



César Augusto Rivera Lima

**Previsão do Preço Spot de Petróleo e
Derivados: Abordagem pelo Filtro de Kalman**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Ciências Atuariais do Departamento de Gestão de Riscos Financeiros e Atuarias da PUC-Rio

Orientador: Prof. Cristiano Augusto Coelho Fernandes

Rio de Janeiro
março de 2010



César Augusto Rivera Lima

**Previsão do Preço Spot de Petróleo e
Derivados: Abordagem pelo Filtro de Kalman**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Ciências Atuariais do Departamento de Gestão de Riscos Financeiros e Atuarias do Centro de Ciências Sociais da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Cristiano Augusto Coelho Fernandes

Orientador

Departamento de Gestão de Riscos Financeiros e Atuarias —
PUC-Rio

Prof. Adrian Heringer Pizzinga

IAPUC - PUC-Rio

Prof. Rodrigo Simões Atherino

IAPUC - PUC-Rio

Prof. Edison Americo Huarsaya Tito

Petrobrás

Prof. Mônica Herz

Coordenador Setorial do Centro de Ciências Sociais — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 26 de março de 2010

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

César Augusto Rivera Lima

Graduou-se em Engenharia Estatística pela Universidad Nacional de Ingeniería (Lima, Perú) em 2006.

Ficha Catalográfica

Lima, César

Previsão do Preço Spot de Petróleo e Derivados: Abordagem pelo Filtro de Kalman / César Augusto Rivera Lima; orientador: Cristiano Augusto Coelho Fernandes. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Gestão de Riscos Financeiros e Atuarias, 2010.

v., 88 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Gestão de Riscos Financeiros e Atuarias.

Inclui referências bibliográficas.

1. Gestão de Riscos Financeiros e Atuarias – Tese. 2. Preço spot do petróleo. 3. Preços futuros. 4. Filtro de Kalman. 5. Modelos em espaço de estado. 6. Derivados do petróleo. I. FERNANDES, C. A. C.. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Gestão de Riscos Financeiros e Atuarias. III. Título.

CDD: 510

A minha mãe Hermina.

Agradecimentos

A Deus, pela oportunidade de viver.

Ao professor Cristiano Fernandes por me orientar. Pela ajuda, dedicação e paciência prestada no desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Adrian Pizzinga, pelas sugestões no trabalho.

A FUNENSEG pela ajuda financeira durante quase todo o mestrado.

A CAPES pela bolsa de estudos a mim concedida.

A Petrobrás pelo incentivo oferecido na pesquisa.

Ao IAPUC pela infraestrutura oferecida.

Aos membros da banca pelas críticas construtivas do trabalho.

Aos colegas e amigos do IAPUC Alexandra, Bruna e Caio pelo companheirismo e sua amizade.

A Luciene, por seu trabalho incomparável no IAPUC.

Aos meus pais e irmãos, pelo amor, conselhos e ajuda prestada em todo momento da minha vida.

Resumo

Lima, César; FERNANDES, C. A. C.. **Previsão do Preço Spot de Petróleo e Derivados: Abordagem pelo Filtro de Kalman**. Rio de Janeiro, 2010. 88p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Gestão de Riscos Financeiros e Atuarias, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O preço de petróleo junto com outros fatores de mercado são incertezas fundamentais que afetam o processo decisório de implementação de projetos na indústria do petróleo. O presente trabalho desenvolve e implementa um modelo em espaço de estado multivariado para prever os preços spot e futuros do petróleo e de seus principais derivados. O modelo proposto é uma extensão do modelo de dois fatores de Schwartz e Smith, oriundo da literatura de finanças e commodities. A estimação é feita através da aplicação do filtro de Kalman com inicialização difusa, dados ausentes e tratamento univariado para modelo multivariado. Nossos resultados indicam que, além, de ser mais geral, o nosso modelo produz melhor ajuste do que o modelo original de Schwartz e Smith.

Palavras-chave

Preço spot do petróleo. Preços futuros. Filtro de Kalman. Modelos em espaço de estado. Derivados do petróleo.

Abstract

Lima, César; FERNANDES, C. A. C.. **Forecasting of Spot Price of Petroleum and Derivatives: Kalman Filter Approach.** Rio de Janeiro, 2010. 88p. MsC Thesis — Department of Gestão de Riscos Financeiros e Atuarias, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The price of oil along with other market factors are critical uncertainties that affect decision-making process in implementing projects in the oil industry. This study develops and implements a multivariate state space model to predict spot and futures prices of oil and its main derivatives. The proposed model is an extension of the two factors model of Schwartz and Smith, a native model of the literature of finance and commodities. The estimation is done through the application of Kalman filter with diffuse initialization, missing values treatment and univariate treatment of a multivariate model. The results of the study indicate that, besides being more general, our models produce best fits than the original model of Schwartz and Smith.

Keywords

Oil spot price. future prices. Kalman filter. State space models. Petroleum derivatives.

Sumário

1	Introdução	14
2	Modelo de previsão de preço spot de petróleo	16
2.1	Introdução	16
2.2	Modelo SS padrão	17
2.3	Modelo SS com Intervenções	20
2.4	Modelo SS com drift estocástico	22
3	Modelo multivariado para os preços do petróleo e dos derivados	26
3.1	Introdução	26
3.2	Equações do modelo	28
3.3	Previsão do preço spot e futuros dos derivados	31
4	Modelos em Espaço de Estado e Filtro de Kalman	32
4.1	Modelo Linear em Espaço de Estado	32
4.2	Modelos em Espaço de Estado e Filtro de Kalman	33
4.3	Tratamento de Valores Ausentes	35
4.4	Tratamento Univariado para Séries Multivariadas	36
4.5	Inicialização do Filtro de Kalman	40
4.6	Estimação por máxima verossimilhança	43
4.7	Diagnósticos e medidas de aderência	46
4.8	Modelos do preço de petróleo em forma de espaço de estado	47
5	Dados	51
5.1	Contrato futuro e preço futuro de petróleo	51
5.2	Dados e valores ausentes	53
6	Resultados	54
6.1	Modelo SS padrão e SS com intervenções	54
6.2	Resultados do Modelo SS com drift estocástico	58
6.3	Resultados da previsão para os preços spot e futuros	63
6.4	Resultados do modelo multivariado para o preços do petróleo e dos derivados	64
7	Conclusões e Extensões	73
7.1	Conclusões	73
7.2	Extensões	73
8	Referencias	75
9	Apêndice A - Cálculo da equação para o preço futuro no modelo SS com drift estocástico	77
9.1	Discretização do modelo	77
9.2	Cálculo do preço futuro	78

10	Apêndice B - Equação do preço futuro no modelo SS multivariado	82
11	Apêndice C - Demonstração de como chegar do algoritmo 2 para o algoritmo 1	84
12	Apêndice D - Exemplo para testar que a quantidade de dados d na parte difusa da inicialização muda do tratamento univariado para o multivariado	86

Lista de figuras

2.1	Intervenções consideradas na taxa de crescimento do fator de longo prazo	21
2.2	Previsão de $\ln S_t$ do petróleo	25
2.3	Previsão de $\ln S_t + 0.5Var(\ln S_t)$ do petróleo	25
3.1	Preços futuros do petróleo e alguns derivados.	27
3.2	Fator de curto prazo para o petróleo e alguns derivados.	29
3.3	Fator de longo prazo do petróleo e alguns derivados	30
6.1	Alguns preços futuros do petróleo considerados na estimação dos modelos univariados (observar a grande quantidade de dados faltantes para maturidades longas).	54
6.2	Amostras consideradas na estimação dos modelos univariados	56
6.3	Preços preenchidos baseados no modelo SS padrão: acima (maturidade de 21 meses) e em baixo (maturidade de 48 meses)	60
6.4	Fatores suavizados do modelo SS padrão e com drift estocástico	63
6.5	Inovações padronizadas do modelo SS padrão na amostra 7	64
6.6	Inovações padronizadas do modelo SS com drift estocástico na amostra 7	65
6.7	Previsão do preço spot e de preços futuros (Am-1)	67
6.8	Previsão do preço spot e de preços futuros (Am-4)	67
6.9	Previsão do preço spot e de preços futuros (Am-6)	68
6.10	Previsão do preço spot de petróleo 5 anos em frente	68
6.11	Fatores globais suavizados	69
6.12	Preços futuros preenchidos por o modelo integrado acima (futuro de 12 meses do preço do petróleo), em baixo (futuros de 12 do preço da gasolina)	70
6.13	Fator de longo prazo do preço de petróleo WTI no modelo individual e no modelo integrado	70
6.14	Fatores de longo prazo de alguns dos derivados no modelo integrado	71
6.15	Erros padronizados do modelo integrado dos derivados	71
6.16	Preços spot suavizados para alguns derivados, a partir do modelo integrado	72
6.17	Previsão do preço spot de alguns derivados para 5 anos à frente	72

Lista de tabelas

2.1	Descrição dos parâmetros	17
3.1	Lista de petróleo e derivados considerados na modelagem	28
3.2	ACP para o fator de curto prazo	28
4.1	Dimensões dos vetores e matrizes do modelo 4-3	34
4.2	Dimensões dos vetores e matrizes do filtro 4-4	34
4.3	Espaços paramétricos	47
5.1	Períodos consideradas na estimação do modelo SS	52
5.2	Maturidades consideradas na estimação do modelo SS	52
6.1	Testes de hipóteses das intervenções no modelo SS padrão	55
6.2	Ajustes dos modelos com e sem intervenções	57
6.3	Estimativas dos parâmetros do modelo SS padrão	57
6.4	Estimativas dos parâmetros do modelo SS com intervenções	58
6.5	Análise dos resíduos do modelo SS padrão	59
6.6	Comparação do modelo SS padrão com o modelo de drift estocástico	59
6.7	Estimativa dos parâmetros do modelo SS com drift estocástico	61
6.8	Medidas de ajuste dos modelos na amostra (Am-7)	61
6.9	Medidas de ajuste fora da amostra (Am-1)	62
6.10	Medidas de ajuste dos modelos fora da amostra (Am-6)	62
6.11	Análise dos resíduos do modelo SS com drift estocástico	66
6.12	Estimativas dos parâmetros do modelo multivariado para o preço do petróleo e de derivados.	69

Para os crentes, Deus está primeiro. Para os cientistas é o fim de todas as suas reflexões.

Max Planck (1858-1947), .

Lista de símbolos e abreviações

$\hat{F}_{T+\ell}$	Previsão do preço futuro de petróleo ℓ passos à frente a partir do tempo T
$\hat{S}_{T+\ell,i}$	Previsão do preço spot do derivado i ℓ passos à frente a partir do tempo T
$\hat{S}_{T+\ell}$	Previsão do preço spot de petróleo ℓ passos à frente a partir do tempo T
\mathfrak{S}_t	Sigma álgebra gerada pelos preços futuros de petróleo ate o tempo t inclusive
\mathbb{N}	Números naturais
\mathbb{R}	Números reais
\mathbb{R}^+	Números reais positivos
$\sigma(y_1, \dots, y_t)$	Sigma álgebra gerada pelos vetores y_1, \dots, y_t
$F_{t,\tau}$	Preço futuro no tempo t com maturidade τ
$N(\mu, \sigma^2)$	Distribuição Normal com media μ e variância σ^2
NaN	Valor ausente
*	Variável sobre processo neutro ao risco
ACP	Análise de Componentes Principais
BTU	Unidade de calor Britanica
NYMEX	New York Mercantile Exchange
OPEP	Organização dos Países Exportadores de Petróleo
SS	Schwartz e Smith
T	Último período de tempo considerado na estimação do modelo
USD/bbl	Dólares por barril
USD/MMBtu	Dólares por Mil Milhões de BTU
WTI	West Texas Intermediate

1

Introdução

Os valores futuros do preço do petróleo, junto com outras medidas de mercado são incertezas fundamentais que afetam o processo decisório de implementação de projetos na indústria do petróleo. Por exemplo, num projeto de exploração e produção (E&P) de petróleo, projeções destes preços devem ser obtidas de forma eficiente, possivelmente consistentes com as expectativas dominantes da indústria do petróleo concernentes ao comportamento de longo prazo destes preços (Geman, 2005, cap. 9; Schwartz e Smith, 2000).

É sabido da teoria Econômica que os fatores fundamentais que determinam os preços de *commodities* são as forças de oferta e demanda, e que a incerteza advinda do comportamento futuro destas forças é que produz incerteza sobre a evolução destes preços (Geman, 2005, pag. 18). Tipicamente¹, no caso do petróleo e de seus derivados, as incertezas advêm da deficiência das informações relacionadas aos seguintes aspectos de demanda e oferta:

- as reservas existentes do petróleo.
- a capacidade de produção dos países produtores, da OPEP em particular.
- a capacidade de refino da indústria petrolífera.
- o consumo chinês e americano, que, no atual contexto, ainda lideram a expansão da demanda mundial.

A especificação de modelos de previsão do preço de petróleo a partir da modelagem explícita destes determinantes causais, os fatores de oferta e demanda é conhecida na literatura especializada como **modelos estruturais** (Geman, 2005). Previsões mais eficientes, obtidas através de modelos mais simples em termos de elaboração, estimação e manutenção, podem ser obtidas adotando-se modelos que apenas utilizam as séries passadas dos preços do petróleo. O petróleo, como outras *commodities*, não possui mercado à vista ou spot. Assim sendo o preço à vista é

¹Neste arcabouço exclui-se dos fatores impactantes de demanda, e por conseguinte, no preço do petróleo e seus derivados, os seguintes efeitos: concorrência de combustíveis substitutos do petróleo e de outras tecnologias produtoras de energia e pressões advindas do impacto ambiental e climático causado por combustíveis fósseis.

uma variável não observável. Os preços observáveis e disponíveis para o petróleo são os preços negociados no mercado futuro. Estes preços podem ser obtidos na página web da NYMEX (<http://www.cmegroup.com/>).

Na classe de modelos denominados de **modelos não estruturais**, procura-se descrever, utilizando-se processos estocásticos em tempo contínuo, a evolução do preço spot a partir dos preços futuros, ou mesmo, numa simplificação, modelar o preço do contrato futuro mais próximo como se fosse o preço spot (Schwartz e Smith, 2000). Estes processos estocásticos são relativamente simples, e deles espera-se que devam capturar as principais características da dinâmica das séries de preço sem fazer uso explícito das séries dos fatores causais. Uma outra possibilidade, ainda dentro desta perspectiva, é a modelagem econométrica/séries temporais direta da *série spot*, e das séries de preços de outros vencimentos. Neste trabalho apresentamos várias extensões do modelo de Schwartz e Smith para o preço spot do petróleo, comparando-os, principalmente, através da aderência do modelo aos dados. Cabe destaque a extensão multivariada, aqui desenvolvida, do modelo de Schwartz e Smith, a qual torna possível a modelagem conjunta do preço do petróleo e seus principais derivados utilizando um modelo em espaço de estado de apenas três fatores.

No Capítulo 1 desta dissertação apresentamos uma breve discussão sobre as principais tipos de modelos não estruturais utilizados para descrever as séries do preço de petróleo. No Capítulo 2 apresentamos o modelo Schwartz-Smith para modelar preços de petróleo e propomos duas extensões para este modelo: uma que considera a média condicional sujeita a mudanças de regime, e outra, onde o drift do processo de longo termo é feito estocástico. No Capítulo 3 propomos um modelo multivariado que modela conjuntamente o preço do petróleo e dos seus principais derivados, o qual pode ser utilizado para prever os preços spot deste produtos. No Capítulo 4 apresentamos a teoria de modelo em espaço de estado e filtro de Kalman, explicitando como esta ferramenta lida com dados ausentes nas séries de preços. No capítulo 5 descrevemos os dados usados na estimação dos diferentes modelos. No Capítulo 6 apresentamos os resultados. Finalmente no Capítulo 7 apresentamos as conclusões e recomendações obtidas a partir do nosso trabalho.

2

Modelo de previsão de preço spot de petróleo

2.1

Introdução

Na moderna literatura de finanças aplicada a preços de *commodities*¹, dois modelos polarizam o debate sobre a dinâmica apropriada para descrever a série de preço *spot* de petróleo: o modelo de reversão à média e o modelo de passeio aleatório. O primeiro destes modelos, em sintonia com o comportamento de longo prazo esperado entre as forças de oferta e demanda, postula que as flutuações no (log) preço tendem, no longo prazo, a um valor de equilíbrio, assumido constante ao longo do tempo. O segundo modelo, derivado a partir de um pressuposto de ausência de equilíbrio de longo termo no preço spot do petróleo, assume que os incrementos no (log) preço são aleatórios, resultando num processo de tendência linear estocástico com variância crescente. As evidências empíricas para cada uma destas abordagens é inconclusiva, dependendo do período de tempo sendo considerado, e do tamanho da série. A experiência prática em previsão indica que cada uma destas abordagens possui um algo de verdade: os mecanismos de oferta e demanda impõem uma barreira inferior e superior às flutuações do preço spot, mas a existência de um valor fixo de equilíbrio para o preço é uma hipótese um pouco dramática. O modelo SS (Schwartz and Smith, 2000) na sua concepção, conjuga estes dois tipos de processos para descrever a evolução do (log) preço spot, e tem se firmado como um dos modelos de referência na literatura de modelagem de preço de petróleo. Vide por exemplo (Geman, 2005). Mais precisamente, em SS, o processo que descreve a evolução do (log) preço spot de petróleo é decomposto em dois fatores não observados: um fator de curto prazo e um fator de longo prazo. O fator de curto prazo captura choques transientes na oferta e demanda, como por exemplo, invernos rigorosos no hemisfério norte e curtas interrupções nos países produtores. É modelado através de um processo Ornstein-Uhlenbeck com reversão para zero. O fator de longo prazo, por sua vez, captura variações na série de preços que apresentam maior duração no tempo. Por exemplo, mudança de tecnologia, aumento populacional etc. É modelado através de um processo

¹vide por exemplo, Schwartz e Gibson(1990), Laughton and Jacoby (1993, 1995), Cortazar e Schwartz(1994), Schwartz(1997), Smith e McCardle(1999),e Schwatz e Smith(2000).

Geométrico Browniano (ou passeio aleatório com drift na sua forma discreta). A seguir apresentamos os detalhes de dedução deste modelo.

2.2

Modelo SS padrão

O modelo SS proposto por Schwartz and Smith (2000) propõe que o (log) preço de petróleo seja representado como a soma de dois fatores, um deles de curto prazo e o outro de longo prazo.

$$\ln S_t = \chi_t + \xi_t \quad (2-1)$$

e os fatores de curto (χ_t) e longo (ξ_t) termo são caracterizados pelos seguintes processos:

$$\begin{aligned} d\chi_t &= -\kappa\chi_t dt + \sigma_\chi dz_\chi \\ d\xi_t &= \mu_\xi dt + \sigma_\xi dz_\xi \end{aligned} \quad (2-2)$$

onde $dz_\chi dz_\xi = \sigma_\chi \sigma_\xi \rho_{\chi\xi} dt$, sendo:

Tabela 2.1: Descrição dos parâmetros

Símbolo	Descrição
σ_χ	volatilidade do desvio de curto prazo
σ_ξ	volatilidade do desvio de longo prazo
μ_ξ	taxa de variação do preço de equilíbrio real
κ	taxa de reversão à media de curto prazo
$\rho_{\chi\xi}$	correlação dos incrementos

As existências de mercados futuros para o petróleo e alguns derivados garantem que num dado tempo t (dia, semana ou mês) existem disponíveis expectativas de preços (formadas no próprio mercado) para futuros com maturidades τ ; por exemplo 1 mês, 1 ano ou 4 anos. Um mecanismo possível para descobrir a evolução futura do preço spot é utilizar o preço futuro como a melhor previsão para o preço spot no horizonte τ , tomando-se as probabilidades na medida neutra ao risco². Formalmente $F_{t,\tau} = \mathbf{E}^*(S_{t+\tau} | \mathfrak{F}_t)$.

2.2.1

Equação do preço futuro

Utilizando a relação entre os momentos da distribuição log normal e da normal segue que:

²O ISO 31000 define o risco como o efeito da incerteza nos objetivos, e a incerteza como a deficiência das informações relacionadas a um evento, sua compreensão, seu conhecimento, sua consequência ou sua probabilidade.

$$F_{t,\tau} = \mathbf{E}^*(S_{t+\tau}|\mathfrak{F}_t) = \exp\left(\mathbf{E}^*(\ln S_{t+\tau}|\mathfrak{F}_t) + \frac{1}{2}\mathbf{Var}^*(\ln S_{t+\tau}|\mathfrak{F}_t)\right) \quad (2-3)$$

onde \mathbf{E}^* e \mathbf{Var}^* são a média e a variância obtidas sobre as equações de estado neutras ao risco, dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} d\chi_t &= (-\kappa\chi_t - \lambda_\chi)dt + \sigma_\chi dz_\chi^* \\ d\xi_t &= (\mu_\xi - \lambda_\xi)dt + \sigma_\xi dz_\xi^* \end{aligned} \quad (2-4)$$

onde $dz_\chi^* dz_\xi^* = \sigma_\chi \sigma_\xi \rho_{\chi\xi} dt$.

A forma discreta das componentes não observáveis, que descrevem a evolução estocástico dos fatores de curto e de longo prazo, na forma neutra ao risco, é dada por:

$$\begin{aligned} \chi_t &= -\lambda_\chi \Delta t + e^{-\kappa \Delta t} \chi_{t-\Delta t} + \omega_{1,t}^* \\ \xi_t &= \mu_\xi^* \Delta t + \xi_{t-\Delta t} + \omega_{2,t}^* \end{aligned} \quad (2-5)$$

onde $\mu_\xi^* = (\mu_\xi - \lambda_\xi)$. λ_χ e λ_ξ são o premio de risco do fator de curto e de longo prazo respectivamente; $\omega_{1,t}^* = \sigma_\chi \Delta z_\chi^*$, $\omega_{2,t}^* = \sigma_\xi \Delta z_\xi^*$ e $\mathbf{Corr}(\omega_{1,t}^*, \omega_{2,t}^*) = \sigma_\chi \sigma_\xi \rho_{\chi\xi} \Delta t$.

Esses dois fatores não observáveis capturam de forma resumida os dois tipos de eventos que influenciam o preço: eventos que mudam o preço de forma permanente e eventos que apenas afetam o preço de forma transiente. Partindo da equação do preço spot podemos expressar o preço futuro do petróleo como função dos fatores de longo e de curto prazo, fazendo uso das versões neutras ao risco dos processos. Sendo os preços futuros observáveis é possível estimar aqueles fatores para cada tempo t . A estimação é realizada através do algoritmo denominado de filtro de Kalman que atua na forma discreta do modelo e que será apresentada em detalhes no Capítulo 3. Conforme demonstrado em SS, a equação do (log)preço futuro na maturidade τ , no tempo t é dada por:

$$\ln F_{t,\tau} = A^*(\tau) + e^{-\kappa\tau} \chi_t + \xi_t + v_{t,\tau}, v_{t,\tau} \sim \mathbf{N}\left(0, \sigma_{v_{t,\tau}}^2\right) \quad (2-6)$$

onde:

$$A^*(\tau) = \mu_\xi^* \tau - \frac{\lambda_\chi}{\kappa} (1 - e^{-\kappa\tau}) + \frac{1}{2} \left((1 - e^{-2\kappa\tau}) \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + \sigma_\xi^2 \tau + 2 \frac{\sigma_\chi \sigma_\xi \rho_{\chi\xi}}{\kappa} (1 - e^{-\kappa\tau}) \right)$$

sendo os processos dos fatores descritos por:

$$\begin{aligned}\chi_t &= e^{-\kappa\Delta t}\chi_{t-\Delta t} + \omega_{1,t} \\ \xi_t &= \mu_\xi\Delta t + \xi_{t-\Delta t} + \omega_{2,t}\end{aligned}\quad (2-7)$$

onde $\omega_{1,t} = \sigma_\chi\Delta z_\chi$, $\omega_{2,t} = \sigma_\xi\Delta z_\xi$ e $\text{Corr}(\omega_{1,t}, \omega_{2,t}) = \sigma_\chi\sigma_\xi\rho_{\chi\xi}\Delta t$.

2.2.2

Previsão do preço spot e do preço futuro

Nesta seção deduzimos as expressões para a previsão, por extrapolação, para o preço spot via modelo SS, a qual será calculada para $t = T + \ell\Delta t$, onde $\ell = 1, 2, \dots$, e T corresponde ao tempo da última observação disponível da série. A expressão da média condicional do **preço spot** para $\Delta t \approx 0$ é dada pela seguinte equação:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{T+\ell} &= \mathbf{E}(S_{T+\ell}|\mathfrak{S}_T) \\ \hat{S}_{T+\ell} &= \exp\left(\mathbf{E}(\ln S_{T+\ell}|\mathfrak{S}_T) + \frac{1}{2}\mathbf{Var}(\ln S_{T+\ell}|\mathfrak{S}_T)\right) \\ \hat{S}_{T+\ell} &= \exp\left(\hat{A}(\ell) + e^{-\hat{\kappa}\ell\Delta t}\hat{\chi}_T + \hat{\xi}_T\right)\end{aligned}\quad (2-8)$$

onde

$$\hat{A}(\ell) = \hat{\mu}_\xi\ell\Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{1 - e^{-2\hat{\kappa}\ell\Delta t}}{2\hat{\kappa}}\hat{\sigma}_\chi^2 + \hat{\sigma}_\xi^2\ell\Delta t + 2\frac{1 - e^{-\hat{\kappa}\ell\Delta t}}{\hat{\kappa}}\hat{\rho}_{\chi\xi}\hat{\sigma}_\chi\hat{\sigma}_\xi\right)$$

Fazendo ℓ grande, e considerando $0 < (1 - \hat{\kappa}\Delta t) < 1$ a expressão para a função de previsão do preço spot torna-se:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{T+\ell} &= \exp\left(\hat{A}(\ell)_\infty + \hat{\xi}_T\right) \\ \hat{A}(\ell)_\infty &= \left(\hat{\mu}_\xi + \frac{\hat{\sigma}_\xi^2}{2}\right)\ell\Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\sigma}_\chi^2}{2\hat{\kappa}} + 2\frac{\hat{\rho}_{\chi\xi}\hat{\sigma}_\chi\hat{\sigma}_\xi}{\hat{\kappa}}\right)\end{aligned}\quad (2-9)$$

Da equação (2-9) é possível observar que a função de previsão apresenta uma taxa de crescimento que depende do drift e da volatilidade do fator de longo prazo via $\left(\hat{\mu}_\xi + \frac{\hat{\sigma}_\xi^2}{2}\right)$. Além disso observa-se que a previsão é dominada pelo fator de longo prazo.

De forma análoga a previsão ℓ passos à frente para o **preço futuro** com maturidade τ será dada por:

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{T+\ell} &= \mathbf{E}^* (F_{T+\ell} | \mathfrak{S}_T) \\
\hat{F}_{T+\ell} &= \exp \left(\mathbf{E}^* (\ln F_{T+\ell} | \mathfrak{S}_T) + \frac{1}{2} \mathbf{Var}^* (\ln F_{T+\ell} | \mathfrak{S}_T) \right) \\
\hat{F}_{T+\ell} &= \exp \left(\hat{A}^*(\tau + \ell \Delta t) + e^{-\hat{\kappa}(\tau + \ell \Delta t)} \hat{\chi}_T + \hat{\xi}_T + \frac{\hat{\sigma}_{v\tau}}{2} \right)
\end{aligned} \tag{2-10}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\hat{A}^*(\tau + \ell \Delta t) &= -\frac{\hat{\lambda}_\chi}{\hat{\kappa}} (1 - e^{-\hat{\kappa}(\tau + \ell \Delta t)}) + \hat{\mu}_\xi^*(\tau + \ell \Delta t) + \dots \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{-2\hat{\kappa}(\tau + \ell \Delta t)}}{2\hat{\kappa}} \hat{\sigma}_\chi^2 + \hat{\sigma}_\xi^2(\tau + \ell \Delta t) + 2 \frac{1 - e^{-\hat{\kappa}(\tau + \ell \Delta t)}}{\hat{\kappa}} \hat{\rho}_{\chi\xi} \hat{\sigma}_\chi \hat{\sigma}_\xi \right).
\end{aligned}$$

Para ℓ grande, a previsão em valor esperado tende para:

$$\hat{F}_{T+\ell} = \exp \left(\hat{A}_\infty^*(\tau + \ell \Delta t) + \hat{\xi}_T + \frac{\hat{\sigma}_{v\tau}}{2} \right) \tag{2-11}$$

onde:

$$\hat{A}_\infty^*(\tau + \ell \Delta t) = -\frac{\hat{\lambda}_\chi}{\hat{\kappa}} + \left(\hat{\mu}_\xi^* + \frac{\hat{\sigma}_\xi^2}{2} \right) (\tau + \ell \Delta t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\sigma}_\chi^2}{2\hat{\kappa}} + 2 \frac{\hat{\rho}_{\chi\xi} \hat{\sigma}_\chi \hat{\sigma}_\xi}{\hat{\kappa}} \right)$$

As equações de previsão aqui apresentadas, tanto do preço spot como do preço futuro, são válidas para Δt pequeno, pois utilizou-se que $(1 - \kappa \Delta t) \approx e^{-\kappa \Delta t}$.

2.3

Modelo SS com Intervenções

O modelo SS padrão assume que a taxa de variação da componente de longo prazo (μ_ξ) é constante ao longo do tempo, mas este pressuposto nem sempre é adequado para descrever séries de preços. Evidências sobre esta conjectura são apresentadas no Capítulo 7, onde testes de **razão de verossimilhança**³ são realizados. Mais especificamente ao se ajustar o modelo SS às séries de preços futuros de petróleo e considerando a seguinte partição nos períodos de tempo: t_0 : data inicial da base de dados, t_1 -começo do carecimento da demanda da China e

³A hipótese nula deste teste diz que o vetor de parâmetros θ está contido num subconjunto específico Θ_0 pertencente ao espaço paramétrico Θ .

$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$

$$H_1 : \theta \in \Theta$$

e o estatístico deste teste está definido como $\Lambda = 2(\log L_1 - \log L_0)$ o qual se distribui assintoticamente como uma $\chi_{(p)}^2$, onde L_1 é a verossimilhança do modelo definido em H_1 e L_0 a verossimilhança definida em H_0 e p é o número de parâmetros restritos em H_0 , vide (Harvey, 1989, cap. 5, pág. 234).

da Índia, t_2 -começo da caída do preço para se estabilizar, como consequência da especulação que o preço subiria mais e t_3 -última data disponível dos dados.

2.3.1 Equações do modelo

O modelo considera uma taxa de variação do fator de longo prazo (μ_ξ) no período em que o preço do preço está estável ($t_0 < t < t_1$), isso antes da crise financeira de 2008; outra taxa que caracteriza a subida do preço do petróleo até chegar a um preço máximo ($t_1 < t < t_2$) e outra taxa na descida do preço ($t_2 < t < t_3$). Este modelo com mudanças no drift do fator de longo prazo μ_ξ é construído sobre o modelo SS padrão conforme as equações (4-19) e (4-20). A Figura 2.1 explicita melhor as intervenções consideradas.

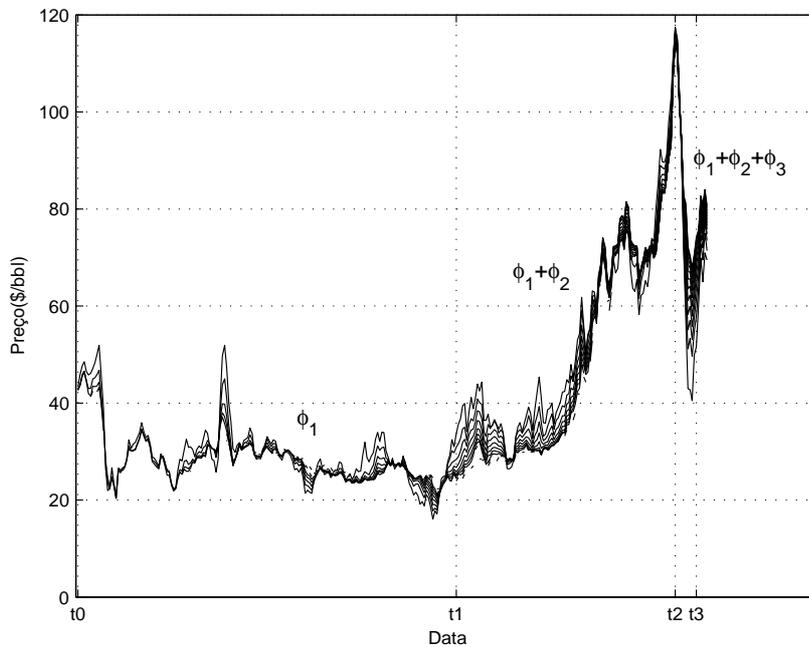


Figura 2.1: Intervenções consideradas na taxa de crescimento do fator de longo prazo

Assim a taxa de variação do fator de longo prazo será definida como:

$$\mu_\xi = \begin{cases} \phi_1 & t_0 \leq t < t_1 \\ \phi_1 + \phi_2 & t_1 \leq t < t_2 \\ \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases} \quad (2-12)$$

Esta extensão do modelo conserva todas as características do modelo SS padrão. Apenas admite que a taxa μ_ξ muda por períodos. Os períodos considerados são $t_0 = \text{Jan}/1985$, $t_1 = \text{Nov}/1999$, $t_2 = \text{Jun}/2008$ e $t_3 = \text{Set}/2009$.

Os resultados do ajuste deste modelo fornece indícios que μ_ξ não é o mesmo para diferentes períodos de tempo. Assim é natural que consideremos a possibilidade de uma outra extensão do modelo SS, em que μ_ξ varia estocasticamente no tempo. Esta classe de modelos será apresentada na seção seguinte.

2.4

Modelo SS com drift estocástico

Uma das características do modelo SS é que a função de previsão diverge linearmente para horizontes longos. Isso não faz muito sentido para a teoria de oferta e demanda aplicada ao preço do petróleo. Considerar μ_ξ constante não é totalmente adequado como já foi visto no item anterior, e uma das possibilidades para tentar diminuir a explosão da função de previsão do modelo SS padrão é propor um modelo com tendência amortecida, onde, por construção, a tendência apresenta um crescimento linear que se estabiliza para horizontes de tempo longo, atingindo um valor limite⁴. As equações que definem o modelo SS com drift estocástico são dados a seguir:

$$\begin{aligned}\ln S_t &= \chi_t + \xi_t \\ cd\chi_t &= -\kappa_\chi\chi_t dt + \sigma_\chi dz_\chi \\ d\xi_t &= \mu_t dt + \sigma_\xi dz_\xi \\ d\mu_t &= -\kappa_\mu\mu_t dt + \sigma_\mu dz_\mu\end{aligned}\tag{2-13}$$

onde $dz_\chi dz_\xi = \rho_{\chi\xi} dt$, $dz_\chi dz_\mu = 0$ e $dz_\mu dz_\xi = 0$.

A versão neutra ao risco das equações (2-13) são dadas por:

$$\begin{aligned}\ln S_t &= \chi_t + \xi_t \\ d\chi_t &= (-\kappa_\chi\chi_t - \lambda_\chi) dt + \sigma_\chi dz_\chi^* \\ d\xi_t &= (\mu_t - \lambda_\xi) dt + \sigma_\xi dz_\xi^* \\ d\mu_t &= -\kappa_\mu\mu_t dt + \sigma_\mu dz_\mu\end{aligned}\tag{2-14}$$

onde λ_χ e λ_ξ não os prêmios de risco do fator de curto e longo prazo respectivamente, e $dz_\chi^* dz_\xi^* = \rho_{\chi\xi} dt$, $dz_\chi^* dz_\mu = 0$ e $dz_\mu dz_\xi^* = 0$.

As versões discretas das equações (2-13) e (2-14) estão dadas respectivamente por:

⁴A inspiração do nosso modelo é o modelo de tendência estocástica amortecida sugerida em (Harvey, 1989, cap. 2, pág. 46).

$$\begin{aligned}\chi_t &= (1 - \kappa_\chi \Delta t) \chi_{t-\Delta t} + \sigma_\chi \Delta z_\chi \\ \xi_t &= \mu_{t-\Delta t} \Delta t + \xi_{t-\Delta t} + \sigma_\xi \Delta z_\xi \\ \mu_t &= (1 - \kappa_\mu \Delta t) \mu_{t-\Delta t} + \sigma_\mu \Delta z_\mu\end{aligned}\tag{2-15}$$

$$\begin{aligned}\chi_t &= -\lambda_\chi \Delta t + (1 - \kappa_\chi \Delta t) \chi_{t-\Delta t} + \sigma_\chi \Delta z_\chi^* \\ \xi_t &= -\lambda_\xi \Delta t + \mu_{t-\Delta t} \Delta t + \xi_{t-\Delta t} + \sigma_\xi \Delta z_\xi^* \\ \mu_t &= (1 - \kappa_\mu \Delta t) \mu_{t-\Delta t} + \sigma_\mu \Delta z_\mu\end{aligned}\tag{2-16}$$

onde $\Delta z_\chi \Delta z_\xi = \Delta z_\chi^* \Delta z_\xi^* = \rho_{\chi\xi} \Delta t$, $\Delta z_\chi \Delta z_\mu = \Delta z_\chi^* \Delta z_\mu = 0$ e $\Delta z_\mu \Delta z_\xi = \Delta z_\mu \Delta z_\xi^* = 0$.

2.4.1

Equação do preço futuro

Como no modelo SS original, temos que expressar o modelo SS com drift estocástico em termos dos preços do mercado futuro. Das equações (2-16) e da relação (2-3) temos o que o preço futuro para a maturidade τ no tempo t é dado por:

$$\ln F_{t,\tau} = B^*(\tau) + e^{-\kappa_\chi \tau} \chi_t + \xi_t + \frac{1 - e^{-\kappa_\mu \tau}}{\kappa_\mu} \mu_t + v_{t,\tau}\tag{2-17}$$

onde $v_{t,\tau} \sim \mathbf{N}(0, \sigma_{v_{t,\tau}})$ e

$$\begin{aligned}B^*(\tau) &= -\frac{\lambda_\chi}{\kappa_\chi} (1 - e^{-\kappa_\chi \tau}) - \lambda_\xi \tau + \frac{1}{2} \left((1 - e^{-2\kappa_\chi \tau}) \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa_\chi} + \dots \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa_\chi} (1 - e^{-\kappa_\chi \tau}) + \sigma_\xi^2 \tau + \frac{\sigma_\mu^2}{\kappa_\mu^2} \left(\tau - \frac{2}{\kappa_\mu} (1 - e^{-\kappa_\mu \tau}) + \frac{1}{2\kappa_\mu} (1 - e^{-2\kappa_\mu \tau}) \right) \right).\end{aligned}$$

2.4.2

Previsão do preço spot

De forma similar, usando as duas primeiras equações de (2-8), temos a seguinte equação para a previsão do preço spot ℓ passos à frente:

$$\hat{S}_{T+\ell} = \exp \left(\hat{B}(\ell) + e^{-\hat{\kappa}_\chi \ell \Delta t} \hat{\chi}_T + \hat{\xi}_T + \frac{1 - e^{-\hat{\kappa}_\mu \ell \Delta t}}{\hat{\kappa}_\mu} \hat{\mu}_T \right)\tag{2-18}$$

onde:

$$\hat{B}(\ell) = \frac{1}{2} \left((1 - e^{-2\hat{\kappa}_\chi \ell \Delta t}) \frac{\hat{\sigma}_\chi^2}{2\hat{\kappa}_\chi} + 2 \frac{\hat{\rho}_{\chi\xi} \hat{\sigma}_\chi \hat{\sigma}_\xi}{\hat{\kappa}_\chi} (1 - e^{-\hat{\kappa}_\chi \ell \Delta t}) + \hat{\sigma}_\xi^2 \ell \Delta t + \dots \right. \\ \left. + \frac{\hat{\sigma}_\mu^2}{\hat{\kappa}_\mu^2} \left(\ell \Delta t - \frac{2}{\hat{\kappa}_\mu} (1 - e^{-\hat{\kappa}_\mu \ell \Delta t}) + \frac{1}{2\hat{\kappa}_\mu} (1 - e^{-2\hat{\kappa}_\mu \ell \Delta t}) \right) \right).$$

Quando ℓ é grande a expressão anterior assume a forma:

$$\hat{S}_{T+\ell} = \exp \left(\hat{B}(\ell)_\infty + \hat{\xi}_T + \frac{\hat{\mu}_T}{\hat{\kappa}_\mu} \right) \quad (2-19)$$

onde:

$$\hat{B}(\ell)_\infty = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\sigma}_\chi^2}{2\hat{\kappa}_\chi} + 2 \frac{\hat{\rho}_{\chi\xi} \hat{\sigma}_\chi \hat{\sigma}_\xi}{\hat{\kappa}_\chi} - \frac{3\hat{\sigma}_\mu^2}{2\hat{\kappa}_\mu^3} \right) + \left(\frac{\hat{\sigma}_\xi^2}{2} + \frac{\hat{\sigma}_\mu^2}{2\hat{\kappa}_\mu^2} \right) \ell \Delta t.$$

A previsão ainda diverge quando $\ell \rightarrow +\infty$, pois o termo $\left(\frac{\hat{\sigma}_\xi^2}{2} + \frac{\hat{\sigma}_\mu^2}{2\hat{\kappa}_\mu^2} \right)$, é positivo. Assim sendo a previsão ainda será dominada pelo fator de longo prazo, como no modelo SS padrão.

O modelo SS com drift estocástico apresenta função de previsão que converge para horizontes longos (Harvey, 1989). Em nosso caso estamos modelando $\ln S_t$, e assim a previsão para esta série vai convergir assintoticamente, mas este comportamento não será verificado para S_t , porque a função de previsão para S_t além de considerar o valor esperado de $\ln S_t$ considera também a variância de $\ln S_t$, a qual não converge para horizontes longos. A Figura 2.2 apresenta, a título de exemplo a previsão para $\ln S_t$ deste modelo. Quando $\ell \rightarrow \infty$ a previsão de $\ln S_t$ converge para $\hat{\xi}_T + \frac{\hat{\mu}_T}{\hat{\kappa}_\mu}$.

De forma similar obtemos a previsão pelo preço futuro com maturidade τ . Fazendo uso das equações neutras ao risco (2-16), e das duas primeiras equações de (2-10) temos:

$$\hat{F}_{T+\ell} = \exp \left(\hat{B}^*(\tau + \ell \Delta t) + e^{-\hat{\kappa}_\chi(\tau + \ell \Delta t)} \hat{\chi}_T + \hat{\xi}_T + \frac{1 - e^{-\hat{\kappa}_\mu(\tau + \ell \Delta t)}}{\hat{\kappa}_\mu} \hat{\mu}_T + \frac{\hat{\sigma}_{v_\tau}}{2} \right) \quad (2-20)$$

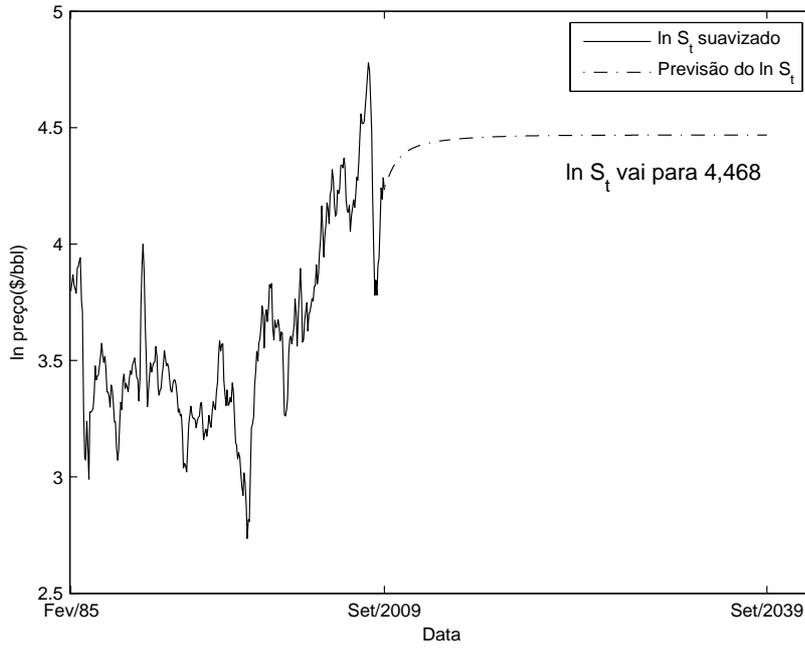


Figura 2.2: Previsão de $\ln S_t$ do petróleo

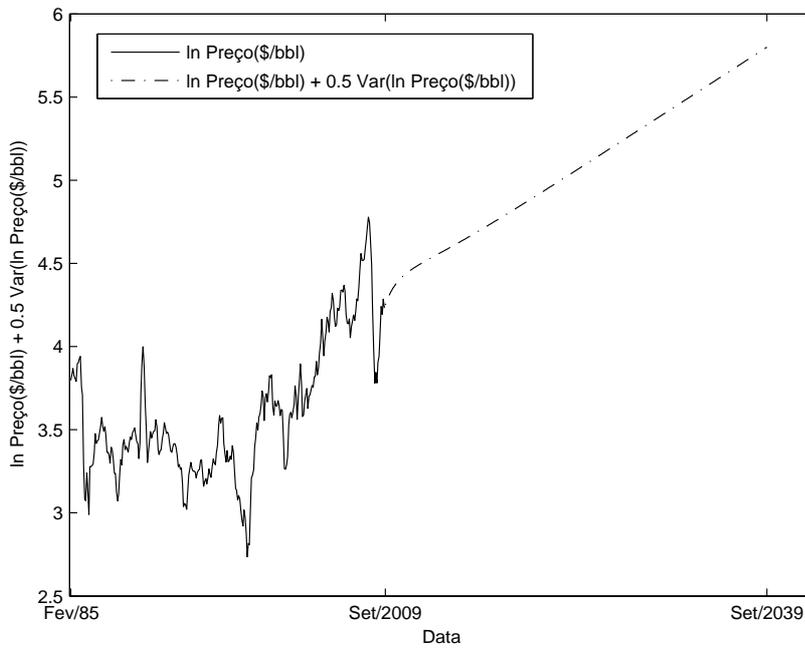


Figura 2.3: Previsão de $\ln S_t + 0.5Var(\ln S_t)$ do petróleo

3

Modelo multivariado para os preços do petróleo e dos derivados

3.1

Introdução

Na seção anterior foi apresentado o modelo SS padrão juntamente com duas extensões desenvolvidos nesta dissertação: o modelo SS com drift estocástico de mudança discreta e o modelo SS com drift estocástico de mudança contínua. A informação utilizada para a estimação dos modelos supracitados foram os preços do mercado futuro do petróleo. Nesta seção iremos desenvolver um modelo multivariado para o preço do petróleo e de alguns dos seus derivados. A motivação central para o desenvolvimento deste modelo é a obtenção de previsões conjuntas para os preços do petróleo e de seus derivados, de uma forma mais eficiente, quando comparado a um modelo univariado para cada produto.

Como ponto inicial da formulação do modelo multivariado, utilizamos o **modelo SS com drift estocástico** (2-13) para estimar os parâmetros e fatores para cada derivado individualmente. Na estimação deste novo modelo consideramos o preço spot como preço futuro de 1 mês para os derivados somente com preço spot, pois o modelo não é identificável considerando maturidade zero (preço spot). A Figura 3.1 apresenta os preços de petróleo, gasolina e querosene. Sua inspeção visual permite concluir que as séries, embora não estacionárias, evoluem de forma síncrona ao longo deste período, o que é esperado, uma vez que o petróleo é insumo para estes e outros derivados, e assim parte substancial das variações do preço do petróleo é transferida para os preços dos derivados. Tecnicamente a "sincronia" observada entre séries não-estacionárias pode ser formalizada através do conceito de co-integração. Grosso modo, séries não-estacionárias e da mesma ordem de integração são ditas co-integradas quando existem combinações lineares destas séries que apresentam ordem de integração inferior a ordem das séries originais. Resultados teóricos garantem que séries co-integradas apresentam componentes de tendência comum. Assim sendo, visualmente séries co-integradas tendem a apresentar comportamento em sincronia conforme a Figura 3.1.

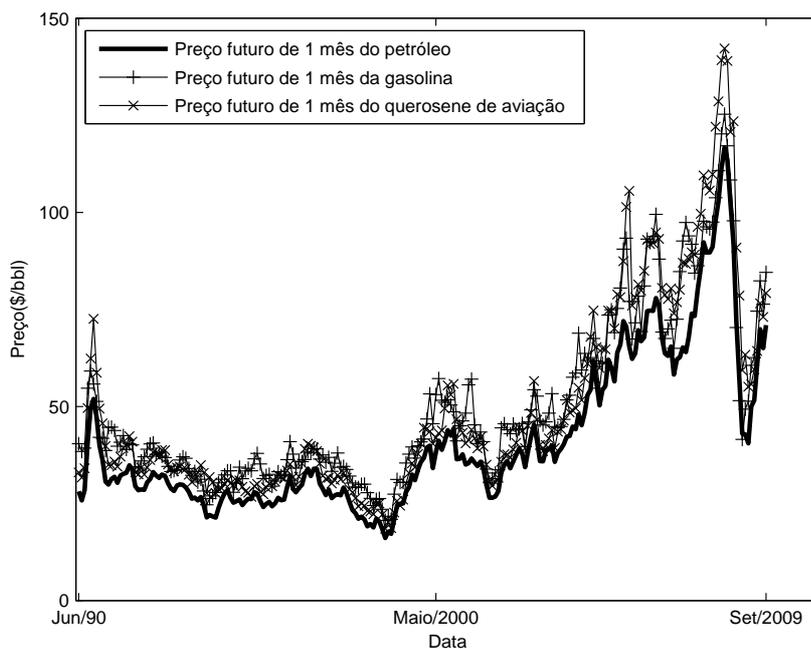


Figura 3.1: Preços futuros do petróleo e alguns derivados.

A nossa estratégia para especificação do modelo multivariado inicia-se com a estimação do modelo SS (univariado) com drift estocástico para cada uma destas séries de preços, a partir do qual são extraídos, para cada série de preços, os fatores de longo e de curto prazo. Vide, por exemplo, a Figura 3.2, que apresenta os fatores de curto prazo. Para cada conjunto de fatores extraídos - os fatores de longo prazo e os fatores de curto prazo - realizou-se uma Análise de Componente Principal (ACP)¹ com objetivo de investigar se um número reduzido de componentes comuns estaria associado a cada um dos conjuntos de componentes. Os resultados desta análise, conforme mostrados na Tabela 3.2, indicam que para as séries dos fatores de curto prazo a primeira componente (PC1) explica 61% da variância destas séries.

A Figura 3.3 apresenta ao fator de longo prazo para cada derivado, neste fator é errado fazer o ACP, pois ele é não estacionário, é recomendável fazer um teste de co-integração.

Decidiu-se então especificar um modelo multivariado para o log dos preços spot do petróleo e dos derivados previamente listados utilizando apenas duas componentes globais: uma componente global de curto prazo e uma componente global de longo prazo. Como veremos na próxima seção, estas componentes globais ou comuns, serão indutoras dos movimentos específicos de curto e de

¹O ACP é realizada sobre a matriz de correlações das séries de cada fator.

Tabela 3.1: Lista de petróleo e derivados considerados na modelagem

Derivado	Tipo de informação	Unidade
Petróleo WTI	Preços futuros	USD/bbl
Gasolina	Preços futuros	USD/bbl
Gas Natural	Preços futuros	USD/MMBtu
Heat Oil	Preços futuros	USD/bbl
Butano	Preço spot	USD/bbl
Diesel	Preço spot	USD/bbl
Óleo combustível HSFO	Preço spot	USD/bbl
Óleo combustível LSFO	Preço spot	USD/bbl
Nafta	Preço spot	USD/bbl
Propano	Preço spot	USD/bbl
Querosene	Preço spot	USD/bbl

Tabela 3.2: ACP para o fator de curto prazo

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	...	PC11
Autovalor	6,68	1,41	0,86	0,63	0,51	0,39	...	0,02
Prop. variância	0,61	0,13	0,08	0,06	0,05	0,04	...	0,00
Prop. acumulada	0,61	0,74	0,82	0,87	0,92	0,95	...	1,00

longo prazo associados ao petróleo e seus derivados.

3.2

Equações do modelo

Considerando a existência de dois fatores comuns que determinam o comportamento dos preços dos derivados, definimos (log) preço spot do derivado i ² no tempo t como:

$$\begin{aligned} \ln S_{t,i} &= \chi_{t,i} + \xi_{t,i} \\ \chi_{t,i} &= \phi_{i,0}^X + \phi_{i,1} X_t \\ \xi_{t,i} &= \phi_{i,0}^E + \phi_{i,2} E_t \end{aligned} \tag{3-1}$$

onde X_t e E_t são os fatores globais que determinam o comportamento dos preços. Substituindo os fatores individuais $\chi_{t,i}$ e $\xi_{t,i}$ na equação de (log) preço spot obtemos:

²Pode-se mostrar que esta especificação implica em relações determinísticas entre os preços spot dos diversos produtos. A relação fortemente linear observada entre os preços futuros destes produtos na maturidade de 1 mês sugere que esta propriedade do modelo multivariado tem alguma sustentação empírica.

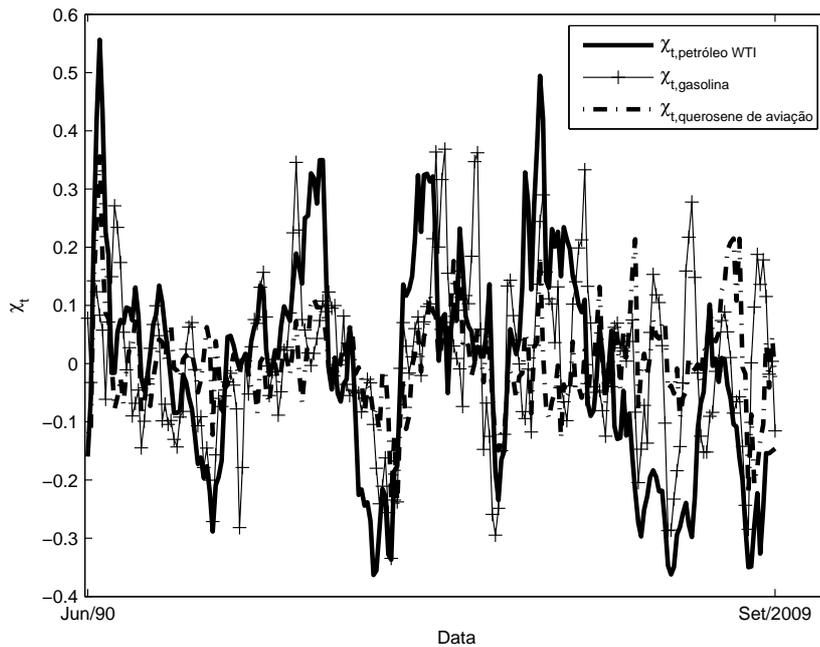


Figura 3.2: Fator de curto prazo para o petróleo e alguns derivados.

$$\begin{aligned}
 \ln S_{t,i} &= \phi_{i,0} + \phi_{i,1}X_t + \phi_{i,2}E_t \\
 dX_t &= -\kappa_X X_t dt + \sigma_X dz_X \\
 dE_t &= U_t dt + \sigma_E dz_E \\
 dU_t &= -\kappa_U U_t dt + \sigma_U dz_U
 \end{aligned}
 \tag{3-2}$$

onde $\phi_{i,0} = \phi_{i,0}^X + \phi_{i,0}^E$. A versão discreta das equações (3-2) é dada por:

$$\begin{aligned}
 \ln S_{t,i} &= \phi_{i,0} + \phi_{i,1}X_t + \phi_{i,2}E_t \\
 X_t &= e^{-\kappa_X \Delta t} X_{t-\Delta t} + \sigma_X \Delta z_X \\
 E_t &= U_{t-\Delta t} \Delta t + E_{t-\Delta t} + \sigma_E \Delta z_E \\
 U_t &= e^{-\kappa_U \Delta t} U_{t-\Delta t} + \sigma_U \Delta z_U
 \end{aligned}
 \tag{3-3}$$

3.2.1

Equação do preço futuro

A equação do preço futuro com maturidade τ para o derivado i no tempo t é calculado a partir da versão neutra ao risco das equações (3-2) discretas, as quais são dadas por:

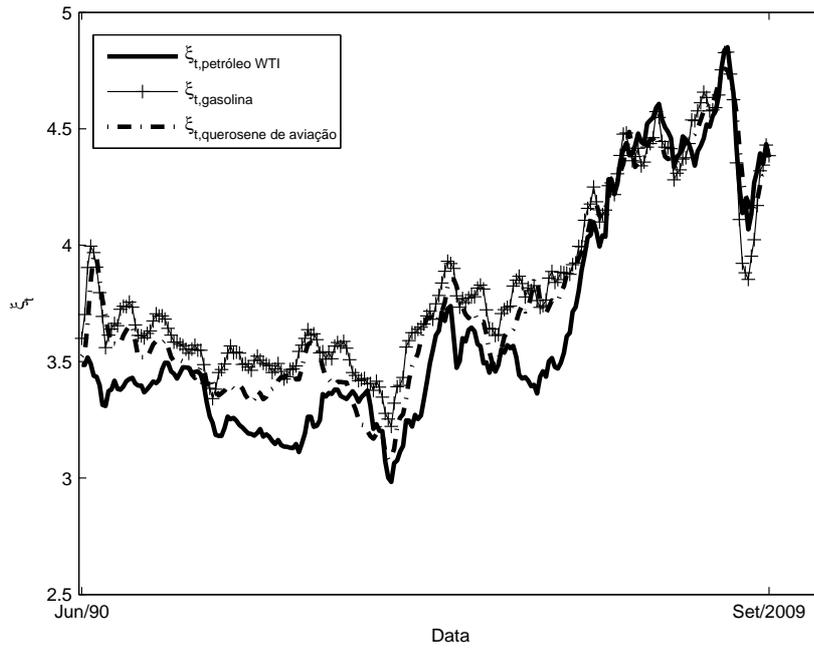


Figura 3.3: Fator de longo prazo do petróleo e alguns derivados

$$\begin{aligned}
 \ln S_{t,i} &= \phi_{i,0} + \phi_{i,1}X_t + \phi_{i,2}E_t \\
 X_t &= -\lambda_X\Delta t + e^{-\kappa_X\Delta t}X_{t-\Delta t} + \sigma_X\Delta z_X^* \\
 E_t &= -\lambda_E\Delta t + U_{t-\Delta t}\Delta t + E_{t-\Delta t} + \sigma_E\Delta z_E^* \\
 U_t &= e^{-\kappa_U\Delta t}U_{t-\Delta t} + \sigma_U\Delta z_U
 \end{aligned}
 \tag{3-4}$$

Assim a equação do preço futuro será dada por:

$$\begin{aligned}
 \ln F_{t,\tau}^{(i)} &= B_i^*(\tau) + \phi_{i,1}e^{-\kappa_X\tau}X_t + \phi_{i,2}E_t + \frac{\phi_{i,2}}{\kappa_U}(1 - e^{-\kappa_U\tau})U_t + v_{t,\tau}^{(i)} \\
 B_i^*(\tau) &= \phi_{i,0} - \frac{\lambda_X}{\kappa_X}\phi_{i,1}(1 - e^{-\kappa_X\tau}) - \lambda_E\phi_{i,2}\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_X^2}{2\kappa_X}\phi_{i,1}^2(1 - e^{-2\kappa_X\tau}) + \right. \\
 &\quad \left. + 2\phi_{i,1}\phi_{i,2}\frac{\rho_{XE}\sigma_X\sigma_E}{\kappa_X}(1 - e^{-\kappa_X\tau}) + \phi_{i,2}^2\sigma_E^2\tau + \phi_{i,2}^2\frac{\sigma_U^2}{2\kappa_U}\left(\tau - \frac{2}{\kappa_U}(1 - e^{-\kappa_U\tau}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2\kappa_U}(1 - e^{-2\kappa_U\tau})\right)\right)
 \end{aligned}
 \tag{3-5}$$

3.3

Previsão do preço spot e futuros dos derivados

A seguinte equação apresenta a previsão do preço spot ℓ passos à frente para o derivado i .

$$\hat{S}_{T+\ell,i} = \exp \left(\hat{B}_i(\ell) + \hat{\phi}_{i,1} e^{-\hat{\kappa}_X \ell \Delta t} \hat{X}_T + \hat{\phi}_{i,2} \hat{E}_T + \frac{\hat{\phi}_{i,2}}{\hat{\kappa}_U} (1 - e^{-\hat{\kappa}_U \ell \Delta t}) \hat{U}_T \right) \quad (3-6)$$

onde:

$$\begin{aligned} \hat{B}_i(\ell) = & \hat{\phi}_{i,0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\sigma}_X^2}{2\hat{\kappa}_X} \hat{\phi}_{i,1}^2 (1 - e^{-2\hat{\kappa}_X \ell \Delta t}) + 2\hat{\phi}_{i,1} \hat{\phi}_{i,2} \frac{\hat{\rho}_{XE} \hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_E}{\hat{\kappa}_X} (1 - e^{-\hat{\kappa}_X \ell \Delta t}) + \right. \\ & \left. + \hat{\phi}_{i,2}^2 \hat{\sigma}_E^2 \ell \Delta t + \hat{\phi}_{i,2}^2 \frac{\hat{\sigma}_U^2}{2\hat{\kappa}_U} \left(\ell \Delta t - \frac{2}{\hat{\kappa}_U} (1 - e^{-\hat{\kappa}_U \ell \Delta t}) + \frac{1}{2\hat{\kappa}_U} (1 - e^{-2\hat{\kappa}_U \ell \Delta t}) \right) \right) \end{aligned}$$

Quando ℓ é grande a função de previsão toma a seguinte forma:

$$\hat{S}_{T+\ell,i} = \exp \left(\hat{B}_i(\ell)_\infty + \hat{\phi}_{i,2} \hat{E}_T + \frac{\hat{\phi}_{i,2}}{\hat{\kappa}_U} \hat{U}_T \right) \quad (3-7)$$

onde:

$$\hat{B}_i(\ell)_\infty = \hat{\phi}_{i,0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\sigma}_X^2}{2\hat{\kappa}_X} \hat{\phi}_{i,1}^2 + 2\hat{\phi}_{i,1} \hat{\phi}_{i,2} \frac{\hat{\rho}_{XE} \hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_E}{\hat{\kappa}_X} - \hat{\phi}_{i,2}^2 \frac{3\hat{\sigma}_U^2}{2\hat{\kappa}_U^3} \right) + \hat{\phi}_{i,2}^2 \left(\frac{\hat{\sigma}_E^2}{2} + \frac{\hat{\sigma}_U^2}{2\hat{\kappa}_U^2} \right) \ell \Delta t$$

Observar que a previsão do preço spot para o derivado i diverge para longos horizontes de tempo, pois o termo $\hat{\phi}_{i,2}^2 \left(\frac{\hat{\sigma}_E^2}{2} + \frac{\hat{\sigma}_U^2}{2\hat{\kappa}_U^2} \right) \ell \Delta t$ que determina a tendência, é sempre positivo. Dependendo dos valores que tomem os parâmetros $\hat{\phi}_{i,2}$, σ_U , σ_E e κ_U , a tendência pode mudar.

De forma similar obtemos a previsão para o preço futuro com maturidade τ do derivado i . Então a equação de previsão para os preços futuros será dado por:

$$\hat{F}_{T+\ell,\tau}^{(i)} = \exp \left(\hat{B}_i^*(\tau + \ell \Delta t) + \hat{\phi}_{i,1} e^{-\hat{\kappa}_X (\tau + \ell \Delta t)} \hat{X}_T + \hat{\phi}_{i,2} \hat{E}_T + \frac{\hat{\phi}_{i,2}}{\hat{\kappa}_U} (1 - e^{-\hat{\kappa}_U (\tau + \ell \Delta t)}) \hat{U}_T \right) \quad (3-8)$$

onde $\hat{B}_i^*(\tau + \ell \Delta t)$ está definido na equação (3-5) e é obtida substituindo os parâmetros reais pelos estimados.

4

Modelos em Espaço de Estado e Filtro de Kalman

A modelagem em espaço de estado fornece uma metodologia padrão para tratar uma ampla variedade de problemas em séries temporais. Nesta abordagem é, em geral, assumido que o comportamento de um sistema em estudo é determinado por uma série de vetores não observáveis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, associada a uma série de observações y_1, \dots, y_n . A relação entre α_t 's e os y_t 's é especificada por um modelo em *espaço de estado*. O propósito da análise em espaço de estado é inferir sobre propriedades relevantes dos α_t 's a partir das observações conhecidas y_1, \dots, y_n (Durbin & Koopman, 2001).

Os modelos apresentados neste trabalho são colocados na forma de espaço de estado, e logo são estimados por máxima verossimilhança e filtro de Kalman.

4.1

Modelo Linear em Espaço de Estado

Seja o vetor de séries temporais p -variado $y_t, t = 1, 2, \dots, n$. O modelo linear em espaço de estado para y_t está definido pelas seguintes equações:

$$y_t = Z_t \alpha_t + d_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, H_t) \quad (4-1)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + c_t + R_t \eta_t, \quad \eta_t \sim WN(0, Q_t) \quad (4-2)$$

sendo as equações (4-1) e (4-2) chamadas respectivamente de *equação das medidas* e *equação do estado*.

O vetor α_t de dimensão m é chamado *vetor de estado*, e o *vetor de estado inicial* é dado por $\alpha_1 \sim (a_1, P_1)$.

Os processos estocásticos ε_t e η_t p -variados e r -variados, respectivamente, de médias nulas e descorrelatados no tempo, isto é $\text{corr}(\varepsilon_t, \eta_s) = 0, \quad \forall t, s = 1, 2, \dots, n$ e também descorrelatados com α_1 .

As matrizes/vetores $Z_t, d_t, H_t, Q_t, c_t, R_t$ e T_t evoluem deterministicamente no tempo e são chamadas de *matrizes do sistema*. Se ε_t e η_t são independentes, distribuídos normalmente e $[\varepsilon_t, \eta_t]'$ independente de α_1 , então o modelo é chamado de *modelo em espaço de estado linear Gaussiano*.

Se adicionalmente ao pressuposto de normalidade, algumas matrizes do sistema dependerem de termos passados de y_t , então o modelo é chamado de *modelo em espaço de estado condicionalmente Gaussiano* (Harvey, 1989). Algumas matrizes do sistema podem ser invariantes no tempo. No caso em que todas cumprem esse pressuposto o modelo é chamado de *modelo invariante no tempo*.

Entre os modelos mais conhecidos, os quais podem ser colocados na forma de espaço de estado temos os *modelos estruturais univariados, multivariados, modelos ARIMA, modelos de regressão, modelos auto-regressivos com coeficientes variantes no tempo etc.*

4.2

Modelos em Espaço de Estado e Filtro de Kalman

Uma vez que o modelo é colocado na forma de espaço de estado, poderá fazer uso do filtro de Kalman para sua estimação. A seguir apresentamos os detalhes deste processo.

4.2.1

Filtragem

O processo de *filtragem* tem como objetivo a atualização do conhecimento sobre α_t a cada observação y_t que ingressa no sistema em estudo. Particularizando as equações do modelo em espaço de estado linear (4-1 e 4-2), assumimos que ε_t e η_t são independentes e normalmente distribuídos.

$$\begin{aligned} y_t &= Z_t \alpha_t + d_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, H_t) \\ \alpha_{t+1} &= T_t \alpha_t + c_t + R_t \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, Q_t) \\ \alpha_1 &\sim N(a_1, P_1) \end{aligned} \quad (4-3)$$

Seja $Y_{t-1} = \{y_1, \dots, y_{t-1}\}$ o conjunto de observações passadas. É direto ver que da equação (4-3) temos que $p(y_t | \alpha_1, \dots, \alpha_t, Y_{t-1}) = p(y_t | \alpha_t)$ e $p(\alpha_{t+1} | \alpha_t, \dots, \alpha_1, Y_t) = p(\alpha_{t+1} | \alpha_t)$. A tabela (4.1) mostra as dimensões dos vetores e matrizes do modelo dado em (4-3).

Considerando a seguinte notação $a_t = E(\alpha_t | Y_{t-1})$ e $P_t = Var(\alpha_t | Y_{t-1})$, temos as equações de filtragem explicitadas em (4-4) para $t = 1, \dots, n$ e as dimensões dos vetores e matrizes do filtro na tabela 4.2.

Tabela 4.1: Dimensões dos vetores e matrizes do modelo [4-3](#)

Vetor		Matriz	
y_t	$p \times 1$	Z_t	$p \times m$
α_t	$m \times 1$	T_t	$m \times m$
ε_t	$p \times 1$	H_t	$p \times p$
η_t	$r \times 1$	R_t	$m \times r$
		Q_t	$r \times r$
a_1	$m \times 1$	P_1	$m \times m$

Tabela 4.2: Dimensões dos vetores e matrizes do filtro [4-4](#)

Vetor		Matriz	
v_t	$p \times 1$	F_t	$p \times p$
		K_t	$m \times p$
		L_t	$m \times m$
		M_t	$m \times p$
a_t	$m \times 1$	P_t	$m \times m$

$$\begin{aligned}
 v_t &= y_t - Z_t a_t - d_t \\
 F_t &= Z_t P_t Z_t' + H_t \\
 K_t &= T_t P_t Z_t' F_t^{-1} \\
 L_t &= T_t - K_t Z_t \\
 a_{t+1} &= T_t a_t + c_t + K_t v_t \\
 P_{t+1} &= T_t P_t L_t' + R_t Q_t R_t'
 \end{aligned}
 \tag{4-4}$$

A dedução Gaussiana do filtro, apresentada em Durbin & Koopman (2001), não é a mais simples, no entanto ela evidencia que o processo de atualização (de α_t) ocorre devido a inovação v_t que contém a informação y_t que não está presente em $\sigma(Y_{t-1})$ ¹.

As equações [\(4-4\)](#) são válidas ainda quando a hipótese de normalidade é relaxada, pois em ausência de normalidade as expressões do filtro de Kalman representam estimadores lineares ótimos (Brockwell e Davis, 2002; Shumway e Stoffer, 2006).

4.2.2 Suavização

O processo de suavização considera a estimação de α_t dado y , onde $y = (y_1', \dots, y_n')'$, sendo n o tamanho da amostra. Fazendo uso da notação

¹ $\sigma(Y_t)$ é a σ -Álgebra gerada pelo vetor de observações Y_t .

$\hat{\alpha}_t = E(\alpha_t|y)$ e $V_t = Var(\alpha_t|y)$ temos as equações (4-5) do suavizador, as quais dependem de algumas matrizes calculadas na filtragem.

$$\begin{aligned} r_n &= 0, N_n = 0 \\ r_{t-1} &= Z'_t F_t^{-1} v_t + L'_t r_t \\ N_{t-1} &= Z'_t F_t^{-1} Z_t + L'_t N_t L_t \\ \hat{\alpha}_t &= a_t + P_t r_{t-1} \\ V_t &= P_t - P_t N_{t-1} P_t \end{aligned} \tag{4-5}$$

Esses estimadores são chamados de *suavizadores* (Shumway & Stoffer, 2006) porque os gráficos de linha no tempo das correspondentes estimativas são mais “suaves” do que as estimativas da filtragem. Uma prova da obtenção dessas equações, baseada na abordagem de Jong (1989) pode ser encontrada em Durbin & Koopman (2001).

4.3 Tratamento de Valores Ausentes

Um grande atrativo da abordagem de modelos em espaço de estado é a habilidade de lidar com a ausência parcial ou total de observações em cada um dos vetores y_1, \dots, y_n . De forma ilustrativa, sejam os vetores de dados onde ■ é um bloco com dados faltantes:

$$\begin{pmatrix} y_{1,1} \\ \vdots \\ y_{1,p} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_{i-1,1} \\ \vdots \\ y_{i-1,p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \blacksquare \\ \dots \\ y_{i,p} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_{n,1} \\ \vdots \\ y_{n,p} \end{pmatrix}$$

onde $y_t^\dagger = W_t y_t$ é o vetor que contém somente os dados presentes observados, sendo W_t uma matriz de seleção com as linhas de I_p correspondentes às coordenadas observadas de y_t . Desta forma, a equação (4-1) com as informações parciais é dada por:

$$y_t^\dagger = Z_t^\dagger \alpha_t + d_t^\dagger + \varepsilon_t^\dagger, \quad \varepsilon_t^\dagger \sim WN(0, H_t^\dagger) \tag{4-6}$$

na qual

$$Z_t^\dagger = W_t Z_t, \quad d_t^\dagger = W_t d_t, \quad \varepsilon_t^\dagger = W_t \varepsilon_t \quad \text{e} \quad H_t^\dagger = W_t H_t W_t'$$

As dimensões dos vetores e matrizes y_t , v_t , F_t e K_t mudam para cada t , porém a dimensão do vetor de estado não muda.

Logicamente, quando não existem dados faltantes, a equação das medidas (4-6) é igual à equação do filtro original (4-4). Entretanto se a informação no tempo t é totalmente ausente, nesse caso $Z_t^\dagger = 0$ e $d_t^\dagger = 0$, reduzindo as equações de filtragem para:

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= T_t a_t + c_t \\ P_{t+1} &= T_t P_t T_t' + R_t Q_t R_t' \end{aligned} \quad (4-7)$$

Analogamente, as equações de suavização tomam a seguinte forma:

$$\begin{aligned} r_{t-1} &= T_t' r_t \\ N_{t-1} &= T_t' N_t T_t \\ \hat{\alpha}_t &= a_t + P_t r_{t-1} \\ V_t &= P_t - P_t N_{t-1} P_t \end{aligned} \quad (4-8)$$

Os dados faltantes são obtidos a partir do vetor de estado suavizado, tal que:

$$\hat{y}_{t,i} = Z_{t,i} \hat{\alpha}_t + d_{t,i} + \hat{\varepsilon}_{t,i}$$

onde $\hat{\varepsilon}_{t,i} = 0$ se $y_{t,i}$ for uma observação faltante. Quando a observação estiver presente $\hat{y}_{t,i} = y_{t,i}$ e nesse caso não necessariamente $\hat{\varepsilon}_{t,i} = 0$.

A previsão no arcabouço dos modelos em espaço de estado com filtro de Kalman tem como objetivo prever o estado em α_{n+h} e y_{n+h} a partir das informações y_1, \dots, y_n . De forma prática, para fazer previsões h passos à frente, basta considerar as observações y_{n+1}, \dots, y_{n+h} como faltantes e rodar o filtro até y_{n+h} fazendo uso das equações com essa especificidade (4-7)².

Para que este procedimento seja viável, todas as matrizes do sistema precisam estar disponíveis até $t = n + h$, caso contrário não é possível fazer previsão mais de um passo à frente para um modelo condicionalmente Gaussiano.

4.4

Tratamento Univariado para Séries Multivariadas

A principal motivação que sugere o uso do tratamento univariado para séries multivariadas, é a eficiência computacional, pois é bem mais simples trabalhar com valores escalares do que matrizes. O exemplo mais ilustrativo deste ganho fica aparente considerando um processo de otimização com inicialização difusa, pois

²Para o caso em que $h = 1$, o problema já foi resolvido pelo filtro de Kalman (4-4).

é necessário zerar duas matrizes para poder estabilizar o processo de otimização. Quando adota-se o tratamento univariado do modelo multivariado uma dessas matrizes torna-se um escalar, sendo bem mais fácil obter um zero nesta condição do que fazendo uma matriz de zeros. Também durante o processo de otimização de um modelo multivariado é possível obter matrizes, que mesmo que não contenham todos os elementos nulos, estas matrizes podem ser singular, o qual complica ainda mais o processo de otimização, pois nesse caso é necessário considerar inversas generalizadas. Um exemplo desta classe de problemas é o surgimento da singularidade na matriz F_t .

O propósito desta abordagem é reconhecer o processo $y_t = (y_{t1}, \dots, y_{tp_t})$ descrito no tempo por:

$$\begin{pmatrix} y_{1,1} \\ \vdots \\ y_{1,p_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{2,1} \\ \vdots \\ y_{2,p_2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_{n,1} \\ \vdots \\ y_{n,p_n} \end{pmatrix} \quad (4-9)$$

como se as coordenadas $y_{t,i}$, $i = 1, \dots, p_t$; $t \in \mathbb{N}$ chegassem uma de cada vez, tendo como série univariada correspondente:

$$y_{1,1}, y_{1,2}, \dots, y_{1,p_1}, y_{2,1}, \dots, y_{2,p_2}, \dots, y_{n,1}, \dots, y_{n,p_n} \quad (4-10)$$

É claro que se y_t segue um modelo multivariado em espaço de estado, então o processo univariado em (4-10) depende de um vetor de estado. O propósito é achar um modelo univariado equivalente para (4-9) e assim as recursões de Kalman tornam-se aplicáveis. Uma vez que (4-9) é reescrita como (4-10) a dinâmica do modelo multivariado deve ser estritamente respeitada, de forma que (4-9) e (4-10) sejam probabilisticamente equivalentes.

Assumindo inicialmente a seguinte estrutura para $H_t = \text{diag}(\sigma_{t,1}^2, \dots, \sigma_{t,p_t}^2)$ ³, as equações de medidas e de estado para (4-10) são respectivamente:

$$y_{t,i} = Z_{t,i}\alpha_{t,i} + d_{t,i} + \varepsilon_{t,i}; \varepsilon_{t,i} \sim WN(0, \sigma_{t,i}^2) \quad (4-11)$$

$$i = 1, \dots, p_t, t = 1, \dots, n$$

$$\alpha_{t,i+1} = \alpha_{t,i}; i = 1, \dots, p_t - 1$$

$$\alpha_{t+1,1} = T_t\alpha_{t,p_t} + c_t + R_t\eta_{t,p_t}; \eta_{t,p_t} \sim (0, Q_t) \quad (4-12)$$

$$\alpha_{1,1} = \alpha_1$$

Onde T_t , c_t , R_t e Q_t são as matrizes do sistema correspondentes ao modelo

³Para os casos em que H_t não é diagonal sugere-se adicionar ε_t ao vetor de estado ou fazer uma decomposição em H_t , tal que seja possível adicionar a estrutura de dependência na equação de medidas (H_t cheia).

multivariado no tempo t . Como é possível observar em (4-12), a equação de estado não muda quando ela vai de uma observação para outra no mesmo tempo, mas muda quando vai da observação y_{t,p_t} para $y_{t+1,1}$.

O seguinte algoritmo de filtragem é disponibilizado em Durbin & Koopman, 2001, para implementar o filtro de Kalman previamente apresentado.

Algoritmo 1

```

 $a_{1,1} \leftarrow a_1$ 
 $P_{1,1} \leftarrow P_1$ 
for  $t = 1$  to  $n$  do
  for  $i = 1$  to  $p_t$  do
     $F_{t,i} = Z_{t,i}P_{t,i}Z'_{t,i} + \sigma_{t,i}^2$ 
     $K_{t,i} = P_{t,i}Z'_{t,i}F_{t,i}^{-1}$ 
     $v_{t,i} = y_{t,i} - Z_{t,i}a_{t,i} - d_{t,i}$ 
     $a_{t,i+1} = a_{t,i} + K_{t,i}v_{t,i}$ 
     $P_{t,i+1} = P_{t,i} - K_{t,i}F_{t,i}K'_{t,i}$ 
  end for
   $a_{t+1,1} = T_t a_{t,p_t+1} + c_t$ 
   $P_{t+1,1} = T_t P_{t,p_t+1} T'_t + R_t Q_t R'_t$ 
end for

```

um algoritmo alternativo pode ser dado por:

Algoritmo 2

```

 $a_1 \leftarrow a_1$ 
 $P_1 \leftarrow P_1$ 
for  $t = 1$  to  $\sum_{j=1}^n p_j$  do
  if  $t \in \Omega$  then
     $T_t^* = T_t; c_t^* = c_t; Q_t^* = Q_t$ 
  else
     $T_t^* = I; c_t^* = 0; Q_t^* = 0$ 
  end if
   $F_t = Z_t P_t Z'_t + \sigma_t^2$ 
   $K_t = T_t^* P_t Z'_t F_t^{-1}$ 
   $L_t = T_t^* - K_t Z_t$ 
   $v_t = y_t - Z_t a_t - d_t$ 
   $a_{t+1} = T_t^* a_t + c_t^* + K_t v_t$ 
   $P_{t+1} = T_t^* P_t L_t - R_t Q_t^* R'_t$ 
end for

```

para $\Omega = \{p_1, p_1 + p_2, \dots, \sum_{j=1}^n p_j\}$.

O algoritmo 1 é proposto por Durbin & Koopman, e é possível chegar a ele

a partir do algoritmo 2. Observe que no algoritmo 1 é feito o cálculo $\alpha_{t,p_{t+1}}$, dispensado no segundo algoritmo. Por outro lado, no algoritmo alternativo impõe-se a presença de T_t^* quando esta é matriz identidade e de c_t^* e Q_t^* quando estas são matrizes nulas, o que poderia ser substituído eficientemente pela omissão de tais matrizes em K_t , L_t , a_{t+1} e P_{t+1} . Entretanto, os cálculos em excesso do algoritmo 2 geram menores perdas de eficiência computacional dada a simplicidade das matrizes envolvidas.

Observe também que este segundo algoritmo é construído com apenas um sub-índice, substituindo os dois criados no código anterior, de forma que, todas as indexações do sistema em t, i são substituídas por $\sum_{j=1}^{t-1} p_j + i$ na nova ordenação. Com isso, matrizes do sistema do tipo $Z_{t,i}$ são representadas por $Z_{\sum_{j=1}^{t-1} p_j + i}$. Esta simplificação torna o segundo algoritmo mais intuitivo.

Lembrando que a abordagem univariada surge somente com o propósito de solucionar problemas no processo de estimação multivariada, torna-se necessário recuperar o estado filtrado correspondente ao modelo multivariado. Como é sabido $a_t = E(\alpha_t | Y_{t-1})$ e $P_t = Var(\alpha_t | Y_{t-1})$. Então, do algoritmo 1 podemos dizer que $a_t = a_{t,1}$ e no algoritmo 2 resgatamos que $a_t = a_{\sum_{j=1}^{t-1} p_j + 1}$. De forma análoga temos para a matriz variância covariância do vetor de estado dos dois algoritmos respectivamente $P_t = P_{t,1}$ e $P_t = P_{\sum_{j=1}^{t-1} p_j + 1}$. Escrevendo o modelo em espaço de estado multivariado para (4-9) e fazendo uso das equações do filtro (4-4) é possível recuperar as inovações v_t do modelo multivariado e outros resultados que sejam de nosso interesse, pois todos eles são função de a_t e P_t .

Após a obtenção das matrizes resultantes do filtro, é possível construir os seguintes algoritmos para suavização.

Algoritmo 3

$$r_{n,p_n} \leftarrow 0$$

$$N_{n,p_n} \leftarrow 0$$

for $t = n$ to 1 **do**

for $i = p_t$ to 1 **do**

$$L_{t,i} = I_m - K_{t,i} Z_{t,i}$$

$$r_{t,i-1} = Z'_{t,i} F_{t,i}^{-1} v_{t,i} + L'_{t,i} r_{t,i}$$

$$N_{t,i-1} = Z'_{t,i} F_{t,i}^{-1} Z_{t,i} + L'_{t,i} N_{t,i} L_{t,i}$$

$$\hat{\alpha}_{t,i} = a_{t,i} + P_{t,i} r_{t,i-1}$$

$$V_{t,i} = P_{t,i} - P_{t,i} N_{t,i-1} P_{t,i}$$

end for

$$r_{t-1,p_t} = T'_{t-1} r_{t,0}$$

$$N_{t-1,p_t} = T'_{t-1} N_{t,0} T_{t-1}$$

end for

e o algoritmo de suavização correspondente ao algoritmo de filtragem 2 é o seguinte:

Algoritmo 4

$$r_{\sum_{j=1}^n p_j} = 0$$

$$N_{\sum_{j=1}^n p_j} = 0$$

for $t = \sum_{j=1}^n p_j$ **to** 1 **do**

if $t \in \Omega$ **then**

$$T_t^* = T_t$$

else

$$T_t^* = I_m$$

end if

$$L_t = T_t - K_t Z_t$$

$$r_{t-1} = Z'_t F_t^{-1} v_t + L'_t r_t$$

$$N_{t-1} = Z'_t F_t^{-1} Z_t + L'_t N_t L_t$$

$$\hat{\alpha}_t = a_t + P_t r_{t-1}$$

$$V_t = P_t - P_t N_{t-1} P_t$$

end for

4.5

Inicialização do Filtro de Kalman

Nas seções anteriores supôs-se o conhecimento, a priori, de a_1 e P_1 , o que nem sempre é factível. O problema da inicialização surge quando o vetor de estado tem pelo menos uma coordenada não estacionária, de forma que incide grande incerteza sobre a média e variância dessa coordenada, o que implica em dificuldade para fixação de a_1 e P_1 . Decompondo o vetor de estado em $t = 1$ como a soma de dois termos, um contendo as coordenadas estacionárias ($m - q$) e o outro as não estacionárias (q).

$$\alpha_1 = a + A\delta + R_0\eta_0, \quad \eta_0 \sim N(0, Q_0) \quad (4-13)$$

onde o vetor a_t de dimensão $m \times 1$ é conhecido, δ um vetor de dimensão $q \times 1$ de quantidades desconhecidas, as matrizes A de dimensão $m \times q$ e R_0 de dimensão $m \times (m - q)$ são matrizes de seleção, onde cada uma delas contem as colunas da matriz I_m correspondentes a coordenadas não estacionárias e estacionárias, respectivamente.

O vetor δ pode ser tratado como um vetor fixo de parâmetros desconhecidos ou como um vetor de variáveis aleatórias normais com variâncias infinitas. No caso onde δ é fixo e desconhecido sua estimação pode ser feita por máxima verossimilhança; ver Rosenberg(1973). Considerando o segundo caso

$$\delta \sim N(0, \kappa I_q) \quad (4-14)$$

de (4-13) e (4-14)

$$\begin{aligned} a_1 &= E(\alpha_1) = a \\ P_1 &= Var(\alpha_1) = \kappa AA' + R_0 Q_0 R_0' = \kappa P_\infty + P_* \end{aligned}$$

Se o comportamento do i -ésimo elemento de α_1 esta descrito por um processo estacionário, então o i -ésimo elemento de a é a média incondicional do dito processo e zero se o processo for não estacionário. A matriz P_* é a matriz de variâncias e covariâncias dos processos estacionários de α_1 ; o problema surge na obtenção da matriz P_∞ .

Se κ for pré-especificado num valor numericamente grande (diga-se 10^4 a 10^9) de certa forma estaria refletindo uma grande incerteza sobre as coordenadas não estacionárias de α_1 (Harvey and Phillips, 1979). Esta alternativa de inicialização é chamada **big κ** e a implementação é muito simples, mas esta alternativa não tem um sustentação teórica satisfatória. Além disso pode gerar problemas computacionais numéricos, tais como diferentes resultados na filtragem para diferentes valores de κ e dificuldades de convergência numérica no processo de estimação de parâmetros.

A outra alternativa para tratar o problema de inicialização das coordenadas não estacionarias é chamada de **inicialização exata**, a qual faz uso da expansão de matrizes como séries de potência de κ^{-1} considerando somente os dois ou três primeiros termos, e quando fazemos $\kappa \rightarrow \infty$ obtemos o termo dominante. Esta ideia foi introduzida por Ansley e Kohn (1985), e depois foram considerados em forma mais claros por Koopman (1997), Durbin & Koopman (2001). Quando o vetor de estado tem pelo menos uma coordenada não estacionária, o processo de inicialização é chamada de *inicialização difusa*. Da mesma forma vai existir um $d \in \mathbb{N}$, onde $P_{\infty,t} \neq 0; \forall t \leq d$ considerada como a parte difusa da filtragem. As recursões de filtragem mudam para $t \leq d$ e para valores $t > d$, passando da parte difusa do filtro para o filtro normal em $t = d + 1$. Mas também há que ter em consideração o problema que acontece quando a matriz de variâncias e covariâncias das inovações é singular na parte difusa ($F_{\infty,t} = 0$), pois ela pode ser zero ainda quando $P_{\infty,t} \neq 0$. Para isso a filtragem na parte difusa se divide

em duas partes, uma quando $F_{\infty,t} \neq 0$ e caso contrário. As recursões do filtro de inicialização difusa são as seguintes:

$$\begin{aligned} F_{\infty,t} &= Z_t P_{\infty,t} Z_t' \\ F_{*,t} &= Z_t P_{*,t} Z_t' + H_t \\ M_{\infty,t} &= P_{\infty,t} Z_t' \\ M_{*,t} &= P_{*,t} Z_t' \end{aligned}$$

Para $P_{\infty,t} \neq 0$: para $F_{\infty,t} \neq 0$

$$\begin{aligned} F_t^{(1)} &= F_{\infty,t}^{-1} \\ F_t^{(2)} &= -F_{\infty,t}^{-1} F_{*,t} F_{\infty,t}^{-1} \\ K_t^{(0)} &= T_t M_{\infty,t} F_t^{(1)} \\ K_t^{(1)} &= T_t M_{\infty,t} F_t^{(2)} + T_t M_{*,t} F_t^{(1)} \\ L_t^{(0)} &= T_t - K_t^{(0)} Z_t \\ L_t^{(1)} &= -K_t^{(1)} Z_t \\ v_t^{(0)} &= y_t - Z_t a_t^{(0)} - d_t \\ a_{t+1}^{(0)} &= T_t a_t^{(0)} + K_t^{(0)} v_t^{(0)} + c_t \\ P_{*,t+1} &= T_t P_{\infty,t} L_t^{(1)'} + T_t P_{*,t} L_t^{(0)'} + R_t Q_t R_t' \\ P_{\infty,t+1} &= T_t P_{\infty,t} L_t^{(0)'} \end{aligned}$$

: para $F_{\infty,t} = 0$

$$\begin{aligned} L_t^{(0)} &= T_t - K_t^{(0)} Z_t \\ L_t^{(1)} &= -K_t^{(1)} Z_t \\ P_{\infty,t+1} &= T_t P_{\infty,t} T_t' \\ P_{*,t+1} &= T_t P_{*,t} L_t^{(0)'} + R_t Q_t R_t' \end{aligned}$$

Quando $P_{\infty,t} \neq 0$ a filtragem passa da parte difusa para a não difusa e as recursões de filtragem e suavização para $t > d$ são as mesmas dadas em (4-4) e (4-5), onde $P_t = P_{*,t}$, $a_t = a_t^{(0)}$ e $v_t = v_t^{(0)}$.

As recursões do suavizador são dadas por:

$$\begin{aligned}
 r_d^{(0)} &= r_d \\
 N_d^{(0)} &= N_d \\
 r_d^{(1)} &= 0 \\
 N_d^{(1)} &= 0 \\
 N_d^{(2)} &= 0 \\
 r_{t-1}^{(0)} &= L_t^{(0)'} r_t^{(0)} \\
 r_{t-1}^{(1)} &= Z_t' F_t^{(1)} v_t^{(0)} + L_t^{(0)'} r_t^{(1)} + L_t^{(0)'} r_t^{(0)} \\
 N_{t-1}^{(0)} &= L_t^{(0)'} N_t L_t^{(0)} \\
 N_{t-1}^{(1)} &= Z_t' F_t^{(1)} Z_t + L_t^{(0)'} N_t^{(1)} L_t^{(0)} + L_t^{(1)'} N_t^{(0)} L_t^{(0)} + L_t^{(0)'} N_t^{(0)} L_t^{(1)} \\
 N_{t-1}^{(2)} &= Z_t' F_t^{(2)} Z_t + L_t^{(0)'} N_t^{(2)} L_t^{(0)} + L_t^{(0)'} + L_t^{(0)'} N_t^{(1)} L_t^{(1)} + L_t^{(1)'} N_t^{(0)} L_t^{(1)} + L_t^{(1)'} N_t^{(1)} L_t^{(0)} \\
 \hat{\alpha}_t &= a_t^{(0)} + P_{*,t} r_{t-1}^{(0)} + P_{\infty,t} r_{t-1}^{(1)} \\
 V_t &= P_{*,t} - P_{*,t} N_{t-1}^{(0)} P_{*,t} - P_{*,t} N_{t-1}^{(1)} P_{\infty,t} - P_{\infty,t} N_{t-1}^{(1)} P_{*,t} - P_{\infty,t} N_{t-1}^{(2)} P_{\infty,t}
 \end{aligned}$$

Como foi dito d é a quantidade de dados necessários até estabilizar o processo de filtragem. Não é possível assegurar de forma geral que a quantidade d num modelo em espaço de estado multivariado com estados não estacionários é o mesmo quando se faz um tratamento univariado para séries multivariadas.

É importante mencionar que o valor d geralmente é diferente, dependendo se se faz um tratamento univariado ou um tratamento multivariado, pois é simplesmente observar que d depende do valor que tome $P_{\infty,t}$ e esta matriz tem uma evolução no tempo que muda de um tratamento para outro dependendo do valor que tome a matriz T_t , Z_t etc; vide exemplo no apêndice.

4.6

Estimação por máxima verossimilhança

Nas seções anteriores foram descritos a estrutura de um modelo em espaço de estado e a inicialização do processo de filtragem. Até esse ponto foi considerado que os parâmetros dos quais depende a estrutura e comportamento do modelo são conhecidos. Nesta seção será tratada uma das metodologias usada para a estimação dos parâmetros, que consiste na maximização da verossimilhança como função do vetor de parâmetros fixos do modelo ou hiperparâmetros.

4.6.1

Evaluación da verossimilhança

Seja $Y_t = (y_1, \dots, y_t)$, um vetor de parâmetros θ e considerando o ponto de inicialização do filtro $a_1(\theta)$ e $P_1(\theta)$. A verossimilhança do modelo está definida por⁴:

$$L(y, \theta) = p(y_1, \dots, y_n; \theta) = p(y_1) \prod_{t=2}^n p(y_t | Y_{t-1}; \theta)$$

Na prática geralmente se trabalha com logaritmo da verossimilhança

$$\log L(y, \theta) = \sum_{t=1}^n \log p(y_t | Y_{t-1}) \quad (4-15)$$

onde $p(y_1 | Y_0) = p(y_1)$. Para o modelo (4-3) a verossimilhança é dada por:

$$\log L(y, \theta) = -\frac{np}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\log |F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t) \quad (4-16)$$

onde v_t e F_t são obtidas do processo de filtragem. A equação de verossimilhança (4-16) é válida na parte **não** difusa (o vetor de estado só tem processos estacionários), enquanto que a verossimilhança difusa (o vetor de estado tem processos não estacionários) é dada por:

$$\log L_d(y, \theta) = -\frac{np}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^d \omega_t - \frac{1}{2} \sum_{t=d+1}^n (\log |F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t) \quad (4-17)$$

onde:

$$\omega_t = \begin{cases} \log |F_{\infty,t}|, & \text{se } F_{\infty,t} \text{ é definido positivo} \\ \log |F_{*,t}| + v_t^{(0)'} F_{*,t}^{-1} v_t^{(0)} & \text{se } F_{\infty,t} = 0 \end{cases}$$

Para mais detalhes, ver capítulo 7 de Durbin & Koopman (2001).

4.6.2

Estimação dos parâmetros

A estimação por máxima verossimilhança, consiste em encontrar um vetor $\hat{\theta}$ definido como:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L_d(y, \theta) \quad (4-18)$$

Considerando $d = 0$ podemos ter que $L_d(y, \theta) = L(y, \theta)$. Então pode-se dizer que a equação (4-18) é generalizada para os modelos com estados estacionários e não estacionários.

⁴para simplificar a notacao iremos considerar $p(y_t | Y_{t-1}; \theta) = p(y_t | Y_{t-1})$.

Definida a relação (4-18) é fácil de ver que a estimação é um problema de otimização com restrições⁵. Uma proposta de passos a seguir para a estimação (considerando um modelo que tem series não estacionarias no vetor de estado) é a seguinte:

- construção de uma função de filtragem que calcule $F_{*,t}$, $v_t^{(0)}$, $P_{\infty,t}$ e $F_{\infty,t}$ para um vetor de parâmetros dado.
- construção de uma função que calcule a verossimilhança do modelo com os resultados do item anterior.
- construção de uma função que optimize funções que tenham como argumento de entrada um vetor e retorne um valor real⁶.
- construção do programa principal onde se faz a leitura da base de dados, chute inicial dos parâmetros, código para rodar a função otimizadora, gráficos, etc.

O algoritmo de otimização faz uso de métodos numéricos para conseguir resolver o problema de otimização. Ele basicamente segue os seguintes passos:

1. especificação de um valor inicial para o vetor de hiperparâmetros $\hat{\theta} = \theta_0$;
2. passar a função de filtragem para θ_0 ;
3. avaliar a verossimilhança com os resultados obtidos da filtragem;
4. repetir os passos 1, 2 e 3 com θ_j , $j = 1, 2, \dots$ até atingir um ou mais critérios de parada.

Os critérios de parada de um algoritmo de otimização não-linear podem ser do seguinte tipo:

- $\|\theta_j - \theta_{j+1}\| < \varepsilon$
- $|\log L_d(y, \theta_j) - \log L_d(\theta_{j+1})| < \varepsilon$
- $\left\| \frac{\partial \log L_d(y, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_{j+1}} \right\| < \varepsilon$

onde ε_j são tipicamente dados por $\varepsilon_1 = 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ ou $\varepsilon_3 = 10^{-15}$.

⁵pois alguns dos hiperparâmetros possuem domínio em subconjunto dos Reais. Por exemplo, as variâncias de H_t e Q_t são não negativas.

⁶Softwares como Matlab, R, Ox, etc possuem bibliotecas de otimização não lineares.

4.7

Diagnósticos e medidas de aderência

4.7.1

Análise de resíduos

Os diagnósticos serão feitos sobre as inovações padronizadas ($v_t^{(p)}$), as quais são calculadas da seguinte forma: $v_t^{(p)} = F_t^{-\frac{1}{2}} v_t$ onde $F_t^{-1} = F_t^{-\frac{1}{2}} F_t^{-\frac{1}{2}}$, e os testes tipicamente considerados são os seguintes:

- Teste de heterocedasticidade (exemplo: teste F)
- Teste para correlação serial (exemplo: teste Ljung - Box)
- Teste para independência e mesma distribuição (exemplo: teste BDS)
- Teste de normalidade (exemplo: teste Jarque Bera, Anderson-Darling)

e alguns procedimentos gráficos e descritivos sobre $v_t^{(p)}$ que podem ser úteis são:

- Plot no tempo
- FAC e FACP (nível ou quadrado)
- Média e variância amostrais
- Histograma e QQ-plot

4.7.2

Medidas de aderência

As medidas de aderência são calculadas para valorar a qualidade de ajuste do modelo, as medidas consideradas são as seguintes:

- **MAPE** = $\frac{100}{n-d} \sum_{t=d+1}^n \left| \frac{y_t - \hat{y}_{t|t-1}}{y_t} \right|$
- **MSE** = $\frac{1}{n-d} \sum_{t=d+1}^n (y_t - \hat{y}_{t|t-1})^2$
- **Pseudo - R² (\hat{R}^2)** = $(\text{Corr}(y_t, \hat{y}_{t|t-1}))^2$
- **AIC** = $\frac{1}{n} \left(-2 \log L_d(\hat{\theta}) + 2(q + w) \right)$, onde q é o número de coordenadas não estacionárias em α_1 , e w é a dimensão de θ
- **BIC** = $\frac{1}{n} \left(-2 \log L_d(\hat{\theta}) + (q + w) \log n \right)$

4.8

Modelos do preço de petróleo em forma de espaço de estado

4.8.1

Modelo SS padrão

O modelo SS padrão em forma de espaço de estado para as 13 maturidades com as quais se fará a estimação, está representado pelas seguintes equações:

– Equação de Medidas

$$\begin{pmatrix} \ln F_{t,\tau_1} \\ \ln F_{t,\tau_2} \\ \vdots \\ \ln F_{t,\tau_{13}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^*(\tau_1) \\ A^*(\tau_2) \\ \vdots \\ A^*(\tau_{13}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-\kappa\tau_1} & 1 \\ e^{-\kappa\tau_2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ e^{-\kappa\tau_{13}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_t \\ \xi_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{t,\tau_1} \\ v_{t,\tau_2} \\ \vdots \\ v_{t,\tau_{13}} \end{pmatrix} \quad (4-19)$$

– Equação de Estado

$$\begin{pmatrix} \chi_t \\ \xi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_\xi \Delta t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-\kappa\Delta t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{t-\Delta t} \\ \xi_{t-\Delta t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{1,t} \\ \omega_{2,t} \end{pmatrix} \quad (4-20)$$

Consideramos $v_{t,\tau_1}, \dots, v_{t,\tau_{13}}$ descorrelatados. Isso não quer dizer que as séries de preços a diversas maturidades sejam descorrelatadas, pois elas são função do mesmo vetor de estado, e assim isso faz com que elas conservem a correlação capturada pelos fatores. O seguinte comportamento para os erros da equação de medidas.

$$\begin{pmatrix} v_{t,\tau_1} \\ v_{t,\tau_2} \\ \vdots \\ v_{t,\tau_{13}} \end{pmatrix} \sim \mathbf{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{v_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{v_2}^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{v_{13}}^2 \end{pmatrix} \right)$$

As estimação dos parâmetros fixos do modelo é efetuada sobre os seguintes sub-espacos paramétricos.

Tabela 4.3: Espaços paramétricos

Símbolo	Espaço paramétrico
σ_χ	\mathbb{R}^+
σ_ξ	\mathbb{R}^+
μ_ξ	\mathbb{R}
μ_ξ^*	\mathbb{R}
κ	$< 0, \frac{1}{12} >$
$\rho_{\chi\xi}$	$[0, 1]$
λ_χ	\mathbb{R}
σ_{v_i}	$\mathbb{R}^+, i = 1, \dots, 13$

Considerar que a matriz de variância-covariância dos erros da equação das medidas seja diagonal é importante por dois motivos: o primeiro deles tem a ver com a correlação capturada pelos fatores, pois eles são importantes para a estimação do preço spot e a informação embutida neles ajuda a estimar o preço spot de forma mais adequada. O outro motivo é que o modelo fica mais simples para estimar, e é possível fazer o tratamento univariado para séries multivariadas sem muitas complicações⁷, evitando assim problemas nos processos de otimização e de inicialização.

4.8.2 Modelo SS com drift estocástico

As seguintes equações apresentam o modelo com drift estocástico na forma de espaço de estado.

– Equação de medidas

$$\begin{pmatrix} \ln F_{t,\tau_1} \\ \ln F_{t,\tau_2} \\ \vdots \\ \ln F_{t,\tau_{13}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^*(\tau_1) \\ B^*(\tau_2) \\ \vdots \\ B^*(\tau_{13}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-\kappa_\chi \tau_1} & 1 & \frac{1-e^{-\kappa_\mu \tau_1}}{\kappa_\mu} \\ e^{-\kappa_\chi \tau_2} & 1 & \frac{1-e^{-\kappa_\mu \tau_2}}{\kappa_\mu} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-\kappa_\chi \tau_{13}} & 1 & \frac{1-e^{-\kappa_\mu \tau_{13}}}{\kappa_\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_t \\ \xi_t \\ \mu_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{t,\tau_1} \\ v_{t,\tau_2} \\ \vdots \\ v_{t,\tau_{13}} \end{pmatrix}$$

– Equação de estado

$$\begin{pmatrix} \chi_t \\ \xi_t \\ \mu_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\kappa_\chi \Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & e^{-\kappa_\mu \Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{t-\Delta t} \\ \xi_{t-\Delta t} \\ \mu_{t-\Delta t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{1,t} \\ \omega_{2,t} \\ \omega_{3,t} \end{pmatrix}$$

onde $\omega_{1,t} = \sigma_\chi \Delta z_\chi$, $\omega_{2,t} = \sigma_\xi \Delta z_\xi$ e $\omega_{3,t} = \sigma_\mu \Delta z_\mu$. É assumida a seguinte distribuição para o vetor de erros da equação de estado.

$$\begin{pmatrix} \omega_{1,t} \\ \omega_{2,t} \\ \omega_{3,t} \end{pmatrix} \sim \mathbf{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_\chi^2 \Delta t & \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \Delta t & 0 \\ \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \Delta t & \sigma_\xi^2 \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\mu^2 \Delta t \end{pmatrix} \right)$$

⁷Quando a matriz de variâncias covariâncias dos erros da equação de medidas não é diagonal é possível fazer este tratamento, mas torna necessário realizar modificações na estrutura do modelo, como, por exemplo, mudanças nas matrizes do sistema (Durbin & Koopman, 2001).

4.8.3

Modelo multivariado para o petróleo e derivados

Consideremos d derivados com h_i preços futuros, $i = 1, \dots, d$ e r com preço spot. O modelo em forma de espaço de estado será dado pelas seguintes equações:

– Equação de Medidas

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{B} + \mathbf{A}\Upsilon_t + v_t \quad (4-21)$$

onde:

$$\mathbf{Y}_t = \begin{pmatrix} \ln F_{t,\tau_1}^{(1)} \\ \vdots \\ \ln F_{t,\tau_{h_1}}^{(1)} \\ \vdots \\ \ln F_{t,\tau_1}^{(d)} \\ \vdots \\ \ln F_{t,\tau_{h_d}}^{(d)} \\ \ln S_t^{(d+1)} \\ \vdots \\ \ln S_t^{(d+r)} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1^*(\tau_1) \\ \vdots \\ B_1^*(\tau_{h_1}) \\ \vdots \\ B_d^*(\tau_1) \\ \vdots \\ B_d^*(\tau_{h_d}) \\ \phi_{d+1,0} \\ \vdots \\ \phi_{d+r,0} \end{pmatrix}, v_t = \begin{pmatrix} v_{t,\tau_1}^{(1)} \\ \vdots \\ v_{t,\tau_{h_1}}^{(1)} \\ \vdots \\ v_{t,\tau_1}^{(d)} \\ \vdots \\ v_{t,\tau_{h_d}}^{(d)} \\ v_t^{(d+1)} \\ \vdots \\ v_t^{(d+r)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \phi_{1,1}e^{-\kappa_X\tau_1} & \phi_{1,2} & \frac{\phi_{1,2}}{\kappa_U}(1 - e^{-\kappa_U\tau_1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{1,1}e^{-\kappa_X\tau_{h_1}} & \phi_{1,2} & \frac{\phi_{1,2}}{\kappa_U}(1 - e^{-\kappa_U\tau_{h_1}}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{d,1}e^{-\kappa_X\tau_1} & \phi_{d,2} & \frac{\phi_{d,2}}{\kappa_U}(1 - e^{-\kappa_U\tau_1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{d,1}e^{-\kappa_X\tau_{h_d}} & \phi_{d,2} & \frac{\phi_{d,2}}{\kappa_U}(1 - e^{-\kappa_U\tau_{h_d}}) \\ \phi_{d+1,1} & \phi_{d+1,2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{d+r,1} & \phi_{d+r,2} & 0 \end{pmatrix}, \Upsilon_t = \begin{pmatrix} X_t \\ E_t \\ U_t \end{pmatrix}$$

– Equação de Estado

$$\begin{pmatrix} X_t \\ E_t \\ U_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\kappa_X\Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & e^{-\kappa_U\Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-\Delta t} \\ E_{t-\Delta t} \\ U_{t-\Delta t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{1,t} \\ w_{2,t} \\ w_{3,t} \end{pmatrix} \quad (4-22)$$

$$\begin{pmatrix} w_{1,t} \\ w_{2,t} \\ w_{3,t} \end{pmatrix} \sim \mathbf{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 \Delta t & \rho_{XE} \sigma_X \sigma_E \Delta t & 0 \\ \rho_{XE} \sigma_X \sigma_E \Delta t & \sigma_E^2 \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_U^2 \Delta t \end{pmatrix} \right)$$

A estimação deste modelo será efetuada usando os derivados apresentados na Tabela 3.1. São considerando 3 preços futuros por derivado, quando este derivado apresentar mercado futuro. Da equação (4-21) temos que $h_i = 3$ para os $d = 4$ derivados com preços futuros e $r = 7$, com preços spot. Os erros da equação de medidas são assumidos com distribuição normal com média zero e matriz de variância diagonal, onde $\sigma_{v_\tau, i}^2$ é a variância do erro correspondente ao preço futuro com maturidade τ do derivado i . Enquanto que $\sigma_{v, i}^2$ é a variância do erro correspondente ao preço spot do derivado i .

5 Dados

A estimação dos parâmetros nas distintas formas do modelo SS apresentados no capítulo 2 será feita usando os preços futuros de 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45 e 48 meses de maturidade, as quais são descritas na Tabela 5.2.

As séries utilizadas serão os preços futuros mensais em dólares do petróleo e derivados da NYMEX (http://www.cmegroup.com/trading/energy/crude-oil/light-sweet-crude_contract_specifications.html). Para estimação e comparação dos modelos de preço de petróleo (modelo SS padrão e SS com drift estocástico) é considerada a amostra de Jan/1985 até Set/2009.

Os dois modelos (SS padrão e SS com drift estocástico) serão comparados em 7 amostras diferentes descritas na Tabela 5.1. Serão avaliadas medidas de ajuste dentro das amostras e o poder de previsão fora da amostra.

Na estimação dos fatores individuais dos derivados para mostrar a existência de fatores comuns, é considerada a amostra de Maio/90 até Set/2009. A falta de dados do gás antes dessa data obriga-nos a considerar dados só a partir de Maio/90.

O modelo multivariado de derivados é estimado com as maturidades de 1, 24 e 48 meses para todos os derivados¹. O período em consideração é de Jan/85 até Set/2009.

A consideração dos períodos listados na tabela 5.1 tem a finalidade de testar as possíveis falências ou virtudes dos modelos quando os preços estão subindo ou descendo ou na presença de quebras estruturais.

5.1 Contrato futuro e preço futuro de petróleo

O preço futuro de petróleo é o preço por barril de petróleo de um contrato futuro numa data e maturidade fixada. As especificações do contrato podem ser encontradas na pagina web da NYMEX (<http://www.cmegroup.com/trading/energy/crude-oil/light-sweet->

¹Foram consideradas só 3 maturidades por derivado para diminuir tempo da estimação.

Tabela 5.1: Períodos consideradas na estimação do modelo SS

Amostra	Data
Am-1	Jan de 1985 - Jun de 1992
Am-2	Jan de 1985 - Nov de 1999
Am-3	Jan de 1985 - Mar de 2004
Am-4	Jan de 1985 - Out de 2005
Am-5	Jan de 1985 - Jun de 2008
Am-6	Jan de 1985 - Out de 2008
Am-7	Jan de 1985 - Set de 2009

Tabela 5.2: Maturidades consideradas na estimação do modelo SS

Preço futuro	Descrição
F_{τ_1}	Preço futuro com maturidade de 1 mês
F_{τ_2}	Preço futuro com maturidade de 5 meses
F_{τ_3}	Preço futuro com maturidade de 9 meses
F_{τ_4}	Preço futuro com maturidade de 13 meses
F_{τ_5}	Preço futuro com maturidade de 17 meses
F_{τ_6}	Preço futuro com maturidade de 21 meses
F_{τ_7}	Preço futuro com maturidade de 25 meses
F_{τ_8}	Preço futuro com maturidade de 29 meses
F_{τ_9}	Preço futuro com maturidade de 33 meses
$F_{\tau_{10}}$	Preço futuro com maturidade de 37 meses
$F_{\tau_{11}}$	Preço futuro com maturidade de 41 meses
$F_{\tau_{12}}$	Preço futuro com maturidade de 45 meses
$F_{\tau_{13}}$	Preço futuro com maturidade de 48 meses

crude_contract_specifications.html). Os preços futuros dos derivados possuem características similares e também podem ser encontradas na mesma página web.

O preço futuro reportado pela NYMEX é o preço nominal, e com objetivo de eliminar as tendências de longo prazo nas séries dos futuros associadas a expectativa de inflação americana, a estimação dos modelos serão realizadas com preços reais em dólares com a última data reportado na base de dados. O cálculo do preço real foi efetuado utilizando-se a seguinte relação:

$$(\text{Preço real})_t = (\text{Preço nominal})_t \left(\frac{\text{PPI}_T}{\text{PPI}_t} \right) \quad (5-1)$$

onde PPI é o *Producer Price Index* dos EUA, obtidos a partir da *Bureau of Labor Statistics*, que é a agência oficial de estatística do governo norte-americano (<http://data.bls.gov/PDQ/servlet/SurveyOutputServlet;jsessionid=a230e0cb03bc25283271>). Foi elegido este índice porque os preços do petróleo e dos derivados estão em dólares.

5.2

Dados e valores ausentes

É bastante acentuada a frequência de valores ausentes, tanto nas séries de petróleo como nas de seus derivados. Esta característica dos dados sugere, que na medida do possível, se faça uso da maior quantidade de maturidades possíveis, de forma que o processo de estimação dos hiperparâmetros do modelo possa utilizar uma quantidade razoável de dados. O filtro de Kalman lida naturalmente com a presença de dados ausentes, através da interpolação efetuada pelo procedimento de suavização. Mais especificamente, na etapa de filtragem o filtro projeta o modelo nestes períodos, e posteriormente, através do algoritmo de suavização, executa uma interpolação natural, preenchendo os dados faltantes a partir da estrutura dinâmica do modelo, explicitada através das componentes utilizadas.

6 Resultados

A Figura 6.1 contém as séries de preços futuros para as 13 maturidades¹ que foram consideradas na estimação dos modelos de preço de petróleo.

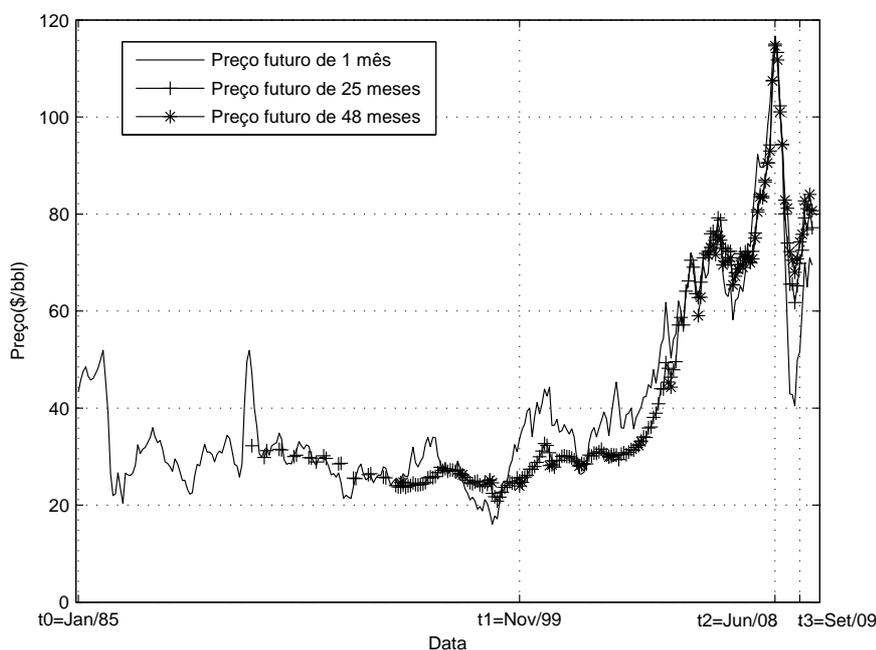


Figura 6.1: Alguns preços futuros do petróleo considerados na estimação dos modelos univariados (observar a grande quantidade de dados faltantes para maturidades longas).

6.1 Modelo SS padrão e SS com intervenções

A Tabela 6.1 mostra os resultados dos testes de hipóteses realizados para investigar a significância efetuadas no modelo SS, conforme a equação (2-12).

$$\mu_{\xi} = \begin{cases} \phi_1 & t_0 \leq t < t_1 \\ \phi_1 + \phi_2 & t_1 \leq t < t_2 \\ \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

¹Para especificação destes 13 prazos vide a Tabela 5.2

Tabela 6.1: Testes de hipóteses das intervenções no modelo SS padrão

Hipótese	Estatístico (Λ)
$H_0 : \phi_1 = 0$	1,611
$H_1 : \phi_1 \neq 0$	(0,204) ^a
$H_0 : \phi_2 = 0$	504,609
$H_1 : \phi_2 \neq 0$	(0,000)
$H_0 : \phi_3 = 0$	189,311
$H_1 : \phi_3 \neq 0$	(0,000)
$H_0 : \phi_2 = \phi_3 = 0$	501,063
$H_1 : \text{ao menos um } \phi_i \neq 0, i = 2, 3.$	(0,000)
$H_0 : \phi_2 + \phi_3 = 0$	111,673
$H_1 : \phi_2 + \phi_3 \neq 0$	(0,000)

^aP-valor do teste razão de verossimilhança nas intervenções (2-12).

Os resultados indicam que a taxa de variação do fator de longo prazo pode ser zero em $t_0 \leq t < t_1$. Este resultado é compreensível, pois este é um período com mudanças consideravelmente pequenas em comparação com o que aconteceu no período da crise econômica de 2008. Por outro lado esta taxa muda do período $t_0 \leq t < t_1$ para $t_1 \leq t < t_2$ significativamente. Isto implica que a taxa não é a mesma em diferentes períodos de tempo, o que se verifica também entre os períodos $t_1 \leq t < t_2$ para $t_2 \leq t \leq t_3$.

Outro resultado que evidencia que a taxa mencionada não é a mesma para diferentes períodos de tempo, é o quarto teste da Tabela 6.1, indicando que a taxa muda do período pré-crise para o período da crise. Uma pergunta interessante é: será que após o término da crise de 2008, a taxa de variação do fator de longo prazo é a mesma do período pré-crise ($t_0 \leq t < t_1$)?. Essa pergunta é respondida pelo quinto teste. O resultado deste teste indica que a taxa de variação antes e depois da crise não são iguais.

A Figura 6.2 apresenta graficamente os 7 períodos descritos na Tabela 5.1. Considerando o terceiro, quarto, sexto e sétimo períodos, avaliamos o impacto das intervenções no ajuste do modelo e os resultados são apresentados na Tabela 6.2. As intervenções são consideradas dependendo da amostra: por exemplo, o terceiro período só chega até a primeira intervenção, e o sétimo período considera todas as intervenções.

Como é possível observar na Tabela 6.2, as medidas de ajuste melhoram ao se considerar intervenções no modelo SS padrão. A Tabela 6.3 contém os valores estimados dos parâmetros do modelo SS padrão para cada uma das amostras

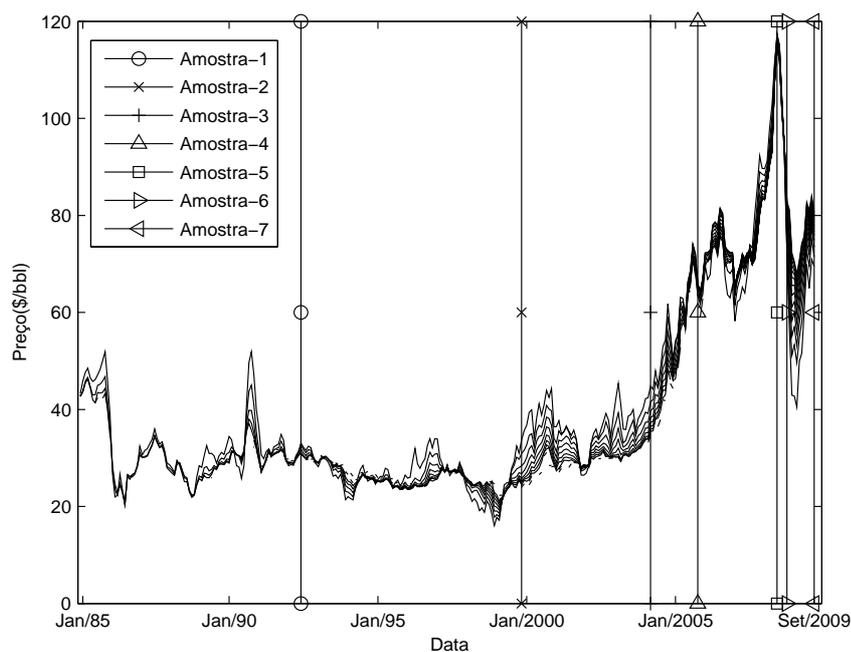


Figura 6.2: Amostras consideradas na estimação dos modelos univariados

consideradas, enquanto que a Tabela 6.4 apresenta os resultados da estimação do modelo incorporando intervenções para os 7 períodos. Na Tabela 6.8 são apresentados os resultados das medidas de ajuste para cada maturidade em cada modelo, considerando todos os dados (Am-7).

A Figura 6.3 mostra o preenchimento de dados faltantes para algumas séries de maturidades escolhidas, realizado pelo suavizador aplicado a este modelo, .

Na seguinte seção apresentamos os resultados da extensão do modelo SS padrão, já não considerando mudança da taxa μ_ξ por períodos, mas sim para cada tempo, como foi apresentado na equação (2-13).

6.1.1 Análise das inovações padronizadas

A Tabela 6.5 apresenta uma síntese dos diagnósticos efetuados nos resíduos (inovações padronizadas) do modelo SS padrão. Observa-se falta de normalidade nos resíduos da maioria das maturidades, essencialmente refletindo o ajuste deficiente do modelo a algumas observações, o que terminam por inflacionar a curtose das inovações padronizadas. Optamos por não tratar estas observações mal ajustadas através de análise de intervenção por uma questão de parcimônia. As estimativas dos hiperparâmetros permanecem consistentes sob esta violação. Como é mostrado nas colunas 8 e 9 da tabela, em algumas maturidades ainda persiste algum tipo de dependência linear e quadrática nos resíduos, provalmente reflexo do efeito das observações mal ajustadas.

Tabela 6.2: Ajustes dos modelos com e sem intervenções

Modelo SS padrão				
	Am-3	Am-4	Am-6	Am-7
$\log L_{d=1}(y, \hat{\theta})$	4275,704	4712,318	5885,690	6282,865
AIC	-36,837	-37,531	-41,012	-42,167
BIC	-36,524	-37,235	-40,743	-41,906
Modelo SS com intervenções				
	Am-3	Am-4	Am-6	Am-7
$\log L_{d=1}(y, \hat{\theta})$	4347,278	4834,088	6150,257	6533,397
AIC	-37,448	-38,497	-42,848	-43,841
BIC	-37,120	-38,187	-42,554	-43,555

Tabela 6.3: Estimativas dos parâmetros do modelo SS padrão

Parâmetro	Am-1	Am-2	Am-3	Am-4	Am-5	Am-6	Am-7
σ_χ	26,44%	24,80%	26,43%	25,99%	22,49%	23,60%	23,97%
σ_ξ	18,07%	13,43%	12,91%	14,03%	13,39%	14,07%	14,30%
μ_ξ	-4,89%	-4,08%	-1,14%	1,96%	4,13%	2,72%	2,47%
μ_ξ^*	0,21%	1,27%	1,22%	0,71%	-0,43%	-0,82%	-0,53%
λ_χ	19,60%	12,96%	13,21%	11,68%	8,07%	7,41%	7,02%
$\rho_{\chi\xi}$	0,292	0,056	-0,205	-0,206	-0,075	-0,028	-0,027
κ	1,671	1,139	0,825	0,800	0,791	0,864	0,809
σ_{v_1}	0,034	0,047	0,049	0,050	0,061	0,051	0,052
σ_{v_2}	0,000	0,010	0,012	0,012	0,022	0,013	0,013
σ_{v_3}	0,004	0,001	0,000	0,000	0,007	0,000	0,000
σ_{v_4}	0,003	0,002	0,003	0,003	0,000	0,004	0,004
σ_{v_5}	0,003	0,000	0,000	0,000	0,002	0,004	0,004
σ_{v_6}	0,008	0,007	0,007	0,007	0,004	0,004	0,004
σ_{v_7}	0,018	0,012	0,012	0,012	0,008	0,008	0,008
σ_{v_8}	0,011	0,013	0,016	0,017	0,012	0,013	0,012
σ_{v_9}	0,009	0,014	0,019	0,021	0,015	0,017	0,015
$\sigma_{v_{10}}$	-	0,012	0,034	0,035	0,023	0,025	0,023
$\sigma_{v_{11}}$	-	0,025	0,041	0,042	0,025	0,026	0,025
$\sigma_{v_{12}}$	-	0,027	0,039	0,040	0,028	0,029	0,028
$\sigma_{v_{13}}$	-	0,028	0,027	0,030	0,030	0,030	0,030

Tabela 6.4: Estimativas dos parâmetros do modelo SS com intervenções

Parâmetro	Am-3	Am-4	Am-6	Am-7
σ_χ	26,76%	26,44%	25,77%	25,81%
σ_ξ	12,98%	14,11%	14,93%	15,31%
ϕ_1	0,07%	3,53%	4,37%	3,92%
$(\phi_1 - \lambda_\xi)$	1,70%	1,53%	1,30%	1,34%
λ_χ	14,65%	13,50%	10,98%	10,21%
$\rho_{\chi\xi}$	0,924	0,938	0,985	0,997
κ	1,011	1,034	1,054	1,014
ϕ_2	-0,036	-0,043	-0,042	-0,042
ϕ_3	-	-	0,017	0,036
σ_{v_1}	0,047	0,047	0,045	0,045
σ_{v_2}	0,011	0,011	0,010	0,010
σ_{v_3}	0,000	0,000	0,000	0,000
σ_{v_4}	0,002	0,002	0,002	0,002
σ_{v_5}	0,000	0,000	0,000	0,001
σ_{v_6}	0,006	0,006	0,006	0,005
σ_{v_7}	0,011	0,011	0,010	0,010
σ_{v_8}	0,015	0,015	0,014	0,014
σ_{v_9}	0,018	0,020	0,017	0,017
$\sigma_{v_{10}}$	0,032	0,032	0,023	0,023
$\sigma_{v_{11}}$	0,033	0,031	0,025	0,025
$\sigma_{v_{12}}$	0,033	0,034	0,028	0,027
$\sigma_{v_{13}}$	0,034	0,039	0,031	0,031

6.2

Resultados do Modelo SS com drift estocástico

Nesta seção apresentamos os resultados do ajuste do modelo SS com drift estocástico, comparando-o com o modelo SS padrão.

A mudança estocástica da taxa μ_ξ considerada no modelo SS com drift estocástico melhora notavelmente o ajuste em relação ao modelo SS padrão. Na Tabela 6.10 pode-se observar esta melhora em todos os períodos, obtendo melhores ajustes no período da crise econômica de 2008.

A Figura 6.4 apresenta os fatores suavizados do modelo SS padrão e do modelo SS com drift estocástico. Eles apresentam comportamento bastante similar, e assim poderia-se concluir que não há diferença entre o ajuste dos modelos, mas isso não é de todo verdade. É notória a dificuldade que tem o modelo SS padrão para ajustar-se aos dados no último período da série. As inovações padronizadas deste modelo se comportam de forma errática neste período (a partir Jan/2005), como é possível observar na Figura 6.5, enquanto os resíduos do novo modelo não apresentam essa dificuldade, como é possível observar na Figura 6.6.

O ajuste dentro da amostra é razoável para os três modelos conforme pode ser visto na Tabela 6.8, mas pode-se dizer que o modelo com drift estocástico

Tabela 6.5: Análise dos resíduos do modelo SS padrão

Mat.	Media	Desv. padrão	Ass.	Kurt.	J-Bera	N	Q(25)-r	Q(25)-r ²
τ_1	0,06	1,00	0,34	3,73	12,28 (0,00) ^a	296	812,82 (0,00) ^b	221,30 (0,00) ^c
τ_2	0,15	1,02	0,37	2,98	6,74 (0,03)	296	773,64 (0,00)	264,92 (0,00)
τ_3	0,11	1,57	-0,02	2,74	0,86 (0,65)	296	667,88 (0,00)	200,71 (0,00)
τ_4	-0,03	0,82	0,01	4,16	14,77 (0,00)	262	212,27 (0,00)	85,01 (0,00)
τ_5	-0,11	0,84	-0,45	5,17	56,27 (0,00)	244	39,33 (0,03)	126,18 (0,00)
τ_6	-0,13	1,07	-0,96	6,77	155,01 (0,00)	208	128,96 (0,00)	11,58 (0,99)
τ_7	0,12	0,85	0,42	5,63	59,96 (0,00)	189	123,93 (0,00)	19,72 (0,76)
τ_8	0,08	0,70	0,32	4,61	23,60 (0,00)	188	100,10 (0,00)	15,94 (0,92)
τ_9	0,13	0,54	-0,04	3,12	0,09 (0,96)	104	24,75 (0,48)	20,04 (0,75)
τ_{10}	0,09	0,71	-0,44	8,34	79,18 (0,00)	65	12,61 (0,98)	18,59 (0,82)
τ_{11}	0,06	0,51	1,32	8,73	107,90 (0,00)	65	12,57 (0,98)	2,29 (1,00)
τ_{12}	0,09	0,69	0,50	3,69	3,95 (0,14)	64	19,22 (0,79)	4,47 (1,00)
τ_{13}	-0,19	1,10	-0,07	3,10	0,08 (0,96)	63	38,20 (0,04)	22,84 (0,59)

^aP-valor do teste Jarque-Bera.

^bP-valor do teste LjungBox nos resíduos.

^cP-valor do teste LjungBox nos resíduos ao quadrado.

Tabela 6.6: Comparação do modelo SS padrão com o modelo de drift estocástico

Modelo SS padrão							
	Am-1	Am-2	Am-3	Am-4	Am-5	Am-6	Am-7
$\log L_{d=1}(y, \hat{\theta})$	1005,40	3057,35	4275,70	4712,32	5719,44	5885,69	6282,86
AIC	-21,88	-33,93	-36,84	-37,53	-40,41	-41,01	-42,17
BIC	-21,29	-33,55	-36,52	-37,23	-40,14	-40,74	-41,91
Modelo SS com drift estocástico							
	Am-1	Am-2	Am-3	Am-4	Am-5	Am-6	Am-7
$\log L_{d=1}(y, \hat{\theta})$	1017,01	3237,82	4637,73	5151,17	6436,39	6719,20	7202,00
AIC	-22,11	-35,94	-39,97	-41,04	-45,50	-46,84	-48,36
BIC	-21,50	-35,57	-39,66	-40,75	-45,23	-46,57	-48,10

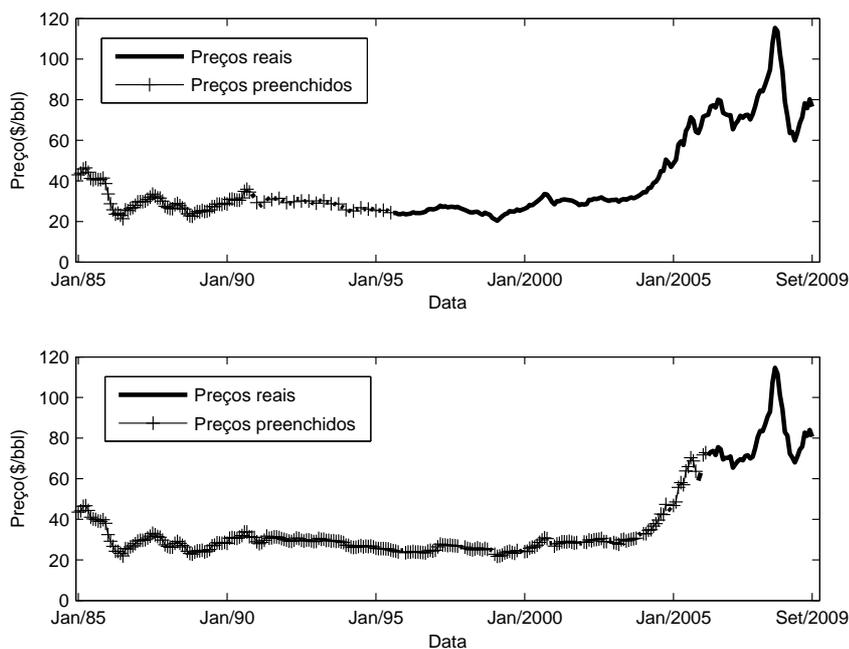


Figura 6.3: Preços preenchidos baseados no modelo SS padrão: acima (maturidade de 21 meses) e em baixo (maturidade de 48 meses)

apresenta resultados ligeiramente melhores que os outros dois modelos. Cabe mencionar que modelos dinâmicos, geralmente possuem a característica de se ajustar muito bem a séries dentro da amostra.

As tabelas 6.9 e 6.10 apresentam os resultados da previsão fora da amostra, para o período 1 e 6 (Am-1 e Am-6) respectivamente, considerando todos os 3 modelos: SS padrão, SS com intervenções e SS com drift estocástico. Também é possível observar que o modelo com drift estocástico junto com o modelo SS padrão apresentam resultados similares no ajuste fora da amostra. É possível observar como o ajuste deste modelo é melhor para maturidades curtas e pior para as longas. Cabe mencionar que as maturidades curtas possuem poucos dados ausentes, enquanto que as maturidades longas possuem muitos dados ausentes. Portanto não se deve dar muita importância aos ajustes das maturidades longas, mas sim às curtas.

6.2.1 Análise de resíduos

A Tabela 6.11 apresenta os diagnósticos dos resíduos do modelo SS com drift estocástico. Pode-se observar que os resíduos apresentam falta de normalidade, com excesso de curtose maior do que no caso do modelo SS padrão, refletindo o mal ajuste de algumas observações. As dependências linear e quadrática dos resíduos neste modelo é menor que no caso do modelo SS padrão. Isso é de

Tabela 6.7: Estimativa dos parâmetros do modelo SS com drift estocástico

Parâmetro	Am-1	Am-2	Am-3	Am-4	Am-5	Am-6	Am-7
$\hat{\sigma}_\chi$	26,49%	23,26%	24,30%	23,81%	21,23%	26,29%	26,51%
$\hat{\sigma}_\xi$	15,95%	15,92%	16,28%	17,55%	20,57%	17,87%	19,12%
$\hat{\lambda}_\chi$	19,19%	19,19%	12,56%	9,87%	4,84%	11,60%	10,79%
$\hat{\lambda}_\xi$	0,81%	16,37%	-0,59%	-0,35%	2,27%	0,63%	1,09%
$\hat{\rho}_{\chi\xi}$	0,289	-0,002	0,131	0,105	-0,114	-0,119	-0,130
$\hat{\kappa}_\chi$	1,614	1,700	1,469	1,494	0,571	1,173	1,164
$\hat{\kappa}_\mu$	5,239	0,386	0,422	0,411	1,499	0,257	0,283
$\hat{\sigma}_\mu$	54,14%	7,10%	7,85%	7,86%	26,67%	6,36%	7,08%
σ_{v_1}	0,024	0,032	0,031	0,030	0,028	0,033	0,035
σ_{v_2}	0,001	0,000	0,005	0,004	0,005	0,007	0,007
σ_{v_3}	0,004	0,003	0,003	0,002	0,002	0,002	0,002
σ_{v_4}	0,003	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,002
σ_{v_5}	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
σ_{v_6}	0,008	0,006	0,005	0,005	0,005	0,005	0,004
σ_{v_7}	0,017	0,010	0,008	0,007	0,006	0,007	0,007
σ_{v_8}	0,010	0,008	0,007	0,008	0,007	0,008	0,007
σ_{v_9}	0,009	0,005	0,008	0,010	0,008	0,006	0,006
$\sigma_{v_{10}}$	-	0,014	0,021	0,021	0,014	0,012	0,011
$\sigma_{v_{11}}$	-	0,010	0,010	0,013	0,009	0,001	0,002
$\sigma_{v_{12}}$	-	0,003	0,014	0,017	0,010	0,002	0,002
$\sigma_{v_{13}}$	-	0,017	0,018	0,018	0,012	0,000	0,001

Tabela 6.8: Medidas de ajuste dos modelos na amostra (Am-7)

Mat.	N	(I) ^a			(II) ^b			(III) ^c		
		MSE	MAPE	\hat{R}^2	MSE	MAPE	\hat{R}^2	MSE	MAPE	\hat{R}^2
τ_1	296	0,009	2,088	0,948	0,008	2,034	0,949	0,008	1,930	0,953
τ_2	296	0,004	1,421	0,973	0,004	1,415	0,973	0,004	1,404	0,974
τ_3	296	0,003	1,152	0,981	0,003	1,157	0,981	0,003	1,163	0,981
τ_4	262	0,002	0,941	0,987	0,002	0,949	0,987	0,002	0,958	0,987
τ_5	245	0,002	0,849	0,990	0,002	0,865	0,990	0,002	0,857	0,990
τ_6	210	0,002	0,821	0,992	0,002	0,867	0,991	0,002	0,838	0,991
τ_7	191	0,002	0,795	0,992	0,002	0,865	0,991	0,002	0,797	0,992
τ_8	190	0,002	0,816	0,992	0,002	0,920	0,991	0,002	0,803	0,992
τ_9	106	0,002	0,863	0,993	0,002	0,945	0,991	0,002	0,820	0,993
τ_{10}	67	0,003	1,104	0,986	0,004	1,215	0,983	0,003	0,948	0,988
τ_{11}	67	0,003	0,940	0,989	0,004	1,077	0,985	0,002	0,841	0,990
τ_{12}	66	0,003	1,102	0,988	0,004	1,253	0,983	0,002	0,923	0,990
τ_{13}	65	0,003	1,082	0,986	0,005	1,354	0,979	0,002	0,803	0,990

^aModelo SS padrão.

^bModelo com intervenções.

^cModelo com drift estocástico.

Tabela 6.9: Medidas de ajuste fora da amostra (Am-1)

Mat.	N	(I) ^a			(III) ^b		
		MSE	MAPE	\hat{R}^2	MSE	MAPE	\hat{R}^2
τ_1	207	0,149	7,642	0,735	0,147	7,625	0,737
τ_2	207	0,149	7,577	0,757	0,148	7,590	0,759
τ_3	207	0,149	7,752	0,746	0,148	7,795	0,748
τ_4	207	0,149	8,011	0,733	0,148	8,064	0,735
τ_5	207	0,149	8,232	0,721	0,148	8,295	0,722
τ_6	194	0,157	8,703	0,733	0,156	8,762	0,734
τ_7	182	0,164	9,096	0,755	0,163	9,149	0,755
τ_8	181	0,165	9,274	0,756	0,164	9,332	0,756
τ_9	98	0,231	10,484	0,776	0,228	10,477	0,776
τ_{10}	65	0,207	10,827	0,862	0,208	8,821	0,862
τ_{11}	65	0,192	10,675	0,853	0,255	11,740	0,853
τ_{12}	64	1,443	29,679	0,857	0,183	10,076	0,857
τ_{13}	63	0,174	8,692	0,863	0,358	12,569	0,863

^aModelo SS padrão.

^bModelo com drift estocástico.

Tabela 6.10: Medidas de ajuste dos modelos fora da amostra (Am-6)

Mat.	N	(I) ^a			(II) ^b			(III) ^c		
		MSE	MAPE	\hat{R}^2	MSE	MAPE	\hat{R}^2	MSE	MAPE	\hat{R}^2
τ_1	11	0,312	13,318	0,551	0,308	13,218	0,499	0,312	13,307	0,530
τ_2	11	0,202	10,504	0,606	0,200	10,467	0,534	0,202	10,521	0,584
τ_3	11	0,162	9,293	0,596	0,161	9,254	0,489	0,163	9,314	0,570
τ_4	11	0,135	8,415	0,566	0,133	8,348	0,393	0,136	8,431	0,536
τ_5	11	0,116	7,733	0,528	0,113	7,630	0,179	0,116	7,739	0,493
τ_6	11	0,100	7,175	0,492	0,097	7,035	0,718	0,100	7,168	0,450
τ_7	11	0,088	6,713	0,454	0,084	6,537	0,546	0,088	6,692	0,405
τ_8	11	0,079	6,331	0,421	0,075	6,125	0,223	0,079	6,295	0,363
τ_9	11	0,072	6,028	0,393	0,067	5,798	0,526	0,071	5,978	0,326
τ_{10}	11	0,067	5,778	0,369	0,062	5,530	0,509	0,066	5,712	0,290
τ_{11}	11	0,062	5,558	0,350	0,057	5,299	0,449	0,061	5,476	0,252
τ_{12}	11	0,058	5,350	0,340	0,053	5,089	0,413	0,056	5,254	0,208
τ_{13}	11	0,055	5,197	0,336	0,050	4,938	0,396	0,053	5,091	0,151

^aModelo SS padrão.

^bModelo com intervenções.

^cModelo com drift estocástico.

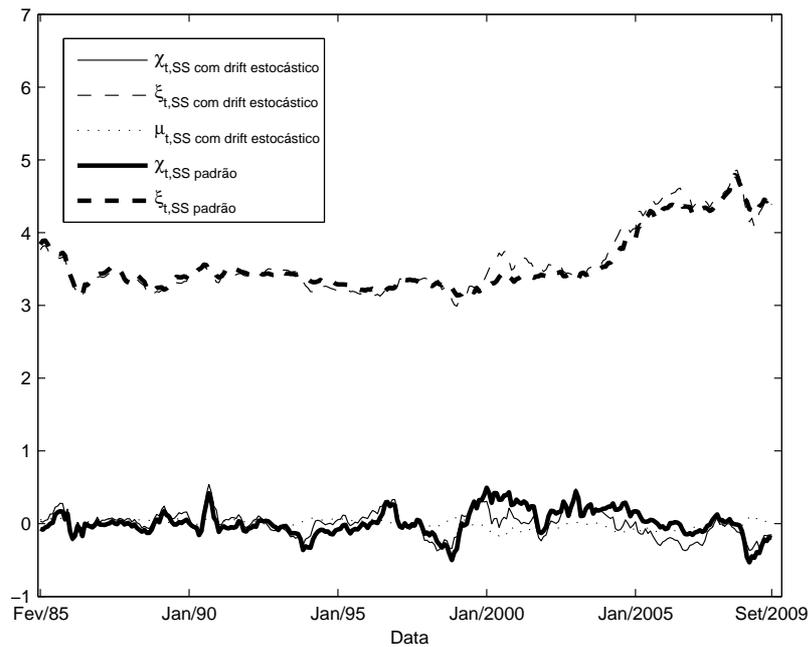


Figura 6.4: Fatores suavizados do modelo SS padrão e com drift estocástico

esperar, pois este modelo se ajusta melhor aos dados.

6.3

Resultados da previsão para os preços spot e futuros

Nesta seção apresentamos os resultados da previsão para os preços spot de petróleo e para seus preços no mercado futuro. A Figura 6.7 apresenta a previsão feita para a primeira amostra (Am-1), onde se pode observar como ambos modelos preveem preços futuros similares, enquanto que a previsão do preço spot pelo modelo com drift estocástico faz "mais sentido", pois ela cresce, enquanto que a previsão do modelo SS padrão decresce. Cabe mencionar que esta amostra é parte do período "tranquilo".

Outra amostra interessante para analisar é a amostra Am-4, pois ela finaliza quando o preço do petróleo está subindo. Na Figura 6.8 se pode observar como o preço spot previsto pelo modelo SS sobe, enquanto que o modelo com drift estocástico é mais conservador: sua previsão começa a cair, influenciada ainda pelos valores baixos do período anterior.

Para o período 6 (Am-6) as duas previsões de preço spot são influenciadas pelo período de crise e ambas previsões sobem.

Os dois modelos prevêem que o preço spot vai subir até o ano 2014. O modelo SS padrão prevê o preço spot de \$ 101,111 por barril, enquanto que a nossa extensão prevê o preço de \$ 98,395 por barril. Podemos dizer que a previsão em média pela extensão é ligeiramente mais moderada para este período de previsão,

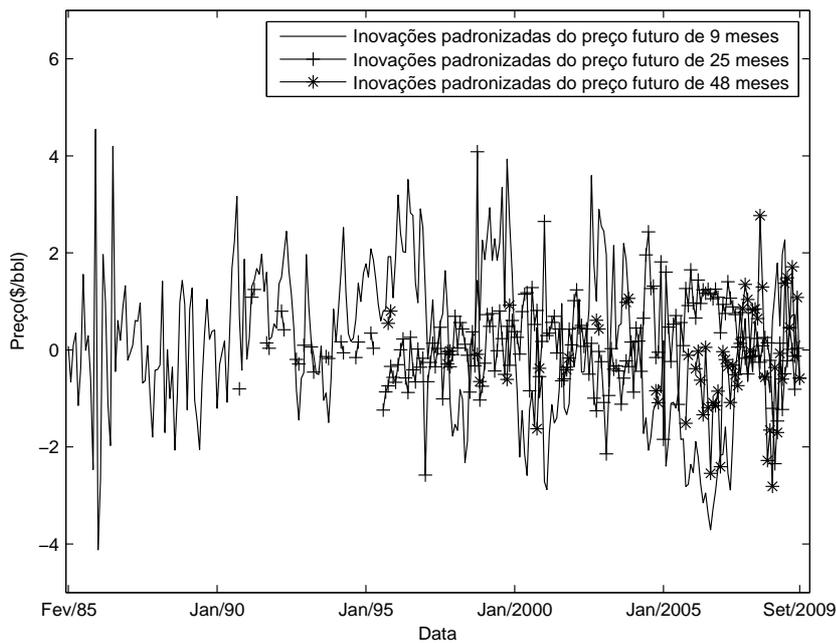


Figura 6.5: Inovações padronizadas do modelo SS padrão na amostra 7

mas para períodos mais longos (30 anos, por exemplo) a previsão do modelo SS padrão cresce acentuadamente até chegar a um preço de \$ 250 por barril enquanto que a nossa extensão apresenta um preço de \$ 140 por barril.

6.4

Resultados do modelo multivariado para o preços do petróleo e dos derivados

Na Tabela 6.12 apresentamos os resultados da estimação do modelo multivariado para os preços do petróleo e de alguns de seus derivados, a saber: gás natural, heat oil(óleo para aquecimento), gasolina, querosene, óleo combustível lsfo, óleo combustível hsfo, nafta, diesel, propano e butano.

Da Tabela 6.12, comparando os parâmetros dos derivados podemos concluir que existem dois grupos diferenciados de derivados, os quais dependem do padrão similar dos fatores. No fator de curto prazo podemos dividir adotar a seguinte classificação: petróleo WTI, heat oil, gasolina, querosene, nafta, diesel, propano e butano com $\phi_{i,1}$ perto de -1. O outro grupo é formado por gás natural, óleo combustível LSFO e óleo combustível HSFO com $\phi_{i,1}$ perto de -2.

No fator de longo prazo podemos dividir em dois grupos, e os grupos coincidem com os do fator de curto prazo, com o primeiro deles apresentam $\phi_{i,2}$ perto de 0,1 e o outro perto de 0,05.

A Figura 6.13 apresenta os fatores de longo prazo para o petróleo WTI, calculados usando o modelo individual e o modelo integrado. Os resultados fazem

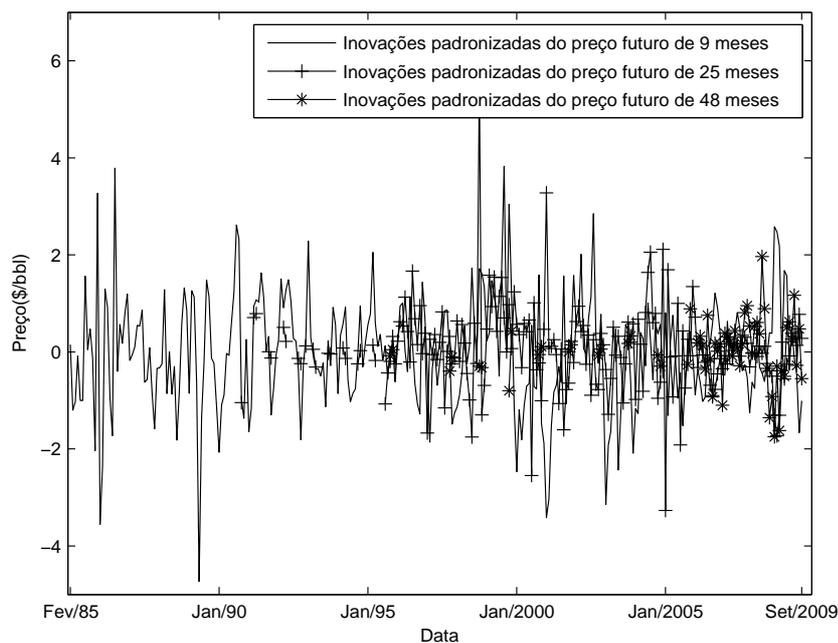


Figura 6.6: Inovações padronizadas do modelo SS com drift estocástico na amostra 7

sentido, pois os fatores estão desfasados só pelo valor $\phi_{1,0}$ do modelo integrado, o qual tem um valor estimado de 0,658. Como se pode observar na Figura 6.13 ele necessariamente teria que ser positivo tal como foi estimado e a diferença entre as linhas é aproximadamente esse valor.

Os preços spot previstos, apresentados na Figura 6.17 são coerentes, pois os preços dos derivados apresentados são maiores que o do petróleo.

Tabela 6.11: Análise dos resíduos do modelo SS com drift estocástico

Mat.	Media	Desv. padrão	Ass.	Kurt.	J-Bera	N	Q(25)-r	Q(25)-r ²
τ_1	-0,11	0,99	0,44	5,60	92,99 (0,00) ^a	296	346,96 (0,00) ^b	116,43 (0,00) ^c
τ_2	-0,05	1,10	-0,10	6,20	126,73 (0,00)	296	134,73 (0,00)	83,37 (0,00)
τ_3	-0,02	1,16	-0,03	4,50	27,77 (0,65)	296	111,89 (0,00)	33,88 (0,11)
τ_4	0,02	1,08	0,07	3,76	6,53 (0,04)	262	32,63 (0,14)	55,27 (0,00)
τ_5	-0,04	0,93	-0,16	4,17	14,90 (0,00)	244	25,49 (0,60)	24,61 (0,49)
τ_6	-0,03	0,99	-0,64	8,77	302,30 (0,00)	208	50,22 (0,00)	16,10 (0,91)
τ_7	0,06	0,90	1,08	11,57	614,72 (0,00)	189	21,13 (0,69)	14,35 (0,96)
τ_8	0,02	0,99	0,73	10,81	494,19 (0,00)	188	15,56 (0,93)	20,50 (0,72)
τ_9	0,03	0,71	-0,20	5,66	31,46 (0,00)	104	15,45 (0,93)	24,18 (0,51)
τ_{10}	0,08	0,72	-0,10	10,27	143,44 (0,00)	65	9,38 (1,00)	20,07 (0,74)
τ_{11}	0,14	0,97	0,81	7,70	66,89 (0,00)	65	22,58 (0,60)	6,20 (1,00)
τ_{12}	0,02	0,92	-2,41	12,71	313,49 (0,00)	64	11,29 (0,99)	1,96 (1,00)
τ_{13}	0,02	0,63	-0,27	4,49	6,60 (0,04)	63	37,73 (0,05)	18,06 (0,84)

^aP-valor do teste Jarque-Bera.

^bP-valor do teste LjungBox nos resíduos.

^cP-valor do teste LjungBox nos resíduos ao quadrado.

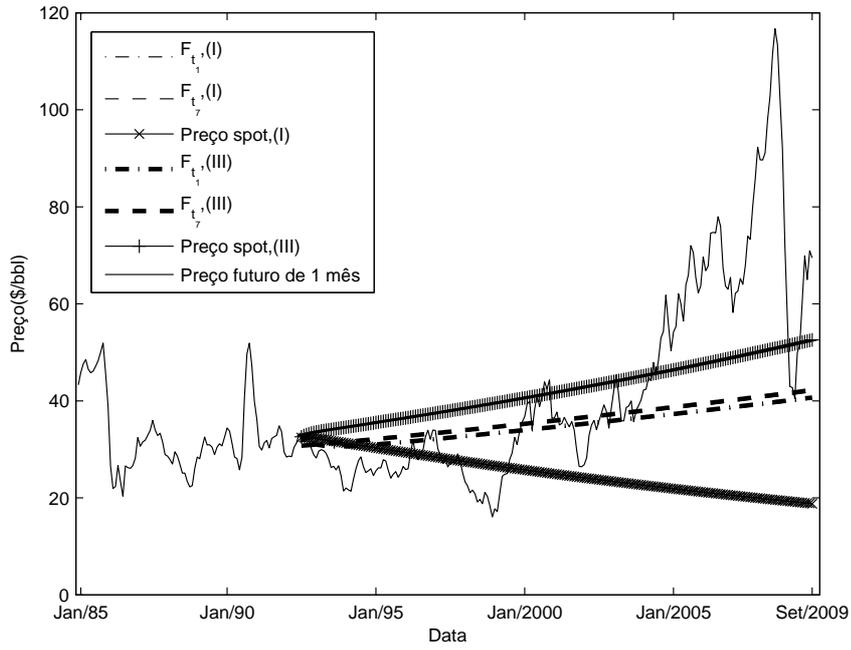


Figura 6.7: Previsão do preço spot e de preços futuros (Am-1)

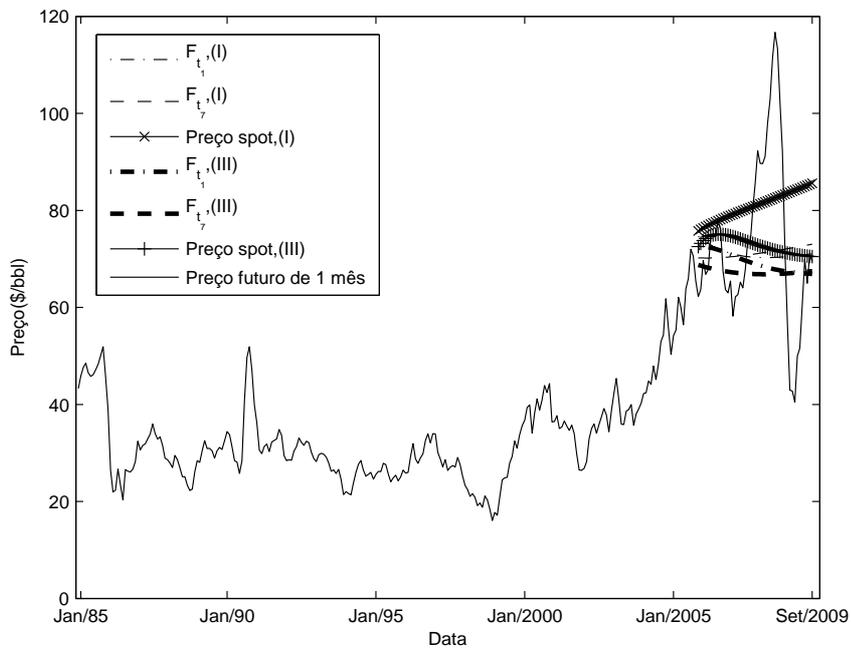


Figura 6.8: Previsão do preço spot e de preços futuros (Am-4)

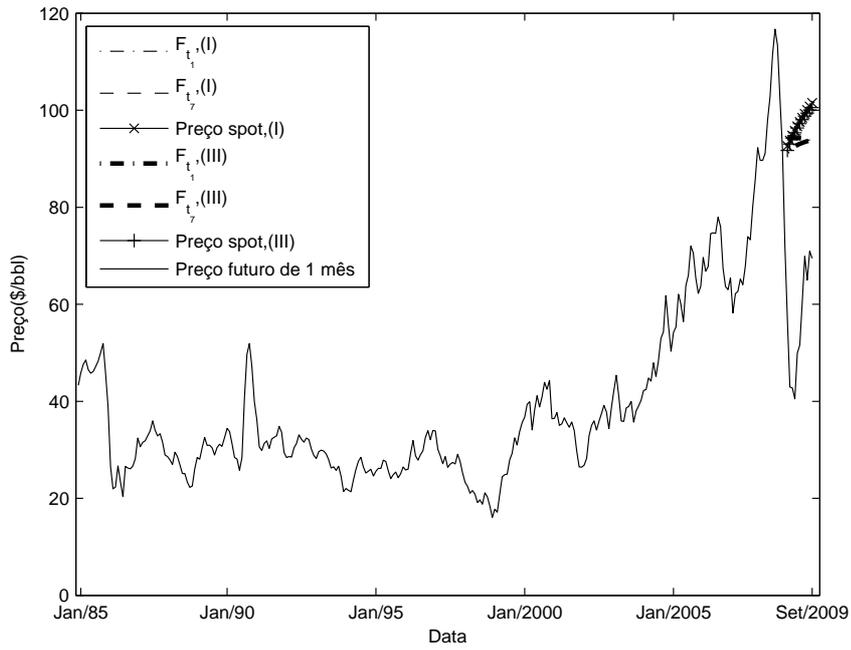


Figura 6.9: Previsão do preço spot e de preços futuros (Am-6)

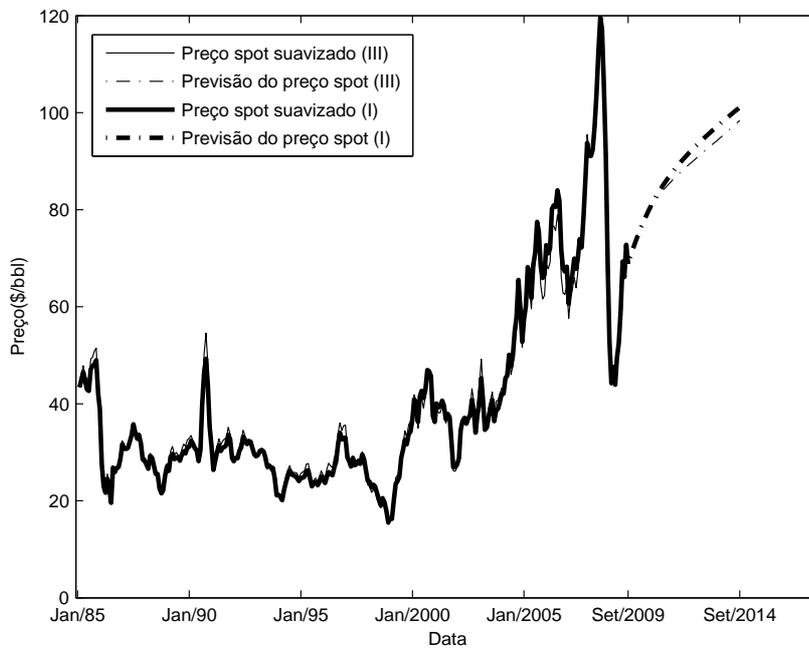


Figura 6.10: Previsão do preço spot de petróleo 5 anos em frente

Tabela 6.12: Estimativas dos parâmetros do modelo multivariado para o preço do petróleo e de derivados.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
$\hat{\sigma}_X$	13,80%	$\hat{\phi}_{8,0}$	1,179	$\hat{\phi}_{1,2}$	0,143	$\hat{\sigma}_{v_{\tau_2,2}}$	0,207
$\hat{\sigma}_E$	142,90%	$\hat{\phi}_{9,0}$	0,687	$\hat{\phi}_{2,2}$	0,056	$\hat{\sigma}_{v_{\tau_3,2}}$	0,096
$\hat{\lambda}_X$	13,08%	$\hat{\phi}_{10,0}$	0,642	$\hat{\phi}_{3,2}$	0,144	$\hat{\sigma}_{v_{\tau_1,3}}$	0,018
$\hat{\lambda}_E$	28,19%	$\hat{\phi}_{11,0}$	1,112	$\hat{\phi}_{4,2}$	0,101	$\hat{\sigma}_{v_{\tau_2,3}}$	0,001
$\hat{\kappa}_X$	0,627	$\hat{\phi}_{1,1}$	-0,999	$\hat{\phi}_{5,2}$	0,152	$\hat{\sigma}_{v_{\tau_3,3}}$	0,024
$\hat{\kappa}_U$	0,696	$\hat{\phi}_{2,1}$	-2,168	$\hat{\phi}_{6,2}$	0,042	$\hat{\sigma}_{v_{\tau_1,4}}$	0,094
$\hat{\rho}_{XE}$	-0,230	$\hat{\phi}_{3,1}$	-1,041	$\hat{\phi}_{7,2}$	0,015	$\hat{\sigma}_{v_{\tau_2,4}}$	0,067
$\hat{\sigma}_U$	1,390	$\hat{\phi}_{4,1}$	-1,289	$\hat{\phi}_{8,2}$	0,122	$\hat{\sigma}_{v_{\tau_3,4}}$	0,086
$\hat{\phi}_{1,0}$	0,658	$\hat{\phi}_{5,1}$	-1,037	$\hat{\phi}_{9,2}$	0,148	$\hat{\sigma}_{v,5}$	0,028
$\hat{\phi}_{2,0}$	0,226	$\hat{\phi}_{6,1}$	-2,179	$\hat{\phi}_{10,2}$	0,124	$\hat{\sigma}_{v,6}$	0,050
$\hat{\phi}_{3,0}$	0,798	$\hat{\phi}_{7,1}$	-2,732	$\hat{\phi}_{11,2}$	0,111	$\hat{\sigma}_{v,7}$	0,073
$\hat{\phi}_{4,0}$	1,703	$\hat{\phi}_{8,1}$	-1,199	$\hat{\sigma}_{v_{\tau_1,1}}$	0,062	$\hat{\sigma}_{v,8}$	0,087
$\hat{\phi}_{5,0}$	0,654	$\hat{\phi}_{9,1}$	-1,080	$\hat{\sigma}_{v_{\tau_2,1}}$	0,053	$\hat{\sigma}_{v,9}$	0,008
$\hat{\phi}_{6,0}$	2,476	$\hat{\phi}_{10,1}$	-1,073	$\hat{\sigma}_{v_{\tau_3,1}}$	0,063	$\hat{\sigma}_{v,10}$	0,157
$\hat{\phi}_{7,0}$	2,880	$\hat{\phi}_{11,1}$	-1,215	$\hat{\sigma}_{v_{\tau_1,2}}$	0,301	$\hat{\sigma}_{v,11}$	0,119
$\log L_{d=1}(y, \hat{\theta})$	4620,019	AIC	-30,998	BIC	-30,239		

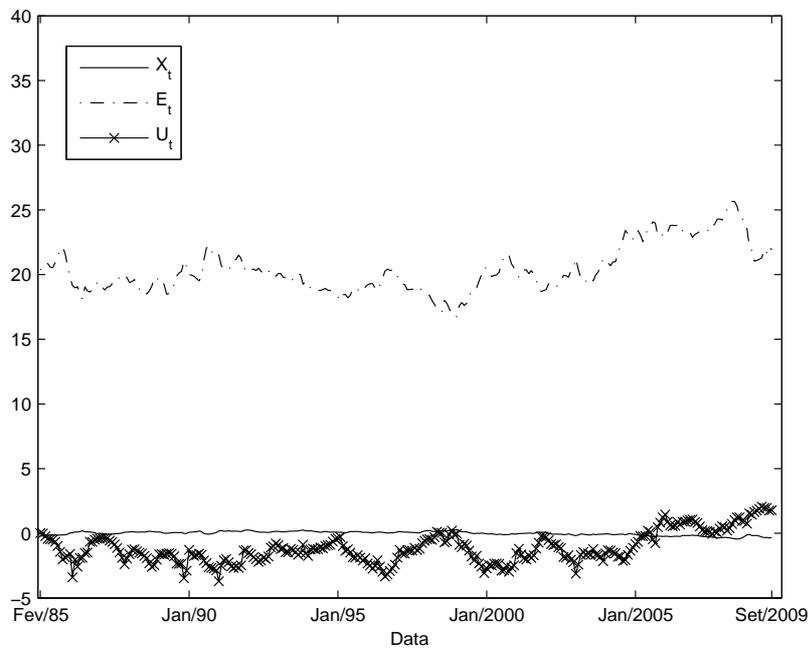


Figura 6.11: Fatores globais suavizados

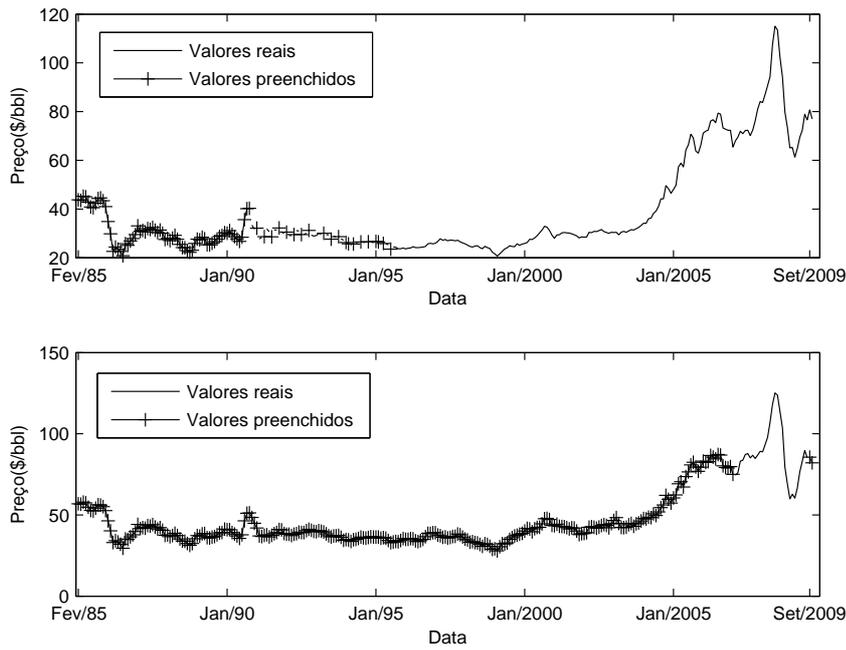


Figura 6.12: Preços futuros preenchidos por o modelo integrado acima (futuro de 12 meses do preço do petróleo), em baixo(futuros de 12 do preço da gasolina)

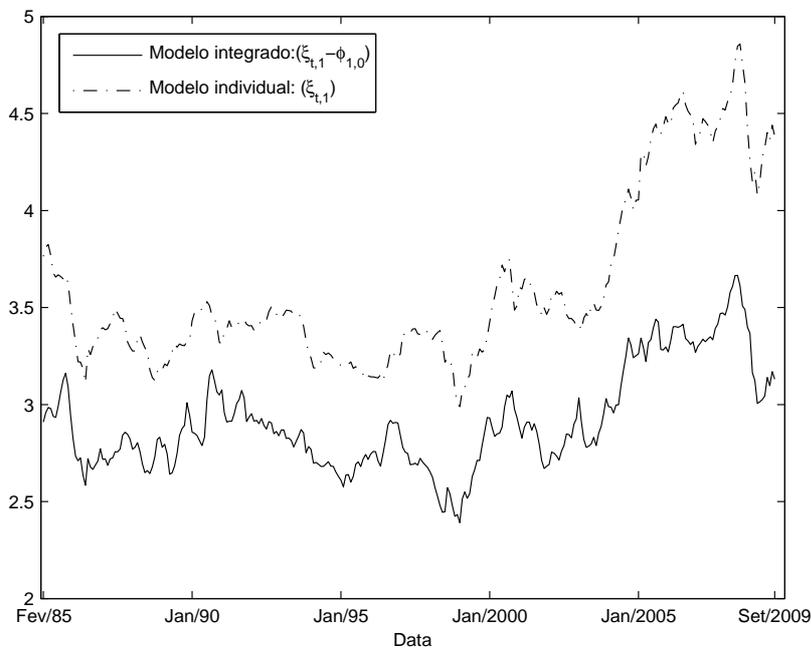


Figura 6.13: Fator de longo prazo do preço de petróleo WTI no modelo individual e no modelo integrado

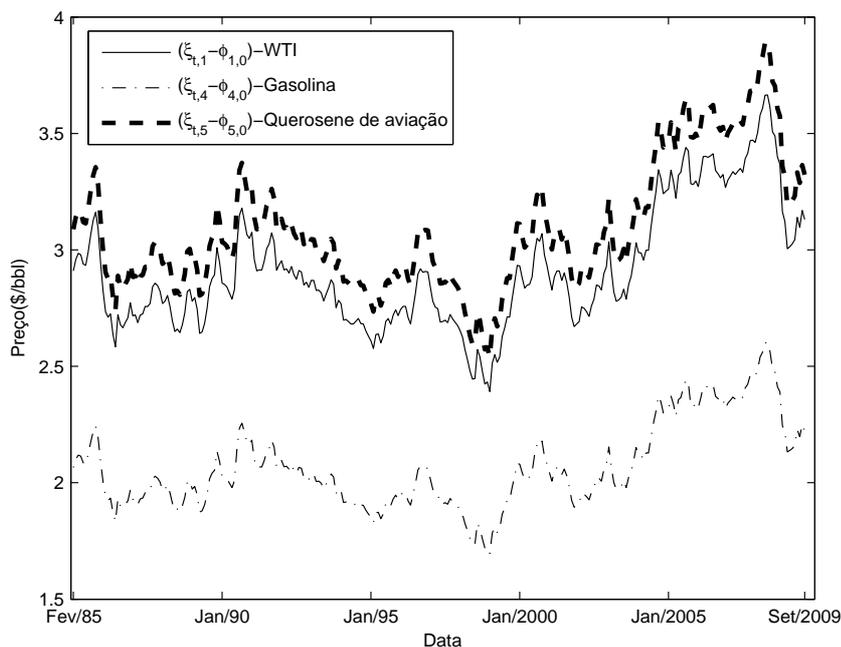


Figura 6.14: Fatores de longo prazo de alguns dos derivados no modelo integrado

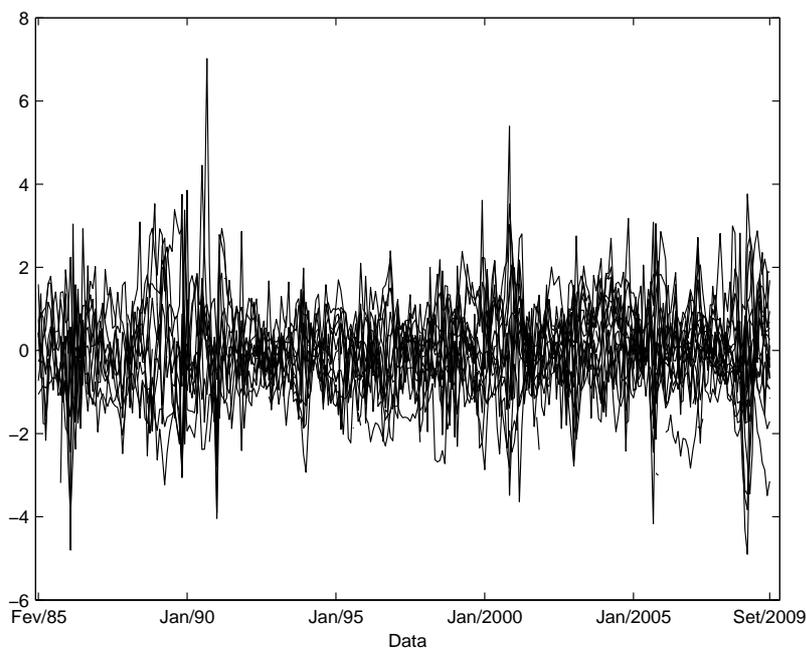


Figura 6.15: Erros padronizados do modelo integrado dos derivados

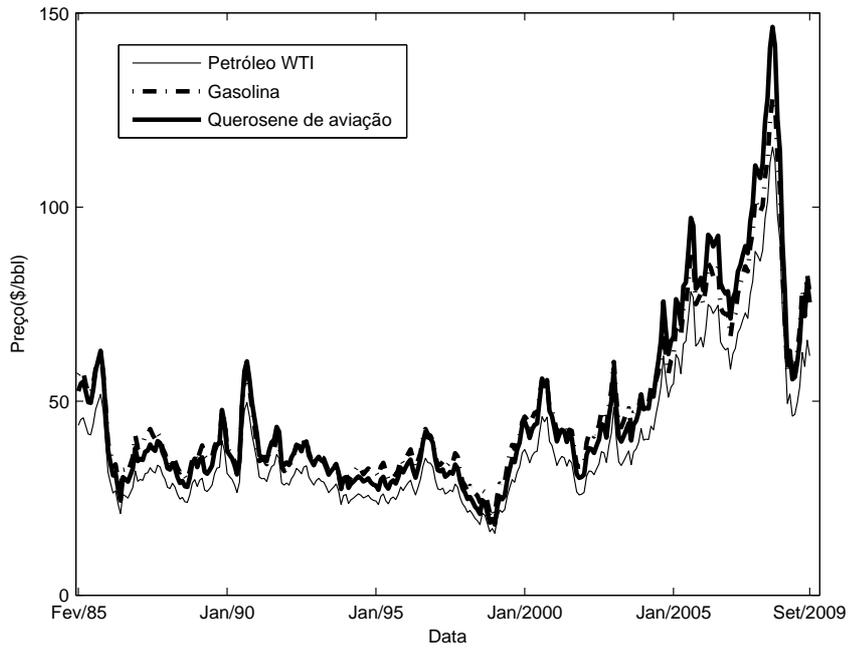


Figura 6.16: Preços spot suavizados para alguns derivados, a partir do modelo integrado

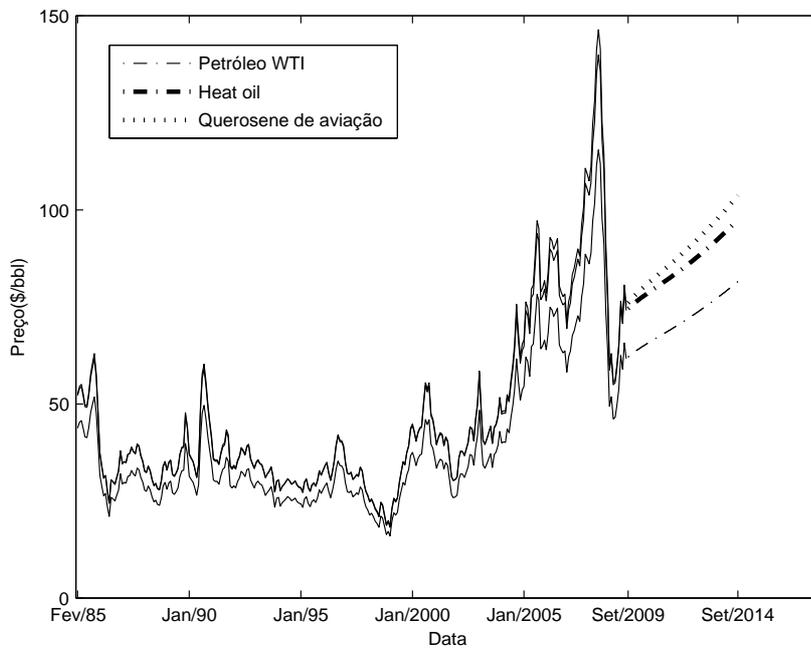


Figura 6.17: Previsão do preço spot de alguns derivados para 5 anos à frente

7

Conclusões e Extensões

7.1

Conclusões

Neste trabalho foram desenvolvidas duas extensões do modelo estocástico de SS para previsão de preço spot de petróleo: o modelo com drift estocástico e o modelo multivariado.

A previsão gerada pelo modelo com drift estocástico no período antes da recente crise financeira de 2008, prevê preços spots mais coerentes do que as previsões geradas pelo modelo SS padrão. O ajuste aos dados dos novos modelos aqui propostos são melhores, em termos de AIC, BIC e dos diagnósticos dos resíduos.

Os nossos resultados indicam a existência de dois fatores comuns: um fator de curto prazo e outro fator de longo prazo, que explicam satisfatoriamente o comportamento para cada derivado individualmente. Baseados na existência destes fatores apresentamos um modelo multivariado para preço de petróleo e derivados, o qual depois de ser estimado, produz resultados coerentes com o comportamento observado das séries.

Finalmente foram divididos os derivados em dois grupos em função de dependência de cada um deles com cada fator, então foram achados dois grupos de derivados que dependem em diferentes graus dos fatores globais.

7.2

Extensões

- a leptocurtose dos resíduos deve ser melhor investigada, observando se há necessidade de se considerar modelos em espaço de estado com erros leptocúrticos, por exemplo, através de uma distribuição t .

- a existência de dependência quadrática nos resíduos também deve ser melhor averiguada, pois se não for resultado de mal ajuste de algumas observações, pode ser pertinente considerar a inclusão de volatilidade estocástica ou modelos tipo GARCH. Estas opções resultariam em extensões não-trivais dos modelos aqui apresentados.

- pode-se obter as matrizes de covariância assintótica dos hiperparâmetros, permitindo assim a construção de intervalos de confiança e testes de significância (assintóticos). Os mesmos resultados, para amostras finitas, podem ser levantados através da técnica de *bootstrap*.

- é possível também considerar a estimativa não paramétrica da distribuição de previsão l passos à frente via *bootstrap*. Este resultado, em particular, seria indicado se a não normalidade dos resíduos permanecer após análise de intervenção.

8

Referencias

ANDERSON, BRIAN D. O.; MOORE, JOHN B. **Optimal filtering**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1979.

BAKER M.P.; MAYFIELD E. S.; PARSONS J.E. **Alternative models of uncertain commodity prices for use with modern asset pricing methods**. The Energy Journal, 19, No 1.

BROCKWELL, P. J. and DAVIS, R. A. **Introduction to Time Series and Forecasting**. 2nd edition. Springer Texts in Statistics, 2002.

BROCKWELL, P. J.; DAVIS, R. A. **Time Series: Theory and Methods**. 2nd edition. Springer-Verlag., 1991.

CORTAZAR, G.; SCHWARTZ, E. S. **The evaluation of commodity contingent claims**. J. Derivatives, 1, 27-39, 1994.

DIXIT, A. K., R. S. PINDYCK. **Investment Under Uncertainty**. Princeton University Press. Princeton, NJ, 1994.

DUFFIE, D. **Dynamic Asset Pricing Theory**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.

DURBIN J.; KOOPMAN S.J. **Time series analysis by state space methods**. Oxford university press inc., New York, 2001.

FRANCIS X. DIEBOLD.; CANLIN LI.; VIVIAN Z. YUE. **Global yield curve dynamics and interactions: a dynamic nelson-siegel approach**. Journal of Econometrics, 146, 351-363, 2008.

GIBSON R.; SCHWARTZ E. S. **Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims**. The Journal of finance, 3, 959-976, 1990.

HAMILTON, J. **Time Series Analysis**. New Jersey: Princeton University Press, Princeton, 1994.

HARVEY A.C . **Forecasting, structural time series models and the Kalman filter**. Cambridge University Press., Cambridge,1989.

HELYETTE GEMAN. **Commodities and commodity derivatives. Modeling and Pricing for agriculturals, metals and energy**. John Wiley & Sons, 2005.

HULL, J. **Options, futures, and other derivatives**. 4th edition. Prentice Hall, 2000.

JACQUES J.F.; KOOPMAN S.J. **An introduction to state space time series analysis**. Oxford university press inc., New York, 2007.

KOOPMAN. S.J. **Exact initial Kalman filtering and smoothing for non-stationary time series models**. American Statistical Association, 92, 1630-1638, 1997.

LAUGHTON, D. G.; HENRY D. JACOBY **Reversion, timing options, and long-term decision making**. Financial Management, 33, 225-240, 1993.

PETER SCHAEFFER. **Commodity modeling and pricing methods for analyzing resource market behavior**. John Wiley & Sons, 2008.

SCHWARTZ, E. S. **The stochastic behavior of commodity prices: Implications for Valuation and Hedging**. The Journal of finance, 3, 923-973, 1997.

SCHWARTZ, E. S.; SMITH J. E. **Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices**. Management Science, 46, 893-911, 2000.

SHUMWAY, R. H. and STOFFER, D. S. **Time Series Analysis and Its Applications (With R Examples)**. Springer, 2006.

SMITH J. E.; MCCARDLE. **Valuing oil properties: Integrating option pricing and decision analysis approaches**. Oper. Res, 46, 198-217, 1998.

9

Apêndice A - Cálculo da equação para o preço futuro no modelo SS com drift estocástico

Nesta seção é apresentado o processo de cálculo da equação do preço futuro a partir do modelo de drift estocástico. O cálculo é feito sobre as equações neutras ao risco.

9.1

Discretização do modelo

o modelo na forma contínua é dado por:

$$\begin{aligned}\ln S_t &= \chi_t + \xi_t \\ d\chi_t &= (-\kappa_\chi \chi_t - \lambda_\chi) dt + \sigma_\chi dz_\chi^* \\ d\xi_t &= (\mu_t - \lambda_\xi) dt + \sigma_\xi dz_\xi^* \\ d\mu_t &= -\kappa_\mu \mu_t dt + \sigma_\mu dz_\mu\end{aligned}$$

Discretizando a equação do fator de curto prazo(χ_t) temos:

$$\begin{aligned}\Delta\chi_t &= (-\kappa_\chi \chi_{t-\Delta t} - \lambda_\chi) \Delta t + \omega_{1,t} \\ \chi_t - \chi_{t-\Delta t} &= -\kappa_\chi \chi_{t-\Delta t} \Delta t - \lambda_\chi \Delta t + \omega_{1,t} \\ \chi_t &= -\lambda_\chi \Delta t + (1 - \kappa_\chi \Delta t) \chi_{t-\Delta t} + \omega_{1,t}\end{aligned}$$

onde $\omega_{1,t} \sim N(0, \sigma_\chi^2 \Delta t)$. De forma análoga, discretizando a equação do fator de longo prazo(ξ_t), resulta em:

$$\begin{aligned}\Delta\xi_t &= (\mu_{t-\Delta t} - \lambda_\xi) \Delta t + \omega_{2,t} \\ \xi_t - \xi_{t-1} &= -\lambda_\xi \Delta t - \mu_{t-\Delta t} \Delta t + \omega_{2,t} \\ \xi_t &= -\lambda_\xi \Delta t + \xi_{t-\Delta t} + \mu_{t-\Delta t} \Delta t + \omega_{2,t}\end{aligned}$$

onde $\omega_{2,t} \sim N(0, \sigma_\xi^2 \Delta t)$ e $Corr(\omega_{1,t}, \omega_{2,t}) = \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \Delta t$. Finalmente discretizando a equação do drift(μ_t):

$$\begin{aligned}\Delta\mu_t &= -\kappa_\mu \mu_{t-\Delta t} \Delta t + \omega_{3,t} \\ \mu_t - \mu_{t-\Delta t} &= -\kappa_\mu \mu_{t-\Delta t} \Delta t + \omega_{3,t} \\ \mu_t &= (1 - \kappa_\mu \Delta t) \mu_{t-\Delta t} + \omega_{3,t}\end{aligned}$$

$\omega_{3,t} \sim N(0, \sigma_\mu^2 \Delta t)$. Finalmente é possível mostrar que a evolução dos fatores

discreto pode ser calculada sob a forma: $\alpha_t = c + T\alpha_{t-\Delta t} + \omega_t$, onde $\alpha_t = \begin{pmatrix} \chi_t \\ \xi_t \\ \mu_t \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}c &= \begin{pmatrix} -\lambda_\chi \Delta t \\ -\lambda_\xi \Delta t \\ 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} (1 - \kappa_\chi \Delta t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & (1 - \kappa_\mu \Delta t) \end{pmatrix}, \\ \omega_t &= \begin{pmatrix} \omega_{1,t} \\ \omega_{2,t} \\ \omega_{3,t} \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_\chi^2 \Delta t & \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \Delta t & 0 \\ \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \Delta t & \sigma_\xi^2 \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\mu^2 \Delta t \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

9.2

Cálculo do preço futuro

O preço futuro esta definido como:

$$F_{t,\tau} = \mathbf{E}^*(S_{t+\tau} | \mathfrak{S}_t) = \exp \left(\mathbf{E}^*(\ln S_{t+\tau} | \mathfrak{S}_t) + \frac{1}{2} \mathbf{Var}^*(\ln S_{t+\tau} | \mathfrak{S}_t) \right) \dots \dots (9-1)$$

- Calculamos a **esperança condicional** dada em (9-1):

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^*(\ln S_{t+\tau} | \mathfrak{S}_t) &= \mathbf{E}^*(\chi_{t+\tau} + \xi_{t+\tau} | \mathfrak{S}_t) = \mathbf{E}^* \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{t+\tau} \\ \xi_{t+\tau} \\ \mu_{t+\tau} \end{pmatrix} | \mathfrak{S}_t \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{E}^*(\alpha_{t+\tau} | \mathfrak{S}_t) \dots \dots (a)\end{aligned}$$

então precisamos calcular a esperança condicional do vetor de estado $\mathbf{E}^*(\alpha_{t+\tau} | \mathfrak{S}_t)$, sendo $\tau = \bar{h} \Delta t$, onde \bar{h} é a quantidade de passos necessários para chegar ao tempo $\tau + t$ partindo do tempo t . No tempo $t + \Delta t$, temos para o vetor de estado $\alpha_{t+\Delta t} = c + T\alpha_t + \omega_{t+\Delta t}$. Obtendo a esperança condicional dada a informação no tempo t , temos:

$$m_{t+j} = c + T \times m_{t+j-1}, j = 1, \dots, \bar{h}$$

onde $m_{t+j} = \mathbf{E}^*(\alpha_{t+j\Delta t} | \mathfrak{S}_t)$ e $m_t = \begin{pmatrix} \chi_t \\ \xi_t \\ \mu_t \end{pmatrix}$. De forma recursiva obtemos:

$$m_{t+h} = c + \sum_{j=1}^{h-1} T^j c + T^h m_t \dots \dots (b)$$

onde:

$$T^j = \begin{pmatrix} (1 - \kappa_\chi \Delta t)^j & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1 - (1 - \kappa_\mu \Delta t)^j}{\kappa_\mu} \\ 0 & 0 & (1 - \kappa_\mu \Delta t)^j \end{pmatrix}$$

substituindo os respectivos valores em (b), temos:

$$m_{t+h} = c + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{h-1} (1 - \kappa_\chi \Delta t)^j & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^{h-1} 1 & \sum_{j=1}^{h-1} \frac{1 - (1 - \kappa_\mu \Delta t)^j}{\kappa_\mu} \\ 0 & 0 & \sum_{j=1}^{h-1} (1 - \kappa_\mu \Delta t)^j \end{pmatrix} c + T^h m_t$$

assumindo que $0 < (1 - \kappa_\chi \Delta t) < 1$ e $0 < (1 - \kappa_\mu \Delta t) < 1$ e lembrando que para $0 < \varrho < 1$ temos que $\sum_{j=0}^h \varrho^j = \frac{1 - \varrho^{h+1}}{1 - \varrho}$ obtemos:

$$\begin{aligned} m_{t+h} &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{h-1} (1 - \kappa_\chi \Delta t)^j & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{j=0}^{h-1} 1 & \sum_{j=1}^{h-1} \frac{1 - (1 - \kappa_\mu \Delta t)^j}{\kappa_\mu} \\ 0 & 0 & \sum_{j=0}^{h-1} (1 - \kappa_\mu \Delta t)^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_\chi \Delta t \\ -\lambda_\xi \Delta t \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} (1 - \kappa_\chi \Delta t)^h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1 - (1 - \kappa_\mu \Delta t)^h}{\kappa_\mu} \\ 0 & 0 & (1 - \kappa_\mu \Delta t)^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_t \\ \xi_t \\ \mu_t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1 - (1 - \kappa_\chi \Delta t)^h}{\kappa_\chi \Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & h & \frac{1}{\kappa_\mu} \left(h - \frac{1 - (1 - \kappa_\mu \Delta t)^h}{\kappa_\mu \Delta t} \right) \\ 0 & 0 & \frac{1 - (1 - \kappa_\mu \Delta t)^h}{\kappa_\mu \Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_\chi \Delta t \\ -\lambda_\xi \Delta t \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} (1 - \kappa_\chi \Delta t)^h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1 - (1 - \kappa_\mu \Delta t)^h}{\kappa_\mu} \\ 0 & 0 & (1 - \kappa_\mu \Delta t)^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_t \\ \xi_t \\ \mu_t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_\chi}{\kappa_\chi} (1 - (1 - \kappa_\chi \Delta t)^h) + (1 - \kappa_\chi \Delta t)^h \chi_t \\ -\lambda_\xi h \Delta t + \xi_t + \mu_t \left(\frac{1 - (1 - \kappa_\mu \Delta t)^h}{\kappa_\mu} \right) \\ (1 - \kappa_\mu \Delta t)^h \mu_t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

substituindo $h = \frac{\tau}{\Delta t}$, temos:

$$m_{t+h} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_\chi}{\kappa_\chi} (1 - (1 - \kappa_\chi \Delta t)^{\frac{\tau}{\Delta t}}) + (1 - \kappa_\chi \Delta t)^{\frac{\tau}{\Delta t}} \chi_t \\ -\lambda_\xi \tau + \xi_t + \mu_t \left(\frac{1 - (1 - \kappa_\mu \Delta t)^{\frac{\tau}{\Delta t}}}{\kappa_\mu} \right) \\ (1 - \kappa_\mu \Delta t)^{\frac{\tau}{\Delta t}} \mu_t \end{pmatrix}$$

tirando limite quando $\Delta t \rightarrow 0$, o cálculo da seguinte expressão ajudará no cálculo:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - \kappa_\chi \Delta t)^{\frac{\tau}{\Delta t}}$$

fazemos $x = -\kappa_\chi \Delta t$ e se $\Delta t \rightarrow 0$ então $x \rightarrow 0$, logo temos a equivalência de duas expressões

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - \kappa_\chi \Delta t)^{\frac{\tau}{\Delta t}} &\equiv \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\tau \frac{-\kappa_\chi}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x} (-\kappa_\chi \tau)} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} \right)^{-\kappa_\chi \tau} = e^{-\kappa_\chi \tau} \end{aligned}$$

substituindo o resultado anterior:

$$m_{t+h} = \mathbf{E}^*(\alpha_{t+\tau} | \mathfrak{S}_t) = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_\chi}{\kappa_\chi} (1 - e^{-\kappa_\chi \tau}) + e^{-\kappa_\chi \tau} \chi_t \\ -\lambda_\xi \tau + \xi_t + \mu_t \left(\frac{1 - e^{-\kappa_\mu \tau}}{\kappa_\mu} \right) \\ e^{-\kappa_\mu \tau} \mu_t \end{pmatrix}$$

substituindo em (a):

$$\mathbf{E}^*(\ln S_{t+\tau} | \mathfrak{S}_t) = -\frac{\lambda_\chi}{\kappa_\chi} (1 - e^{-\kappa_\chi \tau}) + e^{-\kappa_\chi \tau} \chi_t - \lambda_\xi \tau + \xi_t + \mu_t \left(\frac{1 - e^{-\kappa_\mu \tau}}{\kappa_\mu} \right)$$

- Calculamos a **Variância Condicional** dada em (9-1):

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}^*(\ln S_{t+\tau} | \mathfrak{S}_t) &= \mathbf{Var}^*(\chi_{t+\tau} + \xi_{t+\tau} | \mathfrak{S}_t) = \mathbf{Var}^* \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{t+\tau} \\ \xi_{t+\tau} \\ \mu_{t+\tau} \end{pmatrix} \middle| \mathfrak{S}_t \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Var}^*(\alpha_{t+\tau} | \mathfrak{S}_t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \dots \dots (c) \end{aligned}$$

De forma similar ao cálculo da média condicional, temos a seguinte expressão para a variância condicional (V_t), onde Q é a matriz variância-covariância dos erros da equação de estado, onde $V_t = 0$:

$$V_{t+\Delta t} = TV_t T' + Q;$$

para \bar{h} passos em frente temos que:

$$V_{t+\bar{h}\Delta t} = \mathbf{Var}^*(\alpha_{t+\tau}|\mathfrak{S}_t) = Q + \sum_{j=1}^{\bar{h}-1} T^j Q T^{j-1}$$

logo:

$$V_{t+\bar{h}\Delta t} = \begin{pmatrix} \sigma_\chi^2 \Delta t \sum_{j=0}^{\bar{h}-1} (1 - \kappa_\chi \Delta t)^{2j} & \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \Delta t \sum_{j=0}^{\bar{h}-1} (1 - \kappa_\chi \Delta t)^j & 0 \\ \rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi \Delta t \sum_{j=0}^{\bar{h}-1} (1 - \kappa_\chi \Delta t)^j & \sum_{j=0}^{\bar{h}-1} \sigma_\xi^2 \Delta t + \sigma_\mu^2 \Delta t \sum_{j=1}^{\bar{h}-1} \left(\frac{1 - (1 - \kappa_\mu \Delta t)^j}{\kappa_\mu} \right)^2 & A \\ 0 & A & B \end{pmatrix}$$

onde $A = \sigma_\mu^2 \Delta t \sum_{j=1}^{\bar{h}-1} (1 - \kappa_\mu \Delta t)^j \left(\frac{1 - (1 - \kappa_\mu \Delta t)^j}{\kappa_\mu} \right)$ e $B = \sigma_\mu^2 \Delta t \sum_{j=0}^{\bar{h}-1} (1 - \kappa_\mu \Delta t)^{2j}$. Finalmente temos a seguinte expressão para a variância condicional do estado:

$$\mathbf{Var}^*(\alpha_{t+\tau}|\mathfrak{S}_t) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa_\chi} (1 - e^{-2\kappa_\chi \tau}) & \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa_\chi} (1 - e^{-\kappa_\chi \tau}) & 0 \\ \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa_\chi} (1 - e^{-\kappa_\chi \tau}) & \sigma_\xi^2 \tau + \frac{\sigma_\mu^2}{\kappa_\mu^2} \left(\tau - 2 \left(\frac{1 - e^{-\kappa_\mu \tau}}{\kappa_\mu} \right) + \frac{1 - e^{-2\kappa_\mu \tau}}{2\kappa_\mu} \right) & C \\ 0 & C & D \end{pmatrix}$$

onde $C = \frac{\sigma_\mu^2}{\kappa_\mu} \left(\frac{1 - e^{-\kappa_\mu \tau}}{\kappa_\mu} - \frac{1 - e^{-2\kappa_\mu \tau}}{2\kappa_\mu} \right)$ e $D = \frac{\sigma_\mu^2}{2\kappa_\mu} (1 - e^{-2\kappa_\mu \tau})$. Finalmente, substituindo em (c), temos:

$$\mathbf{Var}^*(\ln S_{t+\tau}|\mathfrak{S}_t) = \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa_\chi} (1 - e^{-2\kappa_\chi \tau}) + 2 \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa_\chi} (1 - e^{-\kappa_\chi \tau}) + \sigma_\xi^2 \tau + \frac{\sigma_\mu^2}{\kappa_\mu^2} \left(\tau - 2 \left(\frac{1 - e^{-\kappa_\mu \tau}}{\kappa_\mu} \right) + \frac{1 - e^{-2\kappa_\mu \tau}}{2\kappa_\mu} \right)$$

Ao substituir $\mathbf{E}^*(\ln S_{t+\tau}|\mathfrak{S}_t)$ e $\mathbf{Var}^*(\ln S_{t+\tau}|\mathfrak{S}_t)$ em (9-1) obtemos a equação do preço futuro para o modelo SS com drift estocástico.

10

Apêndice B - Equação do preço futuro no modelo SS multi-variado

Para o derivado i , o preço spot esta definido como:

$$\ln S_{t,i} = \phi_{i,0} + \phi_{i,1}X_t + \phi_{i,2}E_t$$

onde os fatores globais possuem equações similares ao do modelo SS com drift estocástico. Então, considerando os resultados do Apêndice A, os quais são válidos também para este modelo e de acordo com a equação (9-1), temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^*(\ln S_{t+\tau,i} | \mathfrak{S}_t) &= \mathbf{E}^* \left(\phi_{i,0} + \begin{pmatrix} \phi_{i,1} & \phi_{i,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t+\tau} \\ E_{t+\tau} \\ U_{t+\tau} \end{pmatrix} \middle| \mathfrak{S}_t \right) \\ &= \phi_{i,0} + \begin{pmatrix} \phi_{i,1} & \phi_{i,2} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{E}^*(\Upsilon_{t+\tau} | \mathfrak{S}_t) \\ &= \phi_{i,0} + \begin{pmatrix} \phi_{i,1} & \phi_{i,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_X}{\kappa_X} (1 - e^{-\kappa_X \tau}) + e^{-\kappa_X \tau} X_t \\ -\lambda_{E\tau} + E_t + U_t \left(\frac{1 - e^{-\kappa_U \tau}}{\kappa_U} \right) \\ e^{-\kappa_U \tau} U_t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Deve-se lembrar que a estrutura dos fatores do Apêndice A é semelhante a dos fatores globais ($\mathbf{E}^*(\Upsilon_{t+\tau} | \mathfrak{S}_t) \cong \mathbf{E}^*(\alpha_{t+\tau} | \mathfrak{S}_t)$). Finalmente temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^*(\ln S_{t+\tau,i} | \mathfrak{S}_t) &= \phi_{i,0} - \phi_{i,1} \frac{\lambda_X}{\kappa_X} (1 - e^{-\kappa_X \tau}) + \phi_{i,1} e^{-\kappa_X \tau} X_t - \phi_{i,2} \lambda_{E\tau} + \\ &+ \phi_{i,2} E_t + \phi_{i,2} \left(\frac{1 - e^{-\kappa_U \tau}}{\kappa_U} \right) U_t \end{aligned}$$

De forma similar calculamos a variância:

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}^*(\ln S_{t+\tau,i} | \mathfrak{S}_t) &= \mathbf{Var}^* \left(\phi_{i,0} + \begin{pmatrix} \phi_{i,1} & \phi_{i,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t+\tau} \\ E_{t+\tau} \\ U_{t+\tau} \end{pmatrix} \middle| \mathfrak{S}_t \right) \\ &= \begin{pmatrix} \phi_{i,1} & \phi_{i,2} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Var}^*(\Upsilon_{t+\tau} | \mathfrak{S}_t) \begin{pmatrix} \phi_{i,1} \\ \phi_{i,2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi_{i,1} & \phi_{i,2} & 0 \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} \phi_{i,1} \\ \phi_{i,2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde:

$$W = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_X^2}{2\kappa_X} (1 - e^{-2\kappa_X\tau}) & \frac{\rho_{XE}\sigma_X\sigma_E}{\kappa_X} (1 - e^{-\kappa_X\tau}) & 0 \\ \frac{\rho_{XE}\sigma_X\sigma_E}{\kappa_X} (1 - e^{-\kappa_X\tau}) & \sigma_E^2\tau + \frac{\sigma_U^2}{\kappa_U} \left(\tau - 2 \left(\frac{1 - e^{-\kappa_U\tau}}{\kappa_U} \right) + \frac{1 - e^{-2\kappa_U\tau}}{2\kappa_U} \right) & M \\ 0 & M & N \end{pmatrix}$$

sendo $M = \frac{\sigma_U^2}{\kappa_U} \left(\frac{1 - e^{-\kappa_U\tau}}{\kappa_U} - \frac{1 - e^{-2\kappa_U\tau}}{2\kappa_U} \right)$ e $N = \frac{\sigma_U^2}{2\kappa_U} (1 - e^{-2\kappa_U\tau})$, e finalmente temos a seguinte expressão para a variância:

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}^*(\ln S_{t+\tau,i} | \mathfrak{S}_t) &= \frac{\sigma_X^2}{2\kappa_X} \phi_{i,1}^2 (1 - e^{-2\kappa_X\tau}) + 2\phi_{i,1}\phi_{i,2} \frac{\rho_{XE}\sigma_X\sigma_E}{\kappa_X} (1 - e^{-\kappa_X\tau}) + \\ &+ \phi_{i,2}^2 \sigma_E^2\tau + \phi_{i,2}^2 \frac{\sigma_U^2}{2\kappa_U} \left(\tau - \frac{2}{\kappa_U} (1 - e^{-\kappa_U\tau}) + \frac{1}{2\kappa_U} (1 - e^{-2\kappa_U\tau}) \right) \end{aligned}$$

Para obter o preço futuro do derivado i com maturidade τ é só substituir as expressões anteriores na seguinte equação

$$F_{t,\tau}^{(i)} = \exp \left(\mathbf{E}^*(\ln S_{t+\tau,i} | \mathfrak{S}_t) + \frac{1}{2} \mathbf{Var}^*(\ln S_{t+\tau,i} | \mathfrak{S}_t) \right)$$

11

Apêndice C - Demonstração de como chegar do algoritmo 2 para o algoritmo 1

Lembrando a equivalência nos subíndices $\sum_{j=1}^{t-1} p_j + i \equiv (t, i)$, $t = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, p_t$. Para um t fixo, temos que o vetor de estado não muda, i.e. $\alpha_{t,i} = \alpha_{t,i+1}$. Baseados neste resultado calculamos o estado previsto:

$$\begin{aligned} a_{t,i+1} &= \mathbf{E}(\alpha_{t,i+1} \mid \sigma(y_1, \dots, y_{t-1}, y_{t,1}, \dots, y_{t,i})) \\ &= \mathbf{E}(\alpha_{t,i} \mid \sigma(y_1, \dots, y_{t-1}, y_{t,1}, \dots, y_{t,i})) \\ &= \mathbf{E}(\alpha_{t,i} \mid \sigma(y_1, \dots, y_{t-1}, y_{t,1}, \dots, y_{t,i-1}, v_{t,i})) \\ &= \mathbf{E}(\alpha_{t,i} \mid \sigma(y_1, \dots, y_{t-1}, y_{t,1}, \dots, y_{t,i-1})) + \mathbf{Cov}(\alpha_{t,i}, v_{t,i}) \mathbf{Var}^{-1}(v_{t,i}) v_{t,i} \\ &= a_{t,i} + P_{t,i} Z'_{t,i} F_{t,i}^{-1} v_{t,i} \end{aligned}$$

de forma similar calculamos para a variância do vetor de estado:

$$\begin{aligned} P_{t,i+1} &= \mathbf{Var}(\alpha_{t,i+1} \mid \sigma(y_1, \dots, y_{t-1}, y_{t,1}, \dots, y_{t,i})) \\ &= \mathbf{Var}(\alpha_{t,i} \mid \sigma(y_1, \dots, y_{t-1}, y_{t,1}, \dots, y_{t,i})) \\ &= \mathbf{Var}(\alpha_{t,i} \mid \sigma(y_1, \dots, y_{t-1}, y_{t,1}, \dots, y_{t,i-1}, v_{t,i})) \\ &= \mathbf{Var}(\alpha_{t,i} \mid \sigma(y_1, \dots, y_{t-1}, y_{t,1}, \dots, y_{t,i-1})) - \mathbf{Cov}(\alpha_{t,i}, v_{t,i}) \mathbf{Var}^{-1}(v_{t,i}) \mathbf{Cov}(\alpha_{t,i}, v_{t,i})' \\ &= P_{t,i} - P_{t,i} Z'_{t,i} F_{t,i}^{-1} Z_{t,i} P_{t,i} \end{aligned}$$

Quando o filtro vai de t para $t + 1$, temos que ir de α_{t,p_t} para $\alpha_{t+1,1}$

$$\begin{aligned} a_{t+1,1} &= \mathbf{E}(\alpha_{t+1,1} \mid \sigma(y_1, \dots, y_t)) \\ &= \mathbf{E}(T_t \alpha_{t,p_t} + c_t + R_t \eta_t \mid \sigma(y_1, \dots, y_t)) \\ &= T_t \mathbf{E}(\alpha_{t,p_t} \mid \sigma(y_1, \dots, y_t)) + c_t \\ &= T_t \mathbf{E}(\alpha_{t,p_t+1} \mid \sigma(y_1, \dots, y_t)) + c_t \\ &= T_t a_{t,p_t+1} + c_t \end{aligned}$$

No caso da variância temos:

$$\begin{aligned} P_{t+1,1} &= \mathbf{Var}(\alpha_{t+1,1} \mid \sigma(y_1, \dots, y_t)) \\ &= \mathbf{Var}(T_t \alpha_{t,p_t} + c_t + R_t \eta_t \mid \sigma(y_1, \dots, y_t)) \\ &= T_t \mathbf{Var}(\alpha_{t,p_t} \mid \sigma(y_1, \dots, y_t)) T_t' + R_t \mathbf{Var}(\eta_t \mid \sigma(y_1, \dots, y_t)) R_t' \\ &= T_t \mathbf{Var}(\alpha_{t,p_{t+1}} \mid \sigma(y_1, \dots, y_t)) T_t' + R_t Q_t R_t' \\ &= T_t P_{t,p_{t+1}} T_t' + R_t Q_t R_t'. \end{aligned}$$

12

Apêndice D - Exemplo para testar que a quantidade de dados d na parte difusa da inicialização muda do tratamento univariado para o multivariado

Considerando o modelo SS com drift estocástico e o vetor de hiperparâmetros que otimiza a verossimilhança, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Z_t = \begin{pmatrix} 0,9076 & 1 & 0,0824 \\ 0,6157 & 1 & 0,3931 \\ 0,4177 & 1 & 0,6758 \\ 0,2834 & 1 & 0,9332 \\ 0,1922 & 1 & 1,1674 \\ 0,1304 & 1 & 1,3805 \\ 0,0885 & 1 & 1,5745 \\ 0,0600 & 1 & 1,7510 \\ 0,0407 & 1 & 1,9117 \\ 0,0276 & 1 & 2,0579 \\ 0,0187 & 1 & 2,1910 \\ 0,0127 & 1 & 2,3121 \\ 0,0095 & 1 & 2,3957 \end{pmatrix}, T_t = \begin{pmatrix} 0,9076 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,0833 \\ 0 & 0 & 0,9767 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \left(3,78 \quad 3,75 \quad 3,75 \quad 3,75 \quad 3,76 \quad NaN \quad NaN \quad \dots \quad NaN \quad NaN \quad NaN \right)'$$

$$y_2 = \left(3,83 \quad 3,78 \quad 3,78 \quad 3,78 \quad NaN \quad NaN \quad NaN \quad \dots \quad NaN \quad NaN \quad NaN \right)'$$

de acordo com a parte difusa do filtro temos para o **tratamento univariado**:

$$t = 1$$

$$P_{\infty,1} = AA' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\infty,1} = Z_t[1,]P_{\infty,1}Z_t[1,]' = \begin{pmatrix} 0,9076 & 1 & 0,0824 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9076 \\ 1 \\ 0,0824 \end{pmatrix} = 1$$

como $F_{\infty,1} \neq 0$, então:

$$M_{\infty,1} = P_{\infty,1} Z_t[1,]' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1^{(1)} = F_{\infty,1}^{-1} = 1$$

$$K_1^{(0)} = T_t M_{\infty,1} F_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_t^{(0)} = T_t - K_1^{(0)} Z_t[1,] = \begin{pmatrix} 0,907 & 0 & 0 \\ -0,907 & 0 & 0,0009 \\ 0 & 0 & 0,977 \end{pmatrix}$$

$$P_{\infty,2} = T_t P_{\infty,1} L_t^{(0)'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

logo como a matriz $P_{\infty,t}$ é zerada em $t = 2$ a parte difusa termina. Neste caso $d = 1$ e o filtro normal começa em $t = 2$.

Para o **tratamento multivariado** temos

$$P_{\infty,1} = AA' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Neste caso $F_{\infty,1}$ é uma matriz, e não um escalar, como no tratamento univariado. Assim temos que em $t = 1$, no caso multivariado, que pegar as 5 primeiras linhas de Z_t , denotadas por $Z_t[1 : 5,]$ pois, os demais dados são ausentes neste período, como é possível observar em y_1 .

$$F_{\infty,1} = Z_t[1 : 5,] P_{\infty,1} Z_t[1 : 5,]' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

neste caso como $|F_{\infty,1}| = 0$, temos:

$$P_{\infty,2} = T_t P_{\infty,1} T_t' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

como $P_{\infty,2}$ não é zerada e para $t = 2$ pegamos só as 4 primeiras linhas de Z_t , pois os demais são dados ausentes, como é possível observar no vetor y_2 , então:

$$F_{\infty,2} = Z_t[1 : 4,] P_{\infty,2} Z_t[1 : 4,]' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da parte multivariada podemos dizer que $d \geq 2$, o qual é fato suficiente para dizer que a quantidade de dados usados na parte difusa para o tratamento univariado não é a mesma que no tratamento multivariado. Segue também que a quantidade de recursões realizadas também não é a mesma. Outra importante observação é que os valores de d , para os dois tipos de tratamentos, pode mudar, dependendo das matrizes do sistema influenciadas pelos valores dos hiperparâmetros.