es unitario, es decir, existe un único

$\Delta_{\mathbf{h}}s \in \left(0, \frac{\pi}{2K}\right]$  tal que  $\mathbf{h}(\Delta_{\mathbf{h}}s) \in \Pi$ . Desde que  $\mathbf{h}$  está parametrizada por longitud de arco y  $\mathbf{h}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) \cdot \mathbf{e}_1$  no es otra cosa que la componente de  $\mathbf{h}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)$  sobre  $\mathbf{e}_1$ , se tiene, por la continuidad de  $\mathbf{h}$  y en virtud del teorema del valor intermedio, que  $\Delta_{\mathbf{h}}s \in \left(0, \frac{\pi}{2\omega}\right]$ . Esto prueba (1).

Bajo las suposiciones dadas,  $\mathbf{c}^{(1)}(0) \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{h}^{(1)}(0) \cdot \mathbf{e}_1$ . Más aún, como  $\kappa(s) < K$ , se puede probar que

$$\mathbf{c}^{(1)}(s) \cdot \mathbf{e}_1 > \mathbf{h}^{(1)}(s) \cdot \mathbf{e}_1 \quad \forall s \in (0, m] \cap \left(0, \frac{\pi}{2\omega}\right]. \quad (3.8)$$

En efecto, suponiendo, por el absurdo, que

$$\exists l \in (0, m] \cap \left(0, \frac{\pi}{2\omega}\right], \quad \mathbf{c}^{(1)}(l) \cdot \mathbf{e}_1 \leq \mathbf{h}^{(1)}(l) \cdot \mathbf{e}_1, \quad (3.9)$$

por el Teorema 3.4.1, existe  $s^*$  en  $[0, l]$  tal que

$$|\mathbf{c}^{(1)}(l) - \mathbf{c}^{(1)}(0)| \leq l|\mathbf{c}^{(2)}(s^*)|. \quad (3.10)$$

De (3.9) y (3.10), se tiene que existe  $s^*$  en  $[0, l]$  tal que

$$\kappa(s^*) \geq \frac{\sqrt{2 - 2\frac{\bar{K}^2}{\omega^2} \cos \omega l - 2\frac{r^2}{\omega^2}}}{l}.$$

Definiendo  $f : \left(0, \frac{\pi}{2\omega}\right] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(s) = \frac{\sqrt{2 - 2\frac{\bar{K}^2}{\omega^2} \cos \omega s - 2\frac{r^2}{\omega^2}}}{s}$ , se ve inmediatamente que  $f\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = K$ . Además,  $f(s) > K$  para todo  $s$  en  $\left(0, \frac{\pi}{2\omega}\right)$ , desde que  $f$  es estrictamente decreciente en  $\left(0, \frac{\pi}{2\omega}\right)$ . Particularmente, como  $l \in \left(0, \frac{\pi}{2\omega}\right]$  se tiene que  $f(l) \geq K$ .

Esto permite concluir que existe  $s^*$  en  $[0, l]$  tal que  $\kappa(s^*) \geq K$ . Como  $\kappa(s) < K$  para todo  $s$  en  $[0, m]$ , se tiene una contradicción. Esto prueba 3.8.

Desde que  $m > \Delta_{\mathbf{h}}s$ , se puede considerar  $\mathbf{c} : [0, \Delta_{\mathbf{h}}s] \subset [0, m) \rightarrow \mathbb{R}^3$ . En tales condiciones, se tiene que para todo  $s_i$  en  $[0, \Delta_{\mathbf{h}}s]$ , existe una vecindad reducida a la derecha de  $s_i$ ,  $V'_d(s_i)$  en  $[0, m)$  tal que

$$\mathbf{c}(s) \cdot \mathbf{e}_1 > \mathbf{h}(s) \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{c}(s_i) \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{h}(s_i) \cdot \mathbf{e}_1 \quad \forall s \in V'_d(s_i). \quad (3.11)$$

En efecto, para  $s_i = 0$ , notando que

$$\mathbf{c}(s) \cdot \mathbf{e}_1 - (\mathbf{h}(s) \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{c}(0) \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{h}(0) \cdot \mathbf{e}_1) = c_1(s) - h_1(s)$$

y que

$$\begin{aligned} c_1(s) - h_1(s) &= s - \frac{\kappa^2(0)}{6}s^3 + r_{c_1}^3(s) - \left(s - \frac{\bar{K}^2}{6}s^3 + r_{h_1}^3(s)\right) \\ &= \frac{\bar{K}^2 - \kappa^2(0)}{6}s^3 + r^3(s) \\ &= s^3 \left(\frac{\bar{K}^2 - \kappa^2(0)}{6} + \frac{r^3(s)}{s^3}\right), \end{aligned}$$

se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{\bar{K}^2 - \kappa^2(0)}{6} + \frac{r^3(s)}{s^3} \right) = \frac{\bar{K}^2 - \kappa^2(0)}{6} > 0,$$

desde que  $\bar{K} > \kappa(0)$ . Con los razonamientos ya usuales, se tiene que existe una vecindad reducida a la derecha de 0 tal que para todo  $s$  en esa vecindad reducida,  $\mathbf{c}(s) \cdot \mathbf{e}_1 > \mathbf{h}(s) \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{c}(0) \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{h}(0) \cdot \mathbf{e}_1$ . Esto prueba (3.11) para el caso  $s_i = 0$ .

Para  $0 < s_i \leq \Delta_{\mathbf{h}} s$ , notando que

$$\mathbf{c}(s) \cdot \mathbf{e}_1 - (\mathbf{h}(s) \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{c}(s_i) \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{h}(s_i) \cdot \mathbf{e}_1) = c_1(s) - (h_1(s) + c_1(s_i) - h_1(s_i))$$

y que

$$\begin{aligned} c_1(s) - (h_1(s) + c_1(s_i) - h_1(s_i)) &= c_1(s_i) + \mathbf{c}^{(1)}(s_i) \cdot \mathbf{e}_1 (s - s_i) + r_{c_1}^1(s - s_i) \\ &\quad - (h_1(s_i) + \mathbf{h}^{(1)}(s_i) \cdot \mathbf{e}_1 (s - s_i) + r_{h_1}^1(s - s_i) \\ &\quad + c_1(s_i) - h_1(s_i)) \\ &= (\mathbf{c}^{(1)}(s_i) \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{h}^{(1)}(s_i) \cdot \mathbf{e}_1) (s - s_i) + r^1(s - s_i) \\ &= (s - s_i) \left( \mathbf{c}^{(1)}(s_i) \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{h}^{(1)}(s_i) \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{r^1(s - s_i)}{s - s_i} \right) \end{aligned}$$

se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow s_i} \left( \mathbf{c}^{(1)}(s_i) \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{h}^{(1)}(s_i) \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{r^1(s - s_i)}{s - s_i} \right) = \mathbf{c}^{(1)}(s_i) \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{h}^{(1)}(s_i) \cdot \mathbf{e}_1 > 0,$$

en virtud de (3.8). Se tiene así que existe una vecindad reducida a la derecha de  $s_i$  tal que para todo  $s$  en esa vecindad reducida,  $\mathbf{c}(s) \cdot \mathbf{e}_1 > \mathbf{h}(s) \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{c}(s_i) \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{h}(s_i) \cdot \mathbf{e}_1$ . Esto prueba (3.11) para el caso  $s_i \in (0, \Delta_{\mathbf{h}} s]$ .

Definiendo, para todo  $s_i$  en  $[0, \Delta_{\mathbf{h}} s]$ , el abierto  $I(s_i) = (s_i - \delta_i, s_i] \cup V'_d(s_i)$ , se tiene que  $\{I(s_i)\}_{s_i \in [0, \Delta_{\mathbf{h}} s]}$  es un cubrimiento de  $[0, \Delta_{\mathbf{h}} s]$ . Por compacidad, se tiene un subcubrimiento finito  $\{I(0), I(s_1), \dots, I(s_{n-1}), I(s_n)\}$  con  $0 < s_1 < \dots < s_{n-1} < s_n < \Delta_{\mathbf{h}} s$  y  $s_1 \in I(0)$ ,  $s_2 \in I(s_1)$ ,  $\dots$ ,  $s_n \in I(s_{n-1})$ ,  $\Delta_{\mathbf{h}} s \in I(s_n)$ .

Para todo  $s > 0$  en  $I(0) = (-\delta_0, 0] \cup V'_d(0)$  se tiene, de (3.11), que  $\mathbf{c}(s) \cdot \mathbf{e}_1 > \mathbf{h}(s) \cdot \mathbf{e}_1$ . En particular, como  $s_1 > 0$  y  $s_1 \in I(0)$ , se tiene  $\mathbf{c}(s_1) \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{h}(s_1) \cdot \mathbf{e}_1 > 0$ . Notar que

$$\mathbf{c}(s) \cdot \mathbf{e}_1 > \mathbf{h}(s) \cdot \mathbf{e}_1 > 0 \quad \forall s \in (0, s_1].$$

Para todo  $s > s_1$  en  $I(s_1) = (s_1 - \delta_1, s_1] \cup V'_d(s_1)$  se tiene  $\mathbf{c}(s) \cdot \mathbf{e}_1 > \mathbf{h}(s) \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{c}(s_1) \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{h}(s_1) \cdot \mathbf{e}_1$ . En particular, como  $s_2 > s_1$  y  $s_2 \in I(s_1)$ , se tiene  $\mathbf{c}(s_2) \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{h}(s_2) \cdot \mathbf{e}_1 > \mathbf{c}(s_1) \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{h}(s_1) \cdot \mathbf{e}_1 > 0$ . Notar que

$$\mathbf{c}(s) \cdot \mathbf{e}_1 > \mathbf{h}(s) \cdot \mathbf{e}_1 > 0 \quad \forall s \in (0, s_2].$$

Se continúa de esta manera hasta llegar a la  $(n+1)$ -ésima vecindad. En tal situación, para todo  $s > s_n$  en  $I(s_n) = (s_n - \delta_n, s_n] \cup V'_d(s_n)$  se tiene  $\mathbf{c}(s) \cdot \mathbf{e}_1 > \mathbf{h}(s) \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{c}(s_n) \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{h}(s_n) \cdot \mathbf{e}_1$ . En particular, como  $\Delta_{\mathbf{h}s} > s_n$  y  $\Delta_{\mathbf{h}s} \in I(s_n)$ , notar que

$$\mathbf{c}(s) \cdot \mathbf{e}_1 > \mathbf{h}(s) \cdot \mathbf{e}_1 > 0 \quad \forall s \in (0, \Delta_{\mathbf{h}s}]. \quad (3.12)$$

Finalmente,  $\mathbf{h}(\Delta_{\mathbf{h}s}) \in \Pi$  es equivalente a  $\mathbf{h}(\Delta_{\mathbf{h}s}) \cdot \mathbf{e}_1 = d$ . Por consiguiente, desde que  $\mathbf{c}(\Delta_{\mathbf{h}s}) \cdot \mathbf{e}_1 > \mathbf{h}(\Delta_{\mathbf{h}s}) \cdot \mathbf{e}_1 = d$ , por el teorema del valor intermedio, usando precisamente (3.8) y (3.12), se tiene que existe un único  $\Delta s$  menor que  $\Delta_{\mathbf{h}s}$  tal que  $\mathbf{c}(\Delta s) \cdot \mathbf{e}_1 = d$  lo que es equivalente a decir que  $\mathbf{c}(\Delta s) \in \Pi$ . Esto prueba (2).  $\square$

Como consecuencia directa del resultado probado en el Teorema 3.4.2 se procede ahora a probar el siguiente teorema, que permite lograr los objetivos propuestos.

**Teorema 3.4.3** *Sea  $\mathbf{c}$  la porción de la curva de intersección parametrizada por longitud de arco definida sobre  $[s_i, s_i + m]$  de dos superficies  $\mathbf{S}^1$  y  $\mathbf{S}^2$ , con ángulo de intersección  $\theta$  tal que  $\sin \theta \geq c > 0$  y tal que el máximo de los valores absolutos de sus curvaturas principales son  $|\kappa^1|$  y  $|\kappa^2|$ , respectivamente. Dado  $\epsilon > 0$ , sea  $\Pi$  el plano de  $\mathbb{R}^3$  definido por los puntos  $\mathbf{P}$  de  $\mathbb{R}^3$  que satisfacen  $(\mathbf{P} - \mathbf{c}(s_i)) \cdot \mathbf{c}^{(1)}(s_i) = d$ , con  $d \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} \bar{l}$ , siendo  $\bar{l} \leq \sqrt{\frac{8\epsilon}{3\bar{\kappa}}}$ ,  $\bar{l} < \frac{\pi}{2\bar{\kappa}}$  y  $\bar{\kappa} = \frac{|\kappa^1| + |\kappa^2|}{c}$ . Si  $m$  es suficientemente grande, entonces  $\mathbf{c}$  interseca  $\Pi$  por primera vez en  $s_i + \Delta s$  tal que  $\Delta s < \bar{l}$ , de otro modo,  $m < \bar{l}$ .*

*Prueba.* Tomando  $K = \frac{\pi}{2\bar{l}}$ , como la curvatura  $\kappa$  de la curva  $\mathbf{c}$  nunca es mayor que  $\bar{\kappa}$ , se tiene que  $\kappa$  es siempre menor que  $K$ . Sea  $\mathbf{h}$  una parametrización por longitud de arco de (el cuadrante de) la circunferencia con curvatura  $\bar{K} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}K$  (y de longitud  $\frac{\pi}{2\bar{K}}$ ), tal que  $\mathbf{h}(s_i) = \mathbf{c}(s_i)$ ,  $\mathbf{h}^{(1)}(s_i) = \mathbf{c}^{(1)}(s_i)$ . En tal caso,

$$\frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} \bar{l} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{2\bar{l}}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{K} = \frac{1}{\bar{K}} = \left( \mathbf{h} \left( s_i + \frac{\pi}{2\bar{K}} \right) - \mathbf{h}(s_i) \right) \cdot \mathbf{c}^{(1)}(s_i).$$

Así, por la parte (1) del Teorema 3.4.2, existe un único  $\Delta_{\mathbf{h}s} \in (0, \frac{\pi}{2\bar{K}}]$  tal que  $\mathbf{h}(s_i + \Delta_{\mathbf{h}s}) \in \Pi$  y, por la parte (2), si  $m > \Delta_{\mathbf{h}s}$ , entonces existe un único  $\Delta s \in (0, \Delta_{\mathbf{h}s})$  tal que  $\mathbf{c}(s_i + \Delta s) \in \Pi$ . Como  $\Delta_{\mathbf{h}s} \leq \frac{\pi}{2\bar{K}} = \frac{\pi}{2} \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{K} = \frac{\sqrt{2}}{K} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \bar{l} < \bar{l}$ , entonces  $\Delta s < \bar{l}$ . Si  $m \leq \Delta_{\mathbf{h}s}$ , no hay nada que probar pues si  $\mathbf{c}$  interseca a  $\Pi$  en  $\Delta s$ , naturalmente  $\Delta s \leq m \leq \Delta_{\mathbf{h}s} \leq \frac{\pi}{2\bar{K}} < \bar{l}$  y si  $\mathbf{c}$  no interseca a  $\Pi$ , simplemente se habrá llegado al final de la curva con un tamaño de paso menor que  $\bar{l}$ .  $\square$

Siendo conocidos  $|\kappa^1|$ ,  $|\kappa^2|$  y  $c$ , se puede determinar

$$\bar{\kappa} = \frac{|\kappa^1| + |\kappa^2|}{c}.$$

Los valores de  $|\kappa^1|$  y  $|\kappa^2|$  pueden ser calculados, desde que se suponen conocidas expresiones paramétricas de cada una de las superficies a intersectar  $S^1$  y  $S^2$ . El valor de  $c$  puede ser estimado dependiendo de las características de la pieza a manufacturar. Un esquema de subdivisión con pruebas de separabilidad pueden usarse para estimar el valor de  $c$ . Para cada superficie a intersectar se construye una envolvente la cual acote completamente la superficie. Naturalmente, si las envolventes no se superponen, no hay intersección. Si las envolventes se superponen, puede producirse la intersección y se procede a calcular los ángulos que forman los vectores normales de una de las superficies con los vectores normales de la otra. Si ninguno de esos ángulos se anula y se produce la intersección, entonces las porciones involucradas de ambas superficies se intersectarán en segmentos de curva abiertos. Si alguno de esos ángulos se anula, se subdividen ambas superficies y se repite el proceso. Naturalmente, el proceso terminará en algún momento, desde que se está tratando el caso en que la intersección de superficies es no singular. Observar que esto configura una etapa de pre-procesamiento que además de proporcionar puntos de inicio y final para el trazado, da estimaciones menos globales, y por lo tanto más finas para  $|\kappa^1|$  y  $|\kappa^2|$ . En todo caso, siempre es posible realizar una fase de trazado previa a la que controla el error, suficientemente fina como para poder estimar más cercanamente el valor de  $c$ . Naturalmente, también será posible obtener estimaciones más finas para  $|\kappa^1|$  y  $|\kappa^2|$  por esta vía. Obviamente que esto demorará la obtención del resultado final, pero lo que se está buscando, por sobre todo, es precisión en el resultado. Esto tiene un costo y debe ser pagado por la velocidad.

Dado  $\epsilon$ , es posible ahora pensar en una fase de trazado que permita obtener una secuencia de puntos que al ser posteriormente interpolados pueda conseguirse una poligonal cuya distancia a la curva real de intersección sea menor que  $\epsilon$ .

Para esto se define el número positivo  $\bar{l}$ , tal que

$$\bar{l} \leq \sqrt{\frac{8\epsilon}{3\bar{\kappa}}}, \quad \bar{l} < \frac{\pi}{2\bar{\kappa}}.$$

Notar que si  $\Delta s < \sqrt{\frac{8\epsilon}{3\bar{\kappa}}}$ , entonces necesariamente  $|\mathbf{c}(s) - \mathbf{p}(s)| < \epsilon$ .

Sea  $\mathbf{c}(s_i)$  un punto de intersección previamente encontrado ya sea en la etapa de pre-procesamiento o en esta fase de trazado. Para que el trazado sea posible debe haber puntos a encontrar. Esto significa que se trata de un punto que está al comienzo o en el interior de un segmento, en ningún modo puede tratarse de un punto final.

En esta situación, es posible, desde que  $c > 0$ , encontrar el vector tangente unitario  $\mathbf{t}$  a la curva real de intersección  $\mathbf{c}$  en el punto  $s_i$  y en el sentido del avance.

Construyendo el plano  $\Pi$  como el conjunto de puntos  $\mathbf{P}$  de  $\mathbb{R}^3$  que satisfacen

$$(\mathbf{P} - \mathbf{c}(s_i)) \cdot \mathbf{t} = d, \quad \text{con } d = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} \bar{l},$$

se trata de construir la intersección de las superficies  $S^1$  y  $S^2$  con el plano  $\Pi$ . El cálculo de esta intersección involucra un método iterativo de Newton. En el caso de que la iteración de Newton no convergiera, se puede disminuir el valor de  $d$ , por ejemplo a la mitad. Esto siempre puede hacerse, de manera que siempre es posible alcanzar la convergencia del método de Newton.

Con esto se obtendrá un nuevo punto, el único posible,  $c(s_i)$ .

### 3.5 Interpolación Adaptativa

La fase de trazado descrita en la Sección 3.4 genera un conjunto de segmentos aparentemente disjuntos, en la forma de secuencias de puntos.

La siguiente fase del método que se está proponiendo consistiría en unir consecutivamente en segmentos disjuntos las secuencias de puntos que han sido ya creadas en la fase de trazado y las que se disponen en un arreglo para su procesamiento en esta fase. Puede procederse en la forma en que lo hace Timmer en su fase de ordenamiento. En realidad no se ve mejor manera de realizar este proceso. Con esto quedan configuradas, en la forma de secuencias de puntos, las componentes conexas disjuntas que conforman la intersección. Al hacer la interpolación lineal de tales puntos en cada componente conexa, se tendrá un conjunto de poligonales conexas disjuntas, cuya unión resulta en una poligonal compuesta que aproxima a la intersección.

Para un óptimo proceso de mecanizado, es posible ahora reducir el número de puntos de interpolación que participan en la construcción de la poligonal precedente, a fin de obtener un interpolante con tamaño de paso adaptativo y dentro de la tolerancia prefijada. Esto permitirá entregar al centro de mecanizado el menor número posible de puntos de interpolación. Con esto podrá definirse una representación segmentada óptima de la curva a ser mecanizada que aproxima a la intersección, donde óptima significa que tiene el menor número posible de puntos de interpolación. Esto es, se descartarán puntos innecesarios sobre la poligonal compuesta. El término innecesario se refiere, en el caso de interpolación lineal, a puntos que son casi colineales.

Sea  $\epsilon$  una tolerancia de error dada. Dado  $c(s_i)$  un punto de la poligonal encontrada antes. El proceso que se describe a continuación deberá comenzar en el primer punto de cada una de las componentes conexas de la poligonal.

Elegir inicialmente un tamaño de paso  $\Delta s_i$ . Como se verá después, esta elección no es más que una tentativa inicial de la magnitud del avance en el sentido de la curva de intersección. Se verá después cómo tomar apropiadamente  $\Delta s_i$ .

A continuación, sumar, desde el punto  $c(s_i)$ , las longitudes de segmentos consecutivos de la poligonal encontrada antes hasta que esta suma supere el valor de  $\Delta s_i$  o hasta que no haya más segmentos, de la poligonal, que sumar. En el primer caso, tomar

como  $\mathbf{c}(s_j)$  el extremo inicial del último segmento sumado. En el segundo caso, tomar como  $\mathbf{c}(s_j)$  el último punto de la poligonal. En ambos casos, es correcto considerar  $\Delta s_i$  como la suma de las longitudes de los segmentos de la poligonal, entre  $\mathbf{c}(s_i)$  y  $\mathbf{c}(s_j)$ . El siguiente paso es interpolar estos dos puntos  $\mathbf{c}(s_i)$  y  $\mathbf{c}(s_j)$ .

Ahora, calcular la desviación entre el interpolante de estos dos puntos  $\mathbf{c}(s_i)$  y  $\mathbf{c}(s_j)$  y la poligonal entre ambos puntos. Puede suceder que tal desviación sea mayor que  $\epsilon$ , lo cual puede muy bien acontecer por cualquiera de las razones discutidas en la Sección 3.1. En este caso tomar un  $\Delta s_i$  menor, lo que permitirá determinar, como se describió líneas arriba, su punto  $\mathbf{c}(s_j)$  asociado.

Este procedimiento debe hacerse tantas veces como sea necesario hasta que la desviación entre el interpolante de estos dos puntos  $\mathbf{c}(s_i)$  y  $\mathbf{c}(s_j)$  y la poligonal entre ambos puntos sea menor que  $\epsilon$ .

Una vez satisfecha la tolerancia permitida, tomar el punto  $\mathbf{c}(s_j)$  como nuevo punto  $\mathbf{c}(s_i)$  y repetir el proceso descrito, salvo que  $\mathbf{c}(s_i)$  sea ya el último punto de la poligonal.

Esto determinará un interpolante cuya desviación a la poligonal encontrada antes es menor que  $\epsilon$ .

Una elección apropiada del  $\Delta s_i$  inicial puede hacerse de diversas maneras. Como el objetivo es tener el menor número posible de puntos de interpolación, se podría, inicialmente, tomar  $\Delta s_i$  lo más grande posible, esto significa tomar como el primer punto  $\mathbf{c}(s_j)$  al último punto de la poligonal. Esto es un poco lo que hacen Sederberg et al. [27]. No obstante ellos solamente consiguen un control tipo Cauchy del error, lo que no garantiza que el interpolante esté efectivamente dentro de la tolerancia permitida. El tamaño de paso inicial puede ser obtenido también como lo hacen otros métodos existentes. La ventaja con el método propuesto aquí es el control a posteriori que se hace del error.

Una manera bastante eficiente de elegir el  $\Delta s_i$  inicial puede ser basada en la estimación del error obtenida en la Sección 3.2.

Sea  $\mathbf{c}(s)$  la curva de intersección 3D parametrizada por longitud de arco  $s$ , definida sobre  $[s_i, s_i + \Delta s_i]$  y  $\mathbf{p}(s)$  el polinomio lineal 3D, definido sobre  $[s_i, s_i + \Delta s_i]$  tal que

$$\mathbf{p}(s_i) = \mathbf{c}(s_i), \quad \mathbf{p}(s_i + \Delta s_i) = \mathbf{c}(s_i + \Delta s_i).$$

Es conocido [19], que el error de interpolación de  $\mathbf{p}(s)$  en  $s$  es dado por

$$\mathbf{c}(s) - \mathbf{p}(s) = \frac{1}{2} (s - s_i) (s - s_i - \Delta s_i) \bar{\mathbf{c}}^{(2)},$$

donde  $\bar{\mathbf{c}}^{(2)} = (c_1^{(2)}(\xi_1), c_2^{(2)}(\xi_2), c_3^{(2)}(\xi_3))$ , con  $\xi_j, j = 1(1)3$  (en general desconocido) sobre  $[s_i, s_i + \Delta s_i]$ . Se tiene que

$$|\mathbf{c}(s) - \mathbf{p}(s)| \leq \frac{3}{8} \max |c^{(2)}(s)| (\Delta s_i)^2.$$

El tamaño de paso adaptativo inicial  $\Delta s_i$  puede ser tomado como

$$\Delta s_i = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{\epsilon}{|\mathbf{c}^{(2)}(s_i)|}}.$$

Se está, ahora, en condiciones de construir un interpolante de Hermite, con tamaño de paso adaptativo.

Sea  $\mathbf{c}(s)$  la curva de intersección 3D parametrizada por longitud de arco  $s$ , definida sobre  $[s_i, s_i + \Delta s_i]$  y  $\mathbf{p}(s)$  el polinomio de Hermite 3D, definido sobre  $[s_i, s_i + \Delta s_i]$  tal que

$$\mathbf{p}^{(j)}(s_i) = \mathbf{c}^{(j)}(s_i), \quad \mathbf{p}^{(j)}(s_i + \Delta s_i) = \mathbf{c}^{(j)}(s_i + \Delta s_i), \quad j = 0(1)k,$$

donde  $\rho = 2k + 1$  es el grado del polinomio  $\mathbf{p}$ . Es conocido [19], que el error de interpolación de  $\mathbf{p}(s)$  en  $s$  es dado por

$$\mathbf{c}(s) - \mathbf{p}(s) = \frac{1}{(\rho + 1)!} (s - s_i)^k (s - s_i - \Delta s_i)^k \bar{\mathbf{c}}^{(\rho+1)},$$

donde  $\bar{\mathbf{c}}^{(\rho+1)} = (c_1^{(\rho+1)}(\xi_1), c_2^{(\rho+1)}(\xi_2), c_3^{(\rho+1)}(\xi_3))$ , con  $\xi_j$ ,  $j = 1(1)3$  (en general desconocido) sobre  $[s_i, s_i + \Delta s_i]$ . Se tiene que

$$|\mathbf{c}(s) - \mathbf{p}(s)| \leq \frac{3}{(\rho + 1)!(\rho + 1)^2} \max |\mathbf{c}^{(\rho+1)}(s)| (\Delta s_i)^{\rho+1}.$$

El tamaño de paso adaptativo inicial  $\Delta s_i$  puede ser tomado como

$$\Delta s_i = \sqrt[\rho+1]{\frac{(\rho + 1)!(\rho + 1)^2}{3} \frac{\epsilon}{|\mathbf{c}^{(\rho+1)}(s_i)|}}.$$

El conocimiento de  $\mathbf{c}^{(j)}(s_i)$  y de  $\mathbf{c}^{(j)}(s_i + \Delta s_i)$  para  $j = 0(1)k$  permite determinar la curva de Bézier polinomial interpolante de grado  $\rho$

$$\mathbf{p}(s) = \sum_{j=0}^{\rho} B_j^{\rho}(s) \mathbf{b}_j, \quad s \in [s_i, s_i + \Delta s_i].$$

$$B_j^{\rho}(s) = \binom{\rho}{j} \frac{(s_i + \Delta s_i - s)^{\rho-j} (s - s_i)^j}{(\Delta s_i)^{\rho}}, \quad s \in [s_i, s_i + \Delta s_i], \quad j = 0(1)\rho,$$

son los  $\rho + 1$  polinomios de Bernstein de grado  $\rho$  en  $s$  sobre  $[s_i, s_i + \Delta s_i]$ . Los  $\rho + 1$  coeficientes  $\mathbf{b}_j$ ,  $j = 0(1)\rho$ , son los puntos de control de la curva de Bézier, que son encontrados como las soluciones del sistema de ecuaciones, para  $j = 0(1)k$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{(j)}(s_i) &= (\Delta s_i)^{-j} \frac{\rho!}{(\rho - j)!} (E - 1)^j \mathbf{b}_0, \\ \mathbf{c}^{(j)}(s_i + \Delta s_i) &= (\Delta s_i)^{-j} \frac{\rho!}{(\rho - j)!} (E - 1)^j \mathbf{b}_{\rho-j}, \end{aligned}$$

donde

$$Eb_i = \mathbf{b}_{i+1}, \quad E^m E^n = E^{m+n}, \quad Ea = aE, \quad E^0 = 1, \quad EE^{-1} = 1.$$

Si se desea un interpolante lineal, se tiene que  $\rho = 1$  y el tamaño de paso adaptativo inicial  $\Delta s_i$  sería

$$\Delta s_i = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{\epsilon}{\kappa_i}} \quad (3.13)$$

donde  $\kappa_i = |\mathbf{c}^{(2)}(s_i)|$  es el valor de la curvatura de  $\mathbf{c}$  en  $s_i$ . En este caso, el sistema de ecuaciones que permite determinar los puntos de control de la curva de Bézier polinomial interpolante (un segmento de recta en este caso lineal) resulta ser

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(s_i) &= \mathbf{b}_0, \\ \mathbf{c}(s_i + \Delta s_i) &= \mathbf{b}_1. \end{aligned}$$

Este procedimiento determina un conjunto de puntos adecuadamente espaciados, que al ser interpolados linealmente producirán una aproximación con tamaño de paso adaptativo y dentro de la tolerancia prefijada.

Si se desea un interpolante cúbico, se tiene que  $\rho = 3$  y el tamaño de paso adaptativo inicial  $\Delta s_i$  sería

$$\Delta s_i = \sqrt[4]{\frac{384}{3} \frac{\epsilon}{|\mathbf{c}^{(4)}(s_i)|}} \quad (3.14)$$

En este caso, el sistema de ecuaciones que permite determinar los puntos de control de la curva de Bézier polinomial interpolante cúbica resulta ser

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(s_i) &= \mathbf{b}_0, \\ \mathbf{c}(s_i + \Delta s_i) &= \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{c}^{(1)}(s_i) &= (\Delta s_i)^{-1} 3(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0), \\ \mathbf{c}^{(1)}(s_i + \Delta s_i) &= (\Delta s_i)^{-1} 3(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2). \end{aligned}$$

En general, dado que el operador  $E$  satisface la propiedad  $E^r \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_{j+r}$ , si se desea un interpolante de Hermite de grado  $\rho$ , el tamaño de paso adaptativo inicial  $\Delta s_i$  sería

$$\Delta s_i = \sqrt[\rho+1]{\frac{(\rho+1)!(\rho+1)^2}{3} \frac{\epsilon}{|\mathbf{c}^{(\rho+1)}(s_i)|}} \quad (3.15)$$

El sistema de ecuaciones que permite determinar los puntos de control de la curva de Bézier polinomial interpolante de grado  $\rho$  resulta ser, para  $j = 0(1)k$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{(j)}(s_i) &= (\Delta s_i)^{-j} \frac{\rho!}{(\rho-j)!} \sum_{l=0}^j (-1)^j \binom{j}{l} \mathbf{b}_{j-l}, \\ \mathbf{c}^{(j)}(s_i + \Delta s_i) &= (\Delta s_i)^{-j} \frac{\rho!}{(\rho-j)!} \sum_{l=0}^j (-1)^j \binom{j}{l} \mathbf{b}_{\rho-l}. \end{aligned}$$

Se debe haber podido percibir la necesidad de conocer las propiedades de la geometría diferencial local de la intersección de dos superficies. Específicamente, si se desea un interpolante lineal, se debe saber calcular la curvatura en puntos de la curva de intersección, si es que se está considerando un tamaño de paso inicial dado por (3.13). Si se desea un interpolante cúbico, se debe saber calcular la primera derivada en puntos de la curva de intersección, si se está considerando un tamaño de paso inicial máximo posible o, si se considera un tamaño de paso inicial dado por (3.14), se debe saber calcular la derivada de cuarto orden en tales puntos. En general, si se desea un interpolante de Hermite de grado  $\rho$ , se debe saber calcular la derivada de orden  $\frac{\rho-1}{2}$ , si se ha decidido tomar un tamaño de paso inicial máximo posible o la derivada de orden  $\rho + 1$ , si se está considerando un tamaño de paso inicial dado por 3.15. Naturalmente, el grado  $\rho$  de los polinomios de Hermite interpolante debe ser un número entero positivo impar.

Por completitud de la exposición, en el Apéndice A es mostrado cómo proceder para calcular estas propiedades de la geometría diferencial local de la intersección entre dos superficies, lo que ha sido también hecho por Ye et al. [33].

## 3.6 Algoritmo y Aplicaciones

En esta sección se hace una propuesta comentada del algoritmo que puede elaborarse a partir del método de trazado que se ha ido configurando. Usando el algoritmo propuesto se muestran dos aplicaciones.

### 3.6.1 Algoritmo

No se hace más que recopilar los aspectos del método de trazado que se ha propuesto en esta tesis, en una forma ordenada para facilitar su aplicación.

#### Pre-procesamiento

**Detección de componentes conexas** Dos superficies pueden intersectarse en una forma complicada formada por varias componentes conexas disjuntas. En una intersección no singular (esto es, en una intersección en la cual las superficies nunca son tangentes) hay dos tipos de componentes, abiertas y cerradas.

El problema de la detección de las componentes conexas disjuntas que conforman la intersección de dos superficies es incidental en esta tesis. En principio, la detección de las componentes conexas puede ser realizada mediante un proceso de discretización en la forma indicada por Timmer (ver Sección 2.1), en su fase de búsqueda, o también

como sugerida por Sederbeg et al. [28, 29].

El método de trazado que se propone en esta tesis requiere que se conozcan ambos extremos de cada segmento de la curva de intersección que se desea aproximar. No es difícil localizar los extremos de un segmento abierto. Lo que hay que hacer es simplemente intersectar las curvas frontera de cada superficie con la otra superficie. Las curvas cerradas presentan una mayor dificultad. Por eso debe discretizarse de manera tal que no quede ninguna curva cerrada. Una discusión de cómo puede procederse en esta situación puede encontrarse en [28].

**Estimación de  $|\kappa^1|$ ,  $|\kappa^2|$  y de  $c$**  En cada segmento, los valores de  $|\kappa^1|$  y  $|\kappa^2|$  pueden ser calculados desde que se suponen conocidas representaciones paramétricas para cada una de las superficies a intersectar  $S^1$  y  $S^2$ . El valor de  $c$  puede ser estimado dependiendo de las características de la pieza a manufacturar. Un esquema de subdivisión con pruebas de separabilidad pueden usarse para estimar el valor de  $c$ . Para cada superficie a intersectar se construye una envolvente la cual acote completamente la superficie. Para superficies de Bézier polinomiales (producto tensorial) pueden ser usadas las envolventes convexas de sus puntos de control. Naturalmente, si las envolventes no se superponen, no hay intersección. Si las envolventes se superponen, puede producirse la intersección y se procede a calcular los senos de los ángulos que forman los vectores normales de una de las superficies con los vectores normales de la otra. Si el mínimo de esos senos es positivo y se produce la intersección, entonces las porciones involucradas de ambas superficies se intersectarán en segmentos de curva abiertos. Si alguno de esos senos se anula, se subdividen ambas superficies y se repite el proceso. Para superficies de Bézier polinomiales (producto tensorial) este proceso de subdivisión es particularmente simple y estable, usando el algoritmo de de Casteljau. Este proceso terminará en algún momento, desde que se está tratando el caso en que la intersección de superficies es no singular. Esto configura una etapa de pre-procesamiento que además de proporcionar puntos de inicio y de final para el trazado, da estimaciones menos globales, y por lo tanto más finas para  $|\kappa^1|$ ,  $|\kappa^2|$  y  $c$ . En todo caso, siempre es posible realizar una fase de trazado previa a la que controla el error, suficientemente fina como para poder estimar más cercanamente el valor de  $c$ . Naturalmente, también será posible obtener estimaciones más finas para  $|\kappa^1|$  y  $|\kappa^2|$  por esta vía.

### Trazado

Para obtener cada segmento, en la forma de una secuencia de puntos, puede procederse de la siguiente manera:

En primer lugar determinar

$$\bar{\kappa} = \frac{|\kappa^1| + |\kappa^2|}{c}$$

y dado  $\epsilon_c$ , definir el número real positivo  $\bar{l}$  tal que

$$\bar{l} \leq \sqrt{\frac{8\epsilon_c}{3\bar{\kappa}}}, \quad \bar{l} < \frac{\pi}{2\bar{\kappa}}.$$

- Dado  $c(s_i)$ , calcular  $\mathbf{t} = \nu \frac{\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2}{|\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2|}$ .

$c(s_i)$  es un punto de intersección previamente encontrado, ya sea en la etapa de pre-procesamiento o en esta fase de trazado. Para que el trazado sea posible debe haber puntos a encontrar. Esto significa que se trata de un primer punto del segmento o de un punto en su interior, en ningún modo puede tratarse del punto final de un segmento. Los puntos extremos de cada segmento que ya han sido procesados no deben ser más considerados en esta fase de trazado.

$\mathbf{N}^i = \mathbf{S}_{u_i}^i \times \mathbf{S}_{v_i}^i / |\mathbf{S}_{u_i}^i \times \mathbf{S}_{v_i}^i|$  es el vector normal unitario de la superficie  $\mathbf{S}^i$ . Desde que  $c > 0$ , se tiene que  $\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2 \neq \mathbf{0}$ .  $\nu = \pm 1$ .  $\mathbf{t}$  es el vector tangente unitario a la curva real de intersección  $c$  en el punto  $s_i$  y en el sentido del avance de la curva, lo que determina el valor de  $\nu$ .

- Tomar  $d = \frac{4\sqrt{2}\bar{l}}{\pi^2}$ .

– Construir el plano  $\Pi$ , como el conjunto de puntos  $\mathbf{P}$  de  $\mathbb{R}^3$  tales que

$$(\mathbf{P} - c(s_i)) \cdot \mathbf{t} = d.$$

– Encontrar la intersección de las superficies  $\mathbf{S}^1$  y  $\mathbf{S}^2$  con el plano  $\Pi$ .

El cálculo de esta intersección involucra un método iterativo de Newton. En el caso de que la iteración de Newton no convergiera, se puede disminuir el valor de  $d$ , por ejemplo a la mitad. Construyendo el nuevo plano  $\Pi$  con el nuevo valor de  $d$ , se intenta nuevamente la intersección  $\mathbf{S}^1 \cap \mathbf{S}^2 \cap \Pi$ . Esto siempre puede hacerse, de manera que siempre es posible alcanzar la convergencia del método de Newton.

Con esto se obtendrá un nuevo punto, el único posible,  $c(s_i)$ .

Hacer esto hasta llegar al último punto del segmento.

### Construcción de componentes conexas disjuntas

La fase anterior ha generado un conjunto de segmentos en la forma de secuencias de puntos. Tales segmentos son aparentemente disjuntos. Esta fase consiste en unir consecutivamente en segmentos disjuntos las secuencias de puntos creadas en la fase de trazado y las que se disponen en un arreglo.

Tomando uno de los extremos del primer segmento del arreglo se compara con los extremos de los otros. Si éste coincide con el extremo de algún otro segmento, se efectúa la unión de tales extremos, configurándose de esta manera un nuevo primer segmento que reemplazará a los dos que lo originaron. Si ninguno de los extremos de este primer segmento coincide con ninguno de los extremos de los siguientes segmentos del arreglo se tendrá un segmento disjunto.

Tomando el siguiente segmento del arreglo, si lo hubiere, como el primer segmento de un nuevo arreglo, se efectúa nuevamente el procedimiento indicado hasta agotar todos los segmentos del arreglo.

Con esto quedan configuradas, en la forma de secuencias de puntos, las componentes conexas disjuntas que conforman la intersección. Al hacer la interpolación lineal de tales puntos, en cada componente conexa, se tendrá un conjunto de poligonales, cuya unión será una poligonal compuesta que aproxima a la intersección.

### Adaptatividad

Dado  $\epsilon_a$  se sugiere, en cada componente conexa, el siguiente procedimiento.

- Dado  $c(s_i)$ , elegir un tamaño de paso  $\Delta s_i$  inicial.

$c(s_i)$  es un punto de la poligonal construida antes. El proceso que se describe a continuación deberá comenzar en uno de los extremos de cada una de las componentes conexas de la poligonal.

La elección señalada de  $\Delta s_i$  no es más que una tentativa inicial de la magnitud del avance en el sentido de la curva de intersección. Se podría tomar, inicialmente,  $\Delta s_i$  lo más grande posible. Esto significa tomar  $\Delta s_i$  tan grande como la longitud del segmento de poligonal que se está procesando. El tamaño de paso inicial  $\Delta s_i$  puede ser tomado también como lo hacen otros métodos existentes. También, si se pretende interpolar con curvas de Bézier polinomiales de grado  $\rho$ , el tamaño de paso inicial  $\Delta s_i$  puede ser tomado como

$$\Delta s_i = \sqrt[\rho+1]{\frac{(\rho+1)!(\rho+1)^2}{3} \frac{\epsilon_a}{|c^{(\rho+1)}(s_i)|}}$$

Incluso puede pensarse en interpolación racional o de cualquier otra índole.

- Sumar, desde el punto  $\mathbf{c}(s_i)$ , las longitudes de segmentos consecutivos de la poligonal hasta que esta suma supere el valor de  $\Delta s_i$  o hasta que no haya más segmentos que sumar.
  - \* En el primer caso, tomar como  $\mathbf{c}(s_i + \Delta s_i)$  el extremo inicial del último segmento sumado.
  - \* En el segundo caso, tomar como  $\mathbf{c}(s_i + \Delta s_i)$  el último punto del segmento de la poligonal que se está procesando.

En ambos casos, se ha reconsiderado a  $\Delta s_i$  como la suma de las longitudes de los segmentos de la poligonal entre  $\mathbf{c}(s_i)$  y  $\mathbf{c}(s_i + \Delta s_i)$ .

- Interpolarse estos dos puntos  $\mathbf{c}(s_i)$  y  $\mathbf{c}(s_i + \Delta s_i)$ .

El interpolante no tiene por qué ser lineal. Puede ser de cualquier índole, como se ha mencionado.

Particularmente, el conocimiento de  $\mathbf{c}^{(j)}(s_i)$  y de  $\mathbf{c}^{(j)}(s_i + \Delta s_i)$ , para  $j = 0(1)\rho$ , permite determinar la curva de Bézier interpolante de grado  $\rho$ ,

$$\mathbf{p}(s) = \sum_{j=0}^{\rho} B_j^{\rho}(s) \mathbf{b}_j, \quad s \in [s_i, s_i + \Delta s_i].$$

$$B_j^{\rho}(s) = \binom{\rho}{j} \frac{(s_i + \Delta s_i - s)^{\rho-j} (s - s_i)^j}{(\Delta s_i)^{\rho}}, \quad s \in [s_i, s_i + \Delta s_i], \quad j = 0(1)\rho,$$

son los  $\rho + 1$  polinomios de Bernstein de grado  $\rho$  en  $s$  sobre  $[s_i, s_i + \Delta s_i]$ . Los  $\rho + 1$  coeficientes  $\mathbf{b}_j$ ,  $j = 0(1)\rho$ , son los puntos de control de la curva de Bézier, que son encontrados como las soluciones del sistema de ecuaciones lineales, para  $j = 0(1)\rho$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{(j)}(s_i) &= (\Delta s_i)^{-j} \frac{\rho!}{(\rho-j)!} \sum_{l=0}^j (-1)^l \binom{j}{l} \mathbf{b}_{j-l}, \\ \mathbf{c}^{(j)}(s_i + \Delta s_i) &= (\Delta s_i)^{-j} \frac{\rho!}{(\rho-j)!} \sum_{l=0}^j (-1)^j \binom{j}{l} \mathbf{b}_{\rho-l}. \end{aligned}$$

- Calcular la distancia del interpolante de estos dos puntos  $\mathbf{c}(s_i)$  y  $\mathbf{c}(s_i + \Delta s_i)$  hacia la poligonal entre ambos puntos. Si tal distancia es mayor que  $\epsilon_a$ , tomar un  $\Delta s_i$  menor al que se tiene actualmente, lo que permitiría determinar, como se describe líneas arriba el  $\Delta s_i$  reconsiderado y su punto  $\mathbf{c}(s_i + \Delta s_i)$  asociado.

Este procedimiento debe hacerse tantas veces como sea necesario hasta que la distancia del interpolante de estos dos puntos  $\mathbf{c}(s_i)$  y  $\mathbf{c}(s_i + \Delta s_i)$  hacia la poligonal entre ambos puntos sea menor que  $\epsilon_a$ .

- Una vez satisfecha la tolerancia permitida, tomar el punto  $\mathbf{c}(s_i + \Delta s_i)$  como nuevo punto  $\mathbf{c}(s_i)$  y repetir el proceso descrito, salvo que  $\mathbf{c}(s_i)$  sea ya el último punto del segmento de la poligonal.

Esto determina un interpolante con tamaño de paso adaptativo cuya desviación a la poligonal es necesariamente menor que  $\epsilon_a$ .

Si, además de tomar un  $\Delta s_i$  menor cada vez que el error es mayor que  $\epsilon_a$ , se tomara un  $\Delta s_i$  de mayor tamaño si es que el error está muy por debajo de la tolerancia, se conseguiría un control muy completo del error de la aproximación. Por ejemplo, podría exigirse que la desviación  $\delta$  del interpolante adaptativo a la poligonal satisfaga la relación  $0.7\epsilon_a < \delta < \epsilon_a$ . Naturalmente, esto es absolutamente factible de implementarse y permitiría una óptima cantidad y distribución de los puntos de interpolación, alcanzándose por tanto una muy completa confiabilidad y una muy alta eficiencia.

Así, si es dada una tolerancia  $\epsilon$ , basta tomar  $\epsilon_c \ll \epsilon$  para la fase de trazado y  $\epsilon_a = \epsilon - \epsilon_c$  para la adaptatividad.

### 3.6.2 Aplicaciones

Con la propuesta de algoritmo se han construido rutinas en Matlab para poder realizar las aplicaciones siguientes en las que se calcula la intersección de superficies de Bézier, aunque el método propuesto es aplicable a tipos arbitrarios de superficies.

#### Aplicación 1

Se muestra con suficiente detalle la aplicación del método propuesto, en el cálculo de la curva de intersección de dos superficies de Bézier polinomiales (producto tensorial) con una tolerancia de error prefijada. La intersección de la superficie de Bézier polinomial con puntos de control dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,0} &= (0, 0, 0), & \mathbf{b}_{1,0} &= (1, 0, 1), & \mathbf{b}_{2,0} &= (2, 0, 1), & \mathbf{b}_{3,0} &= (3, 0, 0), \\ \mathbf{b}_{0,1} &= (0, 1, 1), & \mathbf{b}_{1,1} &= (1, 1, 0), & \mathbf{b}_{2,1} &= (2, 1, 0), & \mathbf{b}_{3,1} &= (3, 1, 1), \\ \mathbf{b}_{0,2} &= (0, 2, 1), & \mathbf{b}_{1,2} &= (1, 2, 0), & \mathbf{b}_{2,2} &= (2, 2, 0), & \mathbf{b}_{3,2} &= (3, 2, 1), \\ \mathbf{b}_{0,3} &= (0, 3, 0), & \mathbf{b}_{1,3} &= (1, 3, 1), & \mathbf{b}_{2,3} &= (2, 3, 1), & \mathbf{b}_{3,3} &= (3, 3, 1) \end{aligned}$$

y la superficie de Bézier polinomial con puntos de control dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,0} &= (-1, -1, -1), & \mathbf{b}_{1,0} &= (1, -1, -1), & \mathbf{b}_{2,0} &= (2, -1, -1), & \mathbf{b}_{3,0} &= (4, -1, 1), \\ \mathbf{b}_{0,1} &= (-1, 1, -1), & \mathbf{b}_{1,1} &= (1, 1, 2), & \mathbf{b}_{2,1} &= (2, 1, 2), & \mathbf{b}_{3,1} &= (4, 1, -1), \\ \mathbf{b}_{0,2} &= (-1, 2, -1), & \mathbf{b}_{1,2} &= (1, 2, 2), & \mathbf{b}_{2,2} &= (2, 2, 2), & \mathbf{b}_{3,2} &= (4, 2, -1), \\ \mathbf{b}_{0,3} &= (-1, 4, 1), & \mathbf{b}_{1,3} &= (1, 4, -1), & \mathbf{b}_{2,3} &= (2, 4, -1), & \mathbf{b}_{3,3} &= (4, 4, 1) \end{aligned}$$

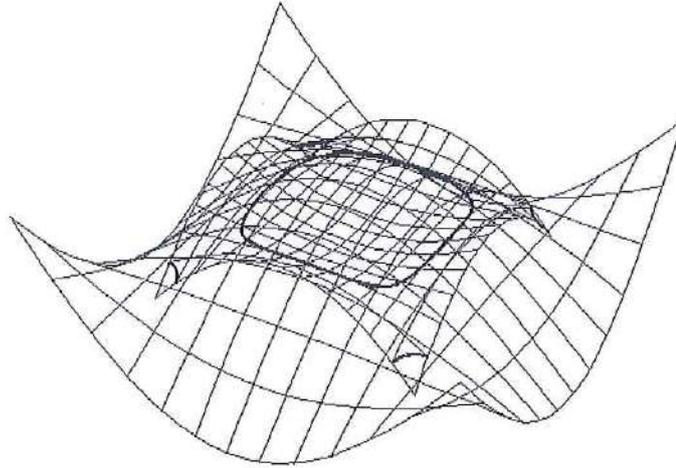


Figura 3.5: Intersección de dos superficies de Bézier.

estará compuesta por cinco componentes conexas, una curva cerrada y cuatro curvas congruentes abiertas en las esquinas de la primera superficie, como se visualiza en la Figura 3.5.

Para aproximar la intersección, el proceso de interpolación es efectuado, con el método propuesto, como sigue.

El valor máximo de los valores absolutos de las curvaturas principales de las superficies  $S^1$  y  $S^2$  puede ser estimado como  $|\kappa^1| = 1.1233$  y  $|\kappa^2| = 0.8779$  respectivamente. Se puede también estimar, como fue sugerido en la Sección 3.4, que el seno del ángulo entre las superficies intersectadas no es menor que  $c = 0.342$ . Ahora, sea  $\epsilon = 0.05$  la tolerancia de error permitida. Para la primera etapa del método propuesto se toma, en este caso,  $\epsilon_c = \epsilon/25 = 0.002$ . En cada paso que pueda darse se procura la intersección de las dos superficies con el plano ortogonal al vector tangente en el punto donde se inicia el paso y a una distancia, en el sentido del trazo, de tal punto dada por  $d = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} \bar{l}$ , donde  $\bar{l} = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{0.002}{\bar{\kappa}}}$ , siendo  $\bar{\kappa} = \frac{|\kappa^1| + |\kappa^2|}{c}$ . En el caso en que la iteración de Newton involucrada no convergiera, se ha tomado la mitad de  $d$  y se ha vuelto a intentar el cálculo. Esto garantiza la convergencia de la iteración de Newton involucrada en la determinación del punto de intersección y resulta en un tamaño de paso  $\Delta s$  que permite satisfacer la tolerancia especificada. Esta primera etapa entrega 416 puntos de interpolación para la componente cerrada de la intersección. Para cada una de las cuatro componentes abiertas de la intersección la primera etapa entrega 23 puntos. Se tiene así una poligonal cerrada y cuatro poligonales abiertas

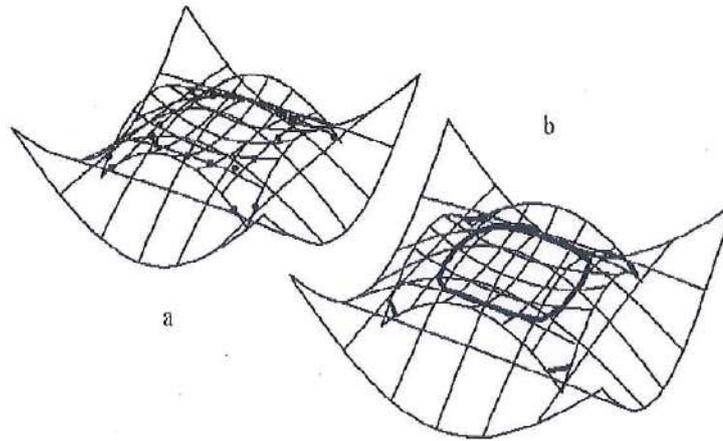


Figura 3.6: Interpolación lineal adaptativa.

congruentes que aproximan la curva de intersección con una muy segura tolerancia de error menor que  $\epsilon_c = \epsilon/25 = 0.002$  (pueden obtenerse resultados más exactos tomando un denominador de mayor valor).

La segunda etapa del método propuesto usará un tamaño de paso adaptativo inicial  $\Delta s_i$  de la mayor longitud posible. Esto es, en cada paso se comienza avanzando hasta el final del segmento en proceso. Si la desviación del interpolante construido en cada paso es mayor que la tolerancia de error  $\epsilon_a$  permitida lo que se hace, en este caso, es reducir a la mitad el valor de  $\Delta s_i$  y considerar su punto de interpolación asociado como ha sido descrito en la propuesta del algoritmo. Esto explica, por qué en algunos pasos el error podrá estar muy por debajo de la tolerancia especificada, dejando más puntos de interpolación de los necesarios para satisfacer la tolerancia.

Para el caso de interpolación lineal adaptativa, esta segunda etapa reduce a 14 el número de puntos de interpolación para la componente cerrada de la intersección y a 2 el número de puntos de interpolación para cada una de las cuatro componentes abiertas (ver Figura 3.6a). Al unir con segmentos de recta cada par de puntos consecutivos en cada una de las componentes de la intersección, se obtiene un interpolante lineal a trozos cerrado y cuatro interpolantes lineales a trozos abiertos cuya distancia a la poligonal (compuesta) construida en la primera etapa es menor que  $\epsilon - \epsilon_c = 0.048$  (ver Figura 3.6b). Por tanto, éste es un muy confiable interpolante lineal adaptativo que se encuentra dentro de la tolerancia prescrita  $\epsilon = 0.05$ . El gráfico de errores de uno de los interpolantes abiertos congruentes se muestra en la Figura 3.7. La Figura 3.8 muestra el gráfico de errores del interpolante cerrado.

Notar en esta Figura 3.8 que, no obstante haberse cumplido el objetivo de controlar el error con tamaño de paso adaptativo, aún permanecen más puntos de interpolación de

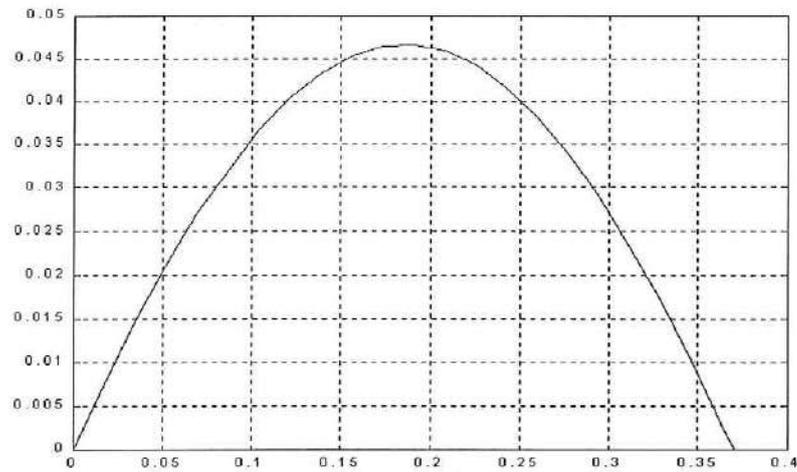


Figura 3.7: Gráfico de errores para la interpolación lineal adaptativa de uno de los segmentos abiertos congruentes.

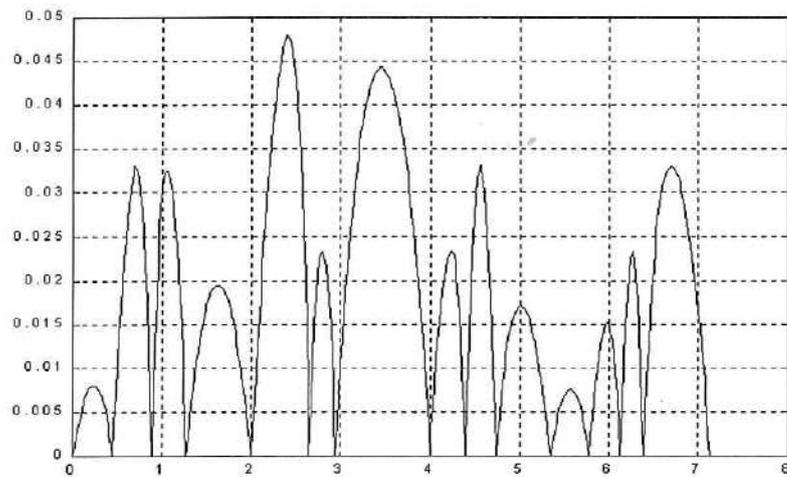


Figura 3.8: Gráfico de errores para la interpolación lineal adaptativa del segmento cerrado.

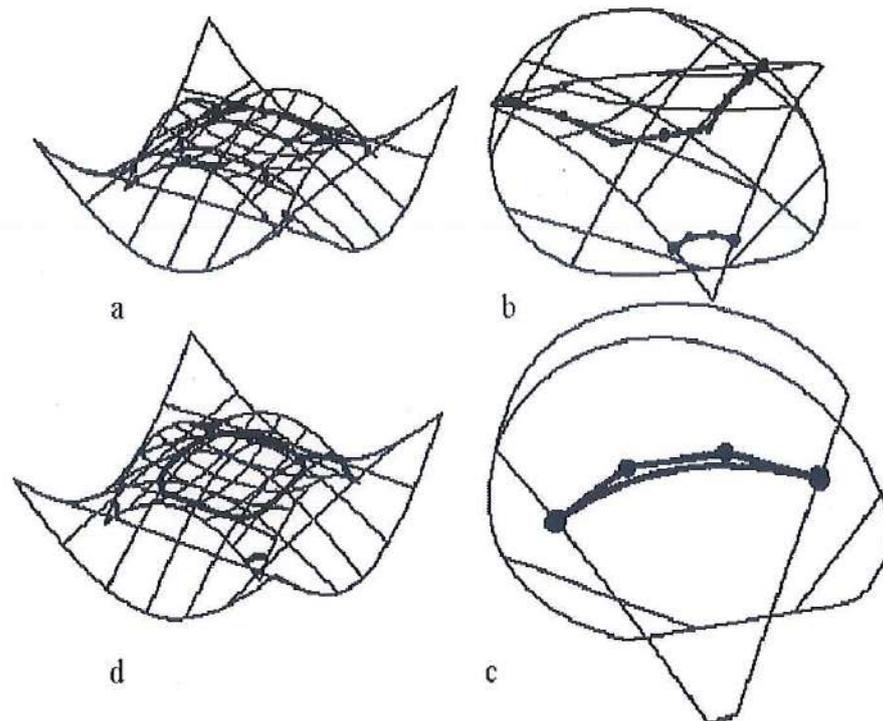


Figura 3.9: Interpolación cúbica adaptativa.

los necesarios. Esto sucede por haber reducido a la mitad, lo que resultó ser demasiada reducción, el tamaño de paso cada vez que se excedía la tolerancia. Procediendo a aumentar el tamaño de paso, como se comenta en la propuesta del algoritmo, cada vez que el error esté muy por debajo de la tolerancia, provocará mejores resultados en el sentido de la optimización del número de puntos de interpolación.

En el caso de interpolación cúbica adaptativa, esta segunda etapa reduce a 9 el número de puntos de interpolación para la componente cerrada de la intersección y a 2 el número de puntos de interpolación para cada una de las cuatro componentes abiertas (ver Figura 3.9a). Al unir con curvas de Bézier cúbicas cada par de puntos consecutivos en cada una de las componentes de la intersección (ver ampliaciones en Figuras 3.9b y 3.9c), se obtiene un interpolante cúbico a trozos cerrado y cuatro interpolantes cúbicos abiertos cuya distancia a la poligonal construida en la primera etapa es menor que  $\epsilon - \epsilon_c = 0.048$ . Se obtiene así un muy confiable interpolante cúbico adaptativo (ver Figura 3.9d), que se encuentra dentro de la tolerancia prescrita  $\epsilon = 0.05$ . La Figura 3.10 muestra el gráfico de errores de uno de los interpolantes abiertos congruentes y la Figura 3.11 el gráfico de errores del interpolante cerrado.

Comparando las Figuras 3.7 y 3.10 se observa la mejor aproximación que se consigue

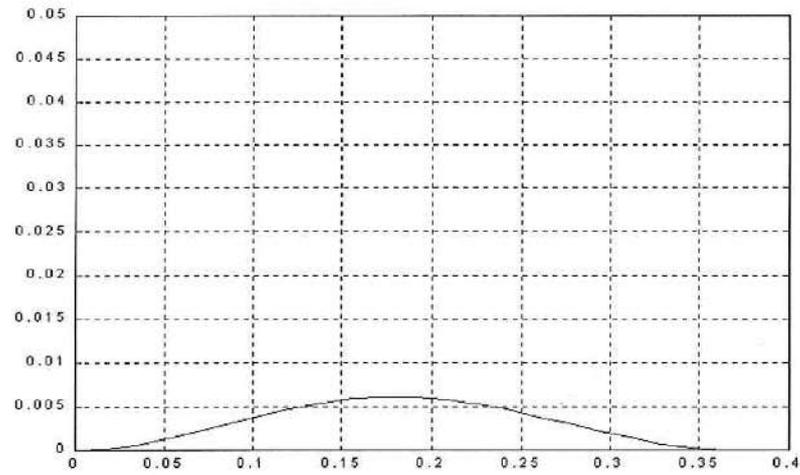


Figura 3.10: Gráfico de errores para la interpolación cúbica adaptativa de uno de los segmentos abiertos.

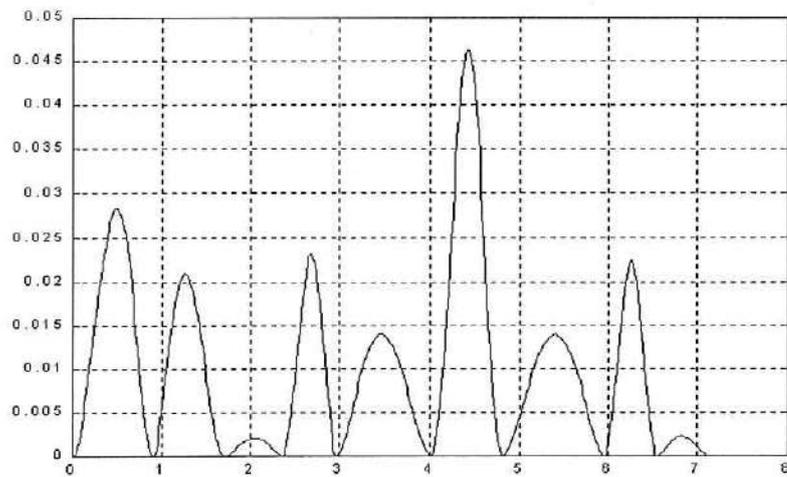


Figura 3.11: Gráfico de errores para la interpolación cúbica adaptativa del segmento cerrado.

en el caso cúbico. Es de esperar que con interpolantes de mayor grado la aproximación sea aún mejor.

### Aplicación 2

Intentando ser un poco más realista que la anterior, se muestra ahora la aplicación del método propuesto, en el cálculo de la curva de intersección de dos superficies de Bézier polinomiales (producto tensorial) con una tolerancia de error prefijada. La intersección de la superficie de Bézier polinomial con puntos de control dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,0} &= (-1, 1, 0), & \mathbf{b}_{1,0} &= (-3, 1, 10), & \mathbf{b}_{2,0} &= (3, 1, 10), & \mathbf{b}_{3,0} &= (1, 1, 0), \\ \mathbf{b}_{0,1} &= (-1, 6, 0), & \mathbf{b}_{1,1} &= (-3, 6, 10), & \mathbf{b}_{2,1} &= (3, 6, 10), & \mathbf{b}_{3,1} &= (1, 6, 0), \\ \mathbf{b}_{0,2} &= (-1, 11, 0), & \mathbf{b}_{1,2} &= (-3, 11, 10), & \mathbf{b}_{2,2} &= (3, 11, 10), & \mathbf{b}_{3,2} &= (1, 11, 10), \\ \mathbf{b}_{0,3} &= (-1, 16, 0), & \mathbf{b}_{1,3} &= (-3, 16, 10), & \mathbf{b}_{2,3} &= (3, 16, 10), & \mathbf{b}_{3,3} &= (1, 16, 0) \end{aligned}$$

y la superficie de Bézier polinomial con puntos de control dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,0} &= (-6, 0, -4), & \mathbf{b}_{1,0} &= (-6, 6, -4), & \mathbf{b}_{2,0} &= (6, 6, -4), & \mathbf{b}_{3,0} &= (6, 0, -4), \\ \mathbf{b}_{0,1} &= (-6, 0, 0), & \mathbf{b}_{1,1} &= (-6, 6, 0), & \mathbf{b}_{2,1} &= (6, 6, 0), & \mathbf{b}_{3,1} &= (6, 0, 0), \\ \mathbf{b}_{0,2} &= (-6, 0, 5), & \mathbf{b}_{1,2} &= (-6, 6, 5), & \mathbf{b}_{2,2} &= (6, 6, 5), & \mathbf{b}_{3,2} &= (6, 0, 5), \\ \mathbf{b}_{0,3} &= (-6, 0, 10), & \mathbf{b}_{1,3} &= (-6, 6, 10), & \mathbf{b}_{2,3} &= (6, 6, 10), & \mathbf{b}_{3,3} &= (6, 0, 10) \end{aligned}$$

constará en este caso de sólo una componente conexa abierta. Para aproximar la intersección, el proceso de interpolación es efectuado, con el método propuesto, como sigue.

El valor máximo de los valores absolutos de las curvaturas principales de las superficies  $S^1$  y  $S^2$  puede estimarse como  $|\kappa^1| = 1.667$  y  $|\kappa^2| = 0.271$  respectivamente. Se puede estimar, como fue sugerido en la Sección 3.4, que el seno del ángulo entre las superficies intersectadas no es menor que  $c = 0.9848$ . Sea  $\epsilon = 0.1$  la tolerancia de error permitida. Se toma para la primera etapa,  $\epsilon_c = \epsilon/25 = 0.004$ . Procediendo como se indica en la propuesta del algoritmo se logra un tamaño de paso  $\Delta s$  que permite satisfacer la tolerancia especificada. Esta primera etapa entrega 384 puntos de interpolación. Se tiene de esta manera una poligonal abierta que aproxima la curva de intersección con una muy segura tolerancia de error menor que  $\epsilon_c = \epsilon/25 = 0.004$ .

La segunda etapa del método propuesto usará un tamaño de paso adaptativo inicial  $\Delta s_i$  de la mayor longitud posible. Esto significa que en cada paso se comienza avanzando hasta el final del segmento en proceso. Si el error es mayor que  $\epsilon_a$ , se procede a reducir a la mitad el tamaño de paso y se considera su punto de interpolación asociado como ha sido descrito en la propuesta del algoritmo.

Para el caso de interpolación lineal adaptativa, esta segunda etapa reduce a 12 el número de puntos de interpolación (ver Figura 3.12). Al unir con segmentos de recta

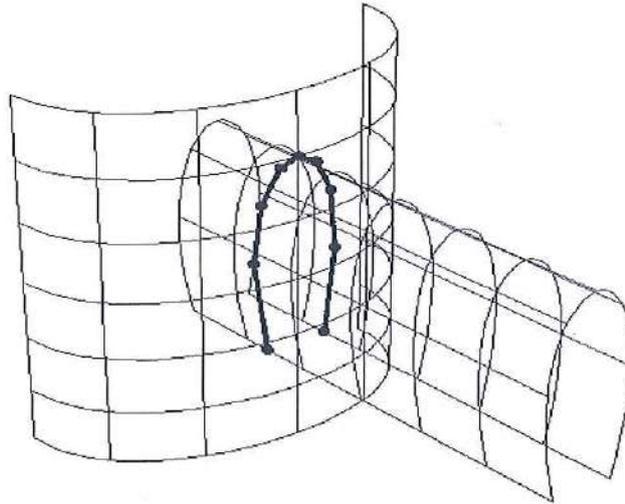


Figura 3.12: Interpolación lineal adaptativa.

cada par de puntos consecutivos en cada una de las componentes de la intersección, se obtiene un interpolante lineal a trozos abierto cuya distancia a la poligonal construida en la primera etapa es menor que  $\epsilon - \epsilon_c = 0.096$  (ver Figura 3.12). Por tanto, éste es un muy confiable interpolante lineal adaptativo que se encuentra dentro de la tolerancia prescrita  $\epsilon = 0.1$ . La Figura 3.13 muestra el gráfico de errores.

En el caso de interpolación cúbica adaptativa, esta segunda etapa reduce a 5 el número de puntos de interpolación (ver Figura 3.14). Al unir con curvas de Bézier cúbicas cada par de puntos consecutivos (ver Figura 3.14), se obtiene un interpolante cúbico a trozos abierto cuya distancia a la poligonal construida en la primera etapa es menor que  $\epsilon - \epsilon_c = 0.096$ . Se obtiene así un muy confiable interpolante cúbico adaptativo (ver Figura 3.14), que se encuentra dentro de la tolerancia prescrita  $\epsilon = 0.1$ . La Figura 3.15 muestra el gráfico de errores.

Aunque se ha cumplido el objetivo de controlar el error con tamaño de paso adaptativo, comentarios similares a los hechos para la anterior aplicación referentes al exceso de puntos de interpolación son también pertinentes en esta aplicación.

A fin de reducir al mínimo posible el número de puntos de interpolación, se muestra finalmente la optimización del proceso de interpolación exigiendo que la desviación máxima  $\delta$  entre el interpolante adaptativo y la poligonal satisfaga la relación  $0.7\epsilon_a < \delta < \epsilon_a$ . Para el caso de interpolación lineal adaptativa, este proceso consigue reducir a 9 (no muchos menos) el número de puntos de interpolación (ver Figura 3.16). La Figura 3.17 muestra el gráfico de errores. En el caso de interpolación cúbica adaptativa, se reduce a 4 (sólo uno menos) el número de puntos de interpolación (ver Figura

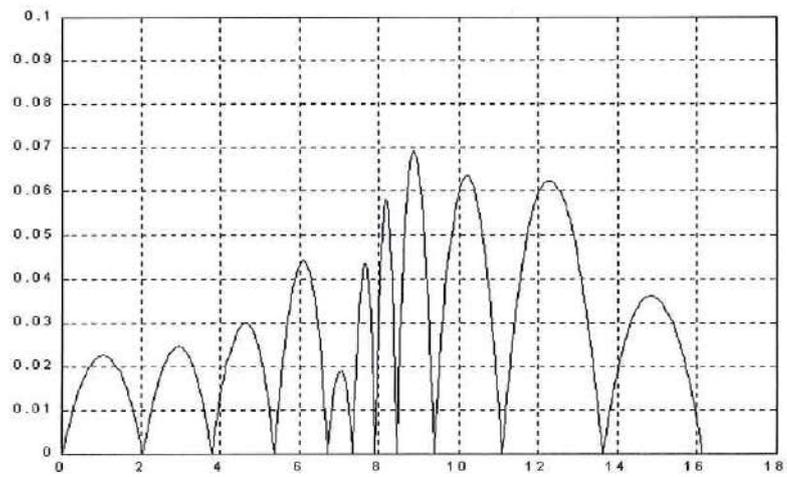


Figura 3.13: Gráfico de errores para la interpolación lineal adaptativa.

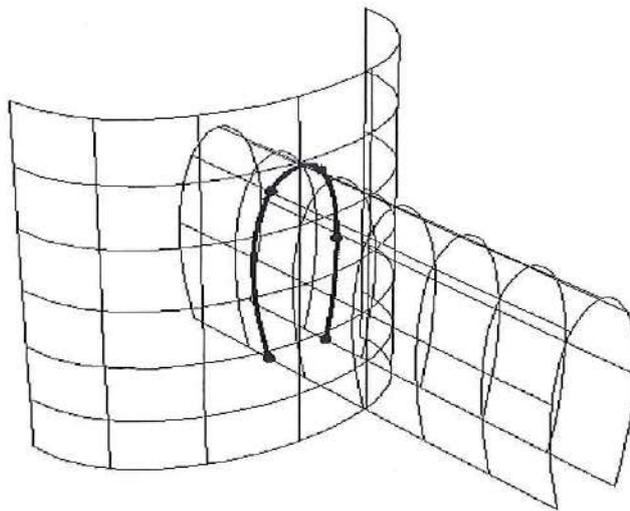


Figura 3.14: Interpolación cúbica adaptativa.

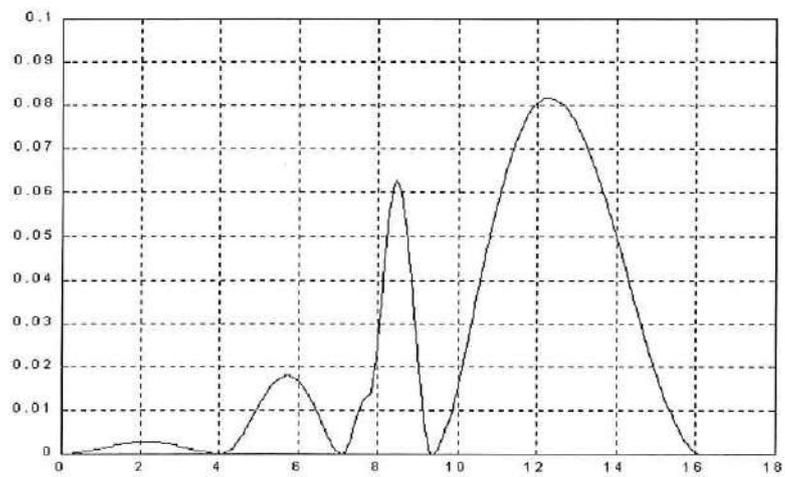


Figura 3.15: Gráfico de errores para la interpolación cúbica adaptativa.

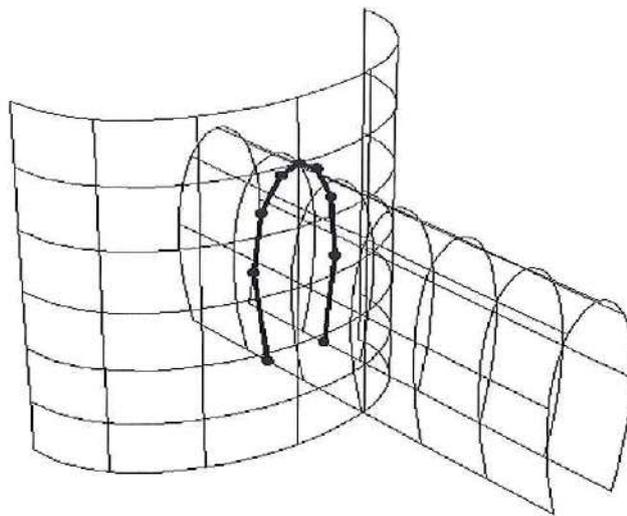


Figura 3.16: Interpolación lineal adaptativa óptima.

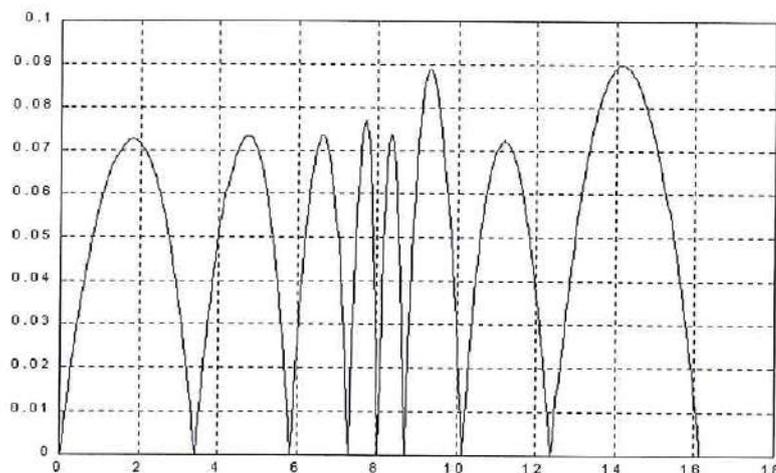


Figura 3.17: Gráfico de errores para la interpolación lineal adaptativa óptima.

3.18). El gráfico de errores se muestra en la Figura 3.19. Notar que la reducción no es muy drástica. Esto sucede por estar cerca del óptimo. Observar que en la interpolación cúbica, el último paso no logra satisfacer la exigencia de que la desviación máxima  $\delta$  esté entre  $0.7\epsilon_a$  y  $\epsilon_a$ , lo que pudo también suceder en el caso de la interpolación lineal. Esto se debe a que se ha llegado al final del segmento de la curva, de manera que ya no es posible hacer más eficiente el tamaño de paso.

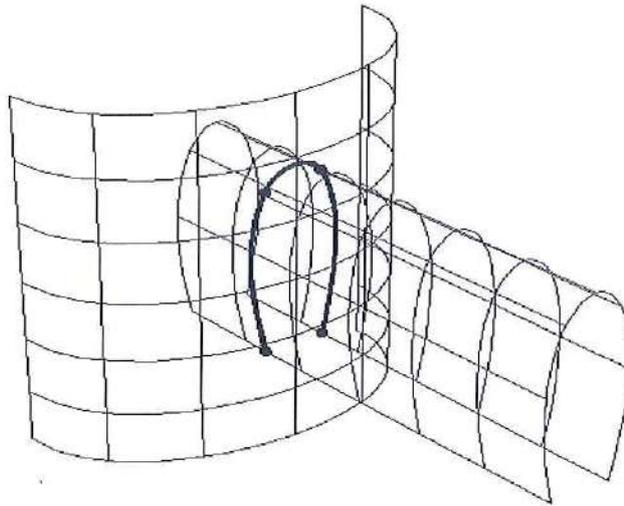


Figura 3.18: Interpolación cúbica adaptativa óptima.

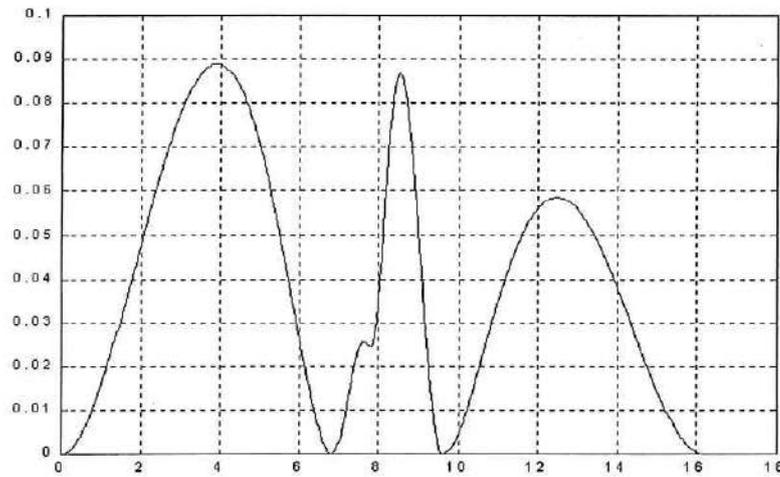


Figura 3.19: Gráfico de errores para la interpolación cúbica adaptativa óptima.

## Conclusiones

Se ha estudiado y propuesto un método para optimizar el número de puntos de interpolación en la intersección de superficies con interpolantes lineales y cúbicos, susceptible de ser generalizado a otros tipos de interpolantes, con una tolerancia de error fijada por condiciones de manufactura.

Los métodos con tamaño de paso determinado a partir de la información local proporcionada por las superficies presentan problemas en controlar confiablemente el error de la aproximación generada. Existe el riesgo de que el tamaño de paso sea demasiado grande como para que se puedan satisfacer las tolerancias. Existe siempre la posibilidad de que la curva presente cambios bruscos en su curvatura, la que sólo es evaluada en un conjunto finito de puntos, por lo que no se dispone de información de lo que pueda pasar con la curva en sus puntos intermedios. Podría suceder que la curva real esté muy alejada del interpolante.

Se percibieron importantes propiedades del círculo osculador. Ellas permiten afirmar que la proyección ortogonal de cualquier curva sobre su plano osculador en un punto está, localmente, en el exterior del correspondiente círculo osculador sólo en el caso en que la curvatura tenga un valor mínimo débil o máximo en tal punto. En los otros casos, corta tangencialmente al círculo osculador o, peor aún para los fines de control del error, está en el interior del círculo osculador. Estas propiedades del círculo osculador, a la vez de agravar la situación, aclaran completamente la razón por la cual los métodos conocidos tienen dificultades en satisfacer las tolerancias prefijadas.

Surge así la necesidad de encontrar una cota superior razonablemente global para la curvatura de la intersección. Esto se logra haciendo uso de las curvaturas normales de la curva de intersección sobre cada una de las superficies intersectantes, obteniéndose con esto una manera de estimar el error del proceso de interpolación lineal de la intersección.

En base al estimador para la curvatura, ha sido posible configurar un esquema de trazado para generar puntos de la intersección que al ser posteriormente interpolados producirán poligonales que aproximan a la intersección con una tolerancia dada. Con argumentos esencialmente geométricos y topológicos se logra un tamaño de paso adecuado para este fin. Esto produce un conjunto de segmentos, en la forma de secuencias

de puntos, que son porciones de las componentes conexas disjuntas que forman la intersección. Al configurar, en la forma de secuencias de puntos, tales componentes disjuntas, se tendrá un conjunto de poligonales disjuntas. El problema de control del error para superficies con intersección no singular queda así resuelto.

Para un óptimo proceso de mecanizado es ahora posible reducir el número de puntos de interpolación que participan en la construcción de las poligonales disjuntas a fin de obtener interpolantes con tamaño de paso adaptativo y dentro de la tolerancia dada. Se mostró que hay diversas maneras de hacer esto y que esencialmente se trata de un proceso tipo predictor-corrector. Esto permitirá entregar al centro de mecanizado el menor número posible de puntos de interpolación.

A partir de los resultados obtenidos y confirmados por las aplicaciones, se observa que, en la interpolación lineal adaptativa, lo que se logra es descartar aquellos puntos de interpolación que son casi colineales. Esto conduce a poder definir una representación lineal por partes óptima de la curva a ser mecanizada que aproxima a la intersección. En la interpolación cúbica adaptativa se observa que la reducción del número de puntos de interpolación es aún más notoria, con la ventaja adicional de que el interpolante cúbico tiende a aproximar mejor que el lineal a la curva de intersección. Más aún, la representación cúbica por partes óptima a la que conduce la interpolación cúbica adaptativa presenta continuidad geométrica de clase  $C^1$ , a diferencia del caso lineal que es de clase  $C^0$ . Naturalmente, al aumentar el grado de los polinomios interpolantes, las cosas serán aún mejores. Incluso puede pensarse en la posibilidad de otros tipos de interpolantes.

Se consigue así proponer un método, y el consecuente algoritmo, de trazado capaz de controlar el error de la aproximación generada y con tamaño de paso adaptativo. El método es particularmente apropiado para la evaluación de fronteras en el modelado de sólidos y para los procesos de manufactura asistida por computador realizados con máquinas de control numérico.

# Apéndice A

## Geometría Diferencial de la Intersección

Se presentan aquí procedimientos para calcular las propiedades de geometría diferencial de las curvas de intersección de dos superficies paramétricas cuya intersección es no singular. Se muestra cómo calcular el triedro de Frenet, la curvatura, la torsión, así como las derivadas de orden superior de estos objetos.

Dada una curva 3D  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$  parametrizada por longitud de arco  $s$ , de la geometría diferencial de curvas [11], se tiene que  $\mathbf{c}^{(1)} = \mathbf{t}$  es el vector tangente unitario de  $\mathbf{c}(s)$  en  $s$  y  $\mathbf{c}^{(2)} = \kappa\mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{n}$  y  $\kappa$  son el vector normal y la curvatura respectivamente, de  $\mathbf{c}(s)$  en  $s$ . El vector binormal  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$  es tal que  $\mathbf{b}^{(1)} = \tau\mathbf{n}$ , siendo  $\tau$  la torsión de  $\mathbf{c}(s)$  en  $s$ . El triedro  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ , constituye una base ordenada ortonormal orientada positivamente, la base de Frenet, la que satisface el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, las ecuaciones de Frenet

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^{(1)} &= \kappa\mathbf{n}, \\ \mathbf{n}^{(1)} &= -\kappa\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}, \\ \mathbf{b}^{(1)} &= \tau\mathbf{n}.\end{aligned}$$

Diferenciando con respecto a  $s$  y expresando en términos de la base de Frenet, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^{(3)} &= -\kappa^2\mathbf{t} + \kappa^{(1)}\mathbf{n} - \kappa\tau\mathbf{b}, \\ \mathbf{c}^{(4)} &= -3\kappa\kappa^{(1)}\mathbf{t} + (\kappa^{(2)} - \kappa\tau^2 - \kappa^3)\mathbf{n} + (-2\kappa^{(1)}\tau - \kappa\tau^{(1)})\mathbf{b},\end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Ye et al. [33] proponen el siguiente procedimiento para calcular la geometría diferencial de la curva de intersección de dos superficies.

Dadas las superficies intersectantes  $S^1(u_1, v_1)$  y  $S^2(u_2, v_2)$ ,

$$\mathbf{t} = \pm \frac{\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2}{|\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2|}$$

es el vector tangente unitario de la curva de intersección, el signo depende del sentido del trazo. Naturalmente  $\mathbf{N}^1 \cdot \mathbf{N}^2 = \cos \theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo que forman los vectores normales unitarios  $\mathbf{N}^1$  y  $\mathbf{N}^2$  de las superficies  $S^1$  y  $S^2$  respectivamente. Más aún, para ciertos escalares  $b, c, \alpha, \beta$ , se tiene que

$$b\mathbf{n} + c\mathbf{b} = \alpha\mathbf{N}^1 + \beta\mathbf{N}^2.$$

Usando el producto escalar de la primera derivada de  $\mathbf{c}$  como una curva sobre la superficie  $S^i$  por  $\mathbf{S}_{u_i}^i$  y por  $\mathbf{S}_{v_i}^i$  respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned} E^i u_i^{(1)} + F^i v_i^{(1)} &= \mathbf{S}_{u_i}^i \cdot \mathbf{c}^{(1)}, \\ F^i u_i^{(1)} + G^i v_i^{(1)} &= \mathbf{S}_{v_i}^i \cdot \mathbf{c}^{(1)}, \end{aligned}$$

donde  $E^i, F^i$  y  $G^i$  son los coeficientes de la primera forma cuadrática de la superficie  $S^i$ . Así, se tiene  $u_i^{(1)}$  y  $v_i^{(1)}$ . Usando el producto escalar de la segunda derivada de  $\mathbf{c}$  como una curva sobre la superficie  $S^i$  por  $\mathbf{N}^i$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \kappa_{n_i}^i &= \mathbf{c}^{(2)} \cdot \mathbf{N}^i \\ &= e^i (u_i^{(1)})^2 + 2f^i u_i^{(1)} v_i^{(1)} + g^i (v_i^{(1)})^2, \end{aligned}$$

donde  $e^i, f^i$  y  $g^i$  son los coeficientes de la segunda forma cuadrática de la superficie  $S^i$ . Desde que  $\mathbf{c}^{(2)} = \kappa\mathbf{n} = \alpha_1\mathbf{N}^1 + \beta_1\mathbf{N}^2$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha_1 + (\cos \theta)\beta_1 &= \mathbf{c}^{(2)} \cdot \mathbf{N}^1 = \kappa_{n_1}^1, \\ (\cos \theta)\alpha_1 + \beta_1 &= \mathbf{c}^{(2)} \cdot \mathbf{N}^2 = \kappa_{n_1}^2. \end{aligned}$$

De modo que,

$$\mathbf{c}^{(2)} = \frac{\kappa_{n_1}^1 - \kappa_{n_1}^2 \cos \theta}{\text{sen}^2 \theta} \mathbf{N}^1 + \frac{\kappa_{n_1}^2 - \kappa_{n_1}^1 \cos \theta}{\text{sen}^2 \theta} \mathbf{N}^2$$

y  $\kappa = |\mathbf{c}^{(2)}|$ .

Habiendo calculado  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{c}^{(2)}$  y  $\kappa$ , es ahora posible calcular  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{c}^{(2)}}{\kappa}$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ .

Usando el producto escalar de la segunda derivada de  $\mathbf{c}$  como una curva sobre la superficie  $S^i$  por  $\mathbf{S}_{u_i}^i$  y por  $\mathbf{S}_{v_i}^i$  respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned} E^i u_i^{(2)} + F^i v_i^{(2)} &= \mathbf{S}_{u_i}^i \cdot \mathbf{c}^{(2)} - \frac{E_{u_i}^i}{2} (u_i^{(1)})^2 - E_{v_i}^i u_i^{(1)} v_i^{(1)} - \left( F_{v_i}^i - \frac{G_{v_i}^i}{2} \right) (v_i^{(1)})^2, \\ F^i u_i^{(2)} + G^i v_i^{(2)} &= \mathbf{S}_{v_i}^i \cdot \mathbf{c}^{(2)} - \left( F_{u_i}^i - \frac{E_{v_i}^i}{2} \right) (u_i^{(1)})^2 - G_{u_i}^i u_i^{(1)} v_i^{(1)} - \frac{G_{v_i}^i}{2} (v_i^{(1)})^2. \end{aligned}$$

Así, se tiene  $u_i^{(2)}$  y  $v_i^{(2)}$ . Usando el producto escalar de la tercera derivada de  $\mathbf{c}$  como una curva sobre la superficie  $\mathbf{S}^i$  por  $\mathbf{N}^i$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathbf{n}_2}^i &= \mathbf{c}^{(3)} \cdot \mathbf{N}^i \\ &= 3 \left( e^i u_i^{(1)} u_i^{(2)} + f^i \left( u_i^{(2)} v_i^{(1)} + u_i^{(1)} v_i^{(2)} \right) + g^i v_i^{(1)} v_i^{(2)} \right) + \\ &\quad \mathbf{S}_{u_i u_i u_i}^i \cdot \mathbf{N}^i \left( u_i^{(1)} \right)^3 + 3 \mathbf{S}_{u_i u_i v_i}^i \cdot \mathbf{N}^i \left( u_i^{(1)} \right)^2 v_i^{(1)} + \\ &\quad 3 \mathbf{S}_{u_i v_i v_i}^i \cdot \mathbf{N}^i u_i^{(1)} \left( v_i^{(1)} \right)^2 + \mathbf{S}_{v_i v_i v_i}^i \cdot \mathbf{N}^i \left( v_i^{(1)} \right)^3.\end{aligned}$$

Desde que  $\mathbf{c}^{(3)} = -\kappa^2 \mathbf{t} + \kappa^{(1)} \mathbf{n} - \kappa \tau \mathbf{b} = -\kappa^2 \mathbf{t} + \alpha_2 \mathbf{N}^1 + \beta_2 \mathbf{N}^2$ , se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha_2 + (\cos \theta) \beta_2 &= \mathbf{c}^{(3)} \cdot \mathbf{N}^1 = \kappa_{\mathbf{n}_2}^1, \\ (\cos \theta) \alpha_2 + \beta_2 &= \mathbf{c}^{(3)} \cdot \mathbf{N}^2 = \kappa_{\mathbf{n}_2}^2.\end{aligned}$$

De modo que,

$$\mathbf{c}^{(3)} = -\kappa^2 \mathbf{t} + \frac{\kappa_{\mathbf{n}_2}^1 - \kappa_{\mathbf{n}_2}^2 \cos \theta}{\text{sen}^2 \theta} \mathbf{N}^1 + \frac{\kappa_{\mathbf{n}_2}^2 - \kappa_{\mathbf{n}_2}^1 \cos \theta}{\text{sen}^2 \theta} \mathbf{N}^2.$$

Ahora, es posible calcular  $\tau = -\frac{\mathbf{c}^{(3)} \cdot \mathbf{b}}{\kappa}$  y  $\kappa^{(1)} = \mathbf{c}^{(3)} \cdot \mathbf{n}$ .

Así, en la suposición de que ya se ha evaluado  $\mathbf{c}^{(j)}$  para  $j = 1(1)m - 1$  y  $u_i^{(j-1)}$ ,  $v_i^{(j-1)}$  para  $j = 2(1)m - 1$ , el proceso recursivo sería, en resumidas cuentas, como sigue:

- Calcular  $u_i^{(m-1)}$ ,  $v_i^{(m-1)}$ , resolviendo el sistema

$$\begin{aligned}E^i u_i^{(m-1)} + F^i v_i^{(m-1)} &= \mathbf{S}_{u_i}^i \cdot \mathbf{c}^{m-1} + \\ &\quad (\mathbf{S}^i \text{ y derivadas de } u_i, v_i \text{ hasta orden } m-2) \\ F^i u_i^{(m-1)} + G^i v_i^{(m-1)} &= \mathbf{S}_{v_i}^i \cdot \mathbf{c}^{m-1} + \\ &\quad (\mathbf{S}^i \text{ y derivadas de } u_i, v_i \text{ hasta orden } m-2)\end{aligned}$$

- Usando el producto escalar de la derivada de orden  $m$  de  $\mathbf{c}$  expresada como curva sobre la superficie  $\mathbf{S}^i$  por  $\mathbf{N}^i$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathbf{n}_{m-1}}^i &= \mathbf{c}^{(m)} \cdot \mathbf{N}^i \\ &= (\mathbf{S}^i \text{ y derivadas de } u_i, v_i \text{ hasta orden } m-1).\end{aligned}$$

- Desde que  $\mathbf{c}^{(m)} = a_{m-1} \mathbf{t} + b_{m-1} \mathbf{n} + c_{m-1} \mathbf{b}$  y  $b_{m-1} \mathbf{n} + c_{m-1} \mathbf{b} = \alpha_{m-1} \mathbf{N}^1 + \beta_{m-1} \mathbf{N}^2$ , resolviendo el sistema

$$\begin{aligned}\alpha_{m-1} + (\cos \theta) \beta_{m-1} &= \mathbf{c}^{(m)} \cdot \mathbf{N}^1 = \kappa_{\mathbf{n}_{m-1}}^1, \\ (\cos \theta) \alpha_{m-1} + \beta_{m-1} &= \mathbf{c}^{(m)} \cdot \mathbf{N}^2 = \kappa_{\mathbf{n}_{m-1}}^2.\end{aligned}$$

se tiene

$$\mathbf{c}^{(m)} = a_{m-1} \mathbf{t} + \frac{\kappa_{\mathbf{n}_{m-1}}^1 - \kappa_{\mathbf{n}_{m-1}}^2 \cos \theta}{\text{sen}^2 \theta} \mathbf{N}^1 + \frac{\kappa_{\mathbf{n}_{m-1}}^2 - \kappa_{\mathbf{n}_{m-1}}^1 \cos \theta}{\text{sen}^2 \theta} \mathbf{N}^2.$$

## Apéndice B

# La Exponencial de una Matriz

Se presenta un método tipo Euler para calcular la exponencial de una matriz. El enfoque no requiere resolver una secuencia de sistemas lineales y sólo usa aritmética real. El algoritmo es fácil de implementar usando cálculo simbólico, tal como Maple y Mathematica.

### B.1 Introducción

Sea  $A$  una matriz real de orden  $n$ . Es conocido del Método de Euler que para obtener un conjunto fundamental de soluciones de

$$\mathbf{x}^{(1)} = A\mathbf{x}, \quad (\text{B.1})$$

basta construir un conjunto de soluciones linealmente independientes asociadas a cada autovalor de  $A$ .

Por otro lado, se observa que las soluciones de (B.1) también satisfacen

$$\mathbf{x}^{(1)} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = A^2\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = A^3\mathbf{x}, \quad \dots$$

esto es, en general  $\mathbf{x}^{(m)} = A^m\mathbf{x}$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Además, la conmutatividad de los operadores diferenciales con coeficientes constantes permite ver que si  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces el efecto del operador diferencial de primer orden  $\mathcal{L} = D - \alpha I$  sobre  $\mathbf{x}$  es dado por

$$\mathcal{L}^m \mathbf{x} = \mathcal{A}^m \mathbf{x} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \text{donde} \quad \mathcal{A} = A - \alpha I.$$

Análogamente, si  $(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2$ , entonces la acción repetida del operador de segundo orden  $\mathcal{L} = (D - \alpha I)^2 + \omega^2 I$  sobre  $\mathbf{x}$  es

$$\mathcal{L}^m \mathbf{x} = \mathcal{A}^m \mathbf{x} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \text{donde} \quad \mathcal{A} = (A - \alpha I)^2 + \omega^2 I.$$

En este apéndice, se responde positivamente, para ambos casos de  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{A}$ , la pregunta natural que surge de las dos últimas identidades, ésta es *si es posible construir soluciones linealmente independientes de (B.1) a partir de soluciones de la ecuación*

$$\mathcal{L}^m \mathbf{y} = \mathcal{A}^m \mathbf{y}, \quad (\text{B.2})$$

cuando  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{A}$  son construidas con los autovalores de  $A$ .

En la Sección B.2, se establece la correspondencia entre las soluciones de (B.1) y (B.2), que se resuelve siguiendo esencialmente el método de variación de parámetros.

En la Sección B.3, se muestran dos nuevas fórmulas de representación para estas soluciones (ver Teoremas B.3.1 y B.3.2). A diferencia del clásico Método de Euler, las fórmulas propuestas en este apéndice sólo involucran aritmética real y no requieren resolver una secuencia de sistemas lineales.

Finalmente en la Sección B.4, se establecen los algoritmos derivados a partir de las referidas fórmulas de representación. Se proporcionan allí dos ejemplos por medio de los cuales: (i) se compara el clásico Método de Euler con el primer algoritmo y (ii) se muestra el cálculo de la exponencial de una matriz aplicando ambos algoritmos, vía Cálculo Simbólico.

En lo que sigue,  $D$  representa el operador de derivación aplicado a funciones escalares o vectoriales, y dependiendo del contexto,  $I$  denota el operador identidad o la matriz identidad.

## B.2 Preliminares

En esta sección se obtiene la factorización fundamental que permite transformar las soluciones de (B.2) en soluciones de (B.1). Los lemas siguientes resuelven (B.2) así como también el problema de la independencia lineal de las soluciones. El único conocimiento previo requerido de ecuaciones diferenciales ordinarias es la teoría elemental de operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes.

**Lema B.2.1 (Factorización fundamental).**

1. Sea  $\mathcal{L} = D - \alpha I$ . Entonces para toda función  $\mathbf{y}$  de clase  $C^m$  se cumple que

$$(\mathcal{L}^m - \mathcal{A}^m)\mathbf{y} = (D - A)(\mathcal{L}^{m-1} + \mathcal{L}^{m-2}A + \cdots + \mathcal{L}A^{m-2} + A^{m-1})\mathbf{y},$$

donde  $\mathcal{A} = A - \alpha I$ .

2. Sea  $\mathcal{L} = (D - \alpha I)^2 + \omega^2 I$ . Entonces para toda función  $\mathbf{y}$  de clase  $C^{2m}$  se cumple que

$$(\mathcal{L}^m - \mathcal{A}^m)\mathbf{y} = (D - A)(D - \alpha I + \tilde{A})(\mathcal{L}^{m-1} + \mathcal{L}^{m-2}A + \cdots + \mathcal{L}A^{m-2} + A^{m-1})\mathbf{y},$$

donde  $\mathcal{A} = (A - \alpha I)^2 + \omega^2 I$  y  $\tilde{\mathcal{A}} = A - \alpha I$ .

*Prueba.* Como en ambos casos  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{A}$  conmutan, se tiene que

$$\mathcal{L}^m - \mathcal{A}^m = (\mathcal{L} - \mathcal{A})(\mathcal{L}^{m-1} + \mathcal{L}^{m-2}\mathcal{A} + \dots + \mathcal{L}\mathcal{A}^{m-2} + \mathcal{A}^{m-1}).$$

Entonces, para el primer caso notar que  $\mathcal{L} - \mathcal{A} = D - A$ , mientras que, en el segundo caso se tiene que  $\mathcal{L} - \mathcal{A} = (D - \alpha I)^2 - (A - \alpha I)^2$ .  $\square$

Así pues, el lema anterior dice cómo construir soluciones de la ecuación (B.1), es decir, de  $(D - A)\mathbf{x} = 0$  a partir de  $(\mathcal{L}^m - \mathcal{A}^m)\mathbf{y} = 0$ .

Por otro lado, el siguiente lema indica cómo resolver esta última ecuación.

**Lema B.2.2** *Siendo  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $p$  y  $q$  dos funciones de clase  $C^m$  y  $C^{2m}$ , respectivamente, se tiene lo siguiente:*

1. La  $m$ -iteración de  $\mathcal{L} = D - \alpha I$  sobre  $\mathbf{y}(t) = e^{\alpha t}p(t)\mathbf{v}$  es

$$\mathcal{L}^m(e^{\alpha t}p(t)\mathbf{v}) = e^{\alpha t}D^m p(t)\mathbf{v}.$$

2. La  $m$ -iteración de  $\mathcal{L} = (D - \alpha I)^2 + \omega^2 I$  sobre  $\mathbf{y}(t) = e^{\alpha t}q(t)\mathbf{v}$  es

$$\mathcal{L}^m(e^{\alpha t}q(t)\mathbf{v}) = e^{\alpha t}(D^2 + \omega^2)^m q(t)\mathbf{v}.$$

*Prueba.* Asumir que el lema se cumple para  $m - 1$ . Se sigue que

$$\mathcal{L}^m(e^{\alpha t}p(t)\mathbf{v}) = \mathcal{L}^{m-1}(e^{\alpha t}Dp(t)\mathbf{v}) = e^{\alpha t}D^m p(t)\mathbf{v},$$

y análogamente para la segunda identidad. Así, sólo debe verificarse el caso  $m = 1$ . Razonando sobre cada componente de  $\mathcal{L}\mathbf{y}$ , basta probar el lema para el caso escalar. Para probar la primera identidad simplemente se escoge  $f(t) = e^{\alpha t}p(t)$  en  $(D - \alpha)f(t) = e^{\alpha t}De^{-\alpha t}f(t)$ . En el segundo caso, se debe usar la factorización  $(D - \alpha)^2 f(t) = e^{\alpha t}D^2 e^{-\alpha t}f(t)$  y escoger la función  $f(t) = e^{\alpha t}q(t)$  para obtener  $((D - \alpha)^2 + \omega^2)f(t) = e^{\alpha t}(D^2 + \omega^2)q(t)$ .  $\square$

Ahora, la construcción de soluciones de la ecuación  $(\mathcal{L}^m - \mathcal{A}^m)\mathbf{y} = 0$  resulta evidente. En efecto, observando el lado derecho de las identidades en el lema anterior, se debe escoger  $p(t)$  recordando que  $D^k$  aniquila las funciones polinomiales hasta el grado  $k - 1$ . Para escoger  $q(t)$  en el segundo caso, recordar que  $(D^2 + \omega^2)^k$  aniquila los productos de funciones polinomiales hasta el grado  $k - 1$  por las funciones circulares  $\cos \omega t$  o  $\sin \omega t$ . Obviamente, se debe escoger  $\mathbf{v} \in \text{Ker } \mathcal{A}^m$ .

Para abordar el problema de la independencia lineal de las soluciones, se requiere del siguiente lema.

**Lema B.2.3** Si  $\omega \neq 0$  y  $q(t) = t^{m-1} \cos \omega t$ , entonces

$$\left\{ (D^2 + \omega^2)^k q(t), (D^2 + \omega^2)^k Dq(t) \right\}_{k=0}^{m-1}$$

es una base del espacio solución  $\text{Ker}(D^2 + \omega^2)^m$ .

*Prueba.* Notar que  $(D^2 + \omega^2)^{m-k}$  es el aniquilador de  $(D^2 + \omega^2)^k q(t)$  y de su derivada. Además, se tiene que  $\dim \text{Ker}(D^2 + \omega^2)^r = 2r$ .  $\square$

Finalmente, se debe explicitar las funciones base definidas en el lema anterior.

**Lema B.2.4** Sean  $y \in \text{Ker}(D^2 + \omega^2)$  y  $p$  una función de clase  $C^{2m}$ . Entonces

$$1. (D^2 + \omega^2)^k p y = \sum_{r=0}^k a_r^k D^{2k-r} p D^r y, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$2. (D^2 + \omega^2)^k D p y = \sum_{r=0}^{k+1} b_r^{k+1} D^{2k+1-r} p D^r y, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

donde  $a_r^k = \binom{k}{r} 2^r$ ,  $b_0^{k+1} = 1$ ,  $b_{k+1}^{k+1} = 2^k$  y  $b_r^{k+1} = a_r^k + a_{r-1}^k$  ( $r = 1, \dots, k$ ).

*Prueba.* La segunda identidad se sigue de la primera. En efecto,

$$(D^2 + \omega^2)^k D p y = D(D^2 + \omega^2)^k p y.$$

La primera identidad es deducida por inducción, notando que

$$(i) (D^2 + \omega^2) p y = 2(Dp)(Dy) + y D^2 p, \quad (ii) D^r y \in \text{Ker}(D^2 + \omega^2)$$

y usando que  $\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$ .  $\square$

### B.3 Fórmulas de Representación de Soluciones

En todo el resto de esta sección el lector debe tener en mente los siguientes bien conocidos resultados (ver, por ejemplo, [4]):

- Si  $\alpha$  es un autovalor real de  $A$ , de multiplicidad  $m$ , entonces

$$\dim \text{Ker}(A - \alpha I)^m = m.$$

- Si  $\alpha \pm i\omega$  son autovalores complejos conjugados de  $A$ , de multiplicidad  $m$ , entonces

$$\dim \text{Ker}((A - \alpha I)^2 + \omega^2 I)^m = 2m.$$

La fórmula de representación para soluciones asociadas a autovalores reales es presentada en el Teorema B.3.1 y para el caso complejo en el Teorema B.3.2. Los algoritmos derivados a partir de estos resultados serán presentados en la Sección B.4.

### B.3.1 Autovalores Reales

Como es bien conocido, soluciones asociadas a autovalores reales  $\alpha$ , de multiplicidad  $m$ , pueden escribirse en función de autovectores generalizados, considerando, como coeficientes variables, algunos elementos del espacio solución  $\text{Ker}(D - \alpha)^m$ . Algunos de estos métodos son discutidos en [23]. En el siguiente teorema se presenta una nueva fórmula de representación de estas soluciones. Desde que el autovalor es real, se debe tomar  $\mathcal{L} = D - \alpha I$  y  $\mathcal{A} = A - \alpha I$ .

**Teorema B.3.1** *Si  $\alpha$  es un autovalor real de  $A$ , de multiplicidad  $m$ , y  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  es una base del autoespacio generalizado  $\text{Ker} \mathcal{A}^m$ , entonces  $m$  soluciones linealmente independientes asociadas a este autovalor son dadas por*

$$\mathbf{x}_j(t) = e^{\alpha t} P(t) \mathbf{v}_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

donde

$$P(t) = I + t\mathcal{A} + \frac{t^2}{2}\mathcal{A}^2 + \dots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\mathcal{A}^{m-2} + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\mathcal{A}^{m-1}. \quad (\text{B.3})$$

*Prueba.* Escoger un vector base  $\mathbf{v} \in \text{Ker} \mathcal{A}^m$  y construir la función  $\mathbf{y}(t) = e^{\alpha t} p(t) \mathbf{v}$  con  $p(t) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$ . Entonces  $\mathcal{L}^m \mathbf{y}(t) = e^{\alpha t} D^m p(t) \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , y consecuentemente  $\mathbf{y} \in \text{Ker}(\mathcal{L}^m - \mathcal{A}^m)$ . Ahora, usando la factorización del Lema B.2.1, se obtiene

$$\mathbf{0} = (D - A)(\mathcal{L}^{m-1} + \mathcal{L}^{m-2}\mathcal{A} + \dots + \mathcal{L}\mathcal{A}^{m-2} + \mathcal{A}^{m-1})\mathbf{y}.$$

Por tanto, el Lema B.2.2 permite concluir que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (\mathcal{L}^{m-1} + \mathcal{L}^{m-2}\mathcal{A} + \dots + \mathcal{L}\mathcal{A}^{m-2} + \mathcal{A}^{m-1})\mathbf{y}(t) \\ &= e^{\alpha t}(D^{m-1}p(t) + D^{m-2}p(t)\mathcal{A} + \dots + Dp(t)\mathcal{A}^{m-2} + p(t)\mathcal{A}^{m-1})\mathbf{v} \\ &= e^{\alpha t}P(t)\mathbf{v} \end{aligned}$$

es solución de (B.1). Para probar la independencia lineal de las soluciones, se debe establecer que  $P(t)\mathbf{v} = \mathbf{0}$  implica  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Esto se sigue del hecho que cada componente de la función matricial  $P(t)$  es una combinación lineal de los elementos de la base  $\{p(t), Dp(t), \dots, D^{m-1}p(t)\}$  de  $\text{Ker} D^m$ .  $\square$

**Observación B.3.1** *Notar que si  $\dim \text{Ker} \mathcal{A} = m$ , es decir,  $\text{Ker} \mathcal{A} = \text{Ker} \mathcal{A}^m$ , entonces, de (B.3),  $P(t) = I$ . De otro modo, los coeficientes de  $P(t)$  serán polinomios de grado  $m_0 - 1$ , donde  $m_0$  es el menor entero tal que  $\text{Ker} \mathcal{A}^{m_0} = \text{Ker} \mathcal{A}^{m_0+k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Es bien sabido que  $m_0 \leq m$  (ver, por ejemplo, [4]).*

### B.3.2 Autovalores Complejos

Ahora se presenta una nueva fórmula de representación para soluciones de (B.1) asociadas a los autovalores complejos conjugados  $\alpha \pm i\omega$  de  $A$ , que no involucra autovectores complejos, sino vectores base del espacio vectorial real  $\text{Ker } \mathcal{A}^m$ . Desde que el autovalor es complejo, se debe tomar  $\mathcal{L} = (D - \alpha I)^2 + \omega^2 I$  y  $\mathcal{A} = (A - \alpha I)^2 + \omega^2 I$ .

Para simplificar la explicación se reescribe el Lema B.2.2 como

$$\mathcal{L}^m(e^{\alpha t} f(t)\mathbf{v}) = e^{\alpha t} L^m(f(t)\mathbf{v}), \quad (\text{B.4})$$

donde  $L = D^2 + \omega^2 I$ .

**Teorema B.3.2** *Si  $\alpha \pm i\omega$  son autovalores complejos conjugados de  $A$ , de multiplicidad  $m$ , y  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2m}\}$  es una base de  $\text{Ker } \mathcal{A}^m$ , entonces  $2m$  soluciones linealmente independientes asociadas a estos autovalores son*

$$\mathbf{x}_j(t) = e^{\alpha t} Q(t)\mathbf{v}_j, \quad j = 1, \dots, 2m, \quad (\text{B.5})$$

donde

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (D^2 + \omega^2)^{m-1-k} Dq(t)\mathcal{A}^k + \sum_{k=0}^{m-1} (D^2 + \omega^2)^{m-1-k} q(t)\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A}^k,$$

con  $q(t) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \cos \omega t$  y  $\tilde{\mathcal{A}} = A - \alpha I$ .

*Prueba.* Primero se considera el caso  $m = 1$ . Escoger un vector base  $\mathbf{v} \in \text{Ker } \mathcal{A}$  y construir  $\mathbf{y}(t) = e^{\alpha t} q(t)\mathbf{v}$  con  $q(t) = \cos \omega t$ . Entonces, usando (B.4), se encuentra que  $\mathcal{L}\mathbf{y}(t) = e^{\alpha t} (Lq(t)\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  y consecuentemente  $\mathbf{y} \in \text{Ker}(\mathcal{L} - \mathcal{A})$ . Ahora, usando la segunda parte del Lema B.2.1, se obtiene

$$\mathbf{0} = (D - A)(D - \alpha I + \tilde{\mathcal{A}})\mathbf{y}.$$

Por tanto, la primera parte del Lema B.2.2 permite concluir que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (D - \alpha I + \tilde{\mathcal{A}})\mathbf{y}(t) \\ &= e^{\alpha t} \{D(\cos \omega t)\mathbf{v} + \cos \omega t \tilde{\mathcal{A}}\mathbf{v}\} \\ &= e^{\alpha t} Q(t)\mathbf{v} \end{aligned}$$

es solución de (B.1). Se pospone por un momento la prueba de la independencia lineal para proceder a considerar el caso  $m > 1$ . Se puede aplicar el mismo razonamiento

anterior, construyendo, para cada vector base  $\mathbf{v} \in \text{Ker } \mathcal{A}^m$ , la función  $\mathbf{y}(t) = e^{\alpha t} q(t) \mathbf{v}$ . En tal caso, se cumple que

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{L}^m - \mathcal{A}^m) \mathbf{y}(t) \\ &= (D - A)(D - \alpha I + \tilde{\mathcal{A}})(\mathcal{L}^{m-1} + \mathcal{L}^{m-2} \mathcal{A} + \cdots + \mathcal{L} \mathcal{A}^{m-2} + \mathcal{A}^{m-1}) \mathbf{y}(t) \\ &= (D - A) e^{\alpha t} (D + \tilde{\mathcal{A}}) (\mathcal{L}^{m-1} + \mathcal{L}^{m-2} \mathcal{A} + \cdots + \mathcal{L} \mathcal{A}^{m-2} + \mathcal{A}^{m-1}) q(t) \mathbf{v} \\ &= (D - A) e^{\alpha t} Q(t) \mathbf{v}, \end{aligned}$$

es decir, (B.5) define una solución de (B.1).

Para probar la independencia lineal de las soluciones, debe probarse que  $Q(t) \mathbf{v} = 0$  implica  $\mathbf{v} = 0$ . Esto se sigue del hecho que cada componente de la función matricial  $Q(t)$  es combinación lineal de los elementos de la base definida en el Lema B.2.3.  $\square$

## B.4 Algoritmos y Ejemplos

Primero notar que el algoritmo asociado al Teorema B.3.1 es inmediato, al contrario del derivado del Teorema B.3.2 y del Lema B.2.4. Sin embargo, este último admite una formulación computacional más eficiente vía Cálculo Simbólico. En efecto, notar que el Lema B.2.4 involucra las derivadas de las funciones circulares  $\cos \omega t$  y  $\sin \omega t$  así como la combinación lineal de coeficientes binomiales, lo que naturalmente da origen a relaciones de recurrencia explícitas (ver la Proposición B.4.1).

### B.4.1 Algoritmos

El algoritmo para construir  $m$  soluciones linealmente independientes del sistema (B.1) asociadas al autovalor real  $\alpha$ , de multiplicidad  $m$ , resulta evidente del Teorema B.3.1. En efecto, se tiene el siguiente esquema.

#### Algoritmo 1

- Definir  $\mathcal{A} = A - \alpha I$ .
- Determinar una base  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  de  $\text{Ker } \mathcal{A}^m$ .
- Calcular  $\mathbf{x}_j(t) = e^{\alpha t} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{t^r}{r!} \mathcal{A}^r \mathbf{v}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

**Observación B.4.1** *Evidentemente, en el cálculo explícito de  $\mathbf{x}_j(t)$  se tiene presente la Observación B.3.1. En la implementación, el punto de partida es el cálculo del polinomio minimal que permite disminuir el número de operaciones.*

Ahora se deduce el nuevo algoritmo para el caso de autovalores complejos. El cálculo recursivo de los coeficientes del Lema B.2.4 es

$$\begin{aligned} a_0^0 &:= 1, \\ a_0^{k+1} &:= a_0^k, & b_0^{k+1} &:= a_0^k, \\ a_r^{k+1} &:= a_r^k + 2a_{r-1}^k, & b_r^{k+1} &:= a_r^k + a_{r-1}^k, \quad r = 1, \dots, k \\ a_{k+1}^{k+1} &:= 2a_k^k. & b_{k+1}^{k+1} &:= a_k^k. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Para automatizar el cálculo de las derivadas de las funciones circulares, consideradas en el Lema B.2.4, con  $y(t) = \cos \omega t$ , se definen las sucesiones

$$F_r(t) = \begin{cases} \cos \omega t, & r \text{ par} \\ \sin \omega t, & r \text{ impar} \end{cases}, \quad s_r = \begin{cases} -1, & r \in \{1 \bmod 4, 2 \bmod 4\} \\ 1, & r \in \{3 \bmod 4, 4 \bmod 4\} \end{cases}. \quad (\text{B.7})$$

con lo que  $D^r \cos \omega t = s_r \omega^r F_r(t)$ .

De acuerdo a (B.6) y (B.7), el Lema B.2.4 puede ser reformulado explícitamente para mejorar la performance en Cálculo Simbólico, como sigue.

**Proposición B.4.1** Sean  $y(t) = \cos \omega t$  y  $p(t) = \frac{t^l}{l!}$ . Entonces se cumple que

$$\begin{aligned} 1. & (D^2 + \omega^2)^k \frac{t^l}{l!} \cos \omega t = \sum_{r=0}^k s_r a_r^k \omega^r \frac{t^{l-2k+r}}{(l-2k+r)!} F_r(t). \\ 2. & (D^2 + \omega^2)^k D \frac{t^l}{l!} \cos \omega t = \sum_{r=0}^{k+1} s_r b_r^{k+1} \omega^r \frac{t^{l-2k+r-1}}{(l-2k+r-1)!} F_r(t). \end{aligned}$$

El algoritmo para construir  $2m$  soluciones linealmente independientes del sistema (B.1) asociadas a los autovalores complejos  $\alpha \pm i\omega$ , de multiplicidad  $m$ , puede ser escrito ahora, con la ayuda del Teorema B.3.2 y de la Proposición B.4.1, como sigue.

#### Algoritmo 2

- Definir  $\mathcal{A} = (A - \alpha I)^2 + \omega^2 I$ ,  $\tilde{\mathcal{A}} = A - \alpha I$ .
- Determinar una base  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2m}\}$  de  $\text{Ker } \mathcal{A}^m$ .
- Calcular  $\mathbf{x}_j(t) = e^{\alpha t}(Q_1(t) + Q_2(t))\mathbf{v}_j$ ,  $j = 1, \dots, 2m$ , donde

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-r}{2} \rfloor} s_{m-r-2i} b_{m-r-2i}^{m-r-i} \omega^{m-r-2i} \frac{t^r}{r!} F_{m-r}(t) \mathcal{A}^{r+i}, \\ Q_2(t) &= \sum_{r=1}^m \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-r}{2} \rfloor} s_{m-r-2i} a_{m-r-2i}^{m-r-i} \omega^{m-r-2i} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} F_{m-r}(t) \tilde{\mathcal{A}} \mathcal{A}^{r-1+i}, \end{aligned}$$

usando (B.6) y (B.7) ( $[x]$  es la parte entera de  $x \in \mathbb{R}$ ).

### B.4.2 Ejemplo I

Primero se compara el clásico Método de Euler con el Algoritmo 1. En efecto, se construye, usando ambos métodos, tres soluciones linealmente independientes asociadas al autovalor 2, de multiplicidad 3, de la matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

del sistema  $\mathbf{x}^{(1)} = A\mathbf{x}$ . Primero se calcula  $\mathcal{A} = A - 2I$ ,  $\mathcal{A}^2$  y  $\mathcal{A}^3$ :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathcal{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathcal{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora, se compara ambos métodos:

Método de Euler. Es evidente que, en este caso, sólo se tienen dos autovectores diferentes  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , y consecuentemente, las correspondientes soluciones:

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{2t}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{v}_2 e^{2t}.$$

Para construir la tercera solución, se toma un vector  $\mathbf{v}^* \in \text{Ker } \mathcal{A} \cap \text{Im } \mathcal{A}$  y se determina  $\mathbf{v}_3$  tal que  $\mathcal{A}\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}^*$ . Puesto que  $\mathbf{v}_3 \in \text{Ker } \mathcal{A}^2$ , la solución linealmente independiente a  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$  es

$$\mathbf{x}_3(t) = (\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}^*)e^{2t} = (I + t\mathcal{A})\mathbf{v}_3 e^{2t}. \quad (\text{B.8})$$

Ahora bien, la estructura de  $\mathcal{A}$  induce ingenuamente a elegir, por inspección,

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 0, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 0, 0),$$

pero ninguno de ellos pertenece a  $\text{Im } \mathcal{A}$ . Por tanto, se debe calcular  $\mathbf{v}^*$  y  $\mathbf{v}_3$ . Por el contrario, una elección más cuidadosa sería tomar

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 0, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, 0, 0),$$

lo que sí garantiza que, al menos,  $\mathbf{v}_1 \in \text{Im } \mathcal{A}$ . Consecuentemente,  $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_1$  y se debe sólo calcular  $\mathbf{v}_3$ . Así, en el Método de Euler, el punto crucial es conocer  $\text{Ker } \mathcal{A} \cap \text{Im } \mathcal{A}$ .

Algoritmo 1. Aquí basta tomar cualquier base de  $\text{Ker } \mathcal{A}^3$ , por ejemplo, la más obvia, por inspección,

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$$

y reemplazando en

$$\mathbf{x}_j(t) = e^{2t} \left( I + t\mathcal{A} + \frac{t^2}{2}\mathcal{A}^2 \right) \mathbf{v}_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

para obtener las soluciones

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{2t}\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{2t}\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{x}_3(t) = e^{2t}(I + t\mathcal{A})\mathbf{v}_3,$$

las cuales son linealmente independientes. Es instructivo comparar con (B.8). Notar que  $\text{Ker}\mathcal{A}^2 = \text{Ker}\mathcal{A}^3$  (ver la Observación B.3.1).

Ahora, se finaliza el cálculo de la matriz  $e^{At}$ . Sólo falta construir soluciones asociadas a los autovalores complejos conjugados  $\pm i$ . Se aplica el Algoritmo 2. En efecto, se denota  $\mathcal{A} = A^2 + I$ ,  $\tilde{\mathcal{A}} = A$  y se toma como una base de  $\text{Ker}\mathcal{A}$ ,

$$\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$$

y se reemplaza en

$$\mathbf{x}_j(t) = (-\text{sen } tI + \text{cos } t\tilde{\mathcal{A}})\mathbf{v}_j, \quad j = 4, 5,$$

para obtener las dos soluciones requeridas. En fin, considerando las soluciones asociadas al autovalor real, se tiene  $e^{At} = [\mathbf{x}_1(t) \cdots \mathbf{x}_5(t)][\mathbf{x}_1(0) \cdots \mathbf{x}_5(0)]^{-1}$ , esto es

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cos } t & \text{sen } t \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } t & \text{cos } t \end{bmatrix}.$$

### B.4.3 Ejemplo II

El propósito de este ejemplo es calcular la matriz  $e^{At}$  usando los Algoritmos 1 y 2. Considerar

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

cuyo polinomio característico es  $p(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2(\lambda^2 - 1)$ .

Primero se aplica el **Algoritmo 2** para construir las soluciones asociadas a los autovalores complejos conjugados  $\pm i$ , de multiplicidad 2. Entonces se denota  $\mathcal{A} = A^2 + I$ ,  $\tilde{\mathcal{A}} = A$  y se toma como una base de  $\text{Ker } \mathcal{A}^2$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (-1, 0, 1, 0, 0, 0), & \mathbf{v}_2 &= (0, -1, 0, 1, 0, 0), \\ \mathbf{v}_3 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0), & \mathbf{v}_4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

y se reemplaza en

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j(t) &= (s_2 b_2^2 F_2(t)I + s_0 b_0^1 F_2(t)\mathcal{A} + s_1 b_1^1 t F_1(t)\mathcal{A} + s_1 a_1^1 F_1(t)\tilde{\mathcal{A}} + s_0 a_0^0 t F_0(t)\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A})\mathbf{v}_j \\ &= (-2 \cos t I + \cos t \mathcal{A} - t \operatorname{sen} t \mathcal{A} - 2 \operatorname{sen} t \tilde{\mathcal{A}} + t \cos t \tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A})\mathbf{v}_j, \quad j = 1, \dots, 4, \end{aligned}$$

para obtener las correspondientes cuatro soluciones linealmente independientes.

Ahora, como los autovalores reales son simples, el **Algoritmo 1** se reduce a determinar un autovector asociado a cada uno de ellos,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_5(t) &= \mathbf{v}_5 e^t, & \text{con } \mathbf{v}_5 &= (1, 1, 1, 1, 0, 0), \\ \mathbf{x}_6(t) &= \mathbf{v}_6 e^{-t}, & \text{con } \mathbf{v}_6 &= (-1, 1, -1, 1, 0, 0). \end{aligned}$$

Así, se concluye que  $e^{At} = [\mathbf{x}_1(t) \cdots \mathbf{x}_6(t)][\mathbf{x}_1(0) \cdots \mathbf{x}_6(0)]^{-1}$ , esto es

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{\operatorname{ch} t + \cos t}{2} & \frac{\operatorname{sh} t + \operatorname{sen} t}{2} & \frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{2} & \frac{\operatorname{sh} t - \operatorname{sen} t}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\operatorname{sh} t - \operatorname{sen} t}{2} & \frac{\operatorname{ch} t + \cos t}{2} & \frac{\operatorname{sh} t + \operatorname{sen} t}{2} & \frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{2} & \frac{\operatorname{sh} t - \operatorname{sen} t}{2} & \frac{\operatorname{ch} t + \cos t}{2} & \frac{\operatorname{sh} t + \operatorname{sen} t}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\operatorname{sh} t + \operatorname{sen} t}{2} & \frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{2} & \frac{\operatorname{sh} t - \operatorname{sen} t}{2} & \frac{\operatorname{ch} t + \cos t}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{0} & \frac{2}{0} & \frac{2}{0} & \frac{2}{0} & \cos t & \operatorname{sen} t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}.$$

# Bibliografía

- [1] K. ABDEL-MALEK, H. J. YEH, *Determining intersection curves between surfaces of two solids*, Computer-Aided Design 28 (6/7) (1996), 539-549.
- [2] C. ASTEASU, *Intersection of arbitrary surfaces*, Computer-Aided Design 20 (1988), 533-538.
- [3] C. ASTEASU, A. ORBEGOZO, *Parametric piecewise surfaces intersection*, Computers & Graphics 15 (1) (1991), 9-13.
- [4] S. AXLER, *Linear Algebra Done Right*, UTM Series, Springer Verlag, 1997.
- [5] N. M. AZIZ, R. M. BATA, S. P. BHAT, *Bézier Surface/Surface Intersection*, IEEE Computer Graphics & Applications 10 (1990), 50-58.
- [6] C. L. BAJAJ, C. F. HOFFMANN, R. E. LYNCH, J. E. H. HOPCROFT, *Tracing surface intersections*, Computer Aided Geometric Design 5 (1988), 285-307.
- [7] R. E. BARNHILL, G. FARIN, M. JORDAN, B. R. PIPER, *Surface/surface intersection*, Computer Aided Geometric Design 4 (1987), 3-16.
- [8] R. E. BARNHILL, S. N. KERSEY, *A marching method for parametric surface/surface intersection*, Computer Aided Geometric Design 7 (1990), 257-280.
- [9] E. BOENDER, *A survey of intersection algorithms for curved surfaces*, Computers & Graphics 15 (1) (1991), 109-115.
- [10] W. BOHM, *A survey of curve and surface methods in CAGD*, Computer Aided Geometric Design 1 (1984), 1-60.
- [11] M. DO CARMO, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.
- [12] J. J. CHEN, T. M. OZSOY, *Predictor-corrector type method of intersection algorithm for  $C^2$  parametric surfaces*, Computer-Aided Design 20 (6) (1988), 347-352.

- [13] T. DOKKEN, *Finding intersections of B-spline represented geometries using recursive subdivision techniques*, *Computer Aided Geometric Design* 2 (1985), 189-195.
- [14] G. FARIN, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, 1992.
- [15] I. D. FAUX, M. J. PRATT, *Computational Geometry for Design and Manufacture*, Ellis Horwood, 1985.
- [16] S. L. HANNA, J. F. ABEL, D. P. GREENBERG, *Intersection of Parametric Surfaces by Means of Look-Up Tables*, *IEEE Computer Graphics & Applications* 3 (1983), 39-48.
- [17] C. M. HOFFMANN, *Geometric and Solid Modeling. An Introduction*, Morgan Kaufmann Publishers, 1989.
- [18] M. HOSAKA, *Modeling of Curves and Surfaces in CAD/CAM*, Springer-Verlag, 1992.
- [19] J. HOSCHEK, D. LASSER, *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, A. K. Peters, 1993.
- [20] E. G. HOUGHTON, R. F. EMNETT, J. D. FACTOR, C. L. SABHARWAL, *Implementation of a divide-and-conquer method for intersection of parametric surfaces*, *Computer Aided Geometric Design* 2 (1985), 173-183.
- [21] D. LASSER, *Intersection of parametric surfaces in the Bernstein-Bézier representation*, *Computer-Aided Design* 18 (4) (1986), 186-192.
- [22] R. B. LEE, D. A. FREDRICKS, *Intersection of Parametric Surfaces and a Plane*, *IEEE Computer Graphics & Applications* 4 (1984), 48-51.
- [23] C. MOLER, C. VAN LOAN, *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix*, *SIAM Rev.*, 20 (1978), 801-836.
- [24] M. E. MORTENSON, *Geometric Modeling*, Wiley, 1985
- [25] N. M. PATRIKALAKIS, *Surface-to-Surface Intersections*, *IEEE Computer Graphics & Applications* 13 (1993), 89-95.
- [26] Q. S. PENG, *An algorithm for finding the intersection lines between two B-spline surfaces*, *Computer-Aided Design* 16 (4) (1984), 191-196.
- [27] TH. W. SEDERBERG, T. NISHITA, *Geometric Hermite approximation of surface patch intersection curves*, *Computer Aided Geometric Design* 8 (1991), 97-114.

- [28] TH. W. SEDERBERG, R. J. MEYERS, *Loop detection in surface patch intersection*, Computer Aided Geometric Design 5 (1988), 161-171.
- [29] TH. W. SEDERBERG, H. N. CHRISTIANSEN, S. KATZ, *Improved test for closed loops in surface intersections*, Computer-Aided Design 21 (8) (1989), 505-508.
- [30] Tz. E. STOYANOV, *Marching along surface/surface intersection curves with an adaptive step length*, Computer Aided Geometric Design 9 (1992), 485-489.
- [31] K. TENENBLAT, *Introdução à Geometria Diferencial*, Universidade de Brasília, 1982.
- [32] S.-T. WU, L. N. ANDRADE, *Marching along a regular surface/surface intersection with circular steps*, Computer Aided Geometric Design 16 (1999), 249-268.
- [33] X. YE, T. MAEKAWA, *Differential geometry of intersection curves of two surfaces*, Computer Aided Geometric Design 16 (1999), 767-788.

# Lista de Figuras

1.1	Parametrización por longitud de arco $s$ .	7
1.2	Curvatura $\kappa(s) =  \mathbf{c}^{(2)}(s) $ de una curva 3D parametrizada por longitud de arco $s$ .	8
1.3	Círculo osculador.	10
1.4	Plano tangente con vector normal.	12
1.5	Curvatura normal y sección normal.	13
1.6	Curvaturas principales y direcciones principales.	14
1.7	Algoritmo de de Casteljaou y curva de Bézier.	17
1.8	Superficie de Bézier y su poliedro de control.	19
2.1	Malla de búsqueda sobre una superficie con $n_G = 2$ .	23
2.2	Determinación de un vector tangente de la intersección.	24
2.3	Curvas dentro de una región determinada por la malla de búsqueda.	28
2.4	Interpolación de acuerdo al método propuesto por Faux y Pratt. El sentido del trazo de la curva es de izquierda a derecha.	31
2.5	Interpolación de acuerdo al método propuesto por Faux y Pratt. El sentido del trazo de la curva es de derecha a izquierda.	32
3.1	Curva con recta tangente y círculo osculador, cuando la curvatura disminuye o aumenta. Si disminuye (respectivamente aumenta), el trazo de la curva es hacia la izquierda (respectivamente derecha).	40
3.2	Curva con recta tangente y círculo osculador, cuando la curvatura es un valor mínimo fuerte.	41
3.3	Curva con recta tangente y círculo osculador, cuando la curvatura es un valor mínimo débil o máximo.	41
3.4	Control del error de interpolación lineal.	51

3.5	Intersección de dos superficies de Bézier. . . . .	77
3.6	Interpolación lineal adaptativa. . . . .	78
3.7	Gráfico de errores para la interpolación lineal adaptativa de uno de los segmentos abiertos congruentes. . . . .	79
3.8	Gráfico de errores para la interpolación lineal adaptativa del segmento cerrado. . . . .	79
3.9	Interpolación cúbica adaptativa. . . . .	80
3.10	Gráfico de errores para la interpolación cúbica adaptativa de uno de los segmentos abiertos. . . . .	81
3.11	Gráfico de errores para la interpolación cúbica adaptativa del segmento cerrado. . . . .	81
3.12	Interpolación lineal adaptativa. . . . .	83
3.13	Gráfico de errores para la interpolación lineal adaptativa. . . . .	84
3.14	Interpolación cúbica adaptativa. . . . .	84
3.15	Gráfico de errores para la interpolación cúbica adaptativa. . . . .	85
3.16	Interpolación lineal adaptativa óptima. . . . .	85
3.17	Gráfico de errores para la interpolación lineal adaptativa óptima. . . . .	86
3.18	Interpolación cúbica adaptativa óptima. . . . .	87
3.19	Gráfico de errores para la interpolación cúbica adaptativa óptima. . . . .	87

# Resumen

En general, no existe una representación en forma exacta de la intersección de dos superficies, que puede ser descompuesta en una o varias componentes. Por consiguiente, sólo los métodos aproximantes son capaces de proporcionar el cálculo de la intersección. Dado que la intersección es aproximada, ésta contiene un error.

El cálculo de la intersección debe ser hecho tan exactamente como sea posible en la evaluación de fronteras, uno de los más importantes problemas en el modelado de sólidos. Las aplicaciones a la manufactura hacen necesario especificar una tolerancia de error de modo que la desviación de la aproximación con respecto a la intersección real se mantenga siempre dentro de la tolerancia especificada. No obstante estas necesidades, no se conocen métodos capaces de controlar confiablemente el error de la aproximación.

En esta tesis se estudia cómo optimizar el proceso del cálculo de la intersección de dos superficies paramétricas de forma libre en el sentido de la exactitud. Debido a su interés práctico, se aborda aquí el caso en el cual la intersección de superficies es no singular.

Se consigue proponer un método de trazado capaz de controlar el error de la aproximación generada y con tamaño de paso adaptativo, que permite una representación segmentada óptima de la curva, a ser mecanizada, que aproxima la intersección.