

Cálculo de la distribución de algunos tiempos de escape
para el Movimiento Browniano en \mathbb{R}^n aplicando métodos de
reflexión

POR
SILVANA CAROLINA GARCÍA PIRE

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al Título
de Magister Scientiarum mención Matemática

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas I.V.I.C.
Centro de Estudios Avanzados

Caracas, Venezuela
Marzo 2009

El Trabajo de Grado de Silvana Carolina García Pire, titulado “Cálculo de la distribución de algunos tiempos de escape para el Movimiento Browniano en \mathbb{R} ” aplicando métodos de reflexión”, ha sido aprobado por el jurado, quien no se hace responsable de su contenido, pero que lo ha encontrado correcto en su calidad y en su forma de presentación, en fe de lo cual firman,

Dra. Carenne Ludeña
I.V.I.C.

Dr. Henryk Gzyl
I.E.S.A

Dra. Brassesco Stella

Tutora del Trabajo de Grado
I.V.I.C.

Centro de Estudios Avanzados, I.V.I.C.
Altos de Pipe, Marzo 2009

RESUMEN DEL TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO
PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER SCIENTIARUM EN
MATEMÁTICA

CÁLCULO DE LA DISTRIBUCIÓN DE ALGUNOS TIEMPOS DE ESCAPE PARA
EL MOVIMIENTO BROWNIANO EN \mathbb{R}^n APLICANDO MÉTODOS DE
REFLEXIÓN

POR
SILVANA CAROLINA GARCÍA PIRE

INSTITUTO VENEZOLANO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS I.V.I.C.
CENTRO DE ESTUDIOS AVANZADOS

CARACAS, SEPTIEMBRE DE 2009

Stella Brassesco
Tutora del Trabajo de Grado

En el presente trabajo se plantea estudiar el primer momento de salida Browniano desde regiones angulares (regiones determinadas por hiperplanos). En el caso de \mathbb{R}_2 , el ángulo de estas regiones es arbitrario, y se ofrece una expresión para la distribución del tiempo de salida apoyada en [3]. En el caso de \mathbb{R}^n , se puede hacer el estudio con regiones de escape (cuyo ángulo es particular) asociadas a grupos finitos generados por reflexiones, estudio que se sustenta en [5]. Es importante resaltar que tanto el trabajo hecho en [3] como en [5] presentan de transfondo *el principio de reflexión*, herramienta fundamental en el desarrollo de la teoría de escape Browniano. Para el movimiento Browniano plano, se muestra un estudio de comparación de ambas expresiones, encontrando expansiones para la integral de probabilidad en términos de Coeficientes de Bessel. A continuación se describe a grandes rasgos el contenido de cada capítulo.

En el capítulo 1, asentamos las bases teóricas que justifican y legitiman el estudio que llevamos a cabo en los sucesivos capítulos. Se desarrollan y se precisan nociones relacionadas con la definición, características y propiedades de procesos estocásticos, en específico del movimiento Browniano y su conexión con la ecuación del calor. En cuanto a la teoría de grupos generados por reflexiones, se muestran los elementos previos necesarios para entender la estructura de los mismos y su utilidad en nuestro estudio. La última sección del capítulo 1, recopila la teoría básica acerca de funciones de Bessel, propiedades y ecuaciones funcionales útiles para el estudio subsiguiente.

En el capítulo 2, se realizan las pruebas de dos resultados referentes al problema de escape, cada uno de los cuales basados en distintas teorías pero con el principio de reflexión en el trasfondo. El primero de éstos, se basa en el trabajo hecho en [3], se obtiene una fórmula para calcular la distribución del primer momento de escape del Browniano plano, válida para cualquier región angular, se muestra un ejemplo de aplicación. Mientras que el segundo resultado dado en [5] y demostrado mediante argumentos de análisis estocástico, resuelve el problema de salida desde regiones angulares particulares en \mathbb{R}^n , asociadas a grupos finitos generados por reflexiones, se muestran 3 ejemplos de aplicación, el primero asociado al grupo dihédrico, y el otro par asociados al grupo de las permutaciones en \mathbb{R}^3 y en \mathbb{R}^4 , respectivamente. (En estos dos últimos ejemplos, el primer momento de salida se convierte en el primer momento de colisión entre cualesquiera componentes del movimiento Browniano). En este mismo capítulo, se lleva a cabo la comparación de las fórmulas de la distribución del primer tiempo de escape en el caso de \mathbb{R}^2 , lo cual ofrece un método probabilístico para hallar series de expansión en Coeficientes de Bessel, para combinaciones lineales de la integral de Probabilidad. En el capítulo 3, se realiza un estudio de la función de densidad del ángulo Browniano plano, θ_t , soportado en una expresión de la misma hallada a partir del trabajo hecho en [3]. En estas líneas se demuestra un resultado sobre el comportamiento asintótico de θ_t cuando $t \rightarrow \infty$, que en particular implica el Teorema de Spitzer.

Agradecimientos

A Dios, mi incondicional amigo y protector. A mi familia por sus bendiciones y apoyo.

A mi esposo, por brindarme siempre su mano e iluminar el camino con sus acertados consejos.

A la Dra. Stella Brassesco, por sus enseñanzas, cariño y por estar siempre dispuesta a brindar mucho más que apoyo académico.

A todos los profesores integrantes del Dpto de Matemática del IVIC y de la Escuela de Matemática de la UCV.

A el Centro de Estudios Avanzados por toda la colaboración prestada durante la Maestría.

A mis estimadas Aura R. y María G., por su atención y trato amable durante estos años.

A mis compañeros del IVIC, Jimmy, Juan, Edilmo, Mayra, Beatriz, Teodoro, maravillosos seres humanos, quienes me apoyaron siempre que pudieron.

A el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, por brindarme la oportunidad de estudio en sus honorables espacios.

*A mi esposo y
nuestra bebé...*

Índice general

Resumen	iii
Agradecimientos	v
Lista de Figuras	viii
Introducción	1
1. Preliminares	2
1.1. Conceptos Básicos de la Teoría de Probabilidades	2
1.1.1. Procesos Estocásticos	2
1.1.2. Movimiento Browniano	5
1.1.3. Acerca de las trayectorias Brownianas	9
1.1.4. Nociones de Análisis Estocástico	13
1.1.5. La Ecuación del Calor	15
1.2. Grupos Finitos Generados por Reflexiones	17
1.2.1. Reflexiones	17
1.2.2. Sistema de Raíces	19
1.2.3. Sistemas Simples y Positivos	20
1.2.4. Generación por reflexiones simples	21
1.3. Funciones de Bessel del Primer Orden	22
1.3.1. Coeficientes de Bessel $J_n(z)$	22
1.3.2. Funciones de Bessel Modificadas de Primer Orden	23
1.3.3. Expansión en Series de funciones de Bessel	24
2. El Problema de Escape	27
2.1. Estudio del problema de escape del movimiento Browniano plano	27
2.2. Estudio del Problema de Escape desde una región angular en \mathbb{R}^n asociada a un grupo generado por reflexiones	31
2.2.1. Grupos de Reflexión	33
2.2.2. Relación con el problema de salida	40
2.3. Comparación de las expresiones de la distribución del tiempo de escape Browniano en \mathbb{R}^2	48
3. La función de densidad de θ_t y resultados asintóticos	57
A. Resultados sobre grupos finitos generados por reflexión	78
Bibliografía	85
Curriculum Vitae	86

Índice de figuras

1.1. Movimiento Browniano Reflejado	11
2.1. Región con barreras angulares en \mathbb{R}^2	31
2.2. Sistema Positivo Π asociado al triángulo	34
2.3. Sistema de Reflexión generado por $\{\alpha_i\}_{i=1}^3$	35
2.4. Diagonales del polígono 3-regular	35
2.5. Sistema positivo asociado al hexágono	36
2.6. Sistema de Reflexión generado por $\{\alpha_i\}_{i=1}^6$	37
2.7. Particiones pares y sus signos para A_2	39
2.8. Particiones pares y sus signos para A_3	39
2.9. Región fundamental asociada a $I_2(3)$	43
2.10. Barrera angular para el movimiento browniano con respecto a α_1	43
2.11. Barrera angular para el movimiento browniano con respecto a α_2	44
2.12. Barrera angular para el movimiento Browniano con respecto a α_3	45

Introducción

En el cálculo de la distribución de tiempos de escape Browniano han interactuado la teoría de probabilidades y el análisis, fomentando el análisis estocástico y dando respuestas a varias interrogantes referentes al problema de escape. En este trabajo, se mostrarán dos enfoques diferentes (con *el principio de reflexión* como denominador común) para resolver el problema de escape Browniano en \mathbb{R}^n , desde regiones angulares particulares, ([5]), y desde regiones angulares arbitrarias en el caso del movimiento Browniano plano, ([3]). Será necesario revisar y desarrollar en el estudio del problema en \mathbb{R}^n , algunas nociones de álgebra abstracta y argumentos clásicos del análisis estocástico, para facilitar la comprensión en la generación de las regiones de escape y de las pruebas de los teoremas esenciales del Capítulo 2. Realizaremos varios ejemplos de aplicación, mostrando una interesante relación entre las áreas de estudios mencionadas. Por otro lado, vamos a usar la expresión de la función de densidad del ángulo Browniano plano encontrada en cálculos previos necesarios para resolver el problema de escape en \mathbb{R}^2 , para dar una demostración alterna a la Ley de Spitzer para el comportamiento asintótico de θ_t , incluyendo estimaciones del error uniformes en la variable θ . Nos disponemos entonces, a repasar y estudiar las bases teóricas y nociones referentes a las áreas de estudios necesarias para llevar a término las intenciones descritas arriba.

Preliminares

En este capítulo, vamos a resumir y recordar por secciones, algunas definiciones, teoremas y propiedades de los objetos matemáticos que conforman las bases preliminares para el estudio presente. Comenzaremos por el área de probabilidades, donde usaremos los textos clásicos como [4], [6] por mencionar algunos, seguidamente está la sección de grupos finitos generados por reflexiones (álgebra), cuyo texto esencial es [9] y finalmente presentamos algunas propiedades de las funciones de Bessel y resultados referentes a sus expansiones basados en los textos bibliográficos [15] y [16].

1.1. Conceptos Básicos de la Teoría de Probabilidades

1.1.1. Procesos Estocásticos

Los procesos estocásticos proporcionan los fundamentos para la generación de modelos más elaborados en el tratamiento de problemas originados en la vida práctica, como fenómenos físicos, biológicos o en la ingeniería de telecomunicaciones, siendo así una de las áreas de la matemática de mayor aplicación desde hace varios años.

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un Espacio de Probabilidad y $T \subseteq [0, \infty)$ un conjunto de parámetros continuo.

Definición 1.1. *Un proceso estocástico a tiempo continuo X es una colección de variables aleatorias*

$$X = (X_t, t \in T) = (X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega)$$

Las σ -álgebras $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ son las menores σ -álgebras en Ω que hacen medibles a $X_s, s \leq t$.

Observación 1.2. ■ Un proceso estocástico X es una función en dos variables.

Para un instante de tiempo fijo t , esta es una variable aleatoria:

$$X_t = X_t(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Para $\omega \in \Omega$ fijo, es una función de tiempo:

$$X_t = X_t(\omega), \quad t \in T.$$

y se conoce como la *trayectoria del proceso X* .

■ Podemos considerar la colección de vectores aleatorios finito dimensionales :

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}), \quad \text{para todas las posibles elecciones de } t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1$$

Definición 1.3. Las distribuciones finito dimensionales del proceso estocástico X es la colección de las distribuciones de los vectores finito dimensionales dados en la observación anterior.

Los procesos estocásticos pueden ser clasificados de acuerdo a distintos criterios, uno de ellos es el tipo de distribuciones finito dimensionales.

Definición 1.4. Un proceso estocástico se dice **Gaussiano** si todas sus distribuciones finito dimensionales son variables aleatorias Gaussianas multivariadas .

Vale recordar,

Definición 1.5. Un vector aleatorio $X \in \mathbb{R}^n$ es llamado **normal o Gaussiano** si tiene una distribución normal o Gaussiana, la cual está dada por su densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det \Sigma)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)'\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

con parámetros $\mu \in \mathbb{R}^n$ y Σ , donde Y' denota la transpuesta del vector Y . La cantidad Σ es una matriz $n \times n$, simétrica definida positiva y Σ^{-1} es su inversa. Escribimos $N(\mu, \Sigma)$ para la distribución Gaussiana de parámetros μ y Σ .

Ejemplo 1.6. Si $X \in \mathbb{R}^n$ con distribución $N(\mu, \Sigma)$ de manera que $\mu = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n\text{-entradas}}$ y Σ es la matriz identidad n -dimensional, I_n , tenemos $\det I_n = 1$ y $\Sigma^{-1} = I_n$, la función de densidad f_X es simplemente el producto de las n densidades normales estándar de las entradas, es decir:

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n),$$

(recordemos que: $X \sim N(0, 1) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$).

La distribución de un proceso Gaussiano está determinada sólo por la colección de todas las matrices de Σ y los vectores μ de las distribuciones finito dimensionales.

Observación 1.7. Es propicio recordar la definición de la función característica de un vector Y con distribución $N(\mu, \Sigma)$:

$$\varphi_Y(\xi) = \varphi(\xi) = e^{(i\mu\xi - \frac{1}{2}\Sigma\xi^2)}$$

Definición 1.8. La función Esperanza de X está dada por

$$\mu_X(t) = \mu_{X_t} = EX_t, \quad t \in T$$

La función Covarianza de X está dada por

$$c_X(t, s) = \text{cov}(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s))], \quad t, s \in T$$

Comentario 1.9. Los parámetros μ y Σ que aparecen en la función de densidad, (definición 1.5.), y en la función característica, (observación 1.7.), son precisamente la esperanza y la covarianza.

Existen otras propiedades de los procesos estocásticos que tienen que ver con la estructura del proceso.

Definición 1.10. Sea X un proceso estocástico en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Se dice que X es **estacionario** si $\forall k \geq 0$, $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots)$ tiene la misma distribución que $(X_{k+t_1}, X_{k+t_2}, \dots)$, lo cual se denota por

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_{k+t_1}, X_{k+t_2}, \dots), \quad \forall k \geq 0 \quad (1.1)$$

Observación 1.11. Como la Ley o distribución de un proceso X está determinada por las leyes finito-dimensionales, para verificar que X es estacionario bastaría verificar que: $\forall n, k; \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(X_{t_1} \leq x_1, X_{k+t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n) = \mathbf{P}(X_{k+t_1} \leq x_1, X_{k+t_2} \leq x_2, \dots, X_{k+t_n} \leq x_n)$$

Definición 1.12. Sea $X = (X_t, t \in T)$ un proceso estocástico y $T \subset \mathbb{R}^+$ un intervalo.

- Se dice que X tiene **incrementos estacionarios** si

$$X_t - X_s \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_{t+h} - X_{s+h}, \quad \forall s, t \in T \text{ y } h \text{ tal que } t+h, s+h \in T.$$

- Se dice que X tiene **incrementos independientes** si para toda escogencia de $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ con $t_1 < \dots < t_n$ y $n \geq 1$

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son variables aleatorias independientes.

Por ejemplos tenemos el Proceso de Poisson Homogéneo y el Movimiento Browniano, que definiremos más adelante.

Definición 1.13. Un proceso estocástico $Y_t \in \mathbb{R}^n$ se dice **homogéneo** si $\mathcal{L}(Y_{t+u} | Y_t = x)$ no depende de t , es decir,

$$\mathcal{L}(Y_{t+u} | Y_t = x) = \mathcal{L}(Y_u | Y_0 = x).$$

Continuidad de Procesos Estocásticos

Sea $X = (X_t, t \in T)$ un proceso estocástico.

Definición 1.14. X se dice **continuo en probabilidad** si

$$\mathbf{P}(\{|X_t - X_{t_0}| > \epsilon\}) \longrightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow t_0$$

Definición 1.15. Dados dos procesos estocásticos X y Y sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, se dice que Y es una **versión** de X si

$$\mathbf{P}(Y_t \neq X_t) = 0, \quad \forall t \in T$$

Definición 1.16. Un proceso X_t es Markoviano cuando

$$E[f(X_{t+h}) | \mathcal{F}_t] = E[f(X_{t+h}) | X_t] \quad \forall t > 0, h > 0,$$

donde \mathcal{F}_t es la σ -álgebra generada por $\{X_s, s \leq t\}$, $\forall f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, medible y acotada, o bien:

$$\mathbf{P}(X_{t+h} \in A | X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x) = \mathbf{P}(X_{t+h} \in A | X_t = x)$$

$\forall t_0 < t_1 < \dots < t; \forall x_0, x_1, \dots, x$.

Definición 1.17. Una *filtración* \mathcal{G}_t , $t \geq 0$ es una colección de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} tal que $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{G}_T$ si $t < T$.

Definición 1.18. $(\Omega, \mathbf{P}, \mathcal{F}, \{\mathcal{G}_t\})$ es llamado un *espacio de probabilidad filtrado*.

Definición 1.19. Dado un proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ en \mathbb{R}^D , se dice *adaptado a una filtración* \mathcal{G}_t si X_t es \mathcal{G}_t -medible, $\forall t \geq 0$.

Definición 1.20. Un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ en una *Martingala* con respecto a una filtración \mathcal{G}_t , $t \geq 0$ si se cumple lo siguiente :

- (i) $E[|X_t|] < \infty$, $\forall t \geq 0$,
- (ii) X_t es adaptado a \mathcal{G}_t ,
- (iii) $E[X_{t+s} | \mathcal{G}_t] = X_t$, ó bien, $E[X_{t+s} - X_t | \mathcal{G}_t] = 0$.

Definición 1.21. Una variable aleatoria $\tau \geq 0$ es llamada un *tiempo de parada con respecto a* \mathcal{G}_t si $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{G}_t$. Además $\mathcal{G}_\tau := \{B \subset \Omega, B \in \mathcal{G} : B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{G}_t\}$.

Ejemplo 1.22. Si el proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ tiene trayectorias continuas en \mathbb{R}^D y F es cerrado en \mathbb{R}^D , entonces $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \in F\}$ es un tiempo de parada.

Definición 1.23. M es una *martingala local con respecto a la filtración* $\{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$, si existen tiempos de parada $\tau_n \uparrow \infty$, tales que $M_{t \wedge \tau_n}$ es una martingala con respecto a $\{\mathcal{G}_{t \wedge \tau_n}, t \geq 0\}$.

En [6] se muestran las razones por las cuales las martingalas locales tienen mayor uso en el análisis estocástico en comparación con las martingalas.

Definición 1.24. Un proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ es *fuertemente Markoviano* si

$$\mathbf{P}(X_{t+\tau} \in A | \mathcal{G}_t) = \mathbf{P}(X_{t+\tau} \in A | X_\tau)$$

1.1.2. Movimiento Browniano

El movimiento Browniano es un importante proceso que juega un rol central en la teoría de probabilidades y sus aplicaciones, denominado así en reconocimiento al biólogo Robert Brown, quien lo descubrió cuando estudiaba el comportamiento de unas partículas de polen en un medio homogéneo, en el año 1820. En una época más cercana, Louis Bachelier (1900), Albert Einstein (1905) y Norbert Wiener (1923) comenzaron a desarrollar la teoría matemática del movimiento Browniano. Wiener (1923) fué el primero en dar al movimiento Browniano una base matemática firme.

El trabajo de Wiener sobre el movimiento Browniano estableció un importante precedente para hallar aplicaciones en física, ingeniería y biología.

Movimiento Browniano en \mathbb{R}

Definición 1.25. Un proceso estocástico a valores reales $\mathbf{B} = (B_t, t \in \mathbb{R}^+)$, definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, es llamado *movimiento Browniano centrado* ó *Proceso de Wiener centrado* si las siguientes condiciones son satisfechas:

- (i) $B_0(\omega) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega.$
- (ii) El mapa $t \rightarrow B_t(\omega)$ es una función continua de $t \in \mathbb{R}^+, \forall \omega \in \Omega.$
- (iii) \mathbf{B} tiene incrementos estacionarios Gaussianos e independientes.
- (iv) $\forall t > 0, B_t$ tiene distribución $N(0, t).$

Observación 1.26. Desde la estacionaridad de los incrementos se tiene que $\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s$ tiene la misma distribución que $\mathbf{B}_{t-s} - \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_{t-s}$ la cual es Normal con media cero y varianza $t - s$. Así, la varianza es proporcional a la longitud del intervalo $[s, t]$. Esto significa intuitivamente que, mientras más grande es el intervalo mayor las fluctuaciones del movimiento Browniano en el mismo.

Es inmediato desde la definición que, el movimiento Browniano centrado tiene función esperanza

$$\mu_{\mathbf{B}}(t) = E\mathbf{B}_t = 0, \quad t \geq 0,$$

y, como los incrementos $\mathbf{B}_s - \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_s$ y $\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s$ son independientes para $t > s$, su función covarianza es

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{B}}(t, s) &= E\left[\left((\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s) + \mathbf{B}_s\right)\mathbf{B}_s\right] = E[(\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s)\mathbf{B}_s] + E\mathbf{B}_s^2 \\ &= E(\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s)E\mathbf{B}_s + s = 0 + s = s, \quad 0 \leq s < t \end{aligned}$$

Como un proceso Gaussiano está caracterizado por sus funciones esperanza y covarianza, podemos dar una definición alternativa:

Definición 1.27. Un movimiento Browniano centrado es un proceso Gaussiano con trayectorias continuas, tal que

$$\mu_{\mathbf{B}}(t) = 0, \quad c_{\mathbf{B}}(t, s) = \text{mín}(s, t). \quad (1.2)$$

Algunas propiedades y caracterizaciones del movimiento Browniano en \mathbb{R}

Ejemplo 1.28. Supongamos que \mathbf{B}_t es un movimiento Browniano centrado, entonces los siguientes cuatro procesos también son movimientos Brownianos:

- $\tilde{\mathbf{B}}_t = -\mathbf{B}_t.$
- Si $\delta > 0$ fijo: $\tilde{\mathbf{B}}_t = \mathbf{B}_{t+\delta} - \mathbf{B}_\delta.$
- Para cada $\alpha > 0$ fijo: $\tilde{\mathbf{B}}_t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\mathbf{B}_{\alpha t}.$

- $\tilde{\mathbf{B}}_0 = 0$, $\tilde{\mathbf{B}}_t = t(\mathbf{B}_{1/t})$, movimiento Browniano escalado

Observación 1.29. ▪ El movimiento Browniano es una Martingala .

En efecto,

Sea $\{\mathbf{B}_t : t \geq 0\}$ un movimiento Browniano y definimos $\mathcal{B}_t = \sigma(\{\mathbf{B}_s, s \leq t\})$.

Entonces $(\mathbf{B}_t, \mathcal{B}_t)_{t \geq 0}$ es una *martingala*. En efecto, trivialmente \mathbf{B}_t es \mathcal{B}_t -medible y además usando la independencia entre los incrementos se tiene:

$$\begin{aligned} E[(\mathbf{B}_t | \mathcal{B}_s)] &= E[(\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s + \mathbf{B}_s) | \mathcal{B}_s] \\ &= E[(\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s) | \mathcal{B}_s] + E[\mathbf{B}_s | \mathcal{B}_s] \\ &= E[\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s] + \mathbf{B}_s \\ &= 0 + \mathbf{B}_s = \mathbf{B}_s \end{aligned}$$

Y según la Observación (1.26),

$$E(\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s)^2 = t - s$$

Luego, el mapa $t \rightarrow \mathbf{B}_t$ es continuo en \mathcal{L}^2 y por lo tanto en \mathcal{L}^1 , así $E(|\mathbf{B}_t|) < \infty$.

Más aún,

$$\mathbf{B}_t^2 - t \text{ también es una } \mathcal{B}_t - \text{martingala} \quad (1.3)$$

En efecto;

De nuevo, $\mathbf{B}_t^2 - t$ es \mathcal{B}_t -medible y $E(|\mathbf{B}_t^2 - t|) \leq E(\mathbf{B}_t^2) + t = 2t < \infty \forall t$. Además,

$$\begin{aligned} E[(\mathbf{B}_t^2 - t) | \mathcal{B}_s] - (\mathbf{B}_s^2 - s) &= E[(\mathbf{B}_t^2 - t - \mathbf{B}_s^2 + s) | \mathcal{B}_s] \\ &= E[((\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s)^2 - (t - s) - 2\mathbf{B}_s^2 + 2\mathbf{B}_t\mathbf{B}_s) | \mathcal{B}_s] \\ &= E[(\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s)^2 - (t - s) | \mathcal{B}_s] + 2E[(\mathbf{B}_s(\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s)) | \mathcal{B}_s] \\ &= (t - s) - (t - s) + 2\mathbf{B}_s(E(\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s)) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

- El movimiento Browniano es un proceso de Markov a tiempo continuo .

En efecto,

Para cualquier función Borel acotada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $s, t \geq 0$,

$$S_t f(\mathbf{B}_s) = E[f(\mathbf{B}_{t+s}) | \mathcal{B}_s] \quad (1.4)$$

donde el *semigrupo de transición* $(S_t)_{t \geq 0}$ está dado por

$$S_t f(x) := \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} p_t(x, y) f(y) dy & \text{si } t > 0 \\ f(x) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

donde

$$p_t(x, y) := (2\pi t)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(x - y)^2}{2t}\right] \quad (1.5)$$

es la *densidad de transición Browniana*. Es fácil confirmar que $(S_t)_{t \geq 0}$ es un semigrupo:

$$S_{t+s} = S_t S_s = S_s S_t \quad (s, t > 0) \quad , \quad S_0 = \mathbf{I} \quad (1.6)$$

La propiedad de semigrupo (1.6) sugiere que en algún sentido se tiene :

$$\frac{d}{dt} S_t = \lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{s} (S_{t+s} - S_t) = S_t \mathcal{L} = \mathcal{L} S_t, \quad (1.7)$$

donde

$$\mathcal{L} := \lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{s} (S_s - \mathbf{I}) \quad (1.8)$$

es el *generador infinitesimal de* $(S_t)_{t \geq 0}$. Desde (1.9) deberíamos definir $\mathcal{L}f$ para f adecuada, por

$$\mathcal{L}f := \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (S_t f - \mathbf{I}f), \quad (1.9)$$

y, de hecho, si $f \in \mathbf{C}_b^2$ entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (S_t f - f)(x) &= \lim_{t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x + y\sqrt{t}) - f(x)}{t} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} \left\{ y\sqrt{t} f'(x) + \frac{1}{2}y^2 t f''(x + \theta y\sqrt{t}) \right\} \times \\ &\quad \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2} f''(x) \end{aligned}$$

(donde $\theta \in (0, 1)$).

Así, el generador infinitesimal del movimiento Browniano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2},$$

por lo menos cuando es aplicado a $\mathbf{C}_b^2(\mathbb{R})$. Desde (1.8), encontramos que, para $f \in \mathbf{C}_b^2(\mathbb{R})$,

$$\frac{\partial}{\partial t} S_t f(x) = \mathcal{L} S_t f(x) = \frac{1}{2} (S_t f)''(x),$$

lo cual conduce a la ecuación "backward" de Kolmogorov para la densidad de transición Browniana:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_t(x, y), \quad (1.10)$$

ya que f es arbitraria. Usando la otra parte de (1.8) nos dá

$$\frac{\partial}{\partial t} S_t f(x) = S_t \mathcal{L} f(x) = \frac{1}{2} S_t f''(x),$$

y una integración por partes ahora conduce a la ecuación "forward" de Kolmogorov para la densidad Browniana:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} p_t(x, y). \quad (1.11)$$

Esta ecuación es conocida en física como *la ecuación del calor*, o *la ecuación de difusión*, así llamada porque ésta determina el flujo físico del calor, o la difusión física de partículas en solución, en un medio homogéneo.

Teorema 1.30 (Existencia y Unicidad del movimiento Browniano). *Existe un espacio de probabilidad en el cual es posible definir un proceso $(\mathbf{B}_t)_{0 \leq t \leq 1}$, con las propiedades dadas en la definición (1.25). Véase [7].*

Definición 1.31. Si $b \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$, un movimiento Browniano comenzando en x_0 , con *drift* $b \in \mathbb{R}$ y *coeficiente de difusión* σ^2 es un proceso en $[0, T]$ tal que

- (a) $\mathbf{B}_0 = x_0$ con probabilidad igual a 1 ;
- (b) $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T : \{\mathbf{B}_{t_{i+1}} - \mathbf{B}_{t_i}\}_{i=0}^m$ son independientes con distribución- $N(b(t_{i+1} - t_i), \sigma^2(t_{i+1} - t_i))$;
- (c) $\mathbf{B}_t(\omega)$ es continua en t , para todo ω .

Ejemplo 1.32. Si \mathbf{B}_t es un movimiento Browniano centrado, entonces

$$\tilde{\mathbf{B}}_t = x_0 + bt + \sigma \mathbf{B}_t$$

es un movimiento Browniano con drift b y coeficiente de difusión σ^2 .

Definición 1.33. Sea $1 < D \in \mathbb{N}$. Un *movimiento Browniano D-dimensional* es un vector $(\mathbf{B}_t^1, \mathbf{B}_t^2, \dots, \mathbf{B}_t^D)$ tal que, $\{\mathbf{B}_t^i\}_{i=1}^D$ son movimientos Brownianos independientes. (Las coordenadas del vector son independientes $\forall t$).

Definición 1.34. Si $b \in \mathbb{R}^D$, $\sigma \in \mathcal{M}_{D \times D}$ es invertible con entradas reales, diremos $\tilde{\mathbf{B}}_t$ es un movimiento Browniano en dimensión D con *drift* b y *coeficiente de difusión* $a = \sigma \cdot \sigma^T$, comenzando en $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^D$, si

$$\tilde{\mathbf{B}}_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \tilde{x}_0 + tb + \sigma \mathbf{B}_t$$

con \mathbf{B}_t un movimiento Browniano D -dimensional.

1.1.3. Acerca de las trayectorias Brownianas

Sea $\mathbf{B}_t(\omega)$, $t \geq 0$, una trayectoria Browniana fija pero arbitraria. Ya conocemos desde la definición de movimiento Browniano que sus trayectorias son continuas, con un comportamiento extremadamente irregular, debido a que las mismas se construyen desde sus incrementos independientes sobre intervalos adyacentes.

A continuación se presentan algunos resultados referentes a este comportamiento:

Proposición 1.35.

$$\mathbf{P}\left(\omega : \sup_{t \geq 0} \mathbf{B}_t(\omega) = \infty\right) = 1$$

Corolario 1.36.

$$\mathbf{P}\left(\omega : \inf_{t \geq 0} \mathbf{B}_t(\omega) = -\infty\right) = 1$$

Proposición 1.37. Con probabilidad igual a 1,

$$\frac{\mathbf{B}_t}{t} \longrightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

Teorema 1.38.

$$\mathbf{P}\left(\omega : \mathbf{B}_t(\omega) \text{ es no diferenciable } \forall t \in [0, 1]\right) = 1$$

Para verificar estos resultados puede verse [4].

La propiedad fuerte de Markov y el Principio de Reflexión

Para recordar el concepto de tiempo de parada, véase la definición (1.21.).

Teorema 1.39. Sea $(\mathbf{B}_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathbf{P}, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t))$ y sea τ un (\mathcal{G}_t) -tiempo de parada. Entonces el proceso

$$\mathbf{B}_t^{(\tau)} := \mathbf{B}_{\tau+t} - \mathbf{B}_\tau, \quad t \geq 0,$$

es un movimiento Browniano independiente de \mathcal{G}_τ .

Definición 1.40. Para $b \in \mathbb{R}$, se define el tiempo de llegada a b :

$$T_b := \inf\{t > 0 : \mathbf{B}_t = b\}.$$

Observación 1.41. Se sigue de la proposición 1.35 y el corolario 1.36 que:

$$\mathbf{P}\{T_b < \infty, b \in \mathbb{R}\} = 1, \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

Sea $\tilde{\mathbf{B}}_t$ el reflejado de \mathbf{B}_t en T_b :

$$\tilde{\mathbf{B}}_t = \begin{cases} \mathbf{B}_t & \text{para } t < T_b, \\ 2\mathbf{B}_{T_b} - \mathbf{B}_t & \text{para } t \geq T_b. \end{cases} \quad (1.12)$$

Geoméricamente, $\tilde{\mathbf{B}}_t$ coincide con \mathbf{B}_t hasta el tiempo T_b ; después de este tiempo $\tilde{\mathbf{B}}_t$ es el reflejado de \mathbf{B}_t alrededor de la línea horizontal de altura b . Véase la siguiente figura:

Teorema 1.42. (El Principio de Reflexión) $\tilde{\mathbf{B}}_t$ es un movimiento Browniano estándar.

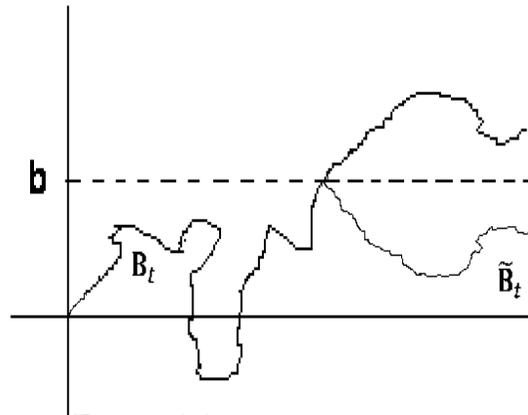


Figura 1.1: Movimiento Browniano reflejado .

Demostración: Consideremos los siguientes procesos estocásticos:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = Y_t &:= \mathbf{B}_t, \quad \text{para } 0 \leq t \leq T_b, \\ \mathbf{Z} = Z_t &:= \mathbf{B}_{(t+T_b)} - \mathbf{B}_{T_b} = \mathbf{B}_{(t+T_b)} - b, \quad \text{para } t > 0. \end{aligned}$$

Por el Teorema (1.39), Z_t es un movimiento Browniano y es independiente de Y_t . Por el Ejemplo (1.28), $-Z_t$ también es un movimiento Browniano y además, de igual manera, independiente de Y_t , por lo que se tiene la identidad en distribución:

$$(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\mathbf{Y}, -\mathbf{Z}).$$

Sea la función $\varphi[(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})] = (Y_t \mathbb{1}_{\{t \leq T_b\}} + (b + Z_{t-T_b}) \mathbb{1}_{\{t > T_b\}})_{t \geq 0}$. Nótese que : Si $t \leq T_b$, entonces $\varphi[(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})] = \mathbf{B}_t$, y si $t > T_b$, de nuevo, $\varphi[(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})] = \mathbf{B}_t$. En otras palabras, $\varphi[(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})] = \mathbf{B}_t$. Luego, φ produce un proceso continuo y $\varphi[(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})]$ tendrá la misma Ley que $\varphi[(\mathbf{Y}, -\mathbf{Z})]$:

$$\varphi[(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})] \stackrel{\mathcal{L}}{=} \varphi[(\mathbf{Y}, -\mathbf{Z})]$$

Pero, si $t \leq T_b$, entonces $\varphi[(\mathbf{Y}, -\mathbf{Z})] = \mathbf{B}_t$, y si $t > T_b$, entonces $\varphi[(\mathbf{Y}, -\mathbf{Z})] = 2b - \mathbf{B}_t$; es decir, $\varphi[(\mathbf{Y}, -\mathbf{Z})] = \tilde{\mathbf{B}}_t$.

Por lo tanto, $\tilde{\mathbf{B}}_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbf{B}_t$. Así, el proceso $\tilde{\mathbf{B}}_t$ es un movimiento Browniano. □

A partir del resultado anterior, se obtiene :

Corolario 1.43. Sea $M_t := \sup\{\mathbf{B}_u : u \leq t\}$. Entonces, para $b, y \geq 0$, $t \geq 0$,

$$\mathbf{P}[M_t \geq b, \mathbf{B}_t \leq b - y] = \mathbf{P}[\mathbf{B}_t \geq b + y] \quad (1.13)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[M_t \geq b, \mathbf{B}_t \leq b - y] &= \mathbf{P}[M_t \geq b, \tilde{\mathbf{B}}_t \leq b - y] \\
&= \mathbf{P}[2b - \mathbf{B}_t \leq b - y] \\
&= \mathbf{P}[\mathbf{B}_t \geq b + y].
\end{aligned}$$

□

Corolario 1.44. Sea \mathbf{B} un movimiento Browniano estándar. Sea $b > 0$. Entonces,

$$\mathbf{P}[M_t > b] = 2\mathbf{P}[\mathbf{B}_t > b].$$

Demostración: Directamente del corolario anterior, con $y = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[T_b \leq t] &= \mathbf{P}[M_t \geq b] = \mathbf{P}[M_t \geq b, \mathbf{B}_t \leq b] + \mathbf{P}[M_t \geq b, \mathbf{B}_t \geq b] \\
&= \mathbf{P}[\mathbf{B}_t \geq b] + \mathbf{P}[\mathbf{B}_t \geq b] \\
&= 2\mathbf{P}[\mathbf{B}_t \geq b].
\end{aligned}$$

□

Observación 1.45. (1) Nótese que del Corolario (1.44) se obtiene la Ley de T_b , fácilmente podemos hallar su función de densidad, así:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[T_b \leq t] &= 2\mathbf{P}[\mathbf{B}_t \geq b] \\
&= 2\mathbf{P}[\sqrt{t}\mathbf{B}_1 \geq b] \text{ (Por escalamiento, } c = \sqrt{t}\text{)}, \\
&= 2\mathbf{P}[\mathbf{B}_1 \geq \frac{b}{\sqrt{t}}] \\
&= 2 \int_{\frac{b}{\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz
\end{aligned}$$

Diferenciamos respecto de t la última igualdad,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[T_b \in dt]/dt &= \frac{d}{dt} \left[2 \int_{b/\sqrt{t}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \right] \\
&= \frac{d}{du} \left[2 \int_u^{\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \right] \Big|_{u=b/\sqrt{t}} \frac{d}{dt} \left(\frac{b}{\sqrt{t}} \right) \\
&= \left(-\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{2t}} \right) \left(-\frac{b}{2\sqrt{t^3}} \right) \\
&= \frac{b}{\sqrt{2\pi}t^3} e^{-b^2/2t},
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{P}[T_b \in dt]/dt = \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-b^2/2t}.$$

- (2) Sea \mathbf{P}_x la Ley del movimiento Browniano comenzando en x , entonces se sigue fácilmente de (1.13) que, para $x, y > 0$,

$$\mathbf{P}_x[\mathbf{B}_t \geq y, T_0 \leq t] = \mathbf{P}_x[\mathbf{B}_t \leq -y],$$

de donde la densidad de transición, p_t^* , del movimiento Browniano comenzando en $x > 0$ y aniquilado cuando toca por primera vez al cero viene dada por:

$$p_t^*(x, y) := \mathbf{P}_x[\mathbf{B}_t \in dy, T_0 > t]/dy = p_t(x, y) - p_t(x, -y) = \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} - \frac{e^{-\frac{(x+y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}, \quad (1.14)$$

donde p_t está dada por la ecuación (1.5). Además, se verifica directamente que $p_t^*(x, y)$ es la solución de la ecuación del calor con las condiciones :

$$\frac{\partial p^*}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p^*}{\partial x^2} \quad \begin{cases} p_0^*(x, y) = \delta_y(x), \\ p_t^*(0, y) = 0 \quad \forall y. \end{cases} \quad (1.15)$$

Por lo anterior, se tiene que resolver el problema de transición Browniana con una barrera en cero es equivalente a resolver la ecuación fundamental de la ecuación del calor con la condición de frontera, cero en la barrera.

Es importante mantener ésto en mente, ya que por esta vía se hará la demostración del teorema principal del Capítulo 2.

A continuación, vamos a recopilar algunas nociones de cálculo estocástico, necesarios también para comprender la mencionada prueba del Capítulo 2.

1.1.4. Nociones de Análisis Estocástico

La Integral de Itô

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y \mathfrak{B} la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R} .

Si $\mathbf{B}(t, \omega)$ es un movimiento Browniano en el espacio dado, consideramos \mathcal{F}_t como la σ -álgebra generada por $\{\mathbf{B}(s), s \leq t\}$.

Observación 1.46. La integral de Itô para $S < T$, denotada como:

$$\int_S^T f(t, \omega) d\mathbf{B}(t, \omega) \quad (1.16)$$

se puede definir para los integrandos f que satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) $f(t, \omega)$ es $\mathfrak{B} \times \mathcal{F}$ -medible

(ii) $f(t, \omega)$ es \mathcal{F}_t -medible, para cada $t \geq 0$

(iii) $E \left\{ \int_S^T f^2(t, \omega) dt \right\} < \infty$, ó bien, $f \in L^2([S, T] \times \Omega, dt \times P)$.

Para más detalle puede verse [12].

Veamos ahora algunas propiedades que presenta (1.16):

1. $E \left\{ \int_S^T f(t, \omega) d\mathbf{B}(t, \omega) \right\} = 0$

2. $E \left\{ \int_S^T f(t, \omega) d\mathbf{B}(t, \omega) \right\}^2 = E \left\{ \int_S^T f^2(t, \omega) dt \right\}$

3. Si $S < U < T$, entonces

$$\int_S^T f(t, \omega) d\mathbf{B}(t, \omega) = \int_S^U f(t, \omega) d\mathbf{B}(t, \omega) + \int_U^T f(t, \omega) d\mathbf{B}(t, \omega)$$

4. Para $c \in \mathbb{R}$ y f, g satisfaciendo las condiciones (i), (ii), (iii):

$$\int_S^T (cf(t, \omega) + g(t, \omega)) d\mathbf{B}(t, \omega) = c \int_S^T f(t, \omega) d\mathbf{B}(t, \omega) + \int_S^T g(t, \omega) d\mathbf{B}(t, \omega)$$

5. $\int_S^T f(t, \omega) d\mathbf{B}(t, \omega)$ es \mathfrak{F}_T -medible

6. $\int_0^T f(t, \omega) d\mathbf{B}(t, \omega)$ es \mathfrak{F}_T -martingala

7. Si $f, \{f_n\}_{n \geq 1}$ satisfacen (i), (ii), (iii) tales que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$, en $L^2(dt \times P)$, entonces

$$\int_S^T f_n(t, \omega) d\mathbf{B}(t, \omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_S^T f(t, \omega) d\mathbf{B}(t, \omega)$$

Es posible extender la definición (1.48), debilitando un poco las condiciones (ii) y (iii), en el siguiente sentido:

(ii'): si $f(s)$ es \mathcal{H}_s -adaptada para cierta filtración \mathcal{H}_s tal que $\mathfrak{F}_s \subset \mathcal{H}_s$ y \mathbf{B}_s es una \mathcal{H}_s -martingala, y

(iii'): $P \left(\int_0^T f^2(t, \omega) ds < \infty, \forall t \leq T \right) = 1$.

Con estos previos podemos presentar la fórmula de Itô, útil herramienta del cálculo estocástico y con aplicación en nuestro trabajo.

La Fórmula de Itô

Definición 1.47. Sea \mathbf{B}_t un movimiento Browniano en (Ω, \mathcal{F}, P) . Un *proceso de Itô unidimensional* es un proceso X_t de la forma,

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) d\mathbf{B}_s, \quad (1.17)$$

donde $\int_0^t v(s, \omega) d\mathbf{B}(s)$ denota la integral de Itô dada en la definición (1.48), con $v(s, \omega)$, $u(s, \omega)$ \mathcal{H}_s -adaptadas, y tal que

$$P \left\{ \int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty, \forall t > 0 \right\} = 1.$$

Notación

(1.17) se puede escribir en forma diferencial:

$$dX_t = udt + v d\mathbf{B}_t.$$

Teorema 1.48. (Fórmula de Itô Unidimensional)

Sea X_t un proceso de Itô y sea $g : [0, \infty) \times \mathbb{R}$ de clase C^2 , entonces $g(t, X_t)$ es un proceso de Itô y

$$\begin{aligned} g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}(g(s, X_s))ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}(g(s, X_s))dX_s \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}(g(s, X_s))(dX_s)^2 \end{aligned} \quad (1.18)$$

donde $dX_s = u(s, \omega)ds + v(s, \omega)d\mathbf{B}_s$ y $(dX_s)^2 := v^2(s, \omega)ds$.

Definición 1.49. Un *proceso de Itô Multidimensional* en un proceso de la forma:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega)ds + \int_0^t v(s, \omega)d\mathbf{B}(s), \quad (1.19)$$

donde $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\mathbf{B}(t) = (\mathbf{B}_1(t), \mathbf{B}_2(t), \dots, \mathbf{B}_m(t))$ con su filtración \mathfrak{F}_t^m y donde $v(s, \omega) = [v_{ij}(s, \omega)]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ satisfacen:

- (i) v_{ij} son conjuntamente medibles.
- (ii) v_{ij} son \mathfrak{F}_t^m -adaptadas.
- (iii) v_{ij} son $L^2(dt \times P)$

Teorema 1.50. (Fórmula de Itô Multidimensional)

Sea X_t un proceso de Itô multidimensional en la forma (1.19) y sea $g(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, de clase C^2 , entonces $g(t, X_t)$ es un proceso de Itô, (g_1, \dots, g_p) , tal que:

$$\begin{aligned} g_k(t, X_t) = g_k(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}(g_k(s, X_s))ds + \int_0^t \sum_i^n \frac{\partial}{\partial x_i}(g_k(s, X_s))dX_i \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(g_k(s, X_s))dX_i dX_j \end{aligned} \quad (1.20)$$

1.1.5. La Ecuación del Calor

A continuación, vamos a mostrar la relación entre la ecuación del calor en una región de \mathbb{R}^n y la distribución del tiempo de escape de un movimiento Browniano desde esa región. Sea \mathbf{B}_t un movimiento Browniano en \mathbb{R}^n , comenzando en una región angular abierta D . Sea $T = \inf\{t > 0 : \mathbf{B}_t \notin D\}$. Para f continua y acotada, deseamos hallar $u(t, x)$, tal que satisfaga:

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u, \text{ en } (0, \infty) \times D & \quad \begin{cases} u(0, x) = f(x), & x \in D \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial D \end{cases} \\ (b) \quad u \text{ es continua en } [0, \infty) \times \bar{D} & \end{aligned} \quad (1.21)$$

Proposición 1.51. Si $v(t, x)$ es solución acotada de (1.21), entonces $v(t, x) = E_x(f(\mathbf{B}_t); T > t)$, donde \mathbf{B}_t en un movimiento Browniano comenzando en x .

Demostración: Sea $M_s := v(t - s, \mathbf{B}_s)$, para $0 < s < t \wedge T$. Por la fórmula de Itô, aplicada al proceso M_s , nos dá:

$$\begin{aligned} v(t - s, \mathbf{B}_s) &= v(t, \mathbf{B}_0) + \int_0^s \frac{\partial}{\partial r} (v(t - r, \mathbf{B}_r)) dr \\ &\quad + \int_0^s \nabla v(t - r, \mathbf{B}_r) d\mathbf{B}_r + \frac{1}{2} \int_0^s \Delta v(t - r, \mathbf{B}_r) (d\mathbf{B}_r)^2 \\ &= v(t, \mathbf{B}_0) + \int_0^s \left[-v_r(t - r, \mathbf{B}_r) + \frac{1}{2} \Delta v(t - r, \mathbf{B}_r) \right] dr \\ &\quad + \int_0^s \nabla v(t - r, \mathbf{B}_r) d\mathbf{B}_r \end{aligned}$$

Pero v satisface (a), por lo tanto:

$$v(t - s, \mathbf{B}_s) = v(t, \mathbf{B}_0) + \int_0^s \nabla v(t - r, \mathbf{B}_r) d\mathbf{B}_r$$

Luego, por las propiedades de la integral de Itô, M_s es una martingala local en $[0, t \wedge T)$. Como v es acotada, entonces $M_s, 0 \leq s < t \wedge T$, es una martingala acotada. Luego, por el teorema de convergencia de martingalas, M_s converge casi seguramente a un límite finito, es decir:

$$\lim_{s \uparrow (t \wedge T)} M_s \text{ existe c.s}$$

Ahora bien, como v satisface (b) y es acotada, entonces se tiene:

$$\lim_{s \uparrow (t \wedge T)} M_s = \lim_{s \uparrow (t \wedge T)} v(t - s, \mathbf{B}_s) = f(\mathbf{B}_t) \mathbb{1}_{\{T > t\}} \quad (\text{I})$$

Además, como $M_s = E(M_r | \mathcal{F}_s) \forall r \geq s$, y M_r es uniformemente integrable, de (I) se sigue que:

$$M_s = E(f(\mathbf{B}_t) \mathbb{1}_{\{T > t\}} | \mathcal{F}_s)$$

Tomando $s = 0$,

$$M_0 = v(t, x) = E(f(\mathbf{B}_t) \mathbb{1}_{\{T > t\}} | \mathcal{F}_0) = E(f(\mathbf{B}_t) \mathbb{1}_{\{T > t\}})$$

Se ha encontrado una solución única de (1.21) y es:

$$v(t, x) = E(f(\mathbf{B}_t) \mathbb{1}_{\{T > t\}})$$

Se ha demostrado que si v es solución acotada de (1.21), entonces tiene que ser $E(f(\mathbf{B}_t) \mathbb{1}_{\{T > t\}})$. \square

Observación 1.52. En el caso en que $f \equiv 1$, tenemos que $v(t, x) = \mathbf{P}_x(T > t)$. Se puede demostrar también que el lado derecho de la última igualdad es una solución clásica de (1.21) en el caso en que D sea una región angular limitada por hiperplanos. (Véase [6] para más detalle)

Este previo es muy importante para la comprensión del enfoque dado a la prueba principal del capítulo 2.

En la siguiente sección, vamos a desarrollar algunas nociones acerca de grupos finitos generados por reflexiones. Esto debido a que, uno de los principales resultados que vamos a estudiar, detallado en [5], requiere de estos elementos, por ello es importante definir y mostrar algunas nociones referentes a estos objetos matemáticos.

1.2. Grupos Finitos Generados por Reflexiones

A continuación, presentamos algunas nociones de grupos finitos generados por reflexiones. Las mismas servirán para familiarizarnos con la teoría base del trabajo desarrollado por Doumerc y O'Connell en [5]. En función de esta teoría se obtiene una expresión para la distribución del primer momento de escape del movimiento Browniano desde ciertas regiones angulares en \mathbb{R}^n . Es importante hacer notar cómo a partir de teoría referente a esta área de la matemática se pueden encontrar soluciones a problemas planteados en probabilidades, mostrando la interacción eficaz entre las distintas áreas.

Los grupos finitos generados por reflexiones son grupos abstractos que admiten una descripción formal en términos de simetrías asociadas a hiperplanos. Si el espacio sobre el cual actúan las mismas es el Euclideano, entonces los grupos son conocidos como **Grupos Finitos de Coxeter**.

Vamos a comenzar por recordar la definición de reflexión, sus propiedades y los elementos ligados a ésta.

1.2.1. Reflexiones

Consideremos el espacio euclideo \mathbb{R}^n con el producto interno usual. Denotemos por H algún hiperplano de \mathbb{R}^n .

Definición 1.53. Sea α un vector no-nulo en \mathbb{R}^n . Se define el conjunto:

$$\mathbb{R}\alpha = \{x\alpha : x \in \mathbb{R}\}$$

Definición 1.54. Una *reflexión* s , es un operador lineal en \mathbb{R}^n , que envía un vector no nulo α en su opuesto, dejando fijo el hiperplano H ortogonal a dicho vector α .

Observación 1.55. (a) Si el origen pertenece a H , entonces s deja fijo al origen y así puede ser tratada como una transformación ortogonal lineal de \mathbb{R}^n .

(b) El hiperplano H es conocido como el "espejo" de la reflexión s .

Procedemos a construir la expresión para s .

Consideremos la reflexión s con el hiperplano H y tomamos un vector no nulo α perpendicular a H , entonces $\mathbb{R}\alpha = H^\perp$ (H^\perp es el complemento ortogonal de H en \mathbb{R}^n), así s envía α a $-\alpha$ y preserva los vectores en H^\perp , entonces se puede verificar fácilmente que

s puede ser escrita en la forma :

$$s_\alpha \beta = \beta - \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \quad (1.22)$$

De hecho, un cálculo directo demuestra que (1.22) se cumple cuando $\beta \in H$ y cuando $\beta = \alpha$. Por la obvia linealidad del lado derecho de (1.22) con respecto a β , también se cumple cuando $\beta \in \mathbb{R}\alpha \oplus H$.

Definición 1.56. Denotaremos por $\mathbf{O}(\mathbf{V})$ al espacio de todas las transformaciones ortogonales de \mathbf{V} .

Observaciones

- Dado un vector no-nulo $\alpha \in \mathbb{R}^n$ la transformación lineal s_α es ortogonal :

$$\langle s_\alpha \beta, s_\alpha \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle \quad \forall \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n.$$

- $s_\alpha = s_{c\alpha}$, $\forall c \in \mathbb{R} - \{0\}$
- s tiene orden 2 en $\mathbf{O}(\mathbb{R}^n)$, es decir : $s^2 = 1$.

Un grupo finito generado por reflexiones es un tipo especialmente interesante de subgrupos finitos de $\mathbf{O}(\mathbb{R}^n)$.

A continuación mencionamos un par de grupos conocidos, que serán utilizados en la resolución del problema de escape Browniano en el capítulo 2. El primero de estos, representa un ejemplo de subgrupos finitos de $\mathbf{O}(\mathbb{R}^n)$:

(1.) Grupo Dihédrico $I_2(m)$.

Sea \mathbb{R}^2 el espacio euclideo plano y sea $I_2(m)$ el grupo dihédrico de orden $2m$, consistente de las transformaciones ortogonales que preservan un polígono regular de m -lados centrado en el origen. $I_2(m)$ contiene m rotaciones (por múltiplos de $\frac{2\pi}{m}$) y m reflexiones (a través de las "diagonales" del polígono). Aquí diagonal significa la línea que bisecta el polígono, conectando dos vértices o los puntos medios de lados opuestos si m es par ó conectando un vértice al punto medio del lado opuesto si m es impar.

Observación 1.57. El grupo $I_2(m)$ es de hecho generado sólo por reflexiones, debido a que una rotación por $\frac{2\pi}{m}$ puede ser obtenida como una composición de dos reflexiones relativas a un par de diagonales adyacentes que forman un ángulo de $\theta = \frac{\pi}{m}$.

(2.) Grupo Simétrico ó Grupo de las Permutaciones \mathcal{S}_n .

Sea S un conjunto no vacío, y

$$A(S) = \{f : f : S \rightarrow S \text{ y } f \text{ es una biyección}\}$$

El conjunto $A(S)$ con la composición de funciones es un *grupo*. Los elementos de $A(S)$ son llamados *permutaciones* y $A(S)$ se le denomina el *grupo de las permutaciones sobre S* . Si $S = \{1, 2, \dots, n\}$, entonces $A(S)$ se denomina el *Grupo Simétrico sobre n variables* y lo denotaremos por \mathcal{S}_n . Aquí existen varios subgrupos finitos, éstos son etiquetados como "tipos" : $(A_{n-1}, n \geq 2)$; $(B_n, n \geq 2)$; $(D_n, n \geq 4)$, para mayor detalle acerca de

estos subgrupos revítese [9]. Tenemos que $|S_n| = n!$. Como un elemento $\sigma \in S_n$ es una función sobre el conjunto finito S entonces, podemos denotar a σ así:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

donde $i_k = \sigma(k)$, $\forall k = 1, \dots, n$.

Y el grupo de reflexión finito, en este caso, será el formado por todas las acciones que permutan los vectores básicos canónicos del espacio \mathbb{R}^n .

1.2.2. Sistema de Raíces

Sea \mathbf{V} el espacio euclideo y hasta ahora, tenemos definidos los dos elementos ligados a una reflexión s , como lo son el vector $\alpha \in \mathbf{V}$ y el hiperplano $H \subseteq \mathbf{V}$. En lo sucesivo, denotaremos por \mathbf{W} a un grupo finito generado por reflexiones s_α , actuando sobre el espacio euclideo \mathbf{V} .

Queremos dar la idea de cómo actúa \mathbf{W} sobre \mathbf{V} . Cada reflexión s_α en \mathbf{W} determina un hiperplano de reflexión H_α y además, una línea $L_\alpha = \mathbb{R}\alpha$ ortogonal a éste.

Entonces, la acción del grupo \mathbf{W} sobre \mathbf{V} consiste en permutar las líneas L_α para cada α tal que $s_\alpha \in \mathbf{W}$. En efecto:

Proposición 1.58. Si $t \in \mathbf{O}(\mathbf{V})$ y α es un vector no-nulo en \mathbf{V} , entonces $ts_\alpha t^{-1} = s_{t\alpha}$. En particular, si $w \in \mathbf{W}$, entonces $s_{w\alpha}$ pertenece a \mathbf{W} siempre que $s_\alpha \in \mathbf{W}$.

Demostración: (Ver proposición A.1)

□

Se tiene entonces que para $w \in \mathbf{W}$: $w(L_\alpha) = L_{w\alpha}$, (en palabras, las líneas L_α son determinadas por \mathbf{W} , y no los vectores α).

Sea Φ un conjunto finito de vectores no-nulos en \mathbf{V} satisfaciendo las siguientes condiciones:

$$(R1) \quad \Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\} \quad , \quad \forall \alpha \in \Phi$$

$$(R2) \quad s_\alpha \Phi = \Phi \quad , \quad \forall \alpha \in \Phi$$

Entonces,

Definimos \mathbf{W} como el grupo generado por las reflexiones s_α , $\alpha \in \Phi$.

Definición 1.59. Diremos que Φ es un sistema de raíces con grupo de reflexión asociado \mathbf{W} .

Ahora bien, el grupo de reflexiones $\mathbf{W} \subset \mathbf{O}(\mathbf{V})$ será en lo sucesivo, estudiado en conjunción con un sistema de raíces $\Phi \subset \mathbf{V}$, sujeto sólo a (R1) y a (R2).

1.2.3. Sistemas Simples y Positivos

Fijemos un sistema de raíces Φ en el espacio euclideo \mathbf{V} , tal que \mathbf{W} es el grupo finito generado por todas las reflexiones s_α ($\alpha \in \Phi$), permutadas por los elementos de \mathbf{W} .

Vamos a presentar unos elementos que nos permitirán estudiar al grupo \mathbf{W} .

Es posible que Φ sea extremadamente grande comparado con la dimensión de \mathbf{V} , por ejemplo, cuando \mathbf{W} es el grupo dihédrico, Φ puede tener tantos elementos como haya en \mathbf{W} , mientras que $\dim(\mathbf{V}) = 2$.

Esto conduce a considerar un subconjunto de Φ , que permita reconstruir a Φ , es decir, nos preguntamos si cada raíz en Φ es una combinación \mathbb{R} -lineal de algunas raíces en Φ , con coeficientes todos de igual signo. Ésas raíces formarían un subconjunto, conocido desde álgebra como *linealmente independiente*.

Entonces, consideramos esto como nuestro punto de partida para hallar tal conjunto. Consideramos una partición de Φ en raíces "positivas" y "negativas" con exactamente uno de cada par $\{-\alpha, \alpha\}$, particiones de este tipo son sencillas de encontrar (por el orden total de \mathbf{V}). Recordemos la definición de orden total de un espacio euclideo.

Definición 1.60. Un *Orden Total* en el espacio vectorial \mathbf{V} es una relación transitiva sobre \mathbf{V} , denotada por $<$, satisfaciendo los siguientes axiomas :

1. Para cada par $\lambda, \mu \in \mathbf{V}$, exactamente uno de los siguientes se cumple : $\lambda < \mu$, $\lambda > \mu$, $\lambda = \mu$.
2. Para todo $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{V}$, si $\mu < \nu$, entonces $\lambda + \mu < \lambda + \nu$.
3. Si $\mu < \nu$ y $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $c\mu < c\nu$ si $c > 0$, mientras $c\nu < c\mu$; si $c < 0$.

Definición 1.61. Dado un orden en \mathbf{V} , decimos que $\lambda \in \mathbf{V}$ es *positivo* si $0 < \lambda$. La suma de vectores positivos es positiva, así como la multiplicación por escalar de un vector positivo por un número real positivo.

Definición 1.62. Sea ($<$) un orden total en \mathbf{V} y Φ un sistema de raíces en \mathbf{V} . Diremos que un subconjunto Π de Φ , es un *sistema positivo* si éste consiste de todas las raíces que son positivas relativo al orden de \mathbf{V} . Cuando Π es fijado podemos escribir $\alpha > 0$ en lugar de $\alpha \in \Pi$.

Observación 1.63. ■ $-\Pi$ es llamado un *sistema negativo*.

- Como las raíces vienen en pares $\{-\alpha, \alpha\}$ es claro que $\Phi = -\Pi \sqcup \Pi$

Definición 1.64. Diremos que un subconjunto Δ de Φ es un *sistema simple* (y llamaremos a sus elementos *raíces simples*) si es una base del espacio vectorial real generado por Φ en \mathbf{V} y si cada $\alpha \in \Phi$ es una combinación lineal de elementos en Δ con coeficientes todos del mismo signo (todos positivos ó todos negativos).

A continuación presentamos bases teóricas que garantizan la existencia de estos sistemas.

Teorema 1.65. ■ Si Δ es un sistema simple en Φ entonces existe un único sistema positivo que contiene a Δ .

- Todo sistema positivo Π en Φ contiene un único sistema simple; en particular existen sistemas simples .

Para una demostración veáse [9].

Tenemos demostrado que sistemas simples y positivos en Φ se determinan a cada uno de manera única. Resultado que garantiza la unicidad y correspondencia entre estos dos conjuntos, propiedad que será útil en los cálculos que desarrollaremos en el Capítulo 2.

Observación 1.66. Para cualquier sistema simple Δ y para cualquier $w \in \mathbf{W}$, $w\Delta$ es de nuevo un sistema simple, con correspondiente sistema positivo $w\Pi$ (si Π es el sistema positivo determinado por Δ).

Para entender mejor el pasaje desde Π a $w\Pi$, consideramos el caso especial $w = s_\alpha$, ($\alpha \in \Delta$). Encontramos que Π y $s_\alpha\Pi$ difieren sólo por una raíz:

Proposición 1.67. Sea Δ un sistema simple, contenido en el sistema positivo Π . Si $\alpha \in \Delta$, entonces $s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\}) = \Pi \setminus \{\alpha\}$.

Demostración: (Véase Proposición (0.9) del Apéndice A) . □

1.2.4. Generación por reflexiones simples

En esta sección queremos presentar un resultado que garantiza que el grupo W puede generarse aún por reflexiones en el conjunto Δ .

Fijamos un sistema simple Δ y el correspondiente sistema positivo Π en Φ .

Definición 1.68. Sea $\beta \in \Phi$, el cual se escribe únicamente como $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$. Se define a la *altura de β* (relativa a Δ), por $\sum c_\alpha$, lo denotaremos por $ht(\beta)$.

Por ejemplo, si $\beta \in \Delta$, $ht(\beta) = 1$.

Teorema 1.69. Sea Δ un sistema simple fijo, W es generado por las reflexiones s_α , ($\alpha \in \Delta$) .

Demostración: (Ver el teorema A.4) □

Por lo tanto, cuando estemos resolviendo el problema de escape Browniano, generaremos al grupo finito (asociado a la región angular) por reflexiones en Δ .

1.3. Funciones de Bessel del Primer Orden

En la presente sección, recopilamos algunas nociones sobre funciones de Bessel y sobre polinomios asociados a las mismas. Tenemos especial interés en las funciones de Bessel de primer orden, debido a que el estudio desarrollado en [3], muestra un resultado en función de éstas y, como consecuencia de compararlo con resultados dados en [5] aparecerán los polinomios de Neumann relacionados con los coeficientes de Bessel, por lo que resulta útil y oportuno mirar su definición y algunas propiedades que nos familiaricen con estas nociones.

En general, las funciones de Bessel $Z_\nu(z)$ son soluciones de la ecuación diferencial :

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - \nu^2)y = 0 \quad (1.23)$$

conocida como la Ecuación Diferencial de Bessel.

Tipos especiales de funciones de Bessel son las llamadas *Funciones de Bessel de Primer Orden* $J_\nu(z)$, *Funciones de Bessel de Segundo Orden* $N_\nu(z)$; (también llamadas funciones de Neumann y frecuentemente escritas como $Y_\nu(z)$), y *Funciones de Bessel de Tercer Orden* $H_\nu^{(1)}(z)$ y $H_\nu^{(2)}(z)$ (también llamadas funciones de Hankel); siendo las primeras las que nos interesan en este estudio. Para más información sobre funciones de Bessel, y en particular demostración de los resultados presentados se puede consultar [15].

1.3.1. Coeficientes de Bessel $J_n(z)$

$J_\nu(z)$ es una función en dos variables, de argumento z y de orden ν (real o complejo). En [15], se discuten cómo son las soluciones de la ecuación diferencial (1.23) y se llega a que tal solución es de la forma:

$$J_\nu(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)}. \quad (1.24)$$

Cuando se considera $\nu = n \in \mathbb{Z}$ y z arbitrario, entonces a dichas funciones se les llaman **Coeficientes de Bessel de argumento z y orden entero n** . Así, (1.24) se reescribe como:

$$J_n(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2m}}{m!(n+m)!}, \quad (1.25)$$

ó por su representación integral (tomada por Bessel como la definición de $J_n(z)$ y desde la cual derivó algunas de sus propiedades):

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta. \quad (1.26)$$

(para mayor detalle véase [15]).

A continuación presentamos algunas propiedades $J_n(z)$:

$$\begin{aligned}
J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) &= \frac{2n}{z}J_n(z), \\
J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) &= zJ'_n(z), \\
zJ'_n(z) + nJ_n(z) &= zJ_{n-1}(z), \\
zJ'_n(z) - nJ_n(z) &= -zJ_{n+1}(z), \\
J'_0(z) &= -J_1(z), \\
J_{-n}(z) &= (-1)^n J_n(z).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

En [15], se estudian y se demuestran estas propiedades.

Observación 1.70. $J_\nu(z)$ con $\nu \in \mathbb{R}$ ó $\nu \in \mathbb{C}$, también satisface (1.27).

Teorema 1.71. $J_\nu(z)$ es una función analítica en z (excepto posiblemente en 0) y en ν , para todos los valores de ν .

Comentario 1.72. Una importante consecuencia de este teorema es que, término a término, integraciones y diferenciaciones (con respecto a z ó ν) de la serie $J_\nu(z)$ son permisibles.

Ahora, vamos a recordar un tipo de función de Bessel que, aparece en una de las expresiones de la distribución del tiempo de escape. Además de algunas ecuaciones funcionales útiles para el estudio que llevaremos a cabo en el Capítulo 2.

1.3.2. Funciones de Bessel Modificadas de Primer Orden

La ecuación diferencial

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + \nu^2)y = 0, \tag{1.28}$$

la cual difiere de la ecuación de Bessel sólo en el coeficiente de y , es de ocurrencia frecuente en problemas físicos matemáticos y una solución de la misma es la función de variable real x , usualmente denotada por $I_\nu(x)$, y expresada como:

$$I_\nu(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}x)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)}. \tag{1.29}$$

Observación 1.73. (a) La función $I_\nu(x)$ satisface unas ecuaciones semejantes a (1.27):

$$\begin{aligned}
I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x}I_\nu(x), \\
I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) &= 2I'_\nu(x), \\
xI'_\nu(x) + \nu I_\nu(x) &= xI_{\nu-1}(x), \\
xI'_\nu(x) - \nu I_\nu(x) &= xI_{\nu+1}(x), \\
I'_0(x) &= I_1(x), \\
I_{-n}(x) &= I_n(x).
\end{aligned} \tag{1.30}$$

(b) Una representación integral de $I_\nu(x)$ para $\nu > 0$, que usaremos en el capítulo 2, es:

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \theta} \cos \nu \theta d\theta - \frac{\text{sen } \nu \pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \cosh t - \nu t} dt. \quad (1.31)$$

(c) Desde la definición dada arriba, podemos escribir una ecuación más útil entre $I_\nu(x)$ y $J_\nu(z)$, que nos ayudará en el capítulo 2 a reescribir una expansión en serie de funciones de Bessel, ésta es:

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(iz). \quad (1.32)$$

1.3.3. Expansión en Series de funciones de Bessel

Cualquier serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_{\nu+k}(z),$$

es llamada una *serie de Neumann*. Se desea expandir una función analítica y arbitraria $f(z)$, en un dominio que incluye el origen, en una serie de coeficientes de Bessel ($\nu = n$), en la forma

$$f(z) = \alpha_0 J_0(z) + \alpha_1 J_1(z) + \alpha_2 J_2(z) + \cdots,$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$; son independientes de z .

Estudiemos algunos elementos ligados a estas expansiones:

Definición 1.74. La función $O_n(t)$, usualmente llamada *polinomio de Neumann de orden n* , está definida por

$$O_n(t) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\leq \frac{1}{2}n} \frac{n \cdot (n - m - 1)!}{m! (\frac{1}{2}t)^{n-2m+1}}, \quad (n \geq 1) \quad (1.33)$$

Observación 1.75. (1) $O_n(t)$ es un polinomio de grado $n + 1$ en la variable $(1/t)$. Y se define: $O_0(t) := 1/t$.

(2) $O_n(t)$ satisface las siguientes relaciones de recurrencia:

$$O_1(t) = -O_0'(t), \quad O_{n+1}(t) = O_{n-1}(t) - 2O_n'(t)$$

(3) Los polinomios $O_n(t)$ aparecieron como los coeficientes de $J_n(z)$ en la expansión en serie de coeficientes de Bessel de la función $1/(t - z)$, así:

$$\frac{1}{t - z} \equiv O_0(t)J_0(z) + 2O_1(t)J_1(z) + 2O_2(t)J_2(z) + \cdots, \quad (1.34)$$

Expansión de Neumann de una función analítica en una serie de Coeficientes de Bessel

Teorema 1.76. Sea C el contorno del círculo $|t| = r$ en \mathbb{C} . Si $f(z)$ es una función analítica en $|z| \leq r$, entonces:

$$f(z) = J_0(z)f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(z)}{\pi i} \int_C O_n(t)f(t)dt$$

donde $J_n(z)$ es la función de Bessel de orden entero n .

Demostración: se puede verificar que:

$$J_n(z) = \frac{(\frac{1}{2}z)^n}{n!} \{1 + \theta_n\}, \quad O_n(t) = \frac{2^{n-1}n!}{t^{n+1}} \{1 + \phi_n\},$$

donde $\theta_n \rightarrow 0$, $\phi_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ cuando z y t son fijados. Por lo tanto, la serie

$$O_0(t)J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} O_n(t)J_n(z) \equiv F(z, t)$$

es comparable con la serie geométrica cuyo término general es z^n/t^{n+1} , y esta serie es absolutamente convergente cuando $|z| < |t|$, y así la expansión para $F(z, t)$ es absolutamente convergente en las mismas circunstancias.

De nuevo, si $|z| \leq r$, $|t| \geq R$, donde $r < R$, la serie es comparable con la serie geométrica cuyo término general es r^n/R^{n+1} y así la expansión para $F(z, t)$ converge uniformemente en los dominios $|z| \leq r$ y $|t| \geq R$. Por lo tanto, diferenciaciones término a término son permisibles, y así

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)F(z, t) &= O'_0(t)J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} O'_n(t)J_n(z) + O_0(t)J'_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} O_n(t)J'_n(z) \\ &= \{O'_0(t) + O_1(t)\}J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \{2O'_n(t) - O_{n-1}(t) + O_{n+1}(t)\}J_n(z) \\ &= 0 \quad (\text{usando la Obs. (1.72)(2)}) \end{aligned}$$

Ya que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)F(z, t) = 0,$$

se sigue que $F(z, t)$ debe ser una función en la variable $t - z$; y como

$$F(0, t) = O_0(t) = 1/t,$$

es claro que, entonces $F(z, t) = 1/(t - z)$.

Y por lo tanto, hemos probado que:

$$\frac{1}{t - z} = O_0(t)J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} O_n(t)J_n(z), \quad (1.35)$$

siempre que $|z| \leq |t|$.

Como $f(z)$ es analítica en $|z| \leq |t|$, entonces por el teorema de Cauchy, siempre que $|z| < r$, tenemos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t) \{O_0(t)J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} O_n(t)J_n(z)\} dt \quad (\text{por (1.35)}) \\ &= J_0(z)f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(z)}{\pi i} \int_C O_n(t)f(t) dt \end{aligned}$$

donde C es el contorno del círculo $|t| = r$.

□

Ejemplo 1.77. En [15] se muestran este tipo de expansiones para las funciones:

1. $\cos z = J_0(z) - 2J_2(z) + 2J_4(z) - \dots$,
2. $\sin z = 2J_1(z) - 2J_3(z) + 2J_5(z) - \dots$,

Teniendo en cuenta este tipo de expansión para funciones analíticas, podremos mostrar en el proceso de comparación de las expresiones de la distribución del tiempo de escape en \mathbb{R}^2 , un método para expandir expresiones de la integral de probabilidad.

El Problema de Escape

En este capítulo desarrollaremos el contenido esencial de este trabajo.

El *problema de escape*, a grandes rasgos, refiere el estudio de la distribución del primer momento en que el movimiento Browniano abandona una región. En este estudio, la región donde comienza el movimiento Browniano es una región angular cuyas barreras son hiperplanos. A medida que se fijan las condiciones y los elementos relacionados al problema se avanza en el estudio logrando el cometido. La herramienta fundamental en esta labor es el principio de reflexión. En el caso de \mathbb{R}^2 , se tienen dos expresiones para la distribución del primer momento de escape Browniano que resuelven el problema de salida. Una de ellas está dada en [3], válida para cualquiera sea el ángulo de la región; y la otra en [5], donde la región está asociada con un grupo finito generado por reflexiones y es válida en \mathbb{R}^n para ciertos ángulos. Este resultado envuelve una condición, la cual se denomina “consistencia”, y está relacionada con la estructura del grupo de reflexión finito asociado. Se plantea la comparación de ésta, con la fórmula hallada en [3] (la cual surge a consecuencia de una aplicación del principio de reflexión sobre el ángulo Browniano plano). Y en este proceso de comparación surgirán algunos elementos que aumentan el interés y las perspectivas del estudio. Vamos a comenzar con el problema de escape en \mathbb{R}^2 y posteriormente plantearemos el problema en \mathbb{R}^n , así como los elementos que surgen del proceso de comparación.

2.1. Estudio del problema de escape del movimiento Browniano plano

Consideremos un movimiento Browniano en el plano complejo $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_t^1 + i\mathbf{B}_t^2$, comenzando en algún punto $z \neq 0$. Luego, \mathbf{B}_t^1 y \mathbf{B}_t^2 son movimientos Brownianos independientes satisfaciendo las propiedades del movimiento Browniano que mencionamos anteriormente. Escrito de otra manera, $\mathbf{B}_t = |\mathbf{B}_t|e^{i\theta_t}$.

El enfoque en este caso, estará encaminado por el estudio de dos procesos muy importantes relacionados con las trayectorias de \mathbf{B}_t ; definidos como sigue:

Definición 2.1. Definimos el proceso θ_t , como la parte angular del movimiento Browniano plano. θ_t es “el número de vueltas” de la trayectoria continua $\{\mathbf{B}_s, s \leq t\}$ alrededor del origen, es decir, θ_t es el proceso continuo dado por $\theta_t = \text{Arg } \mathbf{B}_t$.

Observación 2.2. Si $z \neq 0$, entonces $\mathbf{P}_z(\{\omega : \mathbf{B}_t(\omega) = 0, \text{ para algún } t > 0\}) = 0$, por lo que θ_t está bien definido. (Para una demostración véase [13].)

Definición 2.3. Sea $R_t = |\mathbf{B}_t| = \left((\mathbf{B}_t^1)^2 + (\mathbf{B}_t^2)^2 \right)^{(1/2)}$. Este proceso denota la distancia del movimiento Browniano planar al origen y suele denominarse proceso de Bessel.

Supongamos que para $t = 0$, se tiene $R_0 = \rho$ y $\theta_0 = \alpha$, así consideramos la densidad,

$$p(t, r, \theta; \rho, \alpha) = \mathbf{P}\{R_t \in dr, \theta_t \in d\theta \mid R_0 = \rho, \theta_0 = \alpha\} \frac{1}{rdrd\theta}. \quad (2.1)$$

En [3] se prueba el siguiente teorema, resolviendo la ecuación "backward" asociada a la densidad conjunta:

Teorema 2.4.

$$p(t, r, \theta; \rho, \alpha) = \frac{1}{\pi t} \exp\left(-\frac{r^2 + \rho^2}{2t}\right) \int_0^\infty \cos v(\theta - \alpha) I_v\left(\frac{\rho r}{t}\right) dv. \quad (2.2)$$

donde $I_v(x)$ es la función de Bessel modificada de primer orden.

Si consideramos $0 < \theta_0 = \alpha < \beta$ y definimos $T_{(0,\beta)} = \inf\{t > 0 : \theta_t \notin (0, \beta)\}$, entonces la densidad de transición del movimiento Browniano sin tocar la barrera angular determinada por $(0, \beta)$ está dada por:

$$u(t, r, \theta; \rho, \alpha) = \mathbf{P}\{T_{(0,\beta)} > t, R_t \in dr, \theta_t \in d\theta \mid R_0 = \rho, \theta_0 = \alpha\} \frac{1}{(rdrd\theta)}, \quad (2.3)$$

A partir de (2.2) y por medio de una aplicación del principio de reflexión a θ_t se obtiene:

Teorema 2.5.

$$u(t, r, \theta; \rho, \alpha) = \frac{1}{\beta t} \exp\left(-\frac{r^2 + \rho^2}{2t}\right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} I_{|k\pi/\beta|}\left(\frac{\rho r}{t}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi\alpha}{\beta}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi\theta}{\beta}\right). \quad (2.4)$$

Para la demostración véase [3].

Desde este teorema se obtiene una expresión para la distribución del tiempo de escape del movimiento Browniano plano desde un región con barreras angulares:

Corolario 2.6. Sea \mathbf{B}_t el movimiento Browniano planar comenzando en $z = \rho e^{i\alpha}$, con β y $T_{(0,\beta)}$ como en el teorema (2.4). Entonces,

$$\mathbf{P}_z(T_{(0,\beta)} > t) = \frac{\rho e^{-\rho^2/4t}}{(2\pi t)^{1/2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\operatorname{sen}[(2k+1)\pi\alpha/\beta]}{2k+1} [I_{|2k+1|\pi/2\beta-1/2}(\rho^2/4t) + I_{|2k+1|\pi/2\beta+1/2}(\rho^2/4t)]. \quad (2.5)$$

Demostración: Debemos integrar (2.4) respecto de $rdrd\theta$, así:

$$\mathbf{P}_z(T_{(0,\beta)} > t) = \frac{1}{\beta t} e^{(-\rho^2/2t)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi\alpha}{\beta}\right) \underbrace{\int_0^\beta \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi\theta}{\beta}\right) d\theta}_{(i)} \underbrace{\int_0^\infty r e^{(-r^2/2t)} I_{|k\pi/\beta|}\left(\frac{\rho r}{t}\right) dr}_{(ii)}$$

Resolviendo por separado se tiene,

$$(i) = \frac{\beta}{k\pi} [1 - \cos k\pi].$$

Para resolver (ii), usamos integración por partes:

Se escoge $u = I_{|k\pi/\beta|} \left(\frac{\rho r}{t} \right)$, luego por la observación (1.71)(a) (segunda ecuación), se tiene:

$$du = \frac{\rho}{2t} [I_{|k\pi/\beta|-1} \left(\frac{\rho r}{t} \right) + I_{|k\pi/\beta|+1} \left(\frac{\rho r}{t} \right)] dr \text{ y } dv = re^{(-r^2/2t)} \Rightarrow v = -te^{(-r^2/2t)}.$$

Por lo tanto,

$$(ii) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-te^{-r^2/2t} I_{|k\pi/\beta|} \left(\frac{\rho r}{t} \right) \Big|_0^b \right) + \frac{\rho}{2} \int_0^\infty e^{-r^2/2t} [I_{|k\pi/\beta|-1} \left(\frac{\rho r}{t} \right) + I_{|k\pi/\beta|+1} \left(\frac{\rho r}{t} \right)] dr$$

Usamos definición integral de $I_\nu(x)$, dada en la ecuación (1.29), para acotarla y anular el primer sumando de la última igualdad:

$$(ii) = \frac{\rho}{2} \int_0^\infty e^{-r^2/2t} [I_{|\frac{k\pi}{\beta}|-1} \left(\frac{\rho r}{t} \right) + I_{|\frac{k\pi}{\beta}+1} \left(\frac{\rho r}{t} \right)] dr$$

Distribuyendo la integral para cada sumando y utilizando [8] [fórmula (6.618)(4)], tenemos:

$$(ii) = \frac{\rho}{2} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{2t}}} e^{\left(\frac{2t\rho^2}{8t^2}\right)} I_{\frac{1}{2}(|\frac{k\pi}{\beta}|-1)} \left(\frac{2t\rho^2}{8t^2} \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{2t}}} e^{\left(\frac{2t\rho^2}{8t^2}\right)} I_{\frac{1}{2}(|\frac{k\pi}{\beta}+1)} \left(\frac{2t\rho^2}{8t^2} \right) \right\} \\ = \frac{\rho}{2} \frac{\sqrt{2\pi t}}{2} e^{(\rho^2/4t)} \left[I_{\frac{1}{2}(|\frac{k\pi}{\beta}|-1)} \left(\frac{\rho^2}{4t} \right) + I_{\frac{1}{2}(|\frac{k\pi}{\beta}+1)} \left(\frac{\rho^2}{4t} \right) \right]$$

Así,

$$\mathbf{P}_z(T_{(0,\beta)} > t) = \frac{1}{\beta t} e^{(-\frac{\rho^2}{2t})} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sen} \left(\frac{k\pi\alpha}{\beta} \right) \frac{\beta}{k\pi} (1 - \cos k\pi) \frac{\rho}{2} \frac{\sqrt{2\pi t}}{2} e^{(\frac{\rho^2}{4t})} \\ \times \left[I_{\frac{1}{2}(|\frac{k\pi}{\beta}|-1)} \left(\frac{\rho^2}{4t} \right) + I_{\frac{1}{2}(|\frac{k\pi}{\beta}+1)} \left(\frac{\rho^2}{4t} \right) \right] \\ = \frac{\rho\sqrt{2\pi t}}{4\pi t} e^{(-\frac{\rho^2}{4t})} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ \text{kimpar}}} \frac{\text{sen} \left(\frac{k\pi\alpha}{\beta} \right)}{k} 2 \times \left[I_{\frac{1}{2}(|\frac{k\pi}{\beta}|-1)} \left(\frac{\rho^2}{4t} \right) \right. \\ \left. + I_{\frac{1}{2}(|\frac{k\pi}{\beta}+1)} \left(\frac{\rho^2}{4t} \right) \right] \\ = \frac{\rho e^{(-\frac{\rho^2}{4t})}}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\text{sen} \left[\frac{(2k+1)\pi\alpha}{\beta} \right]}{2k+1} \left[I_{\frac{1}{2}(|\frac{(2k+1)\pi}{\beta}|-1)} \left(\frac{\rho^2}{4t} \right) \right. \\ \left. + I_{\frac{1}{2}(|\frac{(2k+1)\pi}{\beta}+1)} \left(\frac{\rho^2}{4t} \right) \right]$$

□

Ejemplo 2.7. Sean $\beta = \frac{\pi}{3}$ y \mathbf{B}_t un movimiento Browniano plano, comenzando en $z = \rho e^{i\alpha} = \rho e^{i\frac{\beta}{2}}$, con $z \in C$, donde C es la región angular de escape que se muestra en la siguiente figura:

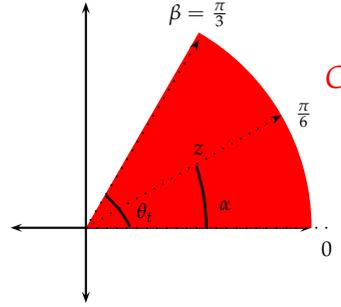


Figura 2.1: Región de escape Browniana en \mathbb{R}^2 .

Vamos a calcular la distribución del tiempo de escape del Browniano plano desde la región $C = \{\theta_t : 0 < \theta_t < \beta\}$. Con $T_{(0,\beta)}$ como antes, se tiene:

$$\mathbf{P}_z(T_{(0,\beta)} > t) = \frac{\rho e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\text{sen}((2k+1)\pi/2)}{(2k+1)} \left[\mathbf{I}_{\frac{1}{2}(3|2k+1|-1)}\left(\frac{\rho^2}{4t}\right) + \mathbf{I}_{\frac{1}{2}(3|2k+1|+1)}\left(\frac{\rho^2}{4t}\right) \right]$$

Usando el hecho de que la función seno es una función impar, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_z(T_{(0,\beta)} > t) &= \frac{\rho e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}} 2 \sum_{k \geq 0} \frac{\text{sen}((2k+1)\pi/2)}{(2k+1)} \left[\mathbf{I}_{\frac{1}{2}(3(2k+1)-1)}\left(\frac{\rho^2}{4t}\right) + \mathbf{I}_{\frac{1}{2}(3(2k+1)+1)}\left(\frac{\rho^2}{4t}\right) \right] \\ &= \frac{\rho e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}} 2 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \left[\mathbf{I}_{3k+1}\left(\frac{\rho^2}{4t}\right) + \mathbf{I}_{3k+2}\left(\frac{\rho^2}{4t}\right) \right] \end{aligned}$$

Usando la ecuación (1.32), reescribimos:

$$\mathbf{P}_z(T_{(0,\beta)} > t) = \frac{\rho e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}} 2 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \left[i^{-(3k+1)} \mathbf{J}_{3k+1}\left(i\frac{\rho^2}{4t}\right) + i^{-(3k+2)} \mathbf{J}_{3k+2}\left(i\frac{\rho^2}{4t}\right) \right] \quad (2.6)$$

donde J_n es la función de Bessel de primer orden.

Como se muestra en [3], la serie del lado derecho de la igualdad anterior converge uniformemente.

2.2. Estudio del Problema de Escape desde una región angular en \mathbb{R}^n asociada a un grupo generado por reflexiones

Como mencionamos anteriormente, el principio de reflexión ha significado una herramienta muy útil en el desarrollo de investigaciones en probabilidad. En el contexto

del movimiento Browniano 1-dimensional $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_t, t \geq 0)$ con densidad (1.5), el principio de reflexión ofrece una expresión simple para p_t^* , recordemos que p_t^* , es la densidad de transición del movimiento Browniano comenzando en x y aniquilado cuando llega por vez primera al 0, la cual satisface:

$$p_t^*(x, y) = p_t(x, y) - p_t(x, -y) \quad (2.7)$$

La distribución del tiempo de escape es recuperada integrando sobre $y > 0$. Si \mathbf{P}_x denota la ley de \mathbf{B} comenzando en $x > 0$ y T es el tiempo de escape desde $(0, \infty)$, entonces

$$\mathbf{P}_x(T > t) = \mathbf{P}_x(\mathbf{B}_t > 0) - \mathbf{P}_x(\mathbf{B} < 0). \quad (2.8)$$

Ahora, según [5], (2.7) se puede extender en un sentido más general, si \mathbf{B} es un movimiento Browniano en una región angular asociada con un grupo de reflexión finito. Por ejemplo, si \mathbf{B} es un movimiento Browniano en \mathbb{R}^n con densidad de transición $p_t(x, y)$ y $C = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > x_2 > \dots > x_n\}$ denota la región de escape, entonces la densidad de transición del movimiento Browniano aniquilado cuando se escapa por primera vez de C , está dada por

$$p_t^*(x, y) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\pi) p_t(x, \pi y), \quad (2.9)$$

donde $\pi y = (y_{\pi(1)}, \dots, y_{\pi(n)})$, $\varepsilon(\pi)$ denota el signo de π .

Esta expresión a simple vista muestra nuevos elementos, relacionados con el grupo de reflexión al cual está asociada la región de escape que, en este caso, es isomorfo a \mathcal{S}_n . (Este grupo fué definido en el capítulo 1, denota el grupo de las permutaciones)

Entonces, de manera natural, si deseamos hallar la probabilidad de salida, debemos integrar a (2.9) sobre $y \in C$, obteniéndose:

$$\mathbf{P}_x(T > t) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\pi) \mathbf{P}_x(\mathbf{B}_t \in \pi C). \quad (2.10)$$

Para simplificar (2.10), se introducen los grupos de reflexión asociados a la región de escape y la condición de *consistencia*, con lo cual (2.10) se podrá reescribir como un fiano, que sólo envuelve integrales uno-dimensionales, sencillas de calcular.

Este ejemplo muestra, que a pesar de las complicaciones que se pueden presentar al trasladar el problema de salida a \mathbb{R}^n , la conexión entre la región de escape y algún grupo de reflexión finito, simplifica considerablemente el cálculo.

Este resultado requiere la introducción de una condición de “*consistencia*”, que simplificará la estructura geométrica del conjunto sobre el cual se realiza la suma involucrada.

Vamos a definir las condiciones requeridas para este resultado.

2.2.1. Grupos de Reflexión

En las siguientes líneas, daremos algunas definiciones previas a los ejemplos de grupos de reflexión. Debemos tener presente las nociones de grupos de reflexión desarrolladas en la sección (1.2).

Sea \mathbf{V} el espacio real euclideo \mathbb{R}^n y denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno usual. Sea Φ un sistema de raíces en \mathbf{V} con grupo de reflexión asociado \mathbf{W} . Sea Δ un sistema simple en Φ con el sistema positivo correspondiente Π .

Definición 2.8. Una *Región Fundamental o Angular* es el conjunto

$$C = \{\lambda \in \mathbf{V} : \forall \alpha \in \Delta, \langle \alpha, \lambda \rangle > 0\}$$

Notación

- Las reflexiones en \mathbf{W} se denotan por $s_\alpha, \alpha \in \Pi$.
- Id , denotará la función vectorial identidad del espacio euclideo \mathbb{R}^n .
- Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces denotaremos por $\mathcal{O}(E)$ al conjunto de todos los subconjuntos ortogonales de E . (Recordamos que un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice *ortogonal* si sus elementos distintos son ortogonales dos a dos).

Definición 2.9. (Consistencia)

- Diremos que $I \subset \Pi$ satisface la hipótesis (C1) si $\exists J \in \mathcal{O}(\Delta \cap I)$ tal que si $w \in \mathbf{W}$ con $J \subset wI \subset \Pi$ entonces $wI = I$.
- Diremos que $I \subset \Pi$ satisface la hipótesis (C2) si la restricción del determinante al subgrupo $U = \{w \in \mathbf{W} : wI = I\}$ es trivial, es decir $\forall w \in U, \varepsilon(w) = \det w = 1$.
- I será llamado *Consistente* si éste satisface (C1) y (C2).

Definición 2.10. Sea $I \subset \Pi$ consistente. Se definen

$$\mathbf{W}^I := \{w \in \mathbf{W} : wI \subset \Pi\} \quad \text{y} \quad \mathcal{I} := \{wI : w \in \mathbf{W}^I\}.$$

La condición (C2), hace posible asignar un signo a cada elemento de \mathcal{I} por medio de $\varepsilon_A := \varepsilon(w), \forall A \in \mathcal{I}$, donde w es cualquier elemento de \mathbf{W}^I con $wI = A$.

Ejemplo 2.11. Si tomamos $I = \Delta$, entonces I es consistente, en efecto,

(C1): se tiene tomando $J \subset I$, (con J subconjunto unitario), luego J es un subconjunto ortogonal de I , entonces si $w = \text{Id} \in \mathbf{W}$ se tiene $J \subset wI \subset \Pi$, lo cual implica que $wI = I$.
 (C2): Debemos notar que el único elemento en U es $\{\text{Id}\}$, luego $\varepsilon(\text{Id}) = \det(\text{Id}) = 1$.

Ejemplo 2.12. En \mathbb{R}^2 :

Consideremos el grupo dihédrico $I_2(m)$ con m impar. Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. Así, $\mathbf{W} = I_2(m)$ está constituido por $2m$ transformaciones ortogonales (m reflexiones y m rotaciones, éstas últimas también generadas por reflexiones) que dejan invariante al polígono m -regular, generadas por las raíces α definidas así:

se toma $\beta = i = e^{i\pi/2}$ y se define $\alpha_l = e^{il\pi/m}(-\beta)$ para $1 \leq l \leq m$ y $\alpha = \alpha_1$.

Así, se tiene:

El sistema de raíces: $\Phi = \{-\alpha_l, \alpha_l, 1 \leq l \leq m\}$.

El sistema simple en $\Phi : \Delta = \{\alpha, \beta\}$.

El sistema positivo asociado a $\Delta : \Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$.

Sea $I = \{\alpha\}$, luego, I es consistente y ortogonal. En efecto, escojemos $J = \{\alpha\} = I$. El ángulo entre dos raíces es un múltiplo de π/m , dos a dos las raíces no son ortogonales. Por lo tanto, la propiedad de extensión (ver apéndice), es trivialmente verificada con $I = J$. Entonces $U = \{\text{Id}\}$, lo cual garantiza la condición (C2). Así, I es consistente y $\mathcal{I} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ con $\varepsilon_{\alpha_l} = (-1)^{l-1}$.

Para $m = 2m'$ con m' impar, escojemos de nuevo $J = \{\alpha\}$. Ahora la propiedad de extensión es verificada con $J = \{\alpha\}$, $I = \{\alpha, \alpha' = e^{i\pi/2}\alpha\}$. Supongamos que w deja invariante a I . Como I es una base de \mathbb{R}^2 , si w fija punto por punto a I , entonces $w = \text{Id}$. Por lo tanto, $U = \{\text{Id}\}$ y (C2) es satisfecha. Escribimos $\alpha'_i = e^{i\pi/2}(\alpha_i)$, I es consistente una vez más con $\mathcal{I} = \{\{\alpha_1, \alpha'_1\}, \dots, \{\alpha_m, \alpha'_m\}\}$ y $\varepsilon_{\{\alpha_i, \alpha'_i\}} = (-1)^{i-1}$.

En particular,

(1.) Grupo de las Simetrías del Triángulo ó $I_2(3)$, ($m = 3$).

En este caso, W estará conformado por 3 reflexiones respecto a las diagonales del triángulo y 3 rotaciones por múltiplos de $\frac{2\pi}{3} \equiv 120^\circ$. En primer lugar, hallamos las raíces que generarán las reflexiones. Así,

Con $\beta = i$ y $\alpha_l = e^{il\pi/3}(-\beta)$ para $1 \leq l \leq 3$ y $\alpha = \alpha_1$, se tiene: $\alpha_1 = -e^{5/6\pi i}$, $\alpha_2 = -e^{7/6\pi i}$, $\alpha_3 = -e^{3/2\pi i}$.

Así, el sistema simple es $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_3\}$ con su correspondiente sistema positivo $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Gráficamente:

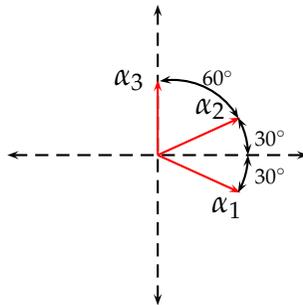


Figura 2.2: Sistema Positivo Π asociado al triángulo .

Para describir el grupo W , fijamos las líneas H_{α_i} , respecto de las cuales se hacen las reflexiones, que son justamente las líneas ortogonales a las α_i , respectivamente, como se muestra en la siguiente figura:

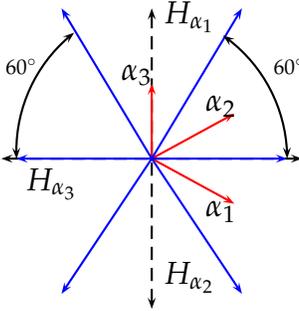


Figura 2.3: Sistema de Reflexión generado por $\{\alpha_i\}_{i=1}^3$.

Las líneas reflejantes H_{α_i} coinciden con las diagonales del triángulo equilátero como se ve a continuación:

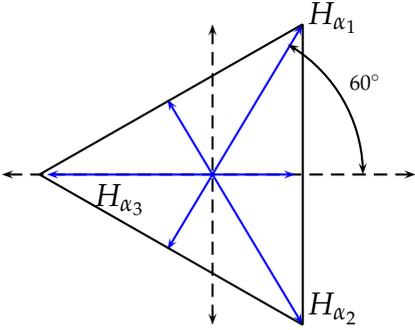


Figura 2.4: Diagonales del triángulo en estudio.

Así, se puede verificar que:

$$s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_3} \equiv \text{rot}_{120^\circ}; s_{\alpha_3} \circ s_{\alpha_1} \equiv \text{rot}_{240^\circ}; s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_1} \equiv \text{Id}$$

Por lo tanto, $\mathbf{W} = \{s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, s_{\alpha_3}, s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_3}, s_{\alpha_3} \circ s_{\alpha_1}, s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_1}\}$.

Ahora bien, se tiene que $I = \{\alpha_1\} \subset \Pi$ es consistente y a partir de aquí describimos explícitamente los conjuntos arriba definidos :

$$\mathbf{W}^I = \{w \in \mathbf{W} : wI \subset \Pi\} = \{\text{Id}, s_{\alpha_3}, s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_3}\}$$

ya que,

$$\text{Id}(\alpha_1) = \alpha_1 \in \Pi; s_{\alpha_3}(\alpha_1) = \alpha_2 \in \Pi; s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_3}(\alpha_1) = \alpha_3 \in \Pi.$$

$$\text{Luego, } \mathcal{I} = \{wI : w \in \mathbf{W}^I\} = \{\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}, \{\alpha_3\}\}.$$

Y el signo de cada elemento en \mathcal{I} se halla de la siguiente manera,

$$\varepsilon_{\{\alpha_1\}} = \varepsilon(\text{Id}) = \det M_{\text{Id}} = 1$$

$$\varepsilon_{\{\alpha_2\}} = \varepsilon(s_{\alpha_3}) = \det M_{s_{\alpha_3}} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\{\alpha_3\}} &= \varepsilon(s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_3}) = \varepsilon(\text{rot}_{120^\circ}) = \det M_{\text{rot}_{120^\circ}} \\ &= \det \begin{pmatrix} -\cos 60^\circ & \text{sen } 60^\circ \\ -\cos 30^\circ & -\text{sen } 30^\circ \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1. \end{aligned}$$

(2.) [Grupo de las Simetrías del Hexágono ó $I_2(6)$. ($m' = 2 \times 3$) .]

Este grupo está formado por 6 reflexiones con respecto a las diagonales del hexágono y 6 rotaciones por múltiplos de $\frac{2\pi}{6} \equiv 60^\circ$. Procedemos de la misma forma en que generamos las raíces en el caso del triángulo: $\alpha_1 = -e^{2/3\pi i}$, $\alpha_2 = -e^{5/6\pi i}$, $\alpha_3 = -e^{\pi i}$, $\alpha_4 = -e^{7/6\pi i}$, $\alpha_5 = -e^{4/3\pi i}$, $\alpha_6 = -e^{3/2\pi i}$.

Luego, el sistema simple es $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_6\}$ y el sistema positivo correspondiente es $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$. Estos vectores están representados en la siguiente figura :

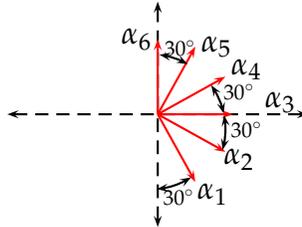


Figura 2.5: Sistema Positivo Π asociado al hexágono.

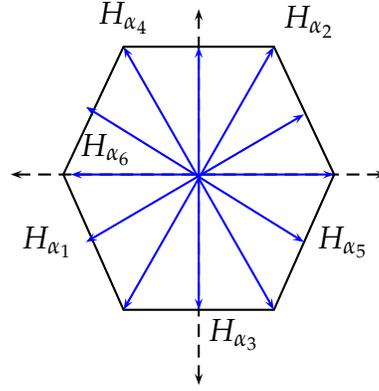


Figura 2.6: Sistema de Reflexión generado por $\{\alpha_i\}_{i=1}^6$.

Las reflexiones quedan como se muestra en la siguiente figura, notándose que las líneas H_{α_i} , $i = 1, \dots, 6$, coinciden con las diagonales del hexágono :

Por lo descrito anteriormente se puede verificar que,

$$s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_1} = \text{rot}_{360^\circ} = \text{Id}; s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_2} = \text{rot}_{60^\circ}; s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_3} = \text{rot}_{120^\circ}$$

$$s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_4} = \text{rot}_{180^\circ}; s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_5} = \text{rot}_{240^\circ}; s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_6} = \text{rot}_{300^\circ}$$

Luego,

$$\mathbf{W} = \{s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, s_{\alpha_3}, s_{\alpha_4}, s_{\alpha_5}, s_{\alpha_6}, \text{Id}, s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_2}, s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_3}, s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_4}, s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_5}, s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_6}\},$$

Un conjunto consistente es $I = \{\alpha_1, \alpha_4\}$. Ahora describimos los conjuntos:

$$\mathbf{W}^I = \{\text{Id}, s_{\alpha_6}, s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_6}\},$$

ya que:

$$\text{Id}(I) = \{\alpha_1, \alpha_4\} \subset \Pi; s_{\alpha_6}(I) = \{\alpha_2, \alpha_5\} \subset \Pi; s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_6}(I) = \{\alpha_3, \alpha_6\} \subset \Pi;$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{I} = \{\{\alpha_1, \alpha_4\}, \{\alpha_2, \alpha_5\}, \{\alpha_3, \alpha_6\}\}.$$

Ahora, calculamos el signo de cada elemento en \mathcal{I} :

$$\varepsilon_{\{\alpha_1, \alpha_4\}} = \varepsilon(\text{Id}) = \det M_{\text{Id}} = 1$$

$$\varepsilon_{\{\alpha_2, \alpha_5\}} = \varepsilon(s_{\alpha_6}) = \det M_{s_{\alpha_6}} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\varepsilon_{\{\alpha_3, \alpha_6\}} = \varepsilon(s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_6}) = \det M_{s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_6}} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1.$$

Ejemplo 2.13. En \mathbb{R}^3 :

Consideramos el grupo de las permutaciones \mathcal{S}_3 , actuando sobre los vectores canónicos de \mathbb{R}^3 . Entonces, según el apéndice A se tiene que el sistema positivo está dado por $\Pi = \{e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_2 - e_3\}$ con su respectivo sistema simple $\Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$ y un conjunto consistente y ortogonal es $I = \{e_1 - e_2\}$.

Notación: Vamos a denotar por σ_{xyz}^{123} a la acción que permuta los vectores canónicos de la siguiente forma:

$$\sigma_{xyz}^{123} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_x & e_y & e_z \end{pmatrix}$$

donde $x, y, z \in \{1, 2, 3\}$

Entonces, $\mathbf{W} = \left\{ \sigma_{123}^{123}, \sigma_{132}^{123}, \sigma_{321}^{123}, \sigma_{213}^{123}, \sigma_{231}^{123}, \sigma_{312}^{123} \right\}$. Para hallar los conjuntos \mathbf{W}^I e \mathcal{I} ,

consideramos:

$$\begin{aligned} \sigma_{123}^{123}(I) &= \sigma_{123}^{123}(e_1 - e_2) = e_1 - e_2 \in \Pi; \sigma_{132}^{123}(I) = \sigma_{132}^{123}(e_1 - e_2) = e_1 - e_3 \in \Pi, \\ \sigma_{321}^{123}(I) &= \sigma_{321}^{123}(e_1 - e_2) = e_3 - e_2 \notin \Pi; \sigma_{213}^{123}(I) = \sigma_{213}^{123}(e_1 - e_2) = e_2 - e_1 \notin \Pi, \\ \sigma_{231}^{123}(I) &= \sigma_{231}^{123}(e_1 - e_2) = e_2 - e_3 \in \Pi; \sigma_{312}^{123}(I) = \sigma_{312}^{123}(e_1 - e_2) = e_3 - e_1 \notin \Pi, \end{aligned}$$

Así,

$$\mathbf{W}^I = \left\{ \sigma_{123}^{123}, \sigma_{132}^{123}, \sigma_{231}^{123} \right\} \text{ e } \mathcal{I} = \left\{ \{e_1 - e_2\}, \{e_2 - e_3\}, \{e_1 - e_3\} \right\}.$$

Para hallar el signo de cada $A \in \mathcal{I}$, consideramos si cada permutación en \mathbf{W}^I puede ser reescrita como producto de un número par o impar de transposiciones, en cuyos casos el signo será 1 ó -1, respectivamente. Como se conoce, el signo de la permutación identidad es igual a 1. Así que: $\varepsilon_{\{e_1 - e_2\}} = 1$, para el resto, consideramos:

$$\sigma_{132}^{123} = (1)(23) \Rightarrow \varepsilon_{\{e_2 - e_3\}} = 1,$$

$$\sigma_{231}^{123} = (123) \Rightarrow \varepsilon_{\{e_1 - e_3\}} = -1,$$

Ahora, en contraste con lo dicho en la Proposición (A.9.) en los incisos (ii) y (iii), tenemos el conjunto $P_2(3)$ (definido como el conjunto de las particiones de [3] en $\frac{(3-1)}{2}$ pares y un singulete):

$$P_2(3) = \left\{ \left\{ \{1, 2\}, \{3\} \right\}, \left\{ \{1\}, \{2, 3\} \right\}, \left\{ \{1, 3\}, \{2\} \right\} \right\}$$

Para dar el ejemplo de identificación entre $A \in \mathcal{I}$ y $\pi \in P_2(3)$, usando la notación $c(\pi)$ para el número de cruces, véase la siguiente figura :

Ejemplo 2.14. En \mathbb{R}^4 :

Consideramos el grupo de las permutaciones \mathcal{S}_4 , actuando sobre los vectores canónicos de \mathbb{R}^4 . Entonces, según el apéndice A se tiene que el sistema positivo está dado por

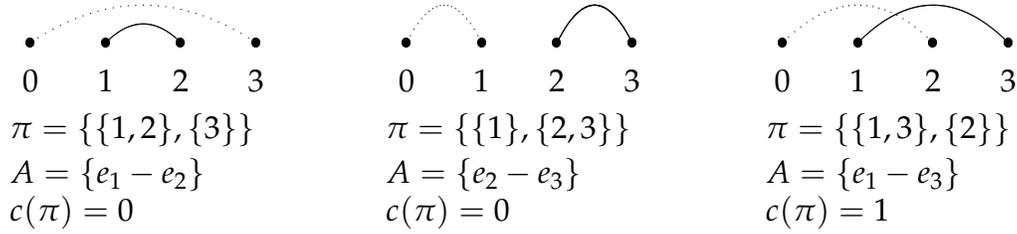


Figura 2.7: Particiones pares y sus signos para A_2 .

$\Pi = \{e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_2 - e_4, e_3 - e_4\}$ con su respectivo sistema simple $\Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$ y un conjunto consistente y ortogonal es $I = \{e_1 - e_2, e_3 - e_4\}$. Siguiendo la misma notación que en el ejemplo anterior, tenemos que

$$\mathbf{W} = \left\{ \sigma_{1234}^{1234}, \sigma_{1324}^{1234}, \sigma_{1243}^{1234}, \sigma_{1342}^{1234}, \sigma_{1423}^{1234}, \sigma_{1432}^{1234}, \sigma_{2134}^{1234}, \sigma_{2143}^{1234}, \sigma_{2314}^{1234}, \sigma_{2413}^{1234}, \sigma_{2431}^{1234}, \sigma_{2341}^{1234}, \right. \\ \left. \sigma_{3214}^{1234}, \sigma_{3241}^{1234}, \sigma_{3142}^{1234}, \sigma_{3124}^{1234}, \sigma_{3412}^{1234}, \sigma_{3421}^{1234}, \sigma_{4312}^{1234}, \sigma_{4321}^{1234}, \sigma_{4132}^{1234}, \sigma_{4123}^{1234}, \sigma_{4231}^{1234}, \sigma_{4213}^{1234} \right\}.$$

Para hallar los conjuntos \mathbf{W}^I e \mathcal{I} , seguimos sus respectivas definiciones, obteniéndose:

$$\mathbf{W}^I = \left\{ \sigma_{1234}^{1234}, \sigma_{1324}^{1234}, \sigma_{1423}^{1234}, \sigma_{2314}^{1234}, \sigma_{2413}^{1234}, \sigma_{3412}^{1234} \right\}$$

e

$$\mathcal{I} = \left\{ \{e_1 - e_2, e_3 - e_4\}, \{e_1 - e_3, e_2 - e_4\}, \{e_1 - e_4, e_2 - e_3\} \right\}.$$

Ahora, tenemos el conjunto $P_2(4)$, definido como el conjunto de las particiones de $[4]$ en $\binom{4}{2}$ pares, es decir:

$$P_2(4) = \left\{ \left\{ \{1, 2\}, \{3, 4\} \right\}, \left\{ \{1, 3\}, \{2, 4\} \right\}, \left\{ \{1, 4\}, \{2, 3\} \right\} \right\}$$

Para dar el ejemplo de identificación entre $A \in \mathcal{I}$ y $\pi \in P_2(4)$, usando la notación $c(\pi)$ para el número de cruces (cuya paridad nos brinda el signo de cada elemento en A), véase la siguiente figura :

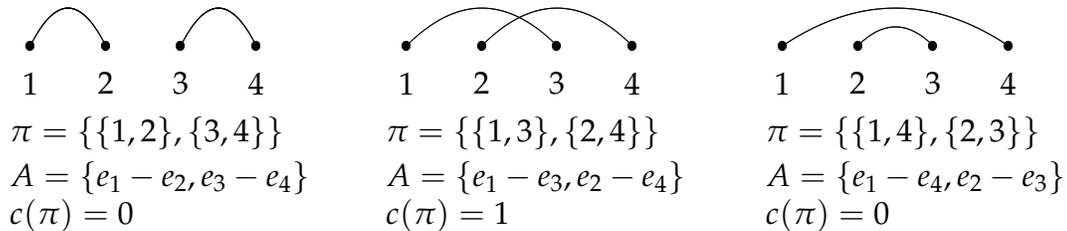


Figura 2.8: Particiones pares y sus signos para A_3 .

Se nota entonces la identificación entre ambos conjuntos. Cuando estemos estudiando el problema de salida desde una región asociada al grupo de las permutaciones, esta identificación será muy útil .

2.2.2. Relación con el problema de salida

Sea $I \subset \Pi$ consistente, definimos ε_A para $A \in \mathcal{I}$ como antes. Sea $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_t, t \geq 0)$ un movimiento Browniano en el espacio vectorial \mathbf{V} con \mathbf{P}_x la ley de \mathbf{B} comenzando en $x \in C$, con C dado en la definición (2.8).

Definición 2.15. (a) Para $\alpha \in \Pi$, se define $T_\alpha = \inf\{t \geq 0 : \langle \alpha, \mathbf{B}_t \rangle = 0\}$.

(b) Para $A \subset \Pi$, se define $T_A = \min_{\alpha \in A} T_\alpha$.

(c) $T = T_\Delta = \inf\{t \geq 0 : \mathbf{B}_t \notin C\}$. (T es el primer momento en que \mathbf{B} se escapa de C).

Denotamos por $p_t(x, y)$ la densidad de transición de \mathbf{B} (respectivamente, $p_t^*(x, y)$ de \mathbf{B} comenzado en C y aniquilado en el tiempo T). La fórmula análoga a (2.9) en este enfoque es:

$$p_t^*(x, y) = \sum_{w \in \mathbf{W}} \varepsilon(w) p_t(x, wy), \quad (2.11)$$

la cual puede ser integrada para obtener

$$\mathbf{P}_x(T > t) = \sum_{w \in \mathbf{W}} \varepsilon(w) \mathbf{P}_x(\mathbf{B}_t \in wC). \quad (2.12)$$

Como se señaló al comienzo de este capítulo, esta fórmula típicamente envuelve integrales multi-dimensionales complicadas, por tal motivo resulta muy útil la siguiente expresión alternativa, que es el principal resultado del artículo de *Dourmec y O'Connell, (2005)*:

Teorema 2.16.

$$\mathbf{P}_x(T > t) = \sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A \mathbf{P}_x(T_A > t) \quad (2.13)$$

Demostración: El objetivo es probar que $u(x, t) = \sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A \mathbf{P}_x(T_A > t)$ es solución del problema :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \begin{cases} u(x, 0) = 1 & \text{si } x \in C \\ u(x, t) = 0 & \text{si } x \in \partial C \end{cases} \quad (2.14)$$

Se sugiere revisar la sección (1.1.5) para justificar este enfoque.

Supongamos que $x \in C$.

Afirmación: $\mathbf{P}_x(T_A > 0) = 1, \forall A \in \mathcal{I}$.

En efecto, recuérdese que C es un conjunto abierto cuyas barreras son hiperplanos. Ahora, por la definición de T_A y su relación con C , es válido considerar un n -cubo L ,

con lados iguales a l centrado en x , y l lo suficientemente pequeño tal que $L \subset C$.

Si T_L es el primer momento de salida de \mathbf{B} desde L , entonces

$$T_L < T_A, \forall A \in \mathcal{I}.$$

Por lo tanto,

$$\{\omega : T_L > 0\} \subset \{\omega : T_A > 0\} \Rightarrow \mathbf{P}_x(T_L > 0) \leq \mathbf{P}_x(T_A > 0) \quad (2.15)$$

Ahora bien, como \mathbf{B} es invariante por traslación podemos considerar $\mathbf{P}_{\tilde{x}}(\tilde{T}_L > t)$; donde \tilde{x} , es el cero de \mathbb{R}^n y \tilde{T}_L esta centrado en 0.

Así,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\tilde{x}}(\tilde{T}_L > t) &= \mathbf{P}_{\tilde{x}}(\max_{i \in \{1, \dots, n\}} M_i(t) < l) \quad \text{donde } M_i(t) = \sup_{s \leq t} \mathbf{B}_i^0(s) \\ &= \{\mathbf{P}_{\tilde{x}}(M_1(t) < l)\}^n \\ &= \{\mathbf{P}_{\tilde{x}}(\sup_{s \leq t} \mathbf{B}_1^0(s) < l)\}^n \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\tilde{x}}\{\sup_{s \leq t} \mathbf{B}_1^0(s) < l\} &= 1 - \mathbf{P}_{\tilde{x}}\{\sup_{s \leq t} \mathbf{B}_1^0(s) \geq l\} \\ &= 1 - 2\mathbf{P}_{\tilde{x}}(\mathbf{B}_1^0(t) \geq l) \\ &= 1 - 2 \int_l^\infty \frac{\exp^{-\frac{z^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dz \\ &= 1 - 2 \int_l^\infty \frac{\exp^{-\frac{z^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \frac{z}{z} dz \end{aligned}$$

Usando integración por partes en la última integral, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_l^\infty \frac{\exp^{-\frac{z^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \frac{z}{z} dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(t \frac{\exp^{-\frac{l^2}{2t}}}{l} - t \int_l^\infty \frac{\exp^{-\frac{z^2}{2t}}}{z^2} dz \right) \\ &\leq \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\exp^{-\frac{l^2}{2t}}}{l} \right) \longrightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbf{P}_{\tilde{x}}(\sup_{s \leq t} \mathbf{B}_1^0(s) < l) \rightarrow 1 \text{ cuando } t \rightarrow 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{P}_{\tilde{x}}(\sup_{s \leq t} \mathbf{B}_1^0(s) < l) = 1$$

Así,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{P}_{\tilde{x}}(\tilde{T}_L > t) = 1.$$

Así, de (2.15), se tiene:

$$\mathbf{P}_x(T_A > 0) = 1, \forall A \in \mathcal{I}$$

Luego, usando la proposición (A.7.)(a) del apéndice:

$$u(x, 0) = \sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A \mathbf{P}_x(T_A > 0) = \sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A = 1$$

Supongamos ahora que $x \in \partial C$. Fijamos $\alpha \in \Delta$ tal que $(\alpha, x) = 0$. Sea $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(A) = \mathbf{P}_x(T_A > t)$.

Si $\alpha \in A$ entonces, por hipótesis y la definición de T_A tenemos que, $f(A) = 0$.
Si $\alpha \notin A$ entonces consideramos:

$$\begin{aligned} f(s_\alpha A) &= \mathbf{P}_x(T_{s_\alpha A} > t) \\ &= 1 - \mathbf{P}_x(T_{s_\alpha A} \leq t) \\ &= 1 - \mathbf{P}_{s_\alpha x}(T_A \leq t) \quad (*) \\ &= \mathbf{P}_{s_\alpha x}(T_A > t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(s_\alpha A) &= \mathbf{P}_x(T_A > t) \quad (**) \\ &= f(A) \end{aligned}$$

(en $(*)$ usamos la invariancia de la Ley de \mathbf{B} bajo s_α y en $(**)$ se usa que $s_\alpha x = x$).
Luego, por la proposición (A.7.)(b) del apéndice:

$$u(x, t) = \sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A \mathbf{P}_x(T_A > t) = \sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A f(A) = 0$$

Como $\mathbf{P}_x(T_A > t)$ es solución de la ecuación del calor (Observación (1.52)), por la linealidad del operador se tiene que:

$$u(x, t) = \sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A \mathbf{P}_x(T_A > t),$$

es solución del problema (2.14). Luego por la proposición (1.51), se tiene:

$$\mathbf{P}_x(T > t) = \sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A \mathbf{P}_x(T_A > t).$$

□

Veamos a continuación, un ejemplo de aplicación de (2.13) en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 2.17. ($\mathbf{W} = I_2(3)$).

Consideremos el grupo dihédrico $I_2(3)$ y el movimiento Browniano plano $\mathbf{B}_t = (\mathbf{B}_t^1, \mathbf{B}_t^2; t \geq 0)$ comenzando en $z \in C$. Según el ejemplo [2.12(1.)] se tiene que: $I = \{\alpha_1\}$, $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ y $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_3\}$, la región angular C , la describimos gráficamente a continuación:

(Nótese que la región de escape coincide con la región angular del ejemplo (2.7))

Sea \mathbf{P}_z la ley de \mathbf{B}_t comenzando en $z = \rho e^{i\theta} \in C$. Por la Definición (2.15(a)), T_{α_i} es la primera vez que \mathbf{B}_t toca la frontera de C ortogonal a α_i y $T = \inf\{t \geq 0 : \mathbf{B}_t \notin C\}$ es el primer momento en que \mathbf{B}_t se escapa desde C . Así, la fórmula (2.13), se traduce en:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_z(T > t) &= \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{\{\alpha_i\}} \mathbf{P}_z(T_{\alpha_i} > t) \\ &= \mathbf{P}_z(T_{\alpha_1} > t) - \mathbf{P}_z(T_{\alpha_2} > t) + \mathbf{P}_z(T_{\alpha_3} > t) \end{aligned}$$

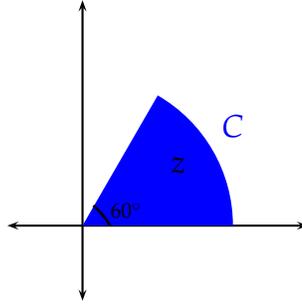


Figura 2.9: Región fundamental asociada a $I_2(3)$.

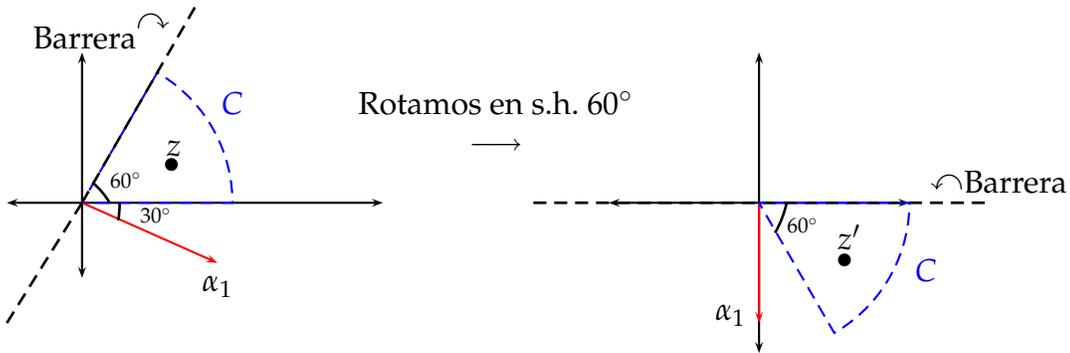


Figura 2.10: Barrera angular para el movimiento browniano con respecto a α_1 .

Supongamos $z = (\rho \cos \theta, \rho \sen \theta) = (x_0, y_0)$ con $0 < \theta < 60^\circ$. Queremos hallar $\mathbf{P}_z(T_{\alpha_1} > t)$, vamos a rotar la cámara fundamental de manera que el estudio se realice en una dimensión. Así:

Ahora, $z' = (\rho \cos \theta', \rho \sen \theta') = (x'_0, y'_0)$ donde $\theta' = \theta - \frac{1 \cdot \pi}{3}$.

Sea $T' = \inf\{t \geq 0 : \mathbf{B}_t \in \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}\}$. Debido a que el movimiento Browniano es invariante por rotación, se tiene:

$$\mathbf{P}_z(T_{\alpha_1} > t) = \mathbf{P}_{z'}(T' > t), \tag{2.16}$$

Más aún, si definimos

$$T_0 := \inf\{t > 0 : \mathbf{B}^2(t) = 0\},$$

entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{z'}(T' > t) &= \mathbf{P}_{y'_0}(T_0 > t) \\ &= 1 - \mathbf{P}_{y'_0}(T_0 \leq t) \\ &= 1 - \mathbf{P}_0(T_{-y'_0} \leq t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{z'}(T' > t) &= 1 - 2 \int_{-y'_0}^{\infty} \frac{e^{-s^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} ds \quad (\text{Usando el Principio de Reflexión}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} ds - 2 \int_{-y'_0}^{\infty} \frac{e^{-s^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} ds \\
&= \int_{-y'_0}^{y'_0} \frac{e^{-s^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} ds \quad (\text{Por la simetría de la densidad Gaussiana}) \\
&= 2 \int_0^{-y'_0} \frac{e^{-s^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} ds
\end{aligned}$$

Ahora, hacemos el cambio de variable $u = s/\sqrt{t}$, de aquí:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{z'}(T' > t) &= 2 \int_0^{-y'_0/\sqrt{t}} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{t} du \\
&= \frac{2\sqrt{2\pi}}{2\pi} \int_0^{-y'_0/\sqrt{t}} e^{-u^2/2} du \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-y'_0/\sqrt{t}} e^{-u^2/2} du \\
&= \gamma(-y'_0/\sqrt{t}), \quad \text{donde } \gamma(a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a e^{-y^2/2} dy \\
&= \gamma\left(\frac{-\rho \operatorname{sen} \theta'}{\sqrt{t}}\right) \\
&= \gamma\left(\frac{-\rho \operatorname{sen}(\theta - 1 \cdot \frac{\pi}{3})}{\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}$$

Luego, usando (2.16) tenemos,

$$\mathbf{P}_z(T_{\alpha_1} > t) = \gamma\left(\frac{-\rho \operatorname{sen}(\theta - 1 \cdot \pi/3)}{\sqrt{t}}\right).$$

Ahora, hallamos $\mathbf{P}_z(T_{\alpha_2} > t)$. Llevamos a cabo un estudio similar al anterior, sólo que ahora rotamos $\frac{2\pi}{3}$ la región angular. Así,

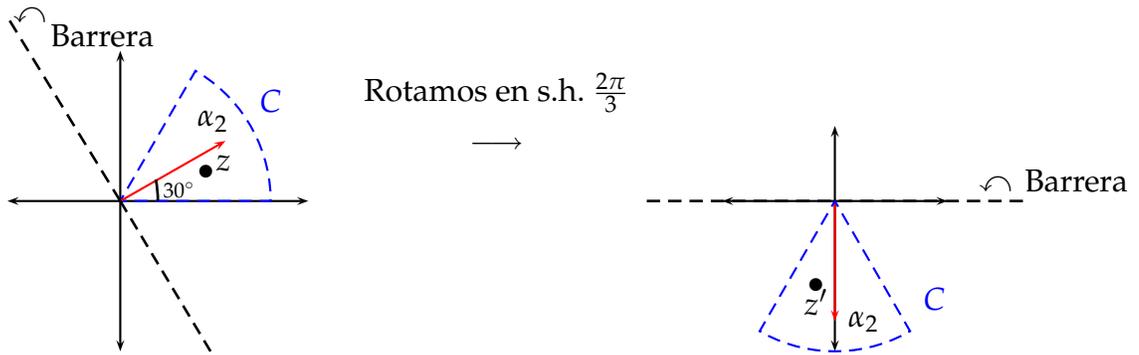


Figura 2.11: Barrera angular para el movimiento browniano con respecto a α_2 .

En este caso, $z' = (\rho \cos \theta', \rho \operatorname{sen} \theta') = (x'_0, y'_0)$ donde $\theta' = \theta - \frac{2\pi}{3}$. Tal y como procedimos para $\mathbf{P}_z(T_{\alpha_1} > t)$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{z'}(T' > t) &= \gamma(-y'_0/\sqrt{t}) \\
&= \gamma\left(\frac{-\rho \operatorname{sen} \theta'}{\sqrt{t}}\right) \\
&= \gamma\left(\frac{-\rho \operatorname{sen}(\theta - \frac{2\pi}{3})}{\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{P}_z(T_{\alpha_2} > t) = \gamma\left(\frac{-\rho \operatorname{sen}(\theta - \frac{2\pi}{3})}{\sqrt{t}}\right).$$

Para $\mathbf{P}_z(T_{\alpha_3} > t)$ rotamos π radianes la región angular, quedando $z' = (\rho \cos \theta', \rho \operatorname{sen} \theta')$ donde $\theta' = \theta - \pi$.

Gráficamente:

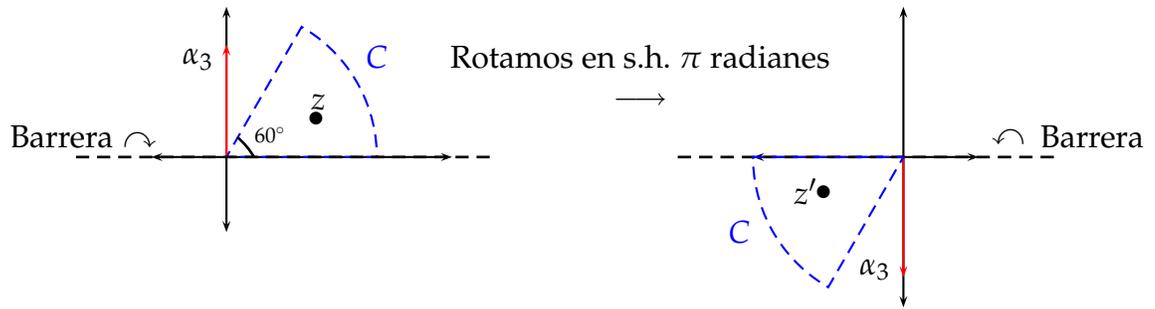


Figura 2.12: Barrera angular para el movimiento Browniano con respecto a α_3 .

Siguiendo el mismo procedimiento que en los casos anteriores, se tiene:

$$\mathbf{P}_z(T_{\alpha_3} > t) = \gamma\left(\frac{-\rho \operatorname{sen}(\theta - \pi)}{\sqrt{t}}\right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_z(T > t) &= 1 \cdot \gamma\left(\frac{-\rho \operatorname{sen}(\theta - \pi/3)}{\sqrt{t}}\right) - 1 \cdot \gamma\left(\frac{-\rho \operatorname{sen}(\theta - 2\pi/3)}{\sqrt{t}}\right) + 1 \cdot \gamma\left(\frac{-\rho \operatorname{sen}(\theta - \pi)}{\sqrt{t}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} \gamma\left(\frac{-\rho \operatorname{sen}(\theta - i\pi/3)}{\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}$$

y por consiguiente,

$$\mathbf{P}_z(T > t) = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} \gamma\left(\frac{\rho \operatorname{sen}(i\pi/3 - \theta)}{\sqrt{t}}\right). \quad (2.17)$$

Observación 2.18. Si I es ortogonal, la suma en (2.13) es sobre subconjuntos ortogonales del sistema positivo Π , entonces como \mathbf{B}_t tiene componentes independientes en direcciones ortogonales, (2.13) se convierte en:

$$\mathbf{P}_x(T > t) = \sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A \prod_{\alpha \in A} \gamma(\hat{\alpha}(x)/\sqrt{t}), \quad (2.18)$$

donde $\hat{\alpha}(x) = (\alpha, x)/|\alpha|$ y $\gamma(a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a e^{-y^2/2} dy$, que es justamente lo obtenido en el ejemplo anterior.

Ahora, si la región es dada por $C = \{x \in \mathbf{V} : x_1 > x_2 > \cdots > x_k\}$ donde $\mathbf{V} = \mathbb{R}^k$ o $\{x \in \mathbb{R}^k : x_1 + \cdots + x_k = 0\}$, asociada al grupo de las permutaciones \mathcal{S}_n , con T el primer momento de colisión entre cualesquiera dos coordenadas de \mathbf{B} , entonces usando la proposición (A.9.) del apéndice y la notación $\{i < j\} \in \pi$ para querer decir que $i, j \in \pi$ y $i < j$, véase [5]; (2.18) se convierte en:

$$\mathbf{P}_x(T > t) = \sum_{\pi \in P_2(k)} (-1)^{c(\pi)} \prod_{\{i < j\} \in \pi} p_{ij}, \quad (2.19)$$

donde $p_{ij} = \mathbf{P}_x(T_{e_i - e_j} > t) = \gamma\left(\frac{x_i - x_j}{\sqrt{2t}}\right)$, y $P_2(k)$ es el conjunto de las particiones de $[k]$ en $k/2$ pares si k es par y en $(k-1)/2$ pares y un singulete si k es impar. Ahora bien, es posible escribir (2.19) como un pffafiano que, son raíces cuadradas de determinantes, véase [5], así:

$$\mathbf{P}_x(T > t) = \begin{cases} \text{Pf}(p_{ij})_{i,j \in [n]} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} \text{Pf}(p_{ij})_{i,j \in [n] \setminus \{l\}} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (2.20)$$

con la convención de que $p_{ji} = -p_{ij}$ para $i \leq j$.

Veamos ahora un par de ejemplos con el grupo de las permutaciones, en particular con el subgrupo finito tipo A_{k-1} , en \mathbb{R}^3 y en \mathbb{R}^4 .

Ejemplo 2.19. Consideremos el grupo de las permutaciones \mathcal{S}_3 actuando sobre los vectores canónicos de \mathbb{R}^3 y el subgrupo tipo A_{n-1} , ($n = 3$).

Sea $\mathbf{B}_t = (\mathbf{B}_t^1, \mathbf{B}_t^2, \mathbf{B}_t^3; t \geq 0) \subset \mathbb{R}^3$. Ahora, recordemos que T se define como el tiempo de escape desde C , y resulta ser en este caso el primer instante de colisión entre cualesquiera dos componentes de \mathbf{B}_t . Según el ejemplo (2.13) se tiene que $I = \{e_1 - e_2\}$, $\Pi = \{e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_2 - e_3\}$ y $\Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$.

Usamos la expresión dada en la ecuación (2.19), junto al lema (A.8.) y la proposición (A.9.) para recurrir a la correspondencia entre $A \in \mathcal{I}$ y $\pi \in P_2(3)$ y así escribir, con $k = 3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x(T > t) &= \sum_{\pi \in P_2(3)} (-1)^{c(\pi)} \prod_{\{i < j\} \in \pi} p_{ij} \\ &= (-1)^0 \prod_{\{i < j\} \in \{\{1,2\}, \{3\}\}} p_{ij} + (-1)^0 \prod_{\{i < j\} \in \{\{1\}, \{2,3\}\}} p_{ij} + (-1)^1 \prod_{\{i < j\} \in \{\{1,3\}, \{2\}\}} p_{ij} \\ &= p_{12} + p_{23} - p_{13} \end{aligned}$$

Si ahora usamos la expresión (2.20):

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_x(T > t) &= \sum_{l=1}^3 (-1)^{l+1} Pf(p_{ij})_{i,j \in [3] \setminus l} \\
&= (-1)^2 Pf(p_{ij})_{i,j \in [3] \setminus 1} + (-1)^3 Pf(p_{ij})_{i,j \in [3] \setminus 2} + (-1)^4 Pf(p_{ij})_{i,j \in [3] \setminus 3} \\
&= Pf \begin{pmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} - Pf \begin{pmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{pmatrix} + Pf \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{p_{23}^2} - \sqrt{p_{13}^2} + \sqrt{p_{12}^2} \\
&= p_{23} - p_{13} + p_{12}
\end{aligned}$$

Observar que se puede escribir como un pffafiano sin pasar por integrales multidimensionales, ni fueron necesarios los cálculos hechos en el ejemplo (2.13).

Ejemplo 2.20. En este ejemplo, consideramos el grupo de las permutaciones S_4 , actuando sobre los vectores canónicos de \mathbb{R}^4 . Entonces, se tiene el subgrupo tipo A_3 con los conjuntos :

$$I = \{e_1 - e_2, e_3 - e_4\},$$

$$\Pi = \{e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_2 - e_3, e_2 - e_4, e_1 - e_4, e_3 - e_4\}, \Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4\}.$$

(obtenidos según lo descrito en el apéndice A).

Según (2.20) para $n_b = 4$, se tiene:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{P}_x(T > t)]^2 &= [Pf(p_{ij})_{i,j \in [4]}]^2 \\
&= Pf^2 \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ -p_{12} & 0 & p_{23} & p_{24} \\ -p_{13} & -p_{23} & 0 & p_{34} \\ -p_{14} & -p_{24} & -p_{34} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ -p_{12} & 0 & p_{23} & p_{24} \\ -p_{13} & -p_{23} & 0 & p_{34} \\ -p_{14} & -p_{24} & -p_{34} & 0 \end{pmatrix} \\
&= (p_{12}p_{34})^2 + p_{12}p_{34}p_{14}p_{23} + p_{12}p_{34}p_{14}p_{23} + (p_{14}p_{23})^2 \\
&\quad - 2p_{12}p_{34}p_{13}p_{24} - 2p_{14}p_{23}p_{13}p_{24} + (p_{13}p_{24})^2 \\
&= (p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23})^2 - 2(p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23})p_{13}p_{24} + (p_{13}p_{24})^2 \\
&= [(p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23}) - p_{13}p_{24}]^2 \\
\Rightarrow \mathbf{P}_x(T > t) &= p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23} - p_{13}p_{24}
\end{aligned}$$

Se nota entonces como el cálculo del primer instante de colisión entre cualesquieras coordenadas del movimiento browniano en \mathbb{R}^4 , se reduce a calcular el determinante de una matriz cuadrada 4×4 , cuyas entradas son $p_{ij}, i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

2.3. Comparación de las expresiones de la distribución del tiempo de escape Browniano en \mathbb{R}^2

Debido a que el trabajo realizado en [3] y en [5] resuelve el problema de escape del movimiento Browniano desde una región angular en \mathbb{R}^2 , vamos a plantear el siguiente teorema, que resulta de igualar las expresiones (2.5) y (2.13):

Teorema 2.21. Sea \mathbf{B}_t un movimiento Browniano en \mathbb{R}^2 y sea \mathbf{P}_z la ley de \mathbf{B}_t comenzando en $z = \rho e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$, donde $0 < \alpha < \beta$ y \mathbb{C} está asociada a un grupo de simetrías de un polígono regular y T_A como en la definición (2.15). Entonces,

$$\sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A \mathbf{P}_z(T_A > t) = \frac{\rho e^{-(\rho^2/4t)}}{(2\pi t)^{1/2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\text{sen}[(2k+1)\pi\alpha/\beta]}{2k+1} [I_{|2k+1|\pi/2\beta-1/2}(\rho^2/4t) + I_{|2k+1|\pi/2\beta+1/2}(\rho^2/4t)]$$

En particular,

En el ejemplo (2.7), se fijaron las siguientes condiciones:

$T_{(0,\beta)} = \inf\{t > 0 : \theta_t \notin (0, \beta)\}$, con $\beta = (\pi/3)$ y $z = \rho e^{i\alpha} = \rho e^{i\frac{\beta}{2}}$, se obtuvo:

$$\mathbf{P}_z(T_{(0,\beta)} > t) = \frac{\rho e^{-(\rho^2/4t)}}{\sqrt{2\pi t}} 2 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \left[i^{-(3k+1)} J_{3k+1}\left(i\frac{\rho^2}{4t}\right) + i^{-(3k+2)} J_{3k+2}\left(i\frac{\rho^2}{4t}\right) \right],$$

Mientras en el ejemplo (2.18), con $T = \inf\{t \geq 0 : \mathbf{B}_t \notin \mathbb{C}\}$ y $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$, obtuvimos:

$$\mathbf{P}_z(T > t) = \sum_{j=1}^3 (-1)^{j-1} \gamma\left(\frac{-r \text{sen}(\theta - j\pi/3)}{\sqrt{t}}\right),$$

Debemos notar que las regiones de escape en los dos ejemplos son iguales, ambas son secciones angulares que van desde $\alpha = 0$ hasta $\alpha = 60^\circ = \beta$.

Ahora, con ánimo de igualar todas las condiciones en ambos casos, en la expresión anterior se escoge $\theta = \pi/6$, y reescribimos:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_z(T > t) &= \gamma\left(\frac{-\rho \text{sen}(\pi/6 - \pi/3)}{\sqrt{t}}\right) - \gamma\left(\frac{-\rho \text{sen}(\pi/6 - 2\pi/3)}{\sqrt{t}}\right) + \gamma\left(\frac{-\rho \text{sen}(\pi/6 - \pi)}{\sqrt{t}}\right) \\ &= \gamma\left(-\frac{\rho}{\sqrt{t}}\left(\frac{-1}{2}\right)\right) - \gamma\left(-\frac{\rho}{\sqrt{t}}(-1)\right) + \gamma\left(-\frac{\rho}{\sqrt{t}}\left(\frac{-1}{2}\right)\right) \\ &= 2\gamma\left(\frac{\rho}{2\sqrt{t}}\right) - \gamma\left(\frac{\rho}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

Así, $T_{(0,\beta)}$ y T representan la misma variable.

Si hacemos $y = i\frac{\rho^2}{4t} \Rightarrow \rho = \frac{2}{\sqrt{i}}\sqrt{t}\sqrt{y}$, y definimos:

$$S(y) := 2 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \left[i^{-(3k+1)} J_{3k+1}(y) + i^{-(3k+2)} J_{3k+2}(y) \right] \quad (2.21)$$

entonces, la igualdad entre ambas expresiones, $\mathbf{P}_z(T_{(0,\beta)} > t)$ y $\mathbf{P}_z(T > t)$ proporciona una expansión en funciones de Bessel para la función de probabilidad, veamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_z(T_{(0,\beta)} > t) = \mathbf{P}_z(T > t) &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{t}\sqrt{y}e^{-\left(\frac{4ty}{i}\right)}}{\sqrt{i}\sqrt{2\pi t}}S(y) = 2\gamma\left(\sqrt{\frac{y}{i}}\right) - \gamma\left(2\sqrt{\frac{y}{i}}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{y}e^{-(y/i)}}{\sqrt{i}\sqrt{2\pi}}S(y) = 2\gamma\left(\sqrt{\frac{y}{i}}\right) - \gamma\left(2\sqrt{\frac{y}{i}}\right) \\ &\Leftrightarrow S(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}e^{(y/i)}\sqrt{i}\left[\frac{2\gamma\left(\sqrt{\frac{y}{i}}\right) - \gamma\left(2\sqrt{\frac{y}{i}}\right)}{\sqrt{y}}\right] \quad (2.22) \end{aligned}$$

Ahora, debemos hallar la expansión en coeficientes de Bessel de (2.22) y notaremos que es exactamente la dada en (2.21).

Específicamente, vamos de hallar la expansión de Neumann de S , pero antes tenemos que demostrar que, S es una función analítica en $|y| \leq R$. En efecto,

En primer lugar, hallamos la serie de representación de γ . Recordemos su definición:

$$\begin{aligned} \gamma(a) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-x^2/2} dx \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $u = x/\sqrt{2} \Rightarrow dx = \sqrt{2}du$, así :

$$\begin{aligned} \gamma(a) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a/\sqrt{2}} e^{-u^2} du \\ &= \Phi(a/\sqrt{2}) \end{aligned}$$

donde Φ es conocida como la Integral de Probabilidad, definida por:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Ahora bien, la serie de Taylor de Φ está dada en Gradshteyn (8.253.(1)) :

$$\Phi(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} w^{2k-1}}{(2k-1)(k-1)!}$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{i} \left[\frac{2\gamma\left(\sqrt{\frac{y}{i}}\right) - \gamma\left(2\sqrt{\frac{y}{i}}\right)}{\sqrt{y}} \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) y^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}}$$

Así, tenemos que :

$$S(0) = \frac{\sqrt{\pi}e^0}{\sqrt{2}} \cdot 0 = 0 \Rightarrow S \text{ es analítica en } 0 \text{ y en } |y| \leq R .$$

Ahora, podemos aplicar el Teorema de la expansión de Neumann a S :

$$S(y) = J_0(y)S(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(y)}{\pi i} \int_C O_n(t)S(t)dt ,$$

válida en $|y| < R$.

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(y)}{\pi i} \int_C O_n(t)S(t)dt = 2 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \left[i^{-(3k+1)} J_{3k+1}(y) + i^{-(3k+2)} J_{3k+2}(y) \right] . \quad (2.23)$$

Por lo tanto, se tiene un método probabilístico para hallar expansiones en coeficientes de Bessel de algunas combinaciones lineales de la integral de Probabilidad Φ . En este trabajo, no fué posible dar una demostración analítica de (2.23), sin embargo, se muestra la igualdad para los primeros nueve (09) términos de las series (usando Maple se verificó la igualdad para los primeros cien (100) términos):

Nótese que los términos dados por $n = 3k, k = 1, 2, 3, \dots$ de la serie del lado izquierdo deben anularse.

Vamos a mostrar los primeros nueve términos de esta suma, los cuales corresponden con los primeros tres términos de la suma del lado derecho.

Sustituiremos la función exponencial por su expansión. Y usando (1.31) y (1.32) se tiene,

$$n = 1 : O_1(t) = \frac{1}{t^2} ; \quad n = 2 : O_2(t) = \frac{4}{t^3} + \frac{1}{t} ; \quad n = 3 : O_3(t) = \frac{24}{t^4} + \frac{3}{t^2} ,$$

$$n = 4 : O_4(t) = \frac{192}{t^5} + \frac{16}{t^3} + \frac{1}{t} ; \quad n = 5 : O_5(t) = \frac{1920}{t^6} + \frac{120}{t^4} + \frac{5}{2} ,$$

$$n = 6 : O_6(t) = \frac{23040}{t^7} + \frac{1152}{t^5} + \frac{36}{t^3} + \frac{1}{t} ; \quad n = 7 : O_7(t) = \frac{322560}{t^8} + \frac{13440}{t^6} + \frac{336}{t^4} + \frac{7}{t^2}$$

$$n = 8 : O_8(t) = \frac{5160960}{t^9} + \frac{184320}{t^7} + \frac{3840}{t^5} + \frac{64}{t^3} + \frac{1}{t}$$

$$n = 9 : O_9(t) = \frac{92897280}{t^{10}} + \frac{2903040}{t^8} + \frac{51840}{t^6} + \frac{720}{t^4} + \frac{9}{t^2}$$

Calculemos el coeficiente de $J_1(y)$:

$$\int_C O_1(t)S(t)dt = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_C \frac{1}{t^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right] dt$$

Razonamos así:

Cuando realizamos el producto de estas series sólo sobrevive la integral cuyo integrando es una constante, no nula, por un polinomio en $1/t$ de grado igual a 1, es decir, cuando $n = 0$ y $k = 2$, mientras en cualquier otro caso la integral se anula, así :

1. Cuando $n = 0$ y $k = 1$, el producto de estos primeros dos términos es una constante nula por lo cual

$$\int_C \frac{1}{t^2} \cdot 0 dt = 0 .$$

2. Para $n = 0$ y $k \geq 3$, el producto de los términos de las series con el término $(1/t^2)$ genera polinomios en t de grado mayor o igual a 0; luego, usando el Teorema de Cauchy :

$$\int_C \frac{1}{t^2} \left[\frac{(-it)^0}{0!} \sum_{k \geq 3} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right] dt = 0.$$

3. Para $n = 1$ y $k = 1$, el producto de estos dos términos de nuevo es una constante nula, así :

$$\int_C \frac{1}{t} \cdot 0 dt = 0.$$

4. Para $n \geq 1$ y $k \geq 2$, el producto de los términos de las series con el término $(1/t^2)$ genera polinomios en t de grado mayor o igual a 0; luego, usando el Teorema de Cauchy :

$$\int_C \frac{1}{t^2} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right] dt = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_C O_1(t)S(t)dt &= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_C \frac{1}{t^2} \left[\frac{(-it)^0}{0!} \frac{(-1)^{2+1} (2 - 2^{2 \cdot 2-1}) t^{2-1}}{(2 \cdot 2 - 1)(2-1)! 2^{(2 \cdot 2-1)/2} i^{2-1}} \right] dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_C \frac{1}{t} \left[-\left(\frac{-6}{6\sqrt{2}i}\right) \right] dt \\ &= \frac{1}{i} \int_C \frac{1}{t} dt = \frac{1}{i} 2\pi i = 2\pi \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_C O_1(t)S(t)dt = 2\pi.$$

Ahora, calculemos el coeficiente de $J_2(y)$. Tenemos que,

$$\begin{aligned} \int_C O_2(t)S(t)dt &= \overbrace{\int_C \frac{4}{t^3} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right] dt}^{(I1)} \\ &\quad + \overbrace{\int_C \frac{1}{t} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right] dt}^{(I2)} \end{aligned}$$

Seguimos el razonamiento dado arriba .

Para (I1): Estamos interesados en los términos de las series cuyo producto con el polinomio $(1/t)^3$ dá como resultado el integrando $(1/t)$, éstos términos se obtienen cuando $n = 0, k = 3$; $n = 1, k = 2$; $n = 2, k = 1$. Cualquier otra posibilidad, genera integrales

nulas usando el Teorema de Cauchy. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 (I1) &= \frac{8}{\sqrt{2}} \left\{ \int_C \frac{1}{t^3} \left[\frac{(-it)^0}{0!} \cdot \frac{(-1)^{3+1}(2-2^{2 \cdot 3-1}) t^{3-1}}{(2 \cdot 3-1)(3-1)! 2^{(2 \cdot 3-1)/2} i^{3-1}} \right. \right. \\
 &\quad + \frac{(-it)^1}{1!} \cdot \frac{(-1)^{2+1}(2-2^{2 \cdot 2-1}) t^{2-1}}{(2 \cdot 2-1)(2-1)! 2^{(2 \cdot 2-1)/2} i^{2-1}} \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(-it)^2}{2!} \cdot \frac{(-1)^{1+1}(2-2^{2 \cdot 1-1}) t^{1-1}}{(2 \cdot 1-1)(1-1)! 2^{(2 \cdot 1-1)/2} i^{1-1}} \right] dt \right\} \\
 &= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_C \frac{1}{t} \left[\frac{-30}{40\sqrt{2}(-1)} + \frac{(-6i)}{6\sqrt{2}i} + 0 \right] dt \\
 &= \frac{8}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{4} - 1 \right) \right] \int_C \frac{dt}{t} = 4 \left(-\frac{1}{4} \right) 2\pi i = -2\pi i
 \end{aligned}$$

Para (I2): En este caso, como ya se tiene el polinomio en $(1/t)$ de grado 1, sólo interesan los términos cuyo producto generen polinomios en t de grado 0 en el numerador, lo cual de reduce al caso en que $n = 0, k = 1$. Para todos los restantes valores posibles de n y k , las integrales se anulan por la misma razón que en las consideraciones anteriores. Pero ya vimos que cuando $n = 0$ y $k = 1$ se obtiene una constante nula, así :

$$(I2) = 0$$

Por lo tanto,

$$\int_C O_2(t)S(t)dt = -2\pi i + 0 = -2\pi i.$$

Ahora, calculemos el coeficiente de $J_3(y)$. Tenemos que,

$$\begin{aligned}
 \int_C O_3(t)S(t)dt &= \int_C \frac{24}{t^4} \overbrace{\left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}(2-2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right]}^{(I3)} dt \\
 &\quad + \int_C \frac{3}{t^2} \overbrace{\left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}(2-2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right]}^{(I4)} dt
 \end{aligned}$$

Para (I3): Sólo nos interesan los términos cuyo producto sean polinomios en t de grado cúbico en el numerador, es decir, cuando $n = 0, k = 4$; $n = 1, k = 3$; $n = 2, k = 2$ y $n = 3, k = 1$. Los términos restantes producen integrales nulas usando el Teorema de

Cauchy. Así,

$$\begin{aligned}
 (I3) &= \frac{48}{\sqrt{2}} \left\{ \int_C \frac{1}{t^4} \left[\frac{(-it)^0}{0!} \cdot \frac{(-1)^{4+1}(2-2^{2 \cdot 4-1}) t^{4-1}}{(2 \cdot 4-1)(4-1)! 2^{(2 \cdot 4-1)/2} i^{4-1}} \right. \right. \\
 &\quad + \frac{(-it)^1}{1!} \cdot \frac{(-1)^{3+1}(2-2^{2 \cdot 3-1}) t^{3-1}}{(2 \cdot 3-1)(3-1)! 2^{(2 \cdot 3-1)/2} i^{3-1}} \\
 &\quad + \frac{(-it)^2}{2!} \cdot \frac{(-1)^{2+1}(2-2^{2 \cdot 2-1}) t^{2-1}}{(2 \cdot 2-1)(2-1)! 2^{(2 \cdot 2-1)/2} i^{2-1}} \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(-it)^3}{3!} \cdot \frac{(-1)^{1+1}(2-2^{2 \cdot 1-1}) t^{1-1}}{(2 \cdot 1-1)(1-1)! 2^{(2 \cdot 1-1)/2} i^{1-1}} \right] dt \right\} \\
 &= \frac{48}{\sqrt{2}} \int_C \frac{1}{t} \left[\frac{-126}{336\sqrt{2}i} + \frac{(30)}{40\sqrt{2}i} - \frac{1}{2\sqrt{2}i} + 0 \right] dt \\
 (I3) &= \frac{48}{\sqrt{2}} \left[\frac{-126}{336\sqrt{2}i} + \frac{(30)}{40\sqrt{2}i} - \frac{1}{2\sqrt{2}i} + 0 \right] \int_C \frac{dt}{t} \\
 &= 48 \left[\frac{-126}{336} + \frac{(30)}{40} - \frac{1}{2} \right] \pi = 48 \left(-\frac{1}{8} \right) \pi = -6\pi
 \end{aligned}$$

Para (I4): Notamos que,

$$3 \int_C O_1(t)S(t)dt = (I4) \Rightarrow (I4) = 3 \cdot 2\pi = 6\pi$$

Por lo tanto,

$$\int_C O_3(t)S(t)dt = -6\pi + 6\pi = 0.$$

Ahora, calculemos el coeficiente de $J_4(y)$. Tenemos que,

$$\begin{aligned}
 \int_C O_4(t)S(t)dt &= \int_C \frac{192}{t^5} \overbrace{\left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}(2-2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right]}^{(I5)} dt \\
 &\quad + \int_C \frac{16}{t^3} \overbrace{\left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}(2-2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right]}^{(I6)} dt \\
 &\quad + \int_C \frac{1}{t} \overbrace{\left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}(2-2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right]}^{(I7)} dt
 \end{aligned}$$

Para (I5): Estamos interesados en los términos de las series cuyo producto genere polinomios en t de grado igual a 4 en el numerador, éstos son : $n = 0, k = 5$; $n = 1, k = 4$;

$n = 2, k = 3$ y $n = 3, k = 2$ y $n = 4, k = 1$. Así, se obtiene:

$$(I5) = \frac{22}{3}\pi i .$$

Para (I6) y (I7): Notamos que,

$$4 \cdot (I1) = (I6) \Rightarrow (I6) = 4 \cdot (-2\pi i) = -8\pi i ,$$

$$(I7) = (I2) = 0 ,$$

Por lo tanto,

$$\int_C O_4(t)S(t)dt = \frac{22}{3}\pi i + (-8\pi i) + 0 = -\frac{2}{3}\pi i .$$

Ahora, calculemos el coeficiente de $J_5(y)$:

$$\begin{aligned} \int_C O_5(t)S(t)dt &= \overbrace{\int_C \frac{1920}{t^6} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right] dt}^{(I8)} \\ &+ \overbrace{\int_C \frac{120}{t^4} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right] dt}^{(I9)} \\ &+ \overbrace{\int_C \frac{5}{t^2} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right] dt}^{(I10)} \end{aligned}$$

Para (I8) : Considerando los términos de las series cuyo producto generan polinomios en t de grado igual a 5, en el numerador, los cuales son $n = 0, k = 6$; $n = 1, k = 5$; $n = 2, k = 4$ y $n = 3, k = 3$; $n = 4, k = 2$ y $n = 5, k = 1$, se tiene:

$$(I8) = \frac{58}{3}\pi .$$

Para (I9) y (I10), se tiene que:

$$5 \cdot (I3) = (I9) \Rightarrow (I9) = 5 \cdot (-6\pi) = -30\pi ,$$

$$\frac{5}{3} \cdot (I4) = (I10) \Rightarrow (I10) = \frac{5}{3} \cdot 6\pi = 10\pi ,$$

Por lo tanto,

$$\int_C O_5(t)S(t)dt = \frac{58}{3}\pi + (-30\pi) + 10\pi = -\frac{2}{3}\pi .$$

Para hallar el coeficiente de $J_6(y)$, escribimos:

$$\begin{aligned}
 \int_C O_6(t)S(t)dt &= \int_C \frac{23040}{t^7} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right] dt \\
 &+ \int_C \frac{1152}{t^5} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right] dt \\
 &+ \int_C \frac{36}{t^3} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right] dt \\
 &+ \int_C \frac{1}{t} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right] dt
 \end{aligned}$$

Para resolver (I11), consideramos los términos $n = 0, k = 7$; $n = 1, k = 6$; $n = 2, k = 5$ y $n = 3, k = 4$; $n = 4, k = 3$; $n = 5, k = 2$ y $n = 6, k = 1$, de donde se tiene que :

$$(I11) = 26 \frac{\pi}{i},$$

Y para resolver (I12), (I13) y (I14), observamos que:

$$6 \cdot (I5) = (I12) \Rightarrow (I12) = 6 \cdot \frac{22}{3} \pi i = 44\pi i,$$

$$\frac{9}{4} \cdot (I6) = (I13) \Rightarrow (I13) = \frac{9}{4} \cdot (-8\pi i) = -18\pi i,$$

$$(I14) = (I7) = 0,$$

Por lo tanto,

$$\int_C O_6(t)S(t)dt = 26 \frac{\pi}{i} + 44\pi i + (-18\pi i) = \frac{-18\pi + 18\pi}{i} = 0.$$

Ahora, calculemos el coeficiente de $J_7(y)$, así :

$$\begin{aligned}
 \int_C O_7(t)S(t)dt &= \int_C \frac{322560}{t^8} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right] dt \\
 &+ \int_C \frac{13440}{t^6} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right] dt \\
 &+ \int_C \frac{336}{t^4} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right] dt \\
 &+ \int_C \frac{7}{t^2} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-it)^n}{n!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} (2 - 2^{2k-1}) t^{k-1}}{(2k-1)(k-1)! 2^{(2k-1)/2} i^{k-1}} \right] dt
 \end{aligned}$$

indent donde, procediendo según como en los casos anteriores, considerando solo los términos que generan el integrando $(1/t)$ se tiene :

$$(I15) = -\frac{986}{15} \pi ,$$

$$(I16) = 7 \cdot (I8) = 7 \cdot \frac{58}{3} \pi = \frac{406}{3} \pi ,$$

$$(I17) = 14 \cdot (I3) = 14 \cdot (-6\pi) = -84\pi ,$$

$$(I18) = 7 \cdot \int_C O_1(t)S(t)dt = 7 \cdot 2\pi = 14\pi ,$$

Por lo tanto,

$$\int_C O_7(t)S(t)dt = -\frac{986}{15} \pi + \frac{406}{3} \pi + (-84\pi) + 14\pi = -\frac{2}{5} \pi .$$

Siguiendo con este razonamiento, se obtiene :

$$\int_C O_8(t)S(t)dt = -\frac{2}{5} \frac{\pi}{i} .$$

$$\int_C O_9(t)S(t)dt = 0 .$$

Para estos primeros valores, se nota el comportamiento que se espera para los términos dados por los múltiplos de tres (3).

Como mencionamos antes, la demostración probabilística es válida en sus argumentos y con esto se tiene, en efecto, un mecanismo que permite hallar expansiones en coeficientes de Bessel de integrales de probabilidad.

La función de densidad de θ_t y resultados asintóticos

A continuación presentamos un estudio de la función de densidad del ángulo θ_t del Browniano plano, basado en una expresión de la misma derivada del trabajo hecho en [3]. A partir de esta expresión daremos un resultado que implicará la Ley de Spitzer sobre el comportamiento asintótico de θ_t , cuando $t \rightarrow \infty$.

Consideremos el movimiento Browniano 2-dimensional $(Z_t, t \geq 0)$ con $Z_0 \neq 0$, y sea $(\theta_t, t \geq 0)$ la determinación continua del argumento de $(Z_s, s \leq t)$ alrededor del $(0,0)$ cuando $t \in (0, \infty)$. Digamos,

$$Z_t = |Z_t|e^{i\theta_t}, \quad \theta_0 = 0, \quad \rho = |Z_0|.$$

Spitzer [14] demostró el siguiente resultado,

Teorema 3.1. (Ley de Spitzer) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\theta_t}{\ln \sqrt{t}} < \theta\right) = G_0(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

donde G_0 denota la función de distribución Cauchy:

$$G_0(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \theta = \int_{-\infty}^{\theta} \frac{dw}{(1+w^2)}, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Ahora, encontraremos una expresión para la función de densidad de θ_t :

Teorema 3.2. Si f_{θ_t} es la función de densidad de θ_t . Entonces,

$$\begin{aligned} f_{\theta_t}(\theta; \rho) = & \frac{\rho}{2\sqrt{2\pi t}} e^{(-\rho^2/4t)} \left[2e^{\frac{\rho^2}{4t} \cos 2\theta} \cos \theta \mathbb{1}_{\{(-\pi/2, \pi/2)\}}(\theta) \right. \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{(-\frac{\rho^2}{4t} \cosh y)} \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh y - 1)} \left\{ \frac{(y/2)}{(y/2)^2 + (\theta - \pi/2)^2} \right. \\ & \left. \left. + \frac{(y/2)}{(y/2)^2 + (\theta + \pi/2)^2} \right\} dy \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Demostración:

Por el Teorema (2.4), se tiene

$$p(t, r, \theta; \rho, \alpha) = \frac{1}{\pi t} e^{\left(-\frac{r^2 + \rho^2}{2t}\right)} \int_0^\infty \cos v(\theta - \alpha) I_v\left(\frac{\rho r}{t}\right) dv,$$

Para hallar la densidad f_{θ_t} integramos la expresión anterior respecto de $r dr$ con $\alpha = \theta_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p(t, r, \theta; \rho, 0) r dr &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{\pi t} e^{\left(-\frac{r^2 + \rho^2}{2t}\right)} \int_0^\infty \cos v\theta I_\nu\left(\frac{\rho r}{t}\right) dv \right] r dr \\ &= \frac{e^{(-\rho^2/2t)}}{\pi t} \int_0^\infty \underbrace{\left[\int_0^\infty r e^{(-r^2/2t)} I_\nu\left(\frac{\rho r}{t}\right) dr \right]}_{(*)} \cos v\theta dv \end{aligned}$$

Ahora bien, (*) ya fué resuelta durante la demostración del Corolario (2.6), así que sólo la sustituimos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p(t, r, \theta; \rho, 0) r dr &= \frac{e^{(-\rho^2/2t)}}{\pi t} \int_0^\infty \left[\frac{\rho \sqrt{2\pi t}}{2} e^{(\rho^2/4t)} \left(I_{\frac{1}{2}(v-1)}\left(\frac{\rho^2}{4t}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + I_{\frac{1}{2}(v+1)}\left(\frac{\rho^2}{4t}\right) \right) \right] \cos v\theta dv \\ &= \frac{\rho \sqrt{2\pi t}}{4\pi t} e^{(-\rho^2/4t)} \left[\underbrace{\int_0^\infty \cos v\theta I_{\frac{1}{2}(v-1)}\left(\frac{\rho^2}{4t}\right) dv}_{(A)} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\int_0^\infty \cos v\theta I_{\frac{1}{2}(v+1)}\left(\frac{\rho^2}{4t}\right) dv}_{(B)} \right], \end{aligned}$$

Resolveremos cada integral por separado. Usando la fórmula (1.31), reescribimos para (A):

$$\begin{aligned} (A) &= \int_0^\infty \cos v\theta \left[\frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi e^{\frac{\rho^2}{4t} \cos \beta} \cos\left[\left(\frac{v-1}{2}\right)\beta\right] d\beta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \operatorname{sen}\left[\left(\frac{v-1}{2}\right)\pi\right] \int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{4t} \cosh y - \left(\frac{v-1}{2}\right)y} dy \right) \right] dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos v\theta \underbrace{\int_0^\pi e^{\frac{\rho^2}{4t} \cos \beta} \cos\left[\left(\frac{v-1}{2}\right)\beta\right] d\beta}_{(A_1)} dv \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos v\theta \underbrace{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{v-1}{2}\right)\pi\right] \int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{4t} \cosh y - \left(\frac{v-1}{2}\right)y} dy}_{(A_2)} dv \end{aligned}$$

Resolvemos (A₁):

$$\begin{aligned} (A_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\frac{\rho^2}{4t} \cos \beta} \int_0^\infty \cos v\theta \cos\left[\left(\frac{v-1}{2}\right)\beta\right] dv d\beta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\frac{\rho^2}{4t} \cos \beta} \left\{ \int_0^\infty \cos v\theta \left[\cos\left(\frac{v\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{v\beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) \right] dv \right\} d\beta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{\frac{\rho^2}{4t} \cos \beta} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \cos v\theta \cos\left(\frac{v\beta}{2}\right) dv d\beta \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(A_{11})} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\frac{\rho^2}{4t} \cos \beta} \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) \int_0^\infty \cos v\theta \operatorname{sen}\left(\frac{v\beta}{2}\right) dv d\beta \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(A_{12})} \end{aligned}$$

Resolvemos (A_{11}):
Hacemos el cambio $\gamma = \frac{\beta}{2}$. Así,

$$\begin{aligned}
 (A_{11}) &= \frac{2}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\frac{\rho^2}{4f} \cos 2\gamma} \cos \gamma \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos v\theta \cos v\gamma \, dv \right) d\gamma \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\frac{\rho^2}{4f} \cos 2\gamma} \cos \gamma \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma v} e^{-i\theta v} \, dv \right) \quad (*) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\frac{\rho^2}{4f} \cos 2\gamma} \cos \gamma \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{iv(\gamma-\theta)} \, dv \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\frac{\rho^2}{4f} \cos 2\gamma} \cos \gamma (2\pi \delta_{(\gamma-\theta)}) \, d\gamma \quad (**) \\
 &= e^{\frac{\rho^2}{4f} \cos 2\theta} \cos \theta \mathbb{1}_{\{(-\pi/2, \pi/2)\}}(\theta)
 \end{aligned}$$

En (*) usamos la paridad de la función $\cos(z)$ y la imparidad de la función $\sin(z)$ para reescribir la integral y en (**) usamos la transformada de inversa de Fourier hasta hacer aparecer la expresión $\delta_{(x-y)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\zeta(x-y)} d\zeta$.

Dejaremos por lo pronto, la integral (A_{12}) indicada. Ahora, resolvemos (A_2):

$$\begin{aligned}
 (A_2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos v\theta \left[\sin\left(\frac{v\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{v\pi}{2}\right) \right] \\
 &\quad \times \int_0^{\infty} e^{(-\frac{\rho^2}{4f} \cosh y - (\frac{v-1}{2})y)} \, dy \, dv \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{(-\frac{\rho^2}{4f} \cosh y + y/2)} \int_0^{\infty} e^{(-\frac{v}{2}v)} \cos v\theta \cos\left(\frac{v\pi}{2}\right) \, dv \, dy \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{(-\frac{\rho^2}{4f} \cosh y + y/2)} \int_0^{\infty} e^{(-\frac{v}{2}v)} \\
 &\quad \times \left[\frac{\cos(v\theta - \frac{v\pi}{2}) + \cos(v\theta + \frac{v\pi}{2})}{2} \right] \, dv \, dy \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{(-\frac{\rho^2}{4f} \cosh y + y/2)} \left\{ \int_0^{\infty} e^{(-\frac{v}{2}v)} \cos[v(\theta - \frac{\pi}{2})] \, dv \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{(-\frac{v}{2}v)} \cos[v(\theta + \frac{\pi}{2})] \, dv \right\} \, dy
 \end{aligned}$$

Usando [8], página 512, fórmula (3.893(2)), lo anterior toma la forma:

$$\begin{aligned}
 (A_2) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{(-\frac{\rho^2}{4f} \cosh y + y/2)} \left\{ \frac{(y/2)}{(y/2)^2 + (\theta - \pi/2)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(y/2)}{(y/2)^2 + (\theta + \pi/2)^2} \right\} \, dy
 \end{aligned}$$

Debemos ahora resolver la integral (B):

$$(B) = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos v\theta \int_0^{\pi} e^{\frac{\rho^2}{4t} \cos \beta} \cos\left[\left(\frac{v+1}{2}\right)\beta\right] d\beta dv}_{(B_1)} - \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos v\theta \operatorname{sen}\left[\left(\frac{v+1}{2}\right)\pi\right] \int_0^{\infty} e^{(-\frac{\rho^2}{4t} \cosh y - (\frac{v+1}{2})y)} dy dv}_{(B_2)}$$

Para resolver (B₁), procedemos como en el caso de (A₁). Obteniéndose,

$$(B_1) = \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{\rho^2}{4t} \cos \beta} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \cos v\theta \cos\left(\frac{v\beta}{2}\right) dv d\beta}_{(B_{11})} - \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\frac{\rho^2}{4t} \cos \beta} \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) \int_0^{\infty} \cos v\theta \operatorname{sen}\left(\frac{v\beta}{2}\right) dv d\beta}_{(B_{12})}$$

Hasta ahora, se nota que :

$$(B_{11}) = (A_{11}) = e^{\frac{\rho^2}{4t} \cos 2\theta} \cos \theta \mathbb{1}_{\{(-\pi/2, \pi/2)\}}(\theta),$$

y,

$$(B_{12}) = -(A_{12}).$$

De manera análoga a como se resolvió (A₂), se procede con (B₂), obteniéndose:

$$(B_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{(-\frac{\rho^2}{4t} \cosh y - y/2)} \left\{ \frac{(y/2)}{(y/2)^2 + (\theta - \pi/2)^2} + \frac{(y/2)}{(y/2)^2 + (\theta + \pi/2)^2} \right\} dy.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\infty} p(t, r, \theta; \rho, 0) r dr = \frac{\rho}{2\sqrt{2\pi t}} e^{(-\rho^2/4t)} \left((A) + (B) \right)$$

Sustituyendo lo anterior por cada integral correspondiente, se tiene :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} p(t, r, \theta; \rho, 0) r dr \\ &= \frac{\rho}{2\sqrt{2\pi t}} e^{(-\rho^2/4t)} \left\{ 2e^{\frac{\rho^2}{4t} \cos 2\theta} \cos \theta \mathbb{1}_{\{(-\pi/2, \pi/2)\}}(\theta) - \left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{(-\frac{\rho^2}{4t} \cosh y + y/2)} \right. \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ \frac{(y/2)}{(y/2)^2 + (\theta - \pi/2)^2} + \frac{(y/2)}{(y/2)^2 + (\theta + \pi/2)^2} \right\} dy \right) \\ & \quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{(-\frac{\rho^2}{4t} \cosh y - y/2)} \left\{ \frac{(y/2)}{(y/2)^2 + (\theta - \pi/2)^2} + \frac{(y/2)}{(y/2)^2 + (\theta + \pi/2)^2} \right\} dy \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho}{2\sqrt{2\pi t}} e^{(-\rho^2/4t)} \left\{ 2e^{\frac{\rho^2}{4t} \cos 2\theta} \cos \theta \mathbb{1}_{\{(-\pi/2, \pi/2)\}}(\theta) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{(-\frac{\rho^2}{4t} \cosh y)} \left(\frac{e^{y/2} - e^{-y/2}}{2} \right) \right. \\
&\quad \times \left. \left\{ \frac{(y/2)}{(y/2)^2 + (\theta - \pi/2)^2} + \frac{(y/2)}{(y/2)^2 + (\theta + \pi/2)^2} \right\} dy \right\} \\
&= \frac{\rho}{2\sqrt{2\pi t}} e^{(-\rho^2/4t)} \left\{ 2e^{\frac{\rho^2}{4t} \cos 2\theta} \cos \theta \mathbb{1}_{\{(-\pi/2, \pi/2)\}}(\theta) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{(-\frac{\rho^2}{4t} \cosh y)} \sinh(y/2) \right. \\
&\quad \times \left. \left\{ \frac{(y/2)}{(y/2)^2 + (\theta - \pi/2)^2} + \frac{(y/2)}{(y/2)^2 + (\theta + \pi/2)^2} \right\} dy \right\}
\end{aligned}$$

Usando una identidad trigonométrica hiperbólica finalmente se tiene que:

$$\begin{aligned}
&f_{\theta_t}(\theta; \rho) \\
&= \frac{\rho}{2\sqrt{2\pi t}} e^{(-\rho^2/4t)} \left[2e^{\frac{\rho^2}{4t} \cos 2\theta} \cos \theta \mathbb{1}_{\{(-\pi/2, \pi/2)\}}(\theta) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{(-\frac{\rho^2}{4t} \cosh y)} \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh y - 1)} \right. \\
&\quad \times \left. \left\{ \frac{(y/2)}{(y/2)^2 + (\theta - \pi/2)^2} + \frac{(y/2)}{(y/2)^2 + (\theta + \pi/2)^2} \right\} dy \right]
\end{aligned}$$

□

A continuación, con esta expresión para la función de densidad de θ_t , vamos a presentar un resultado que muestra la velocidad de convergencia de la densidad de θ_t a la correspondiente densidad de Cauchy, descrita en (3.2), y ofrece información sobre el comportamiento en θ_t .

Teorema 3.3.

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} (1 + \theta^2) \left| \ln \sqrt{t} f_{\theta_t}(\ln \sqrt{t} \theta; \rho) - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 + \theta^2)} \right| \leq C \frac{1}{\ln \sqrt{t}}, \text{ para } t \geq 2.$$

donde C es una constante que no depende de t , ni de θ .

Demostración:

Sea $\theta \in \mathbb{R}$ fijo, pero arbitrario. Sean $t \geq 2$, $\rho = |Z_0|$, y $a = \frac{\rho^2}{4t}$. Vamos a escribir f_t en lugar de f_{θ_t} , así:

$$\begin{aligned}
& \left| \ln \sqrt{t} f_t(\ln \sqrt{t} \theta; \rho) - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+\theta^2)} \right| \\
&= \left| \frac{\rho e^{-a} e^{a \cos(2 \ln \sqrt{t} \theta)}}{\sqrt{2\pi}} \cos(\ln \sqrt{t} \theta) \times \mathbb{1}_{\{(-\pi/2, \pi/2)\}}(\ln \sqrt{t} \theta) \frac{\ln \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\rho}{2\pi \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2at}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \frac{\operatorname{arcosh}(u/a)}{2} \times \left\{ \frac{\ln \sqrt{t}}{(\operatorname{arcosh}(u/a)/2)^2 + (\ln \sqrt{t} \theta - \pi/2)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\ln \sqrt{t}}{(\operatorname{arcosh}(u/a)/2)^2 + (\ln \sqrt{t} \theta + \pi/2)^2} \right\} du - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+\theta^2)} \right|
\end{aligned}$$

Vamos a acotar el primer sumando del segundo miembro de esta igualdad, queremos mostrar que:

$$\left| \frac{\rho e^{-a} e^{a \cos(2 \ln \sqrt{t} \theta)}}{\sqrt{2\pi}} \cos(\ln \sqrt{t} \theta) \times \mathbb{1}_{\{(-\pi/2, \pi/2)\}}(\ln \sqrt{t} \theta) \frac{\ln \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \right| \leq C_1 \cdot \frac{1}{(1+\theta^2)} \frac{1}{\ln \sqrt{t}}$$

donde C_1 es una constante que no depende de t ni de θ .

En efecto,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho e^{-a} e^{a \cos(2 \ln \sqrt{t} \theta)}}{\sqrt{2\pi}} \cos(\ln \sqrt{t} \theta) \times \mathbb{1}_{\{(-\pi/2, \pi/2)\}}(\ln \sqrt{t} \theta) \frac{\ln \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \right| \\
&\leq 1 \times C_0 \left| \mathbb{1}_{\{(-\pi/2, \pi/2)\}}(\ln \sqrt{t} \theta) \frac{\ln \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \right|
\end{aligned}$$

donde $C_0 = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}$. Vamos a multiplicar y dividir en el segundo miembro de la desigualdad por los factores $\frac{(1+\theta^2)}{(1+\theta^2)}$ y $\frac{\ln \sqrt{t}}{\ln \sqrt{t}}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho e^{-a} e^{a \cos(2 \ln \sqrt{t} \theta)}}{\sqrt{2\pi}} \cos(\ln \sqrt{t} \theta) \times \mathbb{1}_{\{(-\pi/2, \pi/2)\}}(\ln \sqrt{t} \theta) \frac{\ln \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \right| \\
&\leq C_0 \frac{(1+\theta^2)}{(1+\theta^2)} \mathbb{1}_{\{(-\pi/2, \pi/2)\}}(\ln \sqrt{t} \theta) \frac{(\ln \sqrt{t})^2}{\sqrt{t} \ln \sqrt{t}}
\end{aligned}$$

Ahora bien, en vista de que aparece una función indicatriz, vamos a considerar dos posibles casos.

Caso 1: $[|\ln \sqrt{t} \theta| > \frac{\pi}{2}]$

En este caso, la desigualdad es cierta para todo $t \geq 2$:

$$\left| \frac{\rho e^{-a} e^{a \cos(2 \ln \sqrt{t} \theta)}}{\sqrt{2\pi}} \cos(\ln \sqrt{t} \theta) \times \mathbb{1}_{\{(-\pi/2, \pi/2)\}}(\ln \sqrt{t} \theta) \frac{\ln \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \right| = 0 \leq C_1 \frac{1}{(1+\theta^2)} \frac{1}{\ln \sqrt{t}}$$

con $C_1 = C_0$.

Caso 2: $[|\ln \sqrt{t} \theta| \leq \frac{\pi}{2}]$

Procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |\ln \sqrt{t} \theta| \leq \frac{\pi}{2} &\Rightarrow |\theta| \leq \frac{\pi}{2 \ln \sqrt{t}} \\ &\Rightarrow |\theta|^2 \leq \frac{\pi^2}{4(\ln \sqrt{t})^2} \\ &\Rightarrow 1 + \theta^2 \leq 1 + \frac{\pi^2}{4(\ln \sqrt{t})^2} \end{aligned}$$

Entonces, reescribimos:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\rho e^{-a} e^{a \cos(2 \ln \sqrt{t} \theta)}}{\sqrt{2\pi}} \cos(\ln \sqrt{t} \theta) \times \mathbb{1}_{\{(-\pi/2, \pi/2)\}}(\ln \sqrt{t} \theta) \frac{\ln \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \right| \\ &\leq \frac{C_0}{(1 + \theta^2)} \frac{(\ln \sqrt{t})^2}{\sqrt{t} \ln \sqrt{t}} \left(1 + \frac{\pi^2}{4(\ln \sqrt{t})^2}\right) \\ &= C_0 \left(1 + \frac{\pi^2}{4(\ln \sqrt{t})^2}\right) \frac{1}{(1 + \theta^2) \ln \sqrt{t}} \frac{(\ln \sqrt{t})^2}{\sqrt{t}} \\ &\leq C_0 \left(1 + \frac{\pi^2}{4(\ln \sqrt{t})^2}\right) \frac{1}{(1 + \theta^2) \ln \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{t}} \\ &\leq C_0 \left(1 + \frac{\pi^2}{4(\ln \sqrt{2})^2}\right) \frac{1}{(1 + \theta^2) \ln \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{C_1}{(1 + \theta^2) \ln \sqrt{t}} \end{aligned}$$

donde C_1 es una constante dada por: $C_1 = C_0 \left(1 + \frac{\pi^2}{4(\ln \sqrt{2})^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por lo tanto, para todo $\theta \in \mathbb{R}$ y $t \geq 2$:

$$\left| \frac{\rho e^{-a} e^{a \cos(2 \ln \sqrt{t} \theta)}}{\sqrt{2\pi}} \cos(\ln \sqrt{t} \theta) \times \mathbb{1}_{\{(-\pi/2, \pi/2)\}}(\ln \sqrt{t} \theta) \frac{\ln \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \right| \leq C_1 \frac{1}{(1 + \theta^2)} \frac{1}{\ln \sqrt{t}} \quad (3.4)$$

Ahora, procedemos a mostrar que:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho}{2\pi\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2at}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \frac{\operatorname{arcosh}(u/a)}{2} \times \left\{ \frac{\ln \sqrt{t}}{(\operatorname{arcosh}(u/a)/2)^2 + (\ln \sqrt{t} \theta - \pi/2)^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\ln \sqrt{t}}{(\operatorname{arcosh}(u/a)/2)^2 + (\ln \sqrt{t} \theta + \pi/2)^2} \right\} du - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+\theta^2)} \right| \\
& = \left| \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \frac{\operatorname{arcosh}(u/a)}{2} \left\{ \frac{\ln \sqrt{t}}{(\operatorname{arcosh}(u/a)/2)^2 + (\ln \sqrt{t} \theta - \pi/2)^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\ln \sqrt{t}}{(\operatorname{arcosh}(u/a)/2)^2 + (\ln \sqrt{t} \theta + \pi/2)^2} \right\} du - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+\theta^2)} \right| \leq C_2 \frac{1}{(1+\theta^2)} \frac{1}{\ln \sqrt{t}}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde C_2 es una constante que no depende de t , ni de θ . En efecto,

Vamos a usar una fórmula para la función $\operatorname{arcosh}(z)$, dada en [8], pág. 60, ecuación (1.642(2)):

$$\operatorname{arcosh}(z) = \ln(2z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2 2k} z^{-2k}, \quad z \geq 1$$

Ahora, con $z = (u/a)$ y sabiendo que $u \geq a$, se tiene que $z \geq 1$. Definimos:

$$E_t(u; \rho) := \frac{\operatorname{arcosh}(u/a)}{2} - \frac{1}{2} \ln(2(u/a))$$

Como a futuro aparecerá tal diferencia en el integrando de la integral anterior, debemos acotar a E_t y mostrar que es, en efecto, integrable.

Usando el hecho de que:

$0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha^k < \alpha, \forall k \in \mathbb{N}$, tenemos que $\left(\frac{1}{z^2}\right)^k \leq \frac{1}{z^2}, \forall k \geq 1$. Entonces:

$$\begin{aligned}
|E_t(u; \rho)| & = \left| \frac{\operatorname{arcosh}(u/a)}{2} - \frac{\ln(2u/a)}{2} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k+1}(k!)^2 2k} (u/a)^{-2k} \\
& \leq \frac{a^2}{u^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k+1}(k!)^2 2k} \\
& = \frac{\rho^4}{t^2} \frac{1}{u^2} \widehat{C}
\end{aligned}$$

donde \widehat{C} es una cota de la serie numérica convergente que aparece en la última expresión. (Para ver la convergencia, se usa el Criterio de Raabe, el cual asegura convergencia siempre que $\lim_{n \rightarrow \infty} [n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n})] = L > 1$, en este caso: $L = \frac{3}{2}$).

Así,

$$|E_t(u; \rho)| \leq \frac{\rho^4}{t^2} \frac{1}{u^2} \widehat{C} \quad (3.6)$$

En estos términos, reescribimos:

$$\frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{u}{a}\right)}{2} = \ln \sqrt{t} + A_t(u; \rho)$$

donde $A_t(u; \rho) = \ln \sqrt{\frac{8u}{\rho^2}} + E_t(u; \rho)$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \frac{\operatorname{arcosh}(u/a)}{2} \times \left\{ \frac{\ln \sqrt{t}}{(\operatorname{arcosh}(u/a)/2)^2 + (\ln \sqrt{t} \theta - \pi/2)^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\ln \sqrt{t}}{(\operatorname{arcosh}(u/a)/2)^2 + (\ln \sqrt{t} \theta + \pi/2)^2} \right\} du - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+\theta^2)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left\{ \frac{(\ln \sqrt{t} + A_t(u; \rho)) \ln \sqrt{t}}{(\ln \sqrt{t} + A_t(u; \rho))^2 + (\ln \sqrt{t} \theta - \pi/2)^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(\ln \sqrt{t} + A_t(u; \rho)) \ln \sqrt{t}}{(\ln \sqrt{t} + A_t(u; \rho))^2 + (\ln \sqrt{t} \theta + \pi/2)^2} \right\} du - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+\theta^2)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left\{ \frac{(\ln \sqrt{t} + A_t(u; \rho)) \ln \sqrt{t}}{(\ln \sqrt{t} + A_t(u; \rho))^2 + (\ln \sqrt{t} \theta - \pi/2)^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(\ln \sqrt{t} + A_t(u; \rho)) \ln \sqrt{t}}{(\ln \sqrt{t} + A_t(u; \rho))^2 + (\ln \sqrt{t} \theta + \pi/2)^2} \right\} du - \frac{1}{\pi(1+\theta^2)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}(1+\theta^2)} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} du + \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}(1+\theta^2)} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} du \right| \end{aligned}$$

Sea $x = \frac{1}{\ln \sqrt{t}}$. Entonces, reescribimos:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \frac{\operatorname{arcosh}(u/a)}{2} \times \left\{ \frac{\ln \sqrt{t}}{(\operatorname{arcosh}(u/a)/2)^2 + (\ln \sqrt{t} \theta - \pi/2)^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\ln \sqrt{t}}{(\operatorname{arcosh}(u/a)/2)^2 + (\ln \sqrt{t} \theta + \pi/2)^2} \right\} du - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+\theta^2)} \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left\{ \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta - (\pi/2)x)^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta + (\pi/2)x)^2} - \frac{2}{1 + \theta^2} \right\} du \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}(1+\theta^2)} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} du - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+\theta^2)} \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left\{ \left| \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta - (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{(1 + \theta^2)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta + (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{1 + \theta^2} \right| \right\} du \\
& \quad + \left| \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}(1+\theta^2)} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} du - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+\theta^2)} \right|
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Vamos a estimar el último valor absoluto de (3.7), es decir, probaremos que:

$$\frac{1}{(1+\theta^2)} \left| \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} du - \frac{1}{\pi} \right| \leq M_1 \frac{x}{(1+\theta^2)}$$

donde M_1 es una constante que no depende de t ni de θ . En efecto:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(1+\theta^2)} \left| \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} du - \frac{1}{\pi} \right| = \frac{1}{(1+\theta^2)} \frac{1}{\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} du - 1 \right| \\
&= \frac{1}{(1+\theta^2)} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left| \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} du - \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \pm \int_a^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \right| \text{ (usando que } \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi} \text{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{(1+\theta^2)} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\left| \int_a^\infty \left(\frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} - \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \right) du \right| + \left| \int_a^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du - \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \right| \right] \\
&= \frac{1}{(1+\theta^2)} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\left| \int_a^\infty \left(\frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} - \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \pm \frac{e^{-u}}{\sqrt{u+a}} \right) du \right| + \left| \int_0^a \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \right| \right] \\
&\leq \frac{1}{(1+\theta^2)} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\left| \int_a^\infty \frac{e^{-u}(e^{-a}-1)}{\sqrt{u+a}} du \right| + \left| \int_a^\infty e^{-u} \left(\frac{1}{\sqrt{u+a}} - \frac{1}{\sqrt{u}} \right) du \right| + \left| \int_0^a \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \right| \right] \\
&\leq \frac{1}{(1+\theta^2)} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[|a| \left| \int_a^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \right| + \int_a^\infty e^{-u} \left| \left(\frac{\sqrt{u+a}-\sqrt{u}}{\sqrt{u+a}\sqrt{u}} \right) \right| du + \sqrt{a} \right] \\
&\leq \frac{1}{(1+\theta^2)} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[|a| \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du + \sqrt{a} \left(\int_a^1 \frac{e^{-u}}{u} du + \int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \right) + \sqrt{a} \right] \\
&\leq \frac{1}{(1+\theta^2)} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\left| \frac{\rho^2}{4t} \right| \sqrt{\pi} + \sqrt{\frac{\rho^2}{4t}} (|\ln(\frac{\rho^2}{4t})| + K) + \sqrt{\frac{\rho^2}{4t}} \right] \\
&\leq \frac{1}{(1+\theta^2)} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\left| \frac{\rho^2}{4t} \right| \sqrt{\pi} + \frac{\rho}{2\sqrt{t}} (\ln(\frac{\rho^2}{8}) + K) + \frac{\rho}{2\sqrt{t}} \right]
\end{aligned}$$

donde K es una cota para la integral convergente $\int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$. Además vamos a usar la desigualdad: $t, \sqrt{t} \geq \ln \sqrt{t}$. Así, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+\theta^2)} \left| \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} du - \frac{1}{\pi} \right| &\leq \frac{1}{(1+\theta^2)} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\rho^2\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{\ln \sqrt{t}} + \frac{\rho}{2} \left(\ln\left(\frac{\rho^2}{8}\right) + k \right) \frac{1}{\ln \sqrt{t}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\rho}{2} \frac{1}{\ln \sqrt{t}} \right] \\
&\leq M_1 \frac{x}{(1+\theta^2)}
\end{aligned}$$

$$\text{donde } M_1 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\rho^2\sqrt{\pi}}{4} + \left(\ln\left(\frac{\rho^2}{8}\right) + k \right) + \frac{\rho}{2} \right] \text{ y } x = \frac{1}{\ln \sqrt{t}}.$$

Ahora, vamos a estimar la primera integral de (3.7):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left\{ \left| \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta - (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{(1 + \theta^2)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta + (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{1 + \theta^2} \right| \right\} du \\
& \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left| \frac{x[(\theta^2 - 1)A_t(u;\rho) + \theta\pi] - x^2[A_t^2(u;\rho) + \frac{\pi^2}{4}]}{(1 + \theta^2)[(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta - \frac{\pi}{2}x)^2]} \right. \\
& \quad \left. + \frac{x[(\theta^2 - 1)A_t(u;\rho) - \theta\pi] - x^2[A_t^2(u;\rho) + \frac{\pi^2}{4}]}{(1 + \theta^2)[(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta + \frac{\pi}{2}x)^2]} \right| du \\
& \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \frac{x}{(1 + \theta^2)} \left[\int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left| \frac{(\theta^2 - 1)A_t(u;\rho) + \theta\pi - x[A_t^2(u;\rho) + \frac{\pi^2}{4}]}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta - \frac{\pi}{2}x)^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(\theta^2 - 1)A_t(u;\rho) - \theta\pi - x[A_t^2(u;\rho) + \frac{\pi^2}{4}]}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta + \frac{\pi}{2}x)^2} \right| du \right]
\end{aligned}$$

Consideremos dos casos:

Caso 1: $|\theta| > 30$

Con respecto a los denominadores de ambas fracciones, se tiene:

$$|(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta \pm \frac{\pi}{2}x)^2| > \frac{1}{2}\theta^2$$

en efecto:

$$\begin{aligned}
|(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta + \frac{\pi}{2}x)^2| &> (\theta + \frac{\pi}{2}x)^2 \\
&= \theta^2 + \theta\pi x + (\frac{\pi}{2}x)^2 \\
&> \theta^2 - |\theta|\pi x = \theta^2(1 - \frac{\pi x}{|\theta|}) > \frac{\theta^2}{2}
\end{aligned}$$

Lo cual implica

$$\left| \frac{(\theta^2 - 1)}{\theta^2} \right| < 1, \quad \text{y} \quad \left| \frac{\theta}{\theta^2} \right| < 1,$$

Luego, nos queda:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \frac{x}{(1+\theta^2)} \left[\int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left| \frac{(\theta^2-1)A_t(u;\rho) + \theta\pi - x[A_t^2(u;\rho) + \frac{\pi^2}{4}]}{(1+A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta - \frac{\pi}{2}x)^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(\theta^2-1)A_t(u;\rho) - \theta\pi - x[A_t^2(u;\rho) + \frac{\pi^2}{4}]}{(1+A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta + \frac{\pi}{2}x)^2} \right| du \right] \\
& \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \frac{x}{(1+\theta^2)} \left[\int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} 4 \left(\pi + |A_t(u;\rho)| + x|A_t^2(u;\rho)| + x\frac{\pi^2}{4} \right) du \right] \\
& \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \frac{x}{(1+\theta^2)} \left[\int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} 4 \left(\frac{1}{\ln\sqrt{2}} |A_t^2(u;\rho)| + |A_t(u;\rho)| + \left(\pi + \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \frac{\pi^2}{4} \right) \right) du \right]
\end{aligned}$$

Vamos a tratar el integrando anterior como un polinomio de grado 2 en la variable $A_t(u;\rho)$ para acotar la expresión anterior por:

$$\frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{x}{(1+\theta^2)} \left[\int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \tilde{C} \left(1 + |A_t^2(u;\rho)| \right) du \right]$$

donde \tilde{C} es una constante que no depende de los parámetros ρ, t, u . Entonces nos queda:

$$\frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{x}{(1+\theta^2)} \left[\int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} du + \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} |A_t^2(u;\rho)| du \right]$$

En este punto, vamos a usar la definición de $A_t(u;\rho)$ y la ecuación (3.6):

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{x}{(1+\theta^2)} \left[\int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} du + \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left[\left| \ln \sqrt{\frac{8u}{\rho^2}} \right| + |E_t(u;\rho)| \right]^2 du \right] \\
& \leq \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{x}{(1+\theta^2)} \left[\int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} du + \ln^2 \sqrt{\frac{8}{\rho^2}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} du \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} |\ln^2 \sqrt{u}| du + \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \frac{\hat{C}\rho^8}{t^4} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{u^4 \sqrt{u+a}} du \right]
\end{aligned}$$

Recordemos que $u > a = \frac{\rho^2}{4t} > 0$, entonces se cumplen las siguientes proposiciones:
 $t \geq 2 \Rightarrow e^{-a} \leq 1$, $u+a \geq u \Rightarrow \sqrt{u+a} \geq \sqrt{u}$ y $\frac{1}{u^4} < \frac{1}{a^4}$. Con esto, lo anterior se transforma en:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{x}{(1+\theta^2)} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du + \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \ln^2 \sqrt{\frac{8}{\rho^2}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \int_a^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} |\ln^2 \sqrt{u}| du + \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \frac{\widehat{C}\rho^8}{t^4} \int_a^\infty \frac{e^{-u}}{a^4\sqrt{u}} du \right] \\
& \leq \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{x}{(1+\theta^2)} \left[\left(1 + \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \ln^2 \sqrt{\frac{8}{\rho^2}} \right) \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \int_a^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} |\ln^2 \sqrt{u}| du + \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \frac{256\widehat{C}\rho^8 t^4}{t^4 \rho^8} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \right]
\end{aligned}$$

Como $\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} = \sqrt{\pi}$, entonces lo anterior se reduce a:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{x}{(1+\theta^2)} \left[\left(1 + \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \ln^2 \sqrt{\frac{8}{\rho^2}} + \frac{1}{\ln\sqrt{2}} 256\widehat{C} \right) \sqrt{\pi} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \left[\int_a^1 \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} |\ln^2 \sqrt{u}| du + \int_1^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} |\ln^2 \sqrt{u}| du \right] \right]
\end{aligned}$$

Ahora bien, debido a que:

$$\begin{aligned}
& \int_a^1 \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} |\ln^2 \sqrt{u}| du \leq A_1 < \infty \quad (\text{haciendo el cambio } z = \ln^2(u)) \\
& \int_1^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} |\ln^2 \sqrt{u}| du \leq \int_1^\infty e^{-u} du \leq A_2 < \infty
\end{aligned}$$

Finalmente, si $|\theta| > 30$, entonces:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho}{2\pi\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2at}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \frac{\operatorname{arcosh}(u/a)}{2} \times \left\{ \frac{\ln\sqrt{t}}{(\operatorname{arcosh}(u/a)/2)^2 + (\ln\sqrt{t}\theta - \pi/2)^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\ln\sqrt{t}}{(\operatorname{arcosh}(u/a)/2)^2 + (\ln\sqrt{t}\theta + \pi/2)^2} \right\} du - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+\theta^2)} \right| \\
& \leq M_2 \frac{x}{(1+\theta^2)} + M_1 \frac{x}{(1+\theta^2)} \\
& \leq (M_2 + M_1) \frac{x}{(1+\theta^2)} \\
& = C_2 \frac{x}{(1+\theta^2)}
\end{aligned}$$

donde $M_2 = \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \left[\left(1 + \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \ln^2 \sqrt{\frac{8}{\rho^2}} + \frac{1}{\ln\sqrt{2}} 256 \widehat{C} \right) \sqrt{\pi} + \frac{1}{\ln\sqrt{2}} [A_1 + A_2] \right]$, y $C_2 = M_2 + M_1$.

Caso 2: $|\theta| \leq 30$

Vamos a estimar la misma expresión:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_a^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left\{ \left| \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta - (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{1 + \theta^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta + (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{1 + \theta^2} \right| \right\} du \quad (3.8)$$

Vamos a dividir la región de integración de (3.8) como sigue:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \left[\int_a^{\rho^2/4\sqrt{t}} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left\{ \left| \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta - (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{1 + \theta^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta + (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{1 + \theta^2} \right| \right\} du \\ + \int_{\rho^2/4\sqrt{t}}^\infty \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left\{ \left| \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta - (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{1 + \theta^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta + (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{1 + \theta^2} \right| \right\} du \right] \quad (3.9)$$

A continuación, estimamos la primera integral. Debido a que el integrando posee dos fracciones semejantes, vamos a trabajar con la primera fracción, y extenderemos el resultado para la segunda, así:

$$\int_a^{\rho^2/4\sqrt{t}} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left\{ \left| \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta - (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{1 + \theta^2} \right| \right\} \\ \leq \int_a^{\rho^2/4\sqrt{t}} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left\{ \left| \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta - (\pi/2)x)^2} \right| + \left| \frac{1}{1 + \theta^2} \right| \right\} du \\ \leq \frac{1 + \theta^2}{1 + \theta^2} \int_a^{\rho^2/4\sqrt{t}} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \frac{du}{|1 + A_t(u;\rho)x|} + \int_a^{\rho^2/4\sqrt{t}} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \frac{1}{1 + \theta^2} du \quad (3.10)$$

Usando la definición de $A_t(u; \rho)$, para la primera integral de la desigualdad (3.10) nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \theta^2}{1 + \theta^2} \int_a^{\rho^2/4\sqrt{t}} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \frac{du}{1 + A_t(u; \rho)x} &\leq (1 + 30^2) \frac{1}{1 + \theta^2} \int_a^{\rho^2/4\sqrt{t}} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \frac{du}{\frac{x}{2} \operatorname{arcosh}\left(\frac{4tu}{\rho^2}\right)} \\ &\leq (1 + 30^2) \frac{2}{x(1 + \theta^2)} \int_a^{\rho^2/4\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{du}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{4tu}{\rho^2}\right)} \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = \frac{4tu}{\rho^2}$, nos queda que la anterior integral es igual a:

$$(1 + 30^2) \frac{2}{x(1 + \theta^2)} \int_1^{\sqrt{t}} \frac{2\sqrt{t} \rho^2}{\rho\sqrt{z} 4t \operatorname{arcosh}(z)} dz = \frac{(1 + 30^2)}{1 + \theta^2} \frac{\rho}{x\sqrt{t}} \int_1^{\sqrt{t}} \frac{dz}{\sqrt{z} \operatorname{arcosh}(z)}$$

Hacemos el cambio de variable $y = \operatorname{arcosh}(z)$, así:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + 30^2)}{1 + \theta^2} \frac{\rho}{x\sqrt{t}} \int_1^{\sqrt{t}} \frac{dz}{\sqrt{z} \operatorname{arcosh}(z)} &= \frac{(1 + 30^2)}{1 + \theta^2} \frac{\rho}{x\sqrt{t}} \int_0^{\operatorname{arcosh}(\sqrt{t})} \frac{\sinh(y) dy}{\sqrt{\cosh(y)} y} \\ &= \frac{(1 + 30^2)}{1 + \theta^2} \frac{\rho}{x\sqrt{t}} \left[\int_0^1 \frac{\sinh(y)}{y} \frac{1}{\sqrt{\cosh(y)}} dy \right. \\ &\quad \left. + \int_1^{\operatorname{arcosh}(\sqrt{t})} \frac{\sinh(y)}{y} \frac{1}{\sqrt{\cosh(y)}} dy \right] \end{aligned}$$

En el caso de la primera integral, usaremos que el integrando es una función continua en un intervalo cerrado y acotado, pues la función $\frac{\sinh(y)}{y}$ tiene límite finito en $y = 0$, para acotar el integrando por una constante, mientras que para la segunda integral sustituiremos la función por su definición, así:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \theta^2}{1 + \theta^2} \int_a^{\rho^2/4\sqrt{t}} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \frac{du}{1 + A_t(u; \rho)x} &\leq \frac{(1 + 30^2)}{1 + \theta^2} \frac{\rho}{x\sqrt{t}} \left[\int_0^1 M dy + \int_1^{\operatorname{arcosh}(\sqrt{t})} \frac{e^y - e^{-y}}{\sqrt{e^y + e^{-y}}} dy \right] \\ &\leq \frac{(1 + 30^2)}{1 + \theta^2} \frac{\rho}{x\sqrt{t}} \left[M + \int_1^{\operatorname{arcosh}(\sqrt{t})} \frac{e^y}{e^{y/2}} dy \right] \\ &= \frac{(1 + 30^2)}{1 + \theta^2} \frac{\rho}{x\sqrt{t}} \left[M + \int_1^{\operatorname{arcosh}(\sqrt{t})} e^{y/2} dy \right] \\ &= \frac{(1 + 30^2)}{1 + \theta^2} \frac{\rho}{x\sqrt{t}} \left[M + 2e^{y/2} \Big|_1^{\operatorname{arcosh}(\sqrt{t})} \right] \end{aligned}$$

Para t suficientemente grande, se tiene que $\operatorname{arcosh}(w) = \ln(2w)$, por lo cual, reescribimos:

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \theta^2}{1 + \theta^2} \int_a^{\rho^2/4\sqrt{t}} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \frac{du}{1 + A_t(u; \rho)x} &= \frac{(1 + 30^2)}{1 + \theta^2} \frac{\rho}{x\sqrt{t}} \left[M + 2e^{\frac{1}{2} \ln(2\sqrt{t})} - 2e^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\leq \frac{(1 + 30^2)}{1 + \theta^2} \frac{\rho}{x\sqrt{t}} \left[M + 2\sqrt{2} \sqrt[4]{t} \right] \\
&= \frac{(1 + 30^2)}{1 + \theta^2} \frac{\rho}{x} \left[\frac{M}{\sqrt{t}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{t}} \right] \\
&= \rho(1 + 30^2) \left[\frac{M}{2^{(1/4)}} + 2\sqrt{2} \right] \frac{1}{1 + \theta^2} \frac{1}{\ln \sqrt{t}} \frac{[\ln \sqrt{t}]^2}{t^{(1/4)}} \\
&\leq \rho(1 + 30^2) \left[\frac{M}{2^{(1/4)}} + 2\sqrt{2} \right] \frac{1}{(1 + \theta^2)} \frac{1}{\ln \sqrt{t}} \times 1
\end{aligned}$$

Mientras que para la segunda integral de la desigualdad (3.10), se tiene:

$$\int_a^{\rho^2/4\sqrt{t}} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \frac{1}{1 + \theta^2} du \leq \frac{1}{(1 + \theta^2)} k\sqrt{u} \Big|_{\rho^2/4t}^{\rho^2/4\sqrt{t}} \leq \frac{k}{(1 + \theta^2)} \frac{\rho}{2\sqrt[4]{t}} \leq \frac{k\rho}{2} \frac{1}{(1 + \theta^2)} \frac{1}{\ln \sqrt{t}}$$

donde k es una constante que no depende de u ni de t .

Así la desigualdad (3.10) nos queda así:

$$\begin{aligned}
&\int_a^{\rho^2/4\sqrt{t}} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left\{ \left| \frac{1 + A_t(u; \rho)x}{(1 + A_t(u; \rho)x)^2 + (\theta - (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{1 + \theta^2} \right| \right\} \\
&\leq \rho(1 + 30^2) \frac{M}{2^{(1/4)}} + 2\sqrt{2} \left[\frac{1}{(1 + \theta^2)} \frac{1}{\ln \sqrt{t}} + \frac{k\rho}{2} \frac{1}{(1 + \theta^2)} \frac{1}{\ln \sqrt{t}} \right] \\
&= \left(\rho(1 + 30^2) \frac{M}{2^{(1/4)}} + 2\sqrt{2} \right) + \frac{k\rho}{2} \frac{1}{(1 + \theta^2)} \frac{1}{\ln \sqrt{t}}
\end{aligned}$$

Si procedemos de igual manera para la segunda fracción de la primera integral de (3.9), entonces obtenemos la misma estimación que se obtuvo para (3.10) por lo que,

la primera integral de (3.9), queda acotada por:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \left[\int_a^{\rho^2/4\sqrt{t}} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left\{ \left| \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta - (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{1 + \theta^2} \right. \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta + (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{1 + \theta^2} \right| \right\} du \\ & \leq 2 \left(\rho\pi(1 + 30^2) + \frac{k\rho}{2} \right) \frac{1}{(1 + \theta^2)} \frac{1}{\ln \sqrt{t}} \end{aligned}$$

Ahora procedemos a estimar la segunda integral de (3.8). De igual manera, trabajaremos con la primera fracción del integrando e indicaremos la estimación de la segunda fracción. Antes, consideraremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \operatorname{arcosh} z = y &\Rightarrow z = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\ \Rightarrow 2z &= e^y(1 + e^{-2y}) \\ \Rightarrow \ln 2z &= y + \ln(1 + e^{-2y}) \\ \Rightarrow \operatorname{arcosh} z - \ln 2z &= -\ln(1 + e^{-2y}) \\ \Rightarrow \ln 2z - \operatorname{arcosh} z &= \ln(1 + e^{-2y}) < e^{-2y} < \frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

ya que: $z = e^y \frac{(1+e^{-2y})}{2} < e^y$. Así,

$$\Rightarrow 0 < \ln 2z - \operatorname{arcosh} z < \frac{1}{z^2}, \quad z > 0.$$

Así, con $z = \frac{u}{a} = \frac{4tu}{\rho^2} > 0$, se tiene una cota para el error:

$$\begin{aligned} E_t(u;\rho) &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{arcosh} \left(\frac{4tu}{\rho^2} \right) - \ln \left(2 \frac{4tu}{\rho^2} \right) \right) \\ \Rightarrow |E_t(u;\rho)| &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{4tu}{\rho^2} \right)^{-2} \leq \frac{1}{2} \frac{\rho^4}{16 t^2} \frac{16 t}{\rho^4} \\ \Rightarrow |E_t(u;\rho)| &\leq \frac{1}{2t} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(1 + A_t(u; \rho)x) &= 1 + (\ln \sqrt{\frac{8u}{\rho^2}} + E_t(u; \rho))x \\
&\geq 1 + \left(\ln \sqrt{\frac{8\rho^2}{4\rho^2\sqrt{t}}} + E_t(u; \rho) \right)x \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2} \ln \frac{2}{\sqrt{t}} + E_t(u; \rho) \right)x \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \sqrt{t} + E_t(u; \rho) \right)x \\
&= 1 + \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{t}} - \frac{1}{2} + E_t(u; \rho)x \\
&\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{t}} - |E_t(u; \rho)| \frac{1}{\ln \sqrt{t}} \\
&\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{t}} - \frac{1}{2t \ln \sqrt{t}} \\
&\geq \frac{1}{2} \\
\Rightarrow (1 + A_t(u; \rho)x)^2 &> \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Por lo cual:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_{\rho^2/4\sqrt{t}}^{\infty} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left\{ \left| \frac{1 + A_t(u; \rho)x}{(1 + A_t(u; \rho)x)^2 + (\theta - (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{1 + \theta^2} \right| \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \frac{x}{(1 + \theta^2)} \left[\int_a^{\infty} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left| \frac{(\theta^2 - 1)A_t(u; \rho) + \theta\pi - x[A_t^2(u; \rho) + \frac{\pi^2}{4}]}{(1 + A_t(u; \rho)x)^2 + (\theta - \frac{\pi}{2}x)^2} \right| du \right] \\
&\leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \frac{x}{(1 + \theta^2)} \left[\int_a^{\infty} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} 4 \left(\frac{1}{\ln \sqrt{2}} |A_t^2(u; \rho)| + (90 + 1) |A_t(u; \rho)| \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (30\pi + \frac{1}{\ln \sqrt{2}} \frac{\pi^2}{4}) \right) du \right] \\
&\leq \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{x}{(1 + \theta^2)} \left[\int_{\rho^2/4t}^{\infty} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \tilde{K} \left(1 + |A_t^2(u; \rho)| \right) du \right]
\end{aligned}$$

donde \tilde{K} es una constante que no depende de t, u, ρ . Pero esta integral ya fué estimada, por lo tanto:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_{\rho^2/4\sqrt{t}}^{\infty} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left\{ \left| \frac{1 + A_t(u; \rho)x}{(1 + A_t(u; \rho)x)^2 + (\theta - (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{1 + \theta^2} \right| \right\} \leq M_2 \frac{x}{(1 + \theta^2)}$$

Así, la segunda integral de (3.8) queda acotada por:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \left[\int_{\rho^2/4\sqrt{t}}^{\infty} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \left\{ \left| \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta - (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{1 + \theta^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1 + A_t(u;\rho)x}{(1 + A_t(u;\rho)x)^2 + (\theta + (\pi/2)x)^2} - \frac{1}{1 + \theta^2} \right| \right\} du \right] \leq 2 M_2 \frac{x}{(1 + \theta^2)}$$

Así, si $|\theta| \leq 30$, entonces

$$\left| \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_a^{\infty} \frac{e^{-(u+a)}}{\sqrt{u+a}} \frac{\operatorname{arcosh}(u/a)}{2} \times \left\{ \frac{\ln \sqrt{t}}{(\operatorname{arcosh}(u/a)/2)^2 + (\ln \sqrt{t} \theta - \pi/2)^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\ln \sqrt{t}}{(\operatorname{arcosh}(u/a)/2)^2 + (\ln \sqrt{t} \theta + \pi/2)^2} \right\} du - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 + \theta^2)} \right| \\ \leq 2 \left(\rho\pi(1 + 30^2) + \frac{k\rho}{2} \right) \frac{x}{(1 + \theta^2)} + 2M_2 \frac{x}{(1 + \theta^2)} + M_1 \frac{x}{(1 + \theta^2)} \\ \leq C_2 \frac{x}{(1 + \theta^2)}$$

$$\text{Donde } C_2 = 2 \left(\rho\pi(1 + 30^2) + \frac{k\rho}{2} \right) + 2M_2 + M_1$$

Finalmente, usando (3.4) y (3.5), se tiene:

$$\left| \ln \sqrt{t} f_t \left(\ln \sqrt{t} \theta; \rho \right) - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 + \theta^2)} \right| \leq C_1 \frac{1}{(1 + \theta^2)} \frac{1}{\ln \sqrt{t}} + C_2 \frac{1}{(1 + \theta^2)} \frac{1}{\ln \sqrt{t}} \\ \leq (C_1 + C_2) \frac{1}{(1 + \theta^2)} \frac{1}{\ln \sqrt{t}}$$

Multiplicamos la anterior desigualdad por el factor $(1 + \theta^2)$ y tomamos supremo en $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\sup_{(\theta \in \mathbb{R})} (1 + \theta^2) \left| \ln \sqrt{t} f_t \left(\ln \sqrt{t} \theta; \rho \right) - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 + \theta^2)} \right| \leq C \frac{1}{\ln \sqrt{t}},$$

donde $C = C_1 + C_2$ es una constante que no depende de θ ni de t .

□

Observación 3.4. Debido a que el resultado anterior muestra una convergencia uniforme en $\theta \in \mathbb{R}$, la ley de Spitzer para el comportamiento asintótico de θ_t cuando $t \rightarrow \infty$, mencionada en el teorema (3.1), es un caso particular del mismo. Además queda explícita la velocidad de convergencia a 0.

En el artículo [1], se establece un teorema que ofrece cotas no-uniformes para las aproximaciones de Cauchy de la función de densidad de θ_t , que citamos a continuación:

Teorema 3.5. Para todo $k \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left(1 + |\theta|^{2[k/2]+2} \right) \left| f_t(z) - g_0(z) - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{a}_j(t) g_j(z) x^j \right| \leq c_k x^k \text{ para } t \geq 2,$$

con una sucesión de constantes c_1, c_2, \dots y $x = \left(\frac{1}{\ln \sqrt{t}} \right)$.

Ésta es una convergencia uniforme en $\theta \in \mathbb{R}$ y en $t \geq 2$. Donde g_j son las funciones densidad :

$$g_j(z) := G'_j(z) = \frac{d^j}{dy^j} \Big|_{y=1} \frac{y}{\pi(z^2 + y^2)},$$

y

$$\tilde{a}_j(t) := \frac{1}{j!} \exp \left\{ \frac{1}{-2t} \right\} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{h_l^{(j)}(0)}{l! t^l},$$

y

$$h_l(u) := \frac{2^{(u/2)-l} \Gamma(1+l-(u/2))}{\Gamma(1+l-u)}.$$

Si tomamos $k = 2$ en este teorema, se tendría el resultado que se demostró antes. La demostración de este teorema, es desarrollada a partir de la fórmula de inversión de la transformada de Fourier-Stieltjes de la función de distribución de θ_t y requiere argumentos analíticos más complejos que los usados en nuestra prueba. Es posible hallar una expansión para la función de distribución con los argumentos desarrollados en este trabajo, y ofrecer un resultado semejante al teorema (3.5), cuya demostración es significativamente sencilla.

(Este trabajo fué presentado en las XXIII Jornadas de Matemáticas, 2010)

Resultados sobre grupos finitos generados por reflexión

En el presente apéndice, recopilamos los Lemas y Teoremas del álgebra, fundamentales en la demostración del teorema central del Capítulo II. (proposición 2.2.8). Además de algunos resultados concernientes a la condición de *consistencia* estudiada en el mismo capítulo.

Proposición A.1. Si $t \in \mathbf{O}(\mathbf{V})$ y α es cualquier vector no nulo en \mathbf{V} , entonces $ts_\alpha t^{-1} = s_{t\alpha}$. En particular, si $w \in \mathbf{W}$, entonces $s_{w\alpha} \in \mathbf{W}$ siempre que $s_\alpha \in \mathbf{W}$.

Demostración: Como $t \in \mathbf{O}(\mathbf{V})$ entonces $(t\lambda, t\alpha) = (\lambda, \alpha)$ para todo $\alpha, \lambda \in \mathbf{V}$. La idea será probar que la reflexión $ts_\alpha t^{-1}$ envía a $t\alpha$ a su negativo y que además, fija cada punto del hiperplano $H_{t\alpha}$. Veamos,

$$ts_\alpha t^{-1}(t\alpha) = ts_\alpha \alpha = t(-\alpha) = -t\alpha,$$

Nótemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} \lambda \in H_\alpha &\Leftrightarrow (\lambda, \alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow (t\lambda, t\alpha) = 0 \quad (\text{usando la hipótesis}) \\ &\Leftrightarrow t\lambda \in H_{t\alpha} \end{aligned}$$

Ahora, para $\lambda \in H_\alpha$, se tiene :

$$(ts_\alpha t^{-1})(t\lambda) = ts_\alpha \lambda = t\lambda.$$

Por lo tanto,

$$ts_\alpha t^{-1} = s_{t\alpha}.$$

□

Proposición A.2. Sea Δ un sistema simple, contenido en el sistema positivo Π . Si $\alpha \in \Delta$, entonces $s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\}) = \Pi \setminus \{\alpha\}$.

Demostración:

Sean $\alpha \in \Delta$, $\beta \in \Pi$, con $\beta \neq \alpha$. Por definición podemos escribir:

$$\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma, \quad \text{con todos los } c_\gamma \geq 0.$$

Recordemos que con este sistema simple Δ y el sistema positivo Π está el sistema de raíces Φ , y en éste los únicos múltiplos de α son $\pm\alpha$, luego como $\beta \neq \alpha$, debe ocurrir que algún $c_\gamma > 0$ para $\gamma \neq \alpha$.

Ahora, aplicamos s_α a β :

$$s_\alpha \beta = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma s_\alpha \gamma$$

Nótese que ésta es una combinación lineal de $\gamma \in \Delta$, con los mismos coeficientes c_γ y como todos los coeficientes en esta expresión tienen el mismo signo, entonces $s_\alpha\beta$ debe ser positivo, es decir, $s_\alpha\beta \in \Pi$. Ahora, vamos a mostrar que $s_\alpha\beta \neq \alpha$

Supongamos por reducción al absurdo que $s_\alpha\beta = \alpha$, luego:

$$\begin{aligned} \beta &= (s_\alpha \circ s_\alpha)\beta = s_\alpha(s_\alpha\beta) = s_\alpha\alpha = -\alpha \Rightarrow \beta = -\alpha \notin \Pi \\ &\Rightarrow (\rightarrow\leftarrow) \end{aligned}$$

Así, s_α es una función inyectiva, pues envía $\Pi \setminus \{\alpha\}$ en el mismo y es sobreyectiva ya que:

Para $\theta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$, tal que $s_\alpha(\theta) = \zeta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$, se tiene:

$$s_\alpha^{-1}(\zeta) = s_\alpha^{-1}(s_\alpha(\theta)) = \text{Id}(\theta) = \theta$$

Por lo tanto,

$$s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\}) = \Pi \setminus \{\alpha\}.$$

□

Teorema A.3. Sea Δ un sistema simple fijo. Entonces \mathbf{W} está generado por las reflexiones s_α , ($\alpha \in \Delta$).

Demostración: Sea \mathbf{W}' el subgrupo de \mathbf{W} generado por las reflexiones simples s_α , $\alpha \in \Delta$. Debemos mostrar que $\mathbf{W}' = \mathbf{W}$.

En efecto, dividiremos la prueba en tres partes.

- (1) Para $\beta \in \Pi$, consideramos el conjunto $\mathbf{B} = \mathbf{W}'\beta \cap \Pi$. Nótese que, este conjunto contiene al menos al elemento β , así que \mathbf{B} es un conjunto no vacío de raíces positivas. Entonces, podemos escoger un elemento $\gamma \in \mathbf{B}$ ($\gamma \in \mathbf{W}'\beta$ y $\gamma \in \Pi$) de altura lo más pequeña posible.

Afirmación: $\gamma \in \Delta$.

Por definición, podemos escribir $\gamma = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$, con $c_\alpha \geq 0$. Además se tiene,

$$0 < (\gamma, \gamma) = (\gamma, \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha) = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha (\gamma, \alpha) \Rightarrow (\gamma, \alpha) > 0,$$

para algún $\alpha \in \Delta$.

Ahora, si $\gamma = \alpha$, entonces $\gamma \in \Delta$. Pero en el caso en que $\gamma \neq \alpha$, se tiene por la proposición A.0.9, que la raíz $s_\alpha\gamma \geq 0$. Además recordemos que por definición se tiene:

$$s_\alpha\gamma = \gamma - 2 \frac{(\gamma, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha,$$

es decir, $s_\alpha\gamma$ se obtiene sustrayéndole a γ un múltiplo positivo de α , en consecuencia,

$$ht(s_\alpha\gamma) < ht(\gamma)$$

Pero $s_\alpha \in \mathbf{W}'$, luego $s_\alpha\gamma \in \mathbf{W}'\beta$ y por lo tanto, $s_\alpha\gamma \in \mathbf{W}'\beta \cap \Pi$. Lo cual nos lleva a una contradicción con la escogencia inicial de γ . Así que, $\gamma = \alpha \in \Delta$. Es decir, γ es una raíz simple, por lo cual $\mathbf{W}'\beta \cap \Pi \subset \Delta$.

- (2) Sabemos que $\mathbf{W}'\Delta \subset \Phi$. Ahora argumentamos que $\mathbf{W}'\Delta = \Phi = -\Pi \sqcup \Pi$. En efecto, usaremos el hecho de que el sistema de raíces Φ es la unión disjunta de Π y $-\Pi$. En la parte (1) mostramos que dada cualquier raíz positiva su \mathbf{W}' -órbita interseca al sistema simple Δ , de manera que $\Pi \subset \mathbf{W}'\Delta$. En contraste, si β es negativo, entonces $-\beta \in \Pi$, y aplicando la parte (1) a $-\beta$ tenemos que $-\beta = w\alpha$ para algún $w \in \mathbf{W}'$, y algún $\alpha \in \Delta$. Entonces se tiene,

$$-\beta = w\alpha \Rightarrow \beta = w(-\alpha) = w(s_\alpha\alpha) = (ws_\alpha)\alpha,$$

con $ws_\alpha \in \mathbf{W}'$, de manera que $-\Pi \subset \mathbf{W}'\Delta$. Por lo tanto, $\mathbf{W}'\Delta = \Phi$.

- (3) Finalmente, como se definió desde el comienzo, \mathbf{W} es el grupo finito generado por todas las reflexiones s_α , $\alpha \in \Phi$. Entonces si tomamos cualquier generador s_β de \mathbf{W} , entonces por el paso (2) podemos escribir $\beta = w\alpha$ para algún $w \in \mathbf{W}'$ y algún $\alpha \in \Delta$. Luego, por la proposición A.0.7, se tiene

$$s_\beta = s_{w\alpha} = ws_\alpha w^{-1} \in \mathbf{W}',$$

Esto demuestra que $\mathbf{W} \subset \mathbf{W}'$ y en consecuencia

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}'.$$

□

Lema A.4. Si $K \subset I$ y $\alpha \in \Delta \cap K^\perp$, entonces $s_\alpha L = L$, donde

$$L = \{w \in \mathbf{W}^I : K \subset wI, \alpha \notin wI\}$$

Demostración: La prueba se llevará a cabo mostrando que: $\underbrace{s_\alpha L \subset L}_1$ y $\underbrace{L \subset s_\alpha L}_2$.

Recordemos que $\Delta \subset \Pi$, por lo que $\alpha > 0$.

Procedemos con (1): sea $w \in L$, luego por hipótesis y definición: $w \in \mathbf{W}^I$ tal que $wI \subset \Pi$, $K \subset wI$, $\alpha \notin wI$.

Entonces por la Proposición 1.4 de [9], podemos deducir que α es la única raíz positiva que es enviada a su negativo vía s_α : $s_\alpha\alpha = -\alpha$, lo cual implica que, $s_\alpha wI \subset \Pi$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \alpha \in s_\alpha wI &\Rightarrow s_\alpha\alpha \in s_\alpha s_\alpha wI \\ &\Rightarrow -\alpha \in wI \\ &\Rightarrow -\alpha \in \Pi \\ &\Rightarrow (\rightarrow \leftarrow) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\alpha \notin s_\alpha wI \tag{A.1}$$

Por otro lado, como $\alpha \in K^\perp$ entonces, $s_\alpha k = k$, $\forall k \in K$, luego

$$K = s_\alpha K \subset s_\alpha wI \quad (\text{A.2})$$

Así, de (A.1) y (A.2) se obtiene (1). Para obtener (2) aplicamos s_α a (1), así

$$s_\alpha s_\alpha L \subset s_\alpha L \Rightarrow L \subset s_\alpha L$$

Por lo tanto,

$$s_\alpha L = L$$

□

Lema A.5. Si $g : \mathbf{W}^I \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in \Delta$ son tales que $g(w) = 0$ cuando $\alpha \in wI$ y $g(w) = g(s_\alpha w)$ cuando $\alpha \notin wI$, entonces $\sum_{w \in \mathbf{W}^I} \varepsilon(w)g(w) = 0$.

Demostración: Aplicamos el Lema anterior con $K = \emptyset$, quedándonos $\alpha \in \Delta$ y $L = \{w \in \mathbf{W}^I : \alpha \notin wI\}$. Sea $w \in \mathbf{W}^I$.

Si $\alpha \in wI$ entonces, $\sum_{w \in \mathbf{W}^I} \varepsilon(w)g(w) = 0$, trivialmente.

Si $\alpha \notin wI$ entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \mathbf{W}^I} \varepsilon(w)g(w) &= \sum_{w \in L} \varepsilon(w)g(w) \\ &= \sum_{w \in L} \varepsilon(s_\alpha w)g(s_\alpha w) \\ &= \sum_{w \in L} \varepsilon(s_\alpha) \varepsilon(w)g(w) \\ &= \sum_{w \in L} (-1) \varepsilon(w)g(w) \\ &= -\sum_{w \in \mathbf{W}^I} \varepsilon(w)g(w) \end{aligned}$$

Por lo cual, debe ocurrir en este caso también que $\sum_{w \in \mathbf{W}^I} \varepsilon(w)g(w) = 0$. Así se tiene lo pedido. □

Lema A.6. Si la condición (C1) es satisfecha, entonces

$$\sum_{w \in \mathbf{W}^I} \varepsilon(w) = \sum_{w \in \mathbf{U}} \varepsilon(w)$$

Demostración: Por el Lema 2.2.1, si $K \subset I$ y $\alpha \in \Delta \cap K^\perp$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \mathbf{W}^I, K \subset wI, \alpha \notin wI} \varepsilon(w) &= \sum_{w \in L} \varepsilon(w) = \sum_{w \in L} \varepsilon(s_\alpha w) = \sum_{w \in L} \varepsilon(s_\alpha) \varepsilon(w) \\ &= - \sum_{w \in \mathbf{W}^I, K \subset wI, \alpha \notin wI} \varepsilon(w) \end{aligned}$$

por lo cual,

$$\sum_{w \in \mathbf{W}^I, K \subset wI, \alpha \notin wI} \varepsilon(w) = 0$$

esto implica que la siguiente suma

$$\sum_{w \in \mathbf{W}^I, K \subset wI} \varepsilon(w) = \sum_{w \in \mathbf{W}^I, K \subset wI, \alpha \notin wI} \varepsilon(w) + \sum_{w \in \mathbf{W}^I, K \subset wI, \alpha \in wI} \varepsilon(w)$$

se reduce a :

$$\sum_{w \in \mathbf{W}^I, K \subset wI} \varepsilon(w) = \sum_{w \in \mathbf{W}^I, K \cup \{\alpha\} \subset wI} \varepsilon(w). \quad (\star)$$

Como (C1) es satisfecha, entonces

$\exists J \in \mathcal{O}(\Delta \cap I)$ tal que si $w \in \mathbf{W}$ con $J \subset wI \subset \Pi$, entonces $wI = I$.

Ahora, si $J = \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$, entonces aplicamos (\star) de manera sucesiva a $(K, \alpha) = (\emptyset, \alpha_1)$, $(K, \alpha) = (\{\alpha_1\}, \alpha_2)$, \dots , hasta agotar a J .

Procedemos por inducción sobre q y verificamos en cada paso las hipótesis en las cuales se llega a (\star) .

Claramente, cuando tomamos $K = \emptyset$ y $\alpha = \alpha_1$, estamos en las hipótesis requeridas pues, $\emptyset \subset I$ y $\alpha_1 \in \Delta$ y según (\star) :

$$\sum_{w \in \mathbf{W}^I} \varepsilon(w) = \sum_{w \in \mathbf{W}^I, \{\alpha_1\} \subset wI} \varepsilon(w)$$

Veamos que es cierto para $q = 2$. Basta recordar que $J = \{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathcal{O}(\Delta \cap I)$, por lo que $K = \{\alpha_1\} \subset I$, $\alpha_1 \perp \alpha_2$ y en consecuencia $\alpha_2 \in \Delta \cap K^\perp$, aplicamos (\star) y la segunda suma de la igualdad anterior nos queda:

$$\sum_{w \in \mathbf{W}^I, \{\alpha_1\} \subset wI} \varepsilon(w) = \sum_{w \in \mathbf{W}^I, \{\alpha_1, \alpha_2\} \subset wI} \varepsilon(w)$$

Ahora, suponemos cierto para $q - 2$:

$$\sum_{w \in \mathbf{W}^I, \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q-2}\} \subset wI} \varepsilon(w) = \sum_{w \in \mathbf{W}^I, \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q-1}\} \subset wI} \varepsilon(w) \quad (\text{H.I})$$

En este paso, probamos que es cierto para q . Ahora, $K = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q-1}\} \subset I$ y $\alpha_q \in \Delta \cap K^\perp$, por (C1). Luego,

$$\sum_{w \in \mathbf{W}^I, \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q-1}\} \subset wI} \varepsilon(w) = \sum_{w \in \mathbf{W}^I, \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q\} \subset wI} \varepsilon(w) = \sum_{w \in \mathbf{W}^I, J \subset wI} \varepsilon(w)$$

Así, nos quedamos con los extremos de esta cadena de igualdades,

$$\sum_{w \in \mathbf{W}^I} \varepsilon(w) = \sum_{w \in \mathbf{W}^I, J \subset wI} \varepsilon(w)$$

Además, (C1) nos dice que la suma del lado derecho de la igualdad es sobre elementos w tales que $wI = I$, por lo cual podemos reescribirla como sigue:

$$\sum_{w \in \mathbf{W}^I} \varepsilon(w) = \sum_{w \in U} \varepsilon(w)$$

□

Proposición A.7. Supongamos que I es consistente. Entonces

(a) $\sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A = 1$

(b) Si $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in \Delta$ son tales que $f(A) = 0$ cuando $\alpha \in A$, y $f(A) = f(s_\alpha A)$ cuando $\alpha \notin A$, entonces $\sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A f(A) = 0$

Demostración: Como I es consistente, se cumplen (C1) y (C2).

Sea $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$. La condición (C2) nos permite asignar un signo a cada elemento de \mathcal{I} via $\varepsilon_A := \varepsilon(w)$, $\forall A \in \mathcal{I}$, donde $w \in \mathbf{W}^I$ con $wI = A$, entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \mathbf{W}^I} \varepsilon(w) f(wI) &= \sum_{A \in \mathcal{I}} \sum_{wI=A} \varepsilon(w) f(wI) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{I}} |\{w \in \mathbf{W}^I : wI = A\}| \varepsilon_A f(A) \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos lo siguiente,

Afirmación

Sea $A \in \mathcal{I}$ fijo y arbitrario. Sea $C_A = \{w : wI = A\}$. Entonces $|C_A| = |U|$.

En efecto,

Como $A \in \mathcal{I}$, entonces $A = \tilde{w}I$ con $\tilde{w} \in \mathbf{W}^I$. Sea $w \in C_A$, luego

$$\begin{aligned} wI = A &\Rightarrow wI = \tilde{w}I \\ &\Rightarrow I = w^{-1}\tilde{w}I \\ &\Rightarrow w^{-1}\tilde{w} \in U \end{aligned}$$

Ahora, definimos la función $G : C_A \rightarrow U$ dada por $G(w) = w^{-1}\tilde{w}$. Pero esta función es claramente, una biyección. Por lo tanto, $|C_A| = |U|$.

Así, en el cálculo anterior nos queda:

$$\sum_{w \in \mathbf{W}^I} \varepsilon(w) f(wI) = |U| \sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A f(A)$$

Para demostrar (a) : hacemos $f = 1$ y usamos el Lema 7.3 (pués (C1) se cumple):

$$\begin{aligned} \sum_{w \in U} \varepsilon(w) &= \sum_{w \in \mathbf{W}^I} \varepsilon(w) = |U| \sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A f(A) \\ &\Rightarrow \sum_{w \in U} \varepsilon(w) = |U| \sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A f(A) \\ &\Rightarrow |U| \cdot 1 = |U| \sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A f(A) \quad (\text{Por (C2)}) \\ &\Rightarrow \sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A f(A) = 1 \end{aligned}$$

Para (b): Usando el Lema 7.2, se obtiene

$$\sum_{A \in \mathcal{I}} \varepsilon_A f(A) = 0$$

□

Consistencia

Lema A.8. Sopongamos que existe $J \in \mathcal{O}(\Delta)$, el cual es extendible únicamente a un subconjunto ortogonal maximal (respectivamente semi-ortogonal) $I \subset \Pi$, esto significa que no existe un subconjunto ortogonal (respectivamente semi-ortogonal) estrictamente más grande que I . En este caso, I satisface la condición (C1).

Demostración: Si $J \subset wI \subset \Pi$, entonces wI es un subconjunto ortogonal maximal (respectivamente semi-ortogonal) de Π y la propiedad de extensión única dice que $wI = I$. □

El caso A_{k-1} .

Consideremos $\mathbf{W} = \mathcal{S}_k$ actuando sobre \mathbb{R}^k por permutación de los vectores básicos canónicos. Entonces podemos tomar $\mathbf{V} = \mathbb{R}^k$ ó $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^k : x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0\}$, $\Pi = \{e_i - e_j, 1 \leq i < j \leq k\}$ y $\Delta = \{e_i - e_{i+1}, 1 \leq i \leq k-1\}$

. La escojencia de I depende de la paridad de k . Si k es par, tomamos

$$I = \{e_1 - e_2, e_3 - e_4, \dots, e_{k-1} - e_k\}.$$

Si k es impar, entonces

$$I = \{e_1 - e_2, e_3 - e_4, \dots, e_{k-2} - e_{k-1}\}.$$

Proposición A.9. (i) I es consistente y ortogonal.

- (ii) El conjunto \mathcal{I} puede ser identificado con el conjunto $P_2(k)$ de particiones de $[k]$ en $k/2$ pares si k es par y en $(k-1)/2$ pares y un singulete si k es impar.
- (iii) Bajo esta identificación, el signo ε es justamente la paridad del número de "cruces" (si k es par, consideramos un par extra formado por el singulete y un punto formal 0 colocado estrictamente a la izquierda de 1 y usamos este par para calcular el número de cruces).

- [1] BENTKUS, V. & PAP, G. & YOR, M.(2001). *Optimal Bounds for Cauchy Approximations for the Winding Distribution of Planar Brownian Motion*.
- [2] BOROVNIK, A. & A. (2000). *Mirrors and Reflections: The Geometry of Finite Reflection Groups*. Version 01 .
- [3] BRASSESCO, Stella. (1992). *A note on Planar Brownian Motion*. The Annals of Probability . **20** 1498-1503.
- [4] BREIMAN, Leo. (1992). *Probability*. Philadelphia. Society for Industrial and Applied Mathematics, c1992. Classics in applied mathematics. Originally published: Reading, Mass. : Addison-Wesley Pub. Co., 1968, in series: Addison-Wesley series in statistics.
- [5] DOUMERC, Y. & O'CONNELL, N. (2005). *Exit Problems associated with Finite Reflection Groups*. **132** 501-538.
- [6] DURRETT, R. (1984). *Brownian Motion and Martingales in Analysis*. The Wadsworth Mathematics Series.
- [7] FREEDMAN, D. (1971). *Brownian Motion and Diffusion*. Holden-Day, San Francisco.
- [8] GRADSHTEYN, I. & RYZHIK, I. (1980). *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, Inc.
- [9] HUMPHREYS, James. (1990). *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge University Press .
- [10] KARATZAS, I. & SHREVE, Steven (1988). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag. New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo.
- [11] MIKOSCH, Thomas. (1998). *Elementary Stochastic Calculus , with Finance in View*. Vol. 6. World Scientific. Singapore New Jersey London Hong Kong.
- [12] OKSEND AHL
- [13] ROGERS, L. & Williams, D. (1994). *Diffusions, Markov Processes and Martingales*. Volumen 1, Foundations. Cambridge University Press.
- [14] SPITZER, F. (1958). *Some theorems concerning two dimensional Brownian motion*. Trans. Amer. Math. Soc. **87** 187-197.
- [15] WATSON, G. (1966). *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Second Edition. Cambridge University Press .
- [16] WHITTAKER, E. & WATSON, G. (1927). *A Course of MODERN ANALYSIS*. Fourth Edition. Cambridge University Press .
- [17] YOR, Marc. (1992). *Some aspects of Brownian Motion.. Part I: Some Special Functionals*, Birkhäuser-Verlag. Basel Boston Berlin .

