



Control de la ecuación de Mullins-Sekerka de transición de fases: El caso restringido a esferas¹

Trabajo para optar al título de Máster en Iniciación a la Investigación en Matemáticas

Presentado por:

Leyter Potenciano Machado

Dirigido por:

Enrique Zuazua Iriondo

País Vasco - Septiembre 2011

¹Este trabajo ha sido financiado por los Proyectos MTM2008-03541 y MTM2011-29306-C02-00 de MICINN España, Proyecto PI2010-04 del Gobierno Vasco, Proyecto Europeo ERC FP7-246775 NUMERIWAVES y por el Programa OPTPDE de la ESF Research Network.

A mi queridísima familia, motor y motivo de mi existencia ...

Agradecimientos

El número de personas que debo y quiero agradecer, es enorme. Ni las más de 50 páginas de este trabajo alcanzaría para mencionarlas. Primeramente, con el permiso de todos, quiero agradecer infinitamente a mi familia. Sin duda, ni temor a equivocarme, son los pilares de mi motivación y fuerzas para alcanzar la superación en todos los sentidos.

También quiero agradecer al Prof. Enrique Zuazua Iriondo, por la titánica tarea de conducir este trabajo (inicialmente plagado de errores y horrores). Por su disposición, en todo momento, para charlar y discutir sobre Matemática.

También agradecer a cada uno de mis compañeros de BCAM, gracias por la amistad brindada hacia mi persona. Ustedes hacen que el día a día sea agradable.

Además, agradecer a cada uno de los profesores del Máster. Por cada una de sus enseñanzas en las aulas, con una cuota de motivación indirecta al observar cada uno de sus trabajos.

Resumen

La ecuación de Mullins-Sekerka de transición de fases describe la separación de fases en el proceso de solidificación de metales y aleaciones metálicas. Una de las fases está formada por partículas que crecen y decrecen en tiempo, mientras que la otra es el medio donde evolucionan. Experimentalmente se comprueba que, cuando las partículas están suficientemente separadas, éstas se aproximan a esferas mientras se solidifican [26]. Por ello, en este trabajo analizamos un modelo llamado Monopolo, que describe la dinámica de los radios (y por lo tanto de la interfase) de un número finito de partículas con centros fijos y que se caracteriza por el hecho que el volumen total de las partículas se conserva mientras que la suma de sus áreas es decreciente. La relación entre el modelo de Mullins-Sekerka y el Monopolo se da por restricción del primero a partículas esféricas. Por ello, al modelo Monopolo también se le denomina ecuación de Mullins-Sekerka aproximada por monopolos [38],[13].

Presentamos algunos resultados ya conocidos, tales como la conservación del orden de los radios, la inestabilidad de los puntos de equilibrio y la desaparición en tiempo finito de partículas, así como cotas para estos tiempos [32], [11]. Asimismo, estudiamos el problema del control y probamos el control local alrededor del punto de equilibrio estable e inestable, lo cual constituye la contribución más original de este trabajo.

Índice general

1. Introducción	6
1.1. Modelos de difusión-interfase	7
1.2. Modelos de forma-interfase	9
1.3. Modelos de campo-interfase	10
1.4. Relación entre los modelos	11
2. Caso particular: $M = 2, n = 3$	17
2.1. Existencia, unicidad y conservación del orden	18
2.2. Análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio	20
2.3. Singularidad en tiempo finito	21
2.4. Acotación de $T_{\text{máx}}$	22
2.5. Simulaciones numéricas	25
3. Modelo Monopolo - Caso general	28
3.1. Existencia, unicidad y conservación del orden	29
3.2. Análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio	33
3.3. Singularidad en tiempo finito	34
3.4. Acotación de T_1	37
4. Controlabilidad del modelo Monopolo	39

4.1. Control al punto de equilibrio inestable	40
4.1.1. Cálculo de la matriz jacobiana	41
4.1.2. Análisis del sistema linealizado	43
5. Conclusiones	47
6. Apéndice	49
6.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	49
6.2. Control de sistemas dinámicos	51
6.3. Código Matlab	52

Capítulo 1

Introducción

La solidificación es un fenómeno físico de transformación de fase, de líquido a sólido. Es un importante proceso metalúrgico ya que el proceso de manufactura de casi todos los objetos creados por el hombre involucra la solidificación en algún momento. Los metales, los polímeros y el vidrio se forman, en general, por solidificación de material fundido. Por ejemplo, el acero (que es un elemento muy usado en Construcción Civil) es el resultado del proceso de solidificación en la aleación del hierro con el carbono (por ejemplo, véase [22]).

Durante el proceso de solidificación de un metal o aleación metálica se observa la formación de dos fases, una constituida por partículas y la otra por el medio donde evolucionan. Inicialmente, el patrón de formación de las fases es muy complicado y teniendo en cuenta que la evolución y la forma de la interfase influye considerablemente en la calidad final del material, resulta de gran importancia estudiar las propiedades que caracterizan la solidificación (por ejemplo, véase [27]).

En este tipo de fenómenos los materiales se encuentran en estado líquido y mediante un proceso mecánico de enfriamiento se solidifica. Durante este proceso se distinguen principalmente dos etapas:

1. Nucleación: La disminución de la energía causada por el enfriamiento produce una aglomeración de partículas permitiendo la formación de núcleos.
2. Cristalización: Crecimiento y decrecimiento de los núcleos formados a medida que disminuye la temperatura.

Lo que experimentalmente se observa durante el proceso de solidificación, es la formación de una gran cantidad de núcleos, que de ahora en adelante llamaremos *partículas* (véase figura 1.3). Así, de acuerdo a la primera ley de la termodinámica (por ejemplo, véase [7]), el sistema evoluciona de tal forma que con respecto a las partículas, el área total es decreciente y el volumen se conserva. Las partículas de mayor tamaño crecen a expensas de las menores, que encogen y desaparecen en un tiempo finito. Este comportamiento es denominado madurez Ostwald [38].

Los modelos que describen estos fenómenos se denominan modelos de transición de fases, los cuales son clasificados en tres tipos: difusión-interfase, forma-interfase y campo-interfase.

1.1. Modelos de difusión-interfase

En este tipo de modelos, un parámetro varía continuamente y es usado para medir el estado de la fase. Un ejemplo representativo de este tipo de modelos, es la *ecuación de Cahn-Hilliard*. Si denotamos por $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, representando el molde donde evoluciona el proceso de solidificación; u la concentración y $\epsilon \ll 1$ un parámetro continuo, entonces la *ecuación de Cahn-Hilliard* viene dada por

$$\begin{cases} u_t = -\Delta \left[\epsilon \Delta u - \frac{1}{\epsilon} W'(u) \right] & , \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \eta} = 0 & , \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $W(u) = \frac{1}{4} (u^2 - 1)^2$.

La ecuación (1.1) describe la evolución espacio-temporal de la concentración $u(x, t)$ en una aleación binaria. Una característica importante de este modelo es la conservación de la masa total. En efecto,

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x, t) = \bar{u},$$

donde \bar{u} es independiente del tiempo.

Durante la primera etapa de evolución de la variable temporal en la *ecuación de Cahn-Hilliard*, se observa un interesante fenómeno denominado descomposición espinodal, por el cual una solución de dos o más componentes puede separarse en fases diferenciadas, de distinta composición química y propiedades físicas diferentes. En una segunda etapa de evolución de la variable temporal, se observa nucleación, para luego dar paso a un fenómeno del tipo madurez Ostwald [38] (véase figura 1.1).

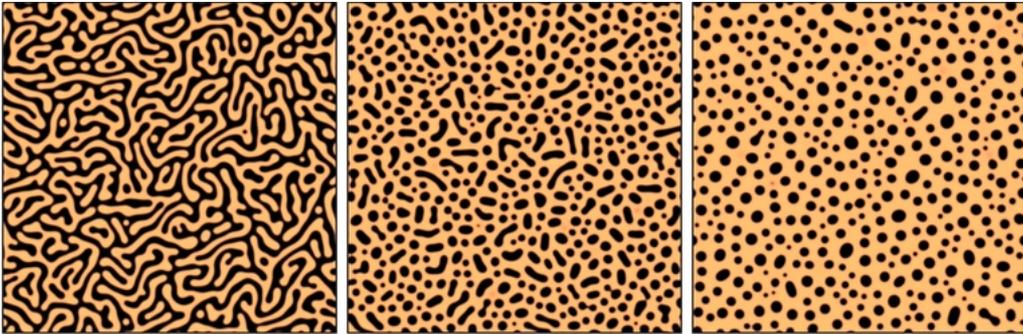


Figura 1.1: Evolución de la ecuación de Cahn Hilliard.

Con respecto al estudio de esta ecuación, existen en la literatura muchos resultados, que versan desde la existencia, unicidad y regularidad de soluciones, comportamiento asintótico,

véase [21] y las referencias que contiene.

1.2. Modelos de forma-interfase

Este tipo de modelos considera las fases separadas mediante una interfase, cuya dinámica se analiza. Un ejemplo representativo de este tipo de modelos es la *ecuación de Mullins-Sekerka* y los ingredientes para describirla son: un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $G_t \subset \Omega$ la región ocupada por las partículas y $\Gamma_t = \partial G_t$ la interfase (frontera de las partículas). Entonces la *ecuación de Mullins-Sekerka* viene dada por

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & , \text{ en } \Omega/\Gamma(t) \\ [n \cdot \nabla u]_{-}^{+} = v & , \text{ en } \Gamma(t) \\ u = \kappa & , \text{ en } \Gamma(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

donde u es la concentración (dependiendo del problema específico, puede representar el potencial químico, la temperatura, etc), n es el vector normal unitario en la interfase Γ_t , v es la velocidad normal en la interfase y κ es la curvatura media de Γ_t . El salto de la derivada normal de u al atravesar la interfase Γ_t es $[n \cdot \nabla u]_{-}^{+} = n \cdot \nabla u^{+} - n \cdot \nabla u^{-}$, donde u^{+} , u^{-} son los límites de u en Γ_t en la dirección normal desde el interior y exterior de Γ_t .

Si Ω es acotado, la condición en la frontera viene dada por

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad , \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, la condición viene dada por

$$u(x) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty.$$

Con respecto a la ecuación (1.2), en dimensión dos y dominios acotados, X. Chen [36] probó la existencia de soluciones locales. También, probó la existencia de soluciones globales, bajo la suposición que la condición inicial de la interfase es próxima a una esfera. En

dimensiones mayores, en [9] y [16] se prueba la existencia y regularidad de soluciones. En [17] se prueba la existencia de soluciones globales usando la teoría de variedad central.

Por otro lado, en dominios no acotados, S. Dai [11] probó la existencia de soluciones débiles, usando el teorema de Lax-Milgram.

Para desarrollo de esquemas numéricos de la ecuación (1.2), véase, por ejemplo [3], [12] y las referencias que contienen.

1.3. Modelos de campo-interfase

En este tipo de modelos las partículas intercambian masa a través de un campo $\theta(t)$, el cual puede ser determinado explícitamente, usando el hecho que el volumen total se conserva. En este caso, los modelos dados por Lifshitz, Slyozov y Wagner (LSW) [24], [39], son los más representativos. La teoría de LSW considera partículas esféricas en \mathbb{R}^3 , con centros fijos y de radio R . Además, el crecimiento y decrecimiento de las partículas es llevada a cabo por la difusión del volumen [24]. El radio de cada partícula es gobernado por la ecuación siguiente:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{R + \beta} \left(\theta(t) - \frac{1}{R} \right), \quad (1.3)$$

donde $\beta \geq 0$ es una constante que representa la velocidad cinética en la interfase, θ es una función que depende del tiempo e independe de la variable espacial y representa el campo mediante el cual las partículas intercambian masa (de aquí se deriva el nombre de campo-interfase).

Con respecto al modelo LSW, se han dedicado esfuerzos para obtener estimaciones de la velocidad de crecimiento y decrecimiento. En ese sentido, en [14], [15] se demuestra que la velocidad de crecimiento es del orden $t^{1/3}$. Para más resultados respecto a este modelo,

véase, por ejemplo, [32] y las referencias que contiene.

1.4. Relación entre los modelos

Existe una relación entre las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3). El modelo de LSW se deriva de Mullins-Sekerka, y éste de Cahn-Hilliard.

Como mencionamos anteriormente, durante la primera etapa de evolución temporal de la *ecuación de Cahn-Hilliard* se observa descomposición espinodal. Inicialmente el patrón de descomposición es complicado. En una segunda etapa de la evolución temporal se observa la formación de núcleos, fenómeno denominado como nucleación. En esta etapa el crecimiento de estos núcleos se debe a la difusión de la concentración. La característica principal durante la nucleación es la siguiente: la difusión de la concentración en cada una de las fases, es mucho más grande comparada con la difusión en la interfase. Por lo tanto, bajo estas condiciones, se puede considerar $|u_t| \ll 1$ en la interfase.

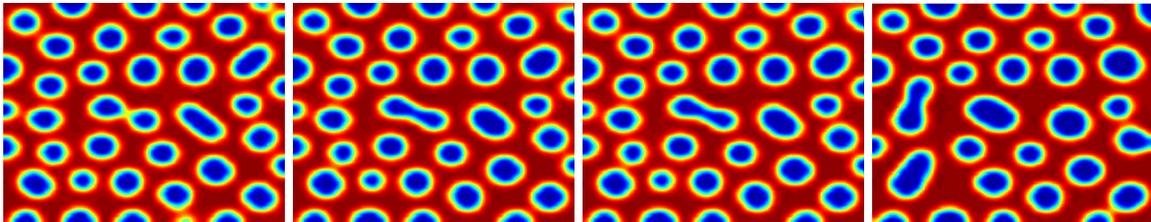


Figura 1.2: Proceso de Nucleación.

En ese sentido, en dominios acotados, R. Pego [31], derivó formalmente la ecuación de *Mullins-Sekerka* como un límite asintótico de la ecuación de *Cahn-Hilliard*, cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Después, N. Alikakos, P. Bates y X. Chen derivaron rigurosamente este resultado [1], usando análisis espectral. Con menos restricciones pero con la suposición de soluciones radiales

simétricas, B. Stoth [35] probó también esta convergencia.

En una primera etapa de evolución de la variable temporal, en el modelo de *Mullins-Sekerka* se observa la formación de una gran cantidad de núcleos, surgiendo el fenómeno de madurez de Ostwald [38]. El volumen total es preservado, entonces por la primera ley de la termodinámica (la energía se conserva), el área total de las fronteras de las partículas disminuye. En una segunda etapa, se observa que los núcleos se cohesionan de tal forma que se forman partículas casi esféricas, casi estáticas y separadas [19]. En ese sentido, la teoría de LSW considera partículas esféricas en \mathbb{R}^3 , en ese caso, la interfase de la ecuación de *Mullins-Sekerka* está formada por la unión de las fronteras de estas esferas.

Denotamos respectivamente por x_i y R_i el centro y el radio de cada partícula. Es conocido que, en cada partícula esférica la solución principal de la ecuación de Laplace es de la forma $a_i/|x - x_i|$, donde a_i son constantes. Por el principio de superposición, la solución de la ecuación de *Mullins-Sekerka* puede ser aproximada por la suma de estos términos monopolos. Más precisamente, en [13] se demuestra que existe una función $\theta(t)$ independiente de la variable espacial x , de tal manera que la concentración puede ser aproximada por una superposición de monopolos (de aquí es que se deriva el nombre del modelo *Monopolo*) de la forma siguiente:

$$u(t, x) = \sum \frac{a_i}{|x - x_j|} + \theta(t).$$

La aproximación por términos monopolos es debido a que, tal como lo mencionamos, las funciones

$$\psi_i(x) = R_i \min \left(1, \frac{R_i}{|x - x_i|} \right) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

cumplen la siguiente condición:

$$\Delta \psi_i(x) = 0 \quad (|x - x_i| \neq R_i) \quad , \quad \eta \cdot \psi_i(x) = -1 \quad (|x - x_i| = R_i) \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Es más, mediante el *método del flujo gradiente* (este método consiste en la definición de una métrica, en el espacio tangente al conjunto formado por las fronteras de las partículas esféricas, véase [32], [13], [11]) se muestra que la función $\theta(t)$ cumple la ecuación siguiente:

$$\frac{dR_i}{dt} = \frac{1}{R_i + \beta} \left(\theta(t) - \frac{1}{R_i} \right). \quad (1.4)$$

Entonces, si tomamos el límite cuando $\beta \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{R_i + \beta} \left(\theta(t) - \frac{1}{R_i} \right) \right] &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{R_i + \frac{1}{\beta}} \left(\theta(t) - \frac{1}{R_i} \right) \right] \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[\frac{\beta}{\beta R_i + 1} \left(\theta(t) - \frac{1}{R_i} \right) \right] \\ &= \theta(t) - \frac{1}{R_i}. \end{aligned}$$

Entonces, del cálculo de este límite y de (1.4), se tiene

$$\frac{dR_i}{dt} = \theta(t) - \frac{1}{R_i}. \quad (1.5)$$

La derivación de este modelo fue hecha considerando partículas esféricas en \mathbb{R}^3 . Como es mostrado en [11], la ecuación 1.5 sigue siendo válida en \mathbb{R}^n . En ese sentido, la función $\theta(t)$ puede ser calculada explícitamente. En efecto, por la conservación del volumen, se tiene la siguiente igualdad

$$\sum_{i=1}^M R_i^n = \text{cte}. \quad (1.6)$$

Entonces

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^M R_i^n \right) = n \sum_{i=1}^M R_i^{n-1} \frac{dR_i}{dt},$$

y

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^M R_i^{n-1} \frac{dR_i}{dt} = \sum_{i=1}^M R_i^{n-1} \left(\theta(t) - \frac{1}{R_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^M (R_i^{n-1} \theta(t) - R_i^{n-2}) = \theta(t) \sum_{i=1}^M R_i^{n-1} - \sum_{i=1}^M R_i^{n-2}.
\end{aligned}$$

En consecuencia se tiene la igualdad

$$\theta(t) = \frac{\sum_{i=1}^M R_i^{n-2}}{\sum_{i=1}^M R_i^{n-1}}. \quad (1.7)$$

Finalmente de (1.5) y (1.7), se obtiene el modelo Monopolo (1.8).

$$\frac{dR_i}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^M R_i^{n-2}}{\sum_{i=1}^M R_i^{n-1}} - \frac{1}{R_i}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (1.8)$$

donde R_i denota el radio de cada partícula y M es la cantidad total de partículas.

Observemos que la *ecuación de Mullins-Sekerka* modela la concentración, dentro y fuera de las partículas, mientras que el modelo *Monopolo* modela concretamente el crecimiento y decrecimiento de las partículas por medio de la dinámica de sus radios. Como se muestra a lo largo de este trabajo, el modelo Monopolo permite apreciar la desaparición en tiempo finito de las partículas. Cuando esto ocurre el sistema (1.8) se reinicia con una partícula menos, es decir, el modelo (1.8) tendrá $M - 1$ ecuaciones.

A lo largo de este trabajo, con respecto al modelo Monopolo presentamos resultados teóricos conocidos, como por ejemplo: desaparición en tiempo finito de partículas, conservación del orden respecto a los radios iniciales, no negatividad de las soluciones, etc. Sin

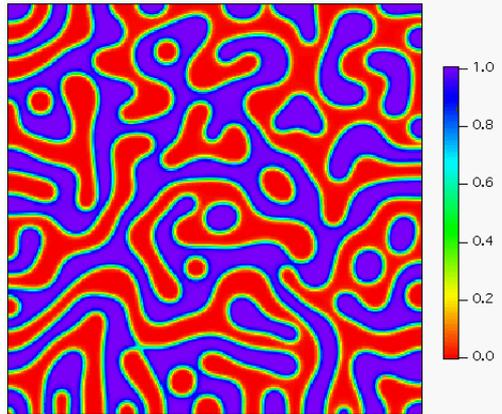


Figura 1.3: Formación de dos fases en el proceso de solidificación.

embargo, existen escasos resultados sobre el control de las ecuaciones de *Mullins-Sekerka* y *Monopolo*, ([23], [6]).

La contribución de este trabajo consiste en probar la controlabilidad del modelo Monopolo, a un punto de equilibrio inestable.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en el capítulo 2 analizamos el caso de dos partículas en \mathbb{R}^3 . Mostramos la existencia y unicidad de la solución vía el *teorema de Picard*, la extinción en tiempo finito de una de las partículas, cotas superiores e inferiores de este tiempo, la conservación del orden de los radios, el análisis de estabilidad y presentamos algunas simulaciones numéricas que ponen de manifiesto estas propiedades. Los correspondientes códigos se incluyen en el Apéndice al final de la memoria.

La dinámica del caso general es más complicada. Aún así, los cálculos usados en el caso particular nos brindan los métodos para poder abordarlo, por lo cual en el capítulo 3 se muestran las mismas propiedades del caso particular. Como consecuencia de la conserva-

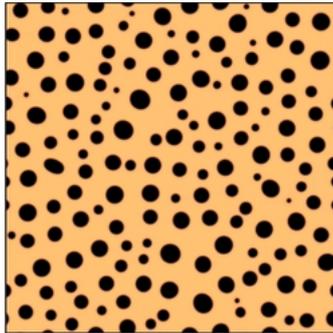


Figura 1.4: Partículas casi esféricas en el proceso de solidificación.

ción del orden de los radios, tanto en el caso particular como en el general se muestra la no negatividad de las soluciones de (1.8). Además mostramos que el punto de equilibrio en el cual todos los radios son iguales es inestable.

Una vez comprendida y analizada la dinámica del modelo Monopolo, en el capítulo 4 se analiza el control del mismo. Probamos el *control local* alrededor del punto en el cual todas las partículas tienen el mismo radio mediante un *único control afín*. Esto se hace mediante *linealización* y el *teorema de Kalman*. Como consecuencia, también obtenemos la controlabilidad al punto de equilibrio estable.

Finalmente, en el capítulo 5 se dan las conclusiones del estudio realizado y se establecen algunas futuras direcciones de investigación.

Capítulo 2

Caso particular: $M = 2, n = 3$

Para tener una idea de la dinámica de las soluciones del modelo Monopolo (1.8), primero analizamos un caso particular: dos partículas esféricas en \mathbb{R}^3 . Además, para facilitar la notación y los cálculos escribimos $R_1 = x, R_2 = y$.

Luego, en este caso, el MP viene dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{1}{x} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{1}{y} \end{cases} \quad (2.1)$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 > 0, \quad y(0) = y_0 > 0. \quad (2.2)$$

Con ley de conservación

$$x^3 + y^3 = \text{cte.} \quad (2.3)$$

A lo largo de este capítulo demostramos una serie de resultados que se resumen en el siguiente teorema:

Teorema 2.0.1 *Consideremos el sistema (2.1), con condiciones iniciales $x_0, y_0 > 0$. Entonces, el sistema (2.1) posee una única solución $(x(t), y(t))$ definida en $[0, T_{max})$, tal que*

1. *Si $x_0 = y_0$, entonces, no hay movimiento.*
2. *Si $x_0 < y_0$, entonces, x, y son funciones no negativas, decreciente y creciente, respectivamente. Además*

$$\lim_{t \rightarrow T_{max}} x(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow T_{max}} y(t) = (x_0^3 + y_0^3)^{1/3}.$$

3. *Si $x_0 > y_0$. Entonces, x, y son funciones no negativas, creciente y decreciente, respectivamente. Además*

$$\lim_{t \rightarrow T_{max}} x(t) = (x_0^3 + y_0^3)^{1/3} \quad , \quad \lim_{t \rightarrow T_{max}} y(t) = 0.$$

En los últimos dos casos, existe $C > 0$ tal que

$$\frac{x_0^2}{2} \leq T_{max} \leq \frac{x_0 (x_0^3 + y_0^3)^{1/3}}{C}.$$

Físicamente, este teorema indica que en el caso de dos partículas en \mathbb{R}^3 , la partícula de menor condición inicial desaparece en un tiempo finito. La otra partícula crece en radio, pero por la ley de conservación no puede hacerlo arbitrariamente. Por lo tanto, los puntos de equilibrio $(0, (\lambda/2)^{1/3})$ y $((\lambda/2)^{1/3}, 0)$ son estables, ya que el sistema se detiene al alcanzarlos.

2.1. Existencia, unicidad y conservación del orden

Definamos las funciones escalares

$$f_1(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} \quad , \quad f_2(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2} - \frac{1}{y}.$$

Calculemos sus respectivas derivadas parciales

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{(x-y)^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{(x-y)^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{(x-y)^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{(x-y)^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{y^2}.$$

Estas funciones son continuas en el conjunto abierto $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Entonces, por el *teorema de Picard*, para cada condición inicial $x_0, y_0 > 0$, el sistema (2.1)-(2.2) posee una única solución definida en una vecindad de $(0, (x_0, y_0))$. Más aún, la solución está definida en un intervalo maximal $I_{\text{máx}} = [0, T_{\text{máx}})$.

Además, las soluciones conservan el orden, es decir, si $x_0 < y_0$, entonces $x(t) < y(t)$ para todo $t \in \langle 0, T_{\text{máx}} \rangle$. En efecto, de la ecuación (2.1) se tiene

$$\frac{d}{dt}(x-y) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x-y}{xy}.$$

Integrando de 0 a t

$$x(t) - y(t) \leq x_0 - y_0 + \int_0^t \frac{x(s) - y(s)}{x(s)y(s)} ds,$$

por la desigualdad de Gronwall, se obtiene

$$x(t) - y(t) \leq (x_0 - y_0) \exp\left(\int_0^t \frac{1}{x(s)y(s)} ds\right) < 0.$$

Entonces

$$x(t) < y(t).$$

Por otro lado, como consecuencia de la conservación del orden, se tienen las siguientes desigualdades

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{1}{x} = \frac{y(x-y)}{x(x^2+y^2)} < 0.$$

y

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{1}{y} = \frac{x(y-x)}{y(x^2+y^2)} > 0.$$

Por lo cual concluimos que las funciones x e y son decreciente y creciente, respectivamente.

2.2. Análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio

Denotamos por

$$\lambda = x_0^3 + y_0^3. \quad (2.4)$$

Y calculamos los puntos de equilibrio del sistema (2.1),

$$0 = \frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{1}{x} = \frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{1}{y},$$

de estas igualdades se sigue que $x = y$. Luego, por la ley de conservación (2.3), el punto de equilibrio del sistema (2.1) es $\left((\lambda/2)^{1/3}, (\lambda/2)^{1/3}\right)$.

Proposición 2.2.1 *En el sistema (2.1), el punto de equilibrio $\left((\lambda/2)^{1/3}, (\lambda/2)^{1/3}\right)$ es inestable en el sentido de Lyapunov.*

Demostración:

Por la ecuación (2.3), la solución $(x(t), y(t))$ del sistema (2.1) es acotada, y al ser las funciones x e y decreciente y creciente, respectivamente; existen los siguientes límites

$$\lim_{t \rightarrow T_{max}} x(t), \lim_{t \rightarrow T_{max}} y(t) \in \partial(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) = \{(0, a) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\} \cup \{(b, 0) \in \mathbb{R}^2 : b \geq 0\} \quad (2.5)$$

Por la ley de conservación, se sigue la siguiente desigualdad

$$0 < y_0 \leq \lim_{t \rightarrow T_{max}} y(t).$$

Luego, de (2.5) y la ley de conservación (2.3) se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow T_{max}} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow T_{max}} y(t) = \lambda^{1/3}. \quad (2.6)$$

Estas identidades prueban que el punto de equilibrio $\left((\lambda/2)^{1/3}, (\lambda/2)^{1/3}\right)$ es un punto de equilibrio inestable, en el sentido de Lyapunov. ■

Por otro lado, al ser las funciones x e y decreciente y creciente respectivamente, se cumple lo siguiente:

$$0 = \lim_{t \rightarrow T_{max}} x(t) \leq x(t) < x_0 < y_0 < y(t) \leq \lim_{t \rightarrow T_{max}} y(t) = \lambda^{1/3}, \text{ para todo } t \in \langle 0, T_{m\acute{a}x} \rangle.$$

Estas desigualdades implican que las funciones x e y son no negativas.

2.3. Singularidad en tiempo finito

Si consideramos condiciones iniciales de la forma $x_0 < y_0$, entonces y es una función creciente. Pero por la ley de conservación no puede crecer arbitrariamente. Por otro lado, al ser x una función decreciente, surgen las siguientes preguntas: ¿Alcanzará x el valor cero?, ¿En cuánto tiempo lo logrará?, ¿El tiempo es finito o infinito?. En este capítulo mostramos que esta función alcanza el valor cero. Más aún, lo hace en un tiempo finito.

Sea $(x(t), y(t))$ solución de (2.1), definida en el intervalo maximal $[0, T_{max})$. Primero mostramos que este intervalo es finito. En efecto, por reducción al absurdo, supongamos que la solución es global, es decir $T_{max} = +\infty$. En este caso, al ser el intervalo infinito, podemos aplicar el teorema de Invarianza de Lasalle, ver apéndice 6.1.

Consideramos la función $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$V(x, y) = x^2 + y^2.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 2x \left[\frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{1}{x} \right] + 2y \left[\frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{1}{y} \right] \\
&= 2 \left[\frac{x^2+xy}{x^2+y^2} - 1 \right] + 2 \left[\frac{xy+y^2}{x^2+y^2} - 1 \right] = 2 \left[\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2} - 2 \right] \\
&= \frac{-2(x-y)^2}{(x^2+y^2)} \leq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto V constituye una función de Lyapunov para el sistema (2.1). Por la ley de conservación (2.3), el conjunto de puntos críticos por este funcional viene dado por

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{dV}{dt} \right) (x, y) = 0 \right\} = \left\{ \left(\left(\frac{\lambda}{2} \right)^{1/3}, \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{1/3} \right) \right\}.$$

Además, la solución del sistema (2.1) es acotada, y por el teorema de Invarianza de Lasalle, ver apéndice 6.1, ésta converge a un punto del conjunto E . Al ser E un conjunto unitario, se cumplen las siguientes identidades

$$\lim_{t \rightarrow T_{\text{max}}} x(t) = \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{1/3}, \quad \lim_{t \rightarrow T_{\text{max}}} y(t) = \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{1/3}.$$

Esto contradice (2.6), por lo tanto $T_{\text{máx}} < \infty$.

2.4. Acotación de $T_{\text{máx}}$

A continuación acotamos $T_{\text{máx}}$, tanto inferior como superiormente. Sin duda, esto será de gran ayuda para las posteriores simulaciones numéricas. Más precisamente, realizamos ensayos numéricos para instantes de tiempo $t \leq T_{\text{máx}}$.

Supongamos que se tienen las condiciones iniciales $x_0 < y_0$, y denotamos

$$a^3 = x_0^3 + y_0^3. \tag{2.7}$$

Entonces por el teorema 2.0.1 se tienen las identidades siguientes:

$$\lim_{t \rightarrow T_{\text{max}}} x(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow T_{\text{max}}} y(t) = a.$$

Haciendo el cambio de variable: $X = x/a$, $Y = y/a$, tenemos

$$x = aX \quad , \quad \frac{dx}{dt} = a \frac{dX}{dt}, \quad (2.8)$$

$$y = aY \quad , \quad \frac{dy}{dt} = a \frac{dY}{dt}, \quad (2.9)$$

y

$$X(0) = X_0 = \frac{x(0)}{a} = \frac{x_0}{a} \quad , \quad Y(0) = Y_0 = \frac{y(0)}{a} = \frac{y_0}{a} \quad , \quad X_0^3 + Y_0^3 = 1.$$

Reemplazando estas identidades en (2.1), obtenemos

$$\begin{aligned} a \frac{dX}{dt} &= \frac{aX + aY}{a^2X^2 + a^2Y^2} - \frac{1}{aX} = \frac{X + Y}{a(X^2 + Y^2)} - \frac{1}{aX}. \\ a^2 \frac{dX}{dt} &= \frac{X + Y}{X^2 + Y^2} - \frac{1}{X}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

De (2.8), (2.9) y la ley de conservación del orden, se tiene la desigualdad

$$X(t) < Y(t) \quad , \quad \text{para todo } t \in \langle 0, T_{\text{máx}} \rangle.$$

Entonces se tiene la desigualdad

$$\frac{X + Y}{X^2 + Y^2} - \frac{1}{X} < 0.$$

Por lo tanto

$$-C = \sup_{X < Y} \left(\frac{X + Y}{X^2 + Y^2} - \frac{1}{X} \right) < \infty, \quad (2.11)$$

donde $C > 0$. El valor de C puede ser calculado aproximadamente, por ejemplo si usamos Mathematica.

De la ecuación (2.10), se tiene

$$a^2 \frac{dX}{dt} \leq -C.$$

Integrando de 0 a t

$$a^2 (X(t) - X(0)) \leq -Ct.$$

Tomando límite cuando $t \rightarrow T_{\text{máx}}$, se obtiene la desigualdad

$$T_{\text{máx}} \leq \frac{a^2 X(0)}{C} = \frac{ax_0}{C}.$$

Por otro lado, de la ecuación (2.1), se sigue inmediatamente que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{1}{x} \geq -\frac{1}{x}, \\ \frac{d}{dt} (x^2(t)) &\geq -2. \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t

$$x^2(t) - x^2(0) \geq -2t.$$

Tomando límite cuando $t \rightarrow T_{\text{máx}}$, obtenemos la desigualdad

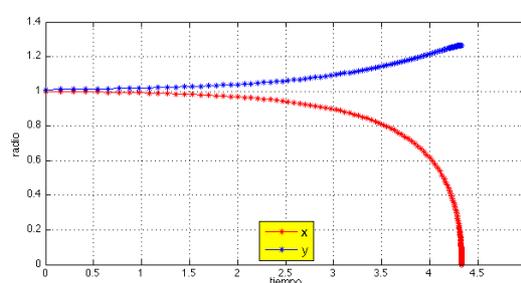
$$\frac{x_0^2}{2} \leq T_{\text{máx}}.$$

Finalmente de la ecuación (2.7), se tienen las cotas para el tiempo $T_{\text{máx}}$

$$\frac{x_0^2}{2} \leq T_{\text{máx}} \leq \frac{ax_0}{C} = \frac{x_0 (x_0^3 + y_0^3)^{1/3}}{C}, \quad (2.12)$$

donde C es solución del problema (2.11).

Condición inicial \ Cota $T_{\text{máx}}$	Inf.: $\frac{x_0^2}{2}$	Sup.: $\frac{x_0(x_0^3+y_0^3)^{1/3}}{0,212199}$	rd. final: $(x_0^3 + y_0^3)^{1/3}$
Figura 2.1 : $x_0 = 1$, $y_0 = 1,01$	0.5	5.9673	1.2663
Figura 2.2 : $x_0 = 2$, $y_0 = 2,1$	2	24.3580	2.5844
Figura 2.3 : $x_0 = 10$, $y_0 = 1000$	50	980.2515	20.8008
Figura 2.4 : $x_0 = 20$, $y_0 = 20000$	200	1.8850×10^6	2×10^4
Figura 2.5 : $x_0 = 50$, $y_0 = 5 \times 10^5$	1250	1.1781×10^8	5×10^5

Cuadro 2.1: Resultados de las simulaciones numéricas: cotas de $T_{\text{máx}}$ y radio final.Figura 2.1: Condiciones iniciales: $x_0 = 1$, $y_0 = 1,01$.

2.5. Simulaciones numéricas

Hasta el momento, hemos estudiado cuestiones teóricas del caso particular del modelo Monopolo. Con el fin de reflejar estos resultados teóricos, en esta sección procedemos a presentar algunas simulaciones numéricas adecuadas. Los correspondientes códigos de Matlab, basados en el uso de *ode45.m*, están incluidos en la sección 6.3 del Apéndice.

Primeramente, para hacer las simulaciones numéricas se hace necesario conocer las cotas del intervalo del tiempo de la solución de (2.1). Para ello, aproximamos numéricamente la solución de (2.11). Por ejemplo usando el programa Mathematica, el valor aproximado

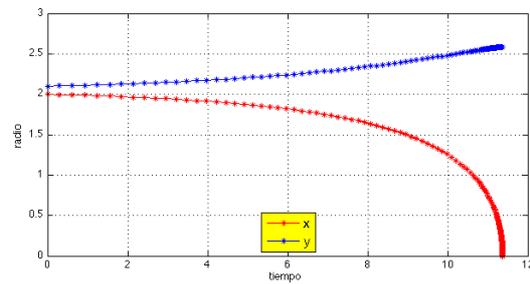


Figura 2.2: Condiciones iniciales: $x_0 = 2, y_0 = 2,1$.

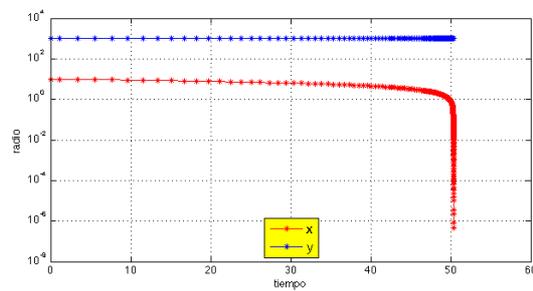


Figura 2.3: Condiciones iniciales: $x_0 = 10, y_0 = 1000$.

de C es 0,212199.

Los valores respectivos de las condiciones iniciales de las simulaciones son mostrados en la tabla 2.5.

Las figuras del 2.1 al 2.5, muestran que la partícula de menor condición inicial desaparece en tiempo finito. Además, por la desigualdad (2.12), podemos estimar respectivas cotas inferior y superior para este tiempo. Por otro lado, por teorema 2.0.1 hallamos explícitamente el radio final de la partícula de mayor condición inicial. Todos estos resultados son mostrados en la tabla 2.5.

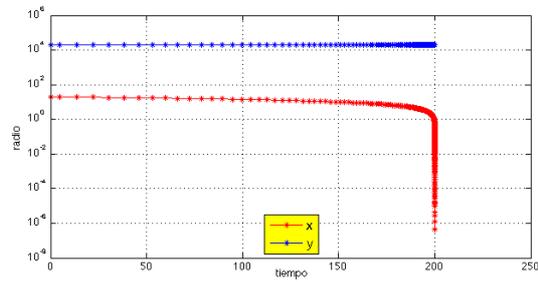


Figura 2.4: Condiciones iniciales: $x_0 = 20, y_0 = 20000$.

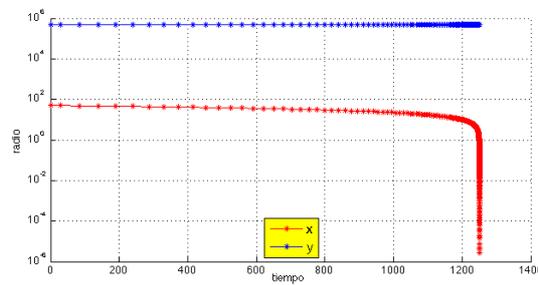


Figura 2.5: Condiciones iniciales: $x_0 = 50, y_0 = 500000$.

Observamos que, las diferencias entre las condiciones iniciales en las figuras 2.1 y 2.2 son menores que 1, mientras que las diferencias entre las respectivas cotas de $T_{\text{máx}}$ son menores que 100.

Asimismo, la diferencia de las condiciones iniciales de las figuras 2.3, 2.4 y 2.5 son mayores que 1, y las respectivas cotas de T_{max} no son refinadas. Aún así, en este caso, se hace notar que mientras más sea la distancia entre las condiciones iniciales, el tiempo en el que desaparece una partícula se aproxima a la cota inferior $x_0^2/2$.

Capítulo 3

Modelo Monopolo - Caso general

Los resultados obtenidos en el caso particular del modelo Monopolo, estudiados en la capítulo 2, nos permiten vislumbrar las propiedades que caracterizan a este modelo: desaparición en tiempo finito de partículas, conservación del orden de acuerdo a las condiciones iniciales, la inestabilidad del punto de equilibrio en el cual todos los radios de las partículas son iguales, etc. En este capítulo, mostramos todas estas propiedades para el caso general.

Es necesario recordar que el modelo Monopolo, viene dado por (1.8)

$$\frac{dR_i}{dt} = \theta(t) - \frac{1}{R_i} = \frac{\sum_{i=1}^M R_i^{n-2}}{\sum_{i=1}^N R_i^{n-1}} - \frac{1}{R_i} \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

con las condiciones iniciales $R_i(0) > 0$, $i = 1, 2, \dots, M$, y la ley de conservación

$$\sum_{i=1}^M R_i^n = \text{cte.}$$

A lo largo de este capítulo mostraremos una serie de resultados, los cuales se resumen en el teorema siguiente:

Teorema 3.0.1 *Consideremos el sistema (1.8), con condiciones iniciales de la siguiente forma*

$$R_1(0) < R_2(0) < \dots < R_M(0).$$

Entonces, el sistema (1.8) posee una única solución $(R_1(t), R_2(t), \dots, R_M(t))$ y se cumple lo siguiente

1. $R_1(t) < R_2(t) < \dots < R_M(t)$.
2. R_1 y R_M son funciones decreciente y creciente, respectivamente.
3. $R_i(t) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, M$.

Además, existen escalares $T_i > 0$ caracterizados por

$$T_1 < T_2 < \dots < T_M \quad y \quad \lim_{t \rightarrow T_i} R_i(t) = 0.$$

Físicamente este teorema indica que si consideramos M partículas, dadas según las condiciones iniciales (3.1), entonces la partícula de menor condición inicial desaparece en tiempo finito T_1 . Luego el sistema es renovado con $M - 1$ partículas, y el proceso vuelve a repetirse con las condiciones iniciales $R_i(T_1)$, y así sucesivamente. Por lo tanto, concluimos que en un tiempo finito, tendremos una única esfera cuyo radio será $R_f = \left(\sum_{i=1}^M R_i^n(0) \right)^{1/n}$. Más aún, el punto $\left(0, 0, \dots, 0, \left(\sum_{i=1}^M R_i^n(0) \right)^{1/n} \right)$ es estable, ya que el sistema se detiene al alcanzarlo.

3.1. Existencia, unicidad y conservación del orden

Con respecto al sistema (1.8), definimos las funciones escalares

$$f_i(R_1, R_2, \dots, R_M) = \frac{\sum_{i=1}^M R_i^{n-2}}{\sum_{i=1}^M R_i^{n-1}} - \frac{1}{R_i} \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Calculamos sus respectivas derivadas parciales. Distinguiamos dos casos.

1. Primer caso. Si $i = j$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_j}{\partial R_i} &= \frac{\left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1}\right) \frac{\partial}{\partial R_i} \left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-2}\right) - \left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-2}\right) \frac{\partial}{\partial R_i} \left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1}\right)}{\left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1}\right)^2} + \frac{1}{R_i^2} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^M R_k^{n-1} \cdot [(n-2)R_i^{n-3}] - \sum_{k=1}^M R_k^{n-2} \cdot [(n-1)R_i^{n-2}]}{\left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1}\right)^2} + \frac{1}{R_i^2} \\
&= \frac{\sum_{k \neq i} (n-2)R_k^{n-1}R_i^{n-3} - \sum_{k \neq i} (n-1)R_k^{n-2}R_i^{n-2} - R_i^{2n-4}}{\left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1}\right)^2} + \frac{1}{R_i^2} \\
&= \frac{\sum_{k \neq i} (n-2)R_k^{n-1}R_i^{n-1} - \sum_{k \neq i} (n-1)R_k^{n-2}R_i^n - R_i^{2n-2} + \left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1}\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1}R_i\right)^2}.
\end{aligned}$$

2. Segundo caso. Si $i \neq j$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_j}{\partial R_i} &= \frac{\left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1}\right) \frac{\partial}{\partial R_i} \left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-2}\right) - \left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-2}\right) \frac{\partial}{\partial R_i} \left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1}\right)}{\left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1}\right)^2} \\
&= \frac{\sum_{k \neq i} (n-2)R_k^{n-1}R_i^{n-3} - \sum_{k \neq i} (n-1)R_k^{n-2}R_i^{n-2} - R_i^{2n-4}}{\left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Las funciones f_i y sus respectivas derivadas parciales son continuas en el conjunto abierto $\Omega = \mathbb{R}^M - \{0\}$. Entonces, por el teorema de Picard, para cada M -tupla de condiciones iniciales $R_i(0) > 0$, el sistema (1.8) posee una única solución definida en una vecindad de $(0, (R_1(0), R_2(0), \dots, R_M(0)))$. Más aún, la solución existe en un intervalo maximal $I_{\text{máx}} = [0, T_1)$.

A continuación mostramos la conservación del orden de las soluciones. Para ello sean $i \neq j \in \{1, 2, \dots, M\}$ y supongamos que $R_i(0) < R_j(0)$. Entonces

$$\frac{d}{dt}(R_i - R_j) = -\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j} = \frac{R_i - R_j}{R_i R_j}.$$

Integrando de 0 a t

$$R_i(t) - R_j(t) \leq R_i(0) - R_j(0) + \int_0^t \frac{R_i(s) - R_j(s)}{R_i(s)R_j(s)} ds.$$

Por la desigualdad de Gronwall, se obtiene

$$R_i(t) - R_j(t) \leq (R_i(0) - R_j(0)) \exp\left(\int_0^t \frac{1}{R_i(s)R_j(s)} ds\right) < 0.$$

Entonces

$$R_i(t) < R_j(t).$$

Además, si las condiciones iniciales cumplen

$$R_1(0) < R_2(0) < \dots < R_M(0), \tag{3.1}$$

entonces las funciones R_1 y R_M son decreciente y creciente, respectivamente. En efecto, por la conservación del orden de las soluciones y por ser R_1 la partícula de menor radio

inicial, se cumple

$$\begin{aligned} R_1 &< R_i, \\ R_1 R_i^{n-2} &< R_i^{n-1}, \\ R_1 \sum_{i=1}^M R_i^{n-2} &< \sum_{i=1}^M R_i^{n-1}. \end{aligned}$$

De la ecuación (1.8)

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{R_1 \sum_{i=1}^M R_i^{n-2} - \sum_{i=1}^M R_i^{n-1}}{\sum_{i=1}^M R_i^{n-1}} < 0.$$

Esta desigualdad muestra que el radio de la partícula de menor condición inicial, R_1 , es decreciente.

Por otro lado, al ser R_M la partícula de mayor radio inicial, y nuevamente por la ley de conservación de orden, se cumple

$$\begin{aligned} R_i &< R_M, \\ R_i^{n-1} &< R_M R_i^{n-2}, \\ \sum_{i=1}^M R_i^{n-1} &< R_M \sum_{i=1}^M R_i^{n-2}. \end{aligned}$$

De la ecuación (1.8)

$$\frac{dR_M}{dt} = \frac{R_M \sum_{i=1}^M R_i^{n-2} - \sum_{i=1}^M R_i^{n-1}}{\sum_{i=1}^M R_i^{n-1}} > 0.$$

Esta desigualdad muestra que el radio de la partícula de mayor condición inicial, R_M , es creciente.

3.2. Análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio

Hallemos los puntos de equilibrio del sistema (1.8). Dados $i \neq j \in \{1, 2, \dots, M\}$ e igualando a cero cada término de la derecha de este sistema obtenemos

$$0 = \theta(t) - \frac{1}{R_i} = \theta(t) - \frac{1}{R_j},$$

luego

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_j}.$$

Entonces $R_i = R_j$. Así, en el caso general, el punto de equilibrio es $A = (a, a, \dots, a) \in \mathbb{R}^M$, donde

$$a = \left(\frac{\sum_{i=1}^M R_i^n}{M} \right)^{1/n}.$$

Análogamente al caso particular, la inestabilidad del punto A se prueba por la conservación del orden de las soluciones. En efecto, por la ley de conservación (1.6), la solución $(R_1(t), R_2(t), \dots, R_M(t))$ del sistema (1.8) es acotada, y al ser las funciones R_1 y R_M decreciente y creciente, respectivamente; existen los siguientes límites

$$\lim_{t \rightarrow T_1} R_1(t), \lim_{t \rightarrow T_1} R_M(t) \in \partial \left((\mathbb{R}^+)^M \right),$$

Por otro lado, por la ley de conservación (1.6), se sigue la siguiente desigualdad

$$0 < R_M(0) \leq \lim_{t \rightarrow T_{max}} R_M(t),$$

entonces, existen $b_i > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow T_1} (R_1(t), R_2(t), \dots, R_M(t)) = (0, b_2, \dots, b_M). \quad (3.2)$$

Esta identidad prueba la inestabilidad, en el sentido de Lyapunov, del punto de equilibrio A . Finalmente por la conservación del orden de las soluciones, se cumplen lo siguiente:

$$0 = \lim_{t \rightarrow T_1} R_1(t) \leq R_1(t) < \dots < R_i(t) < R_M(t) \leq \lim_{t \rightarrow T_1} R_M(t) \quad , \quad \text{para todo } t \in \langle 0, T_1 \rangle .$$

Estas desigualdades implican que las funciones $(R_i)_{i \in \{1, 2, \dots, M\}}$ son no negativas.

3.3. Singularidad en tiempo finito

Sea $(R_1(t), R_2(t), \dots, R_M(t))$ la solución de (1.8), definida en el intervalo maximal $[0, T_1)$. Tal como sucede en el caso particular estudiado en la capítulo 2, probaremos que T_1 es finito. En efecto, por reducción al absurdo, supongamos que $T_1 = +\infty$ (en cuyo caso podemos aplicar el teorema de Invarianza de Lasalle), y consideramos la función $V : (\mathbb{R}^+)^M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$V(R_1, R_2, \dots, R_M) = \sum_{j=1}^M R_j^{n-1} .$$

De (1.8), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \sum_{i=1}^M \left[\frac{\partial}{\partial R_i} \left(\sum_{j=1}^M R_j^{n-1} \right) \cdot \frac{d}{dt} R_i \right] = \sum_{i=1}^M \left[\frac{\partial}{\partial R_i} \left(R_i^{n-1} + \sum_{j \neq i}^M R_j^{n-1} \right) \cdot \frac{d}{dt} R_i \right] \\
&= (n-1) \sum_{i=1}^M R_i^{n-2} \cdot \frac{d}{dt} R_i = (n-1) \sum_{i=1}^M R_i^{n-2} \cdot \left(\frac{\sum_{j=1}^M R_j^{n-2}}{\sum_{j=1}^M R_j^{n-1}} - \frac{1}{R_i} \right) \\
&= (n-1) \sum_{i=1}^M \left(\frac{R_i^{n-2} \sum_{j=1}^M R_j^{n-2} - R_i^{n-3} \sum_{j=1}^M R_j^{n-1}}{\sum_{j=1}^M R_j^{n-1}} \right) \\
&= \frac{n-1}{\sum_{j=1}^M R_j^{n-1}} \left(\sum_{i=1}^M R_i^{n-2} \sum_{i=1}^M R_i^{n-2} - \sum_{i=1}^M R_i^{n-1} \sum_{i=1}^M R_i^{n-3} \right) \leq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto V constituye una función de Lyapunov para el sistema (1.8). Por la ley de conservación (1.6), el conjunto de puntos críticos por este funcional viene dado por

$$E = \left\{ X \in \mathbb{R}^M : \left(\frac{dV}{dt} \right) X = 0 \right\} = \{A\}. \quad (3.3)$$

En efecto, si denotamos

$$\left(R_1^{(n-3)/2}, R_2^{(n-3)/2}, \dots, R_M^{(n-3)/2} \right), \left(R_1^{(n-1)/2}, R_2^{(n-1)/2}, \dots, R_M^{(n-1)/2} \right) \in \mathbb{R}^M,$$

entonces, con el producto interno usual de \mathbb{R}^M y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene

$$\left(\sum_{i=1}^M R_i^{n-2} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^M R_i^{(n-3)/2} R_2^{(n-1)/2} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^M \left(R_i^{(n-3)/2} \right)^2 \sum_{i=1}^M \left(R_i^{(n-1)/2} \right)^2 = \sum_{i=1}^M R_i^{n-3} \sum_{i=1}^M R_i^{n-1}.$$

Además, la igualdad se da si y sólo si existe una función de valores reales, $\lambda(t)$, tal que

$$R_i^{(n-1)/2} = \lambda R_i^{(n-3)/2} , \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, M.$$

Así, obtenemos la igualdad si y sólo si

$$\lambda = R_i , \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, M,$$

es decir, cuando todos los radios son iguales. Esto prueba la identidad (3.3).

Desde que las soluciones son acotadas y aplicando nuevamente el Teorema de Invarianza de Lasalle, ver apéndice 6.1, obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_i(t) = a , \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, M.$$

Esto contradice (3.2). Esta contradicción proviene de suponer que $T_1 = +\infty$. Por lo cual $T_1 < +\infty$.

Con respecto al orden de las condiciones iniciales dado en (3.1), cabe preguntarse: ¿Cuál es el comportamiento de las soluciones, si dos o más condiciones iniciales son iguales?. Si ocurre este caso, por los cálculos realizados y por la unicidad de solución, los radios de las partículas de igual condición inicial poseen la misma solución. A manera de ilustración, exponemos dos ejemplos.

En el primero, supongamos que las condiciones iniciales son ordenadas de la siguiente forma

$$R_1(0) < R_2(0) = R_3(0) = \dots = R_M(0).$$

Entonces la primera partícula desaparece en un tiempo finito T_1 , luego el sistema es renovado con $M - 1$ partículas con condiciones iniciales iguales a $R_2(T_1)$, y por lo tanto el sistema no evoluciona más. Así, observamos que en un tiempo finito se obtiene $M - 1$

partículas del mismo radio.

En el segundo ejemplo, supongamos que las condiciones iniciales son ordenadas de la siguiente forma

$$R_1(0) = R_2(0) = \dots = R_{M-1} < R_M(0).$$

Entonces las primeras $M - 1$ partículas desaparecen en un tiempo finito, por lo cual finalmente obtenemos a R_M , como la única partícula.

3.4. Acotación de T_1

La acotación de T_{max} , en el caso particular estudiado en la capítulo 2, se debió en gran medida a que se contaba con dos partículas. Luego, gracias a la ley de conservación, se redujo el sistema de dos variable a otro, de solo una variable. En el caso general, si seguimos el mismo procedimiento, nos encontramos con un obstáculo: al usar la ley de conservación, reduciremos el sistema de M ecuaciones, a otro de $M - 1$; y de este, no podemos derivar una cota superior para el tiempo T_1 .

Sin embargo, siguiendo la misma idea del caso particular, calcularemos una cota inferior para el tiempo T_1 . De la ecuación (1.8)

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^M R_i^{n-2}}{\sum_{i=1}^M R_i^{n-1}} - \frac{1}{R_1} \geq -\frac{1}{R_1}.$$

Entonces

$$\frac{d}{dt} (R_1^2) \geq -2.$$

Integrando de 0 a t

$$R_1^2(t) - R_1^2(0) \geq -2t.$$

Tomando el límite cuando $t \rightarrow T_1$, obtenemos

$$\frac{R_1^2(0)}{2} \leq T_1.$$

Capítulo 4

Controlabilidad del modelo Monopolo

En este capítulo estudiamos la controlabilidad del modelo Monopolo (1.8). Para este propósito, consideramos controles afines, es decir, controles de la forma

$$\sum_{i=1}^M u_i g_i(R),$$

donde g_i , son funciones cuya regularidad se dará más adelante.

Por lo tanto el sistema a controlar es de la forma

$$\frac{dR_i}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^M R_i^{n-2}}{\sum_{i=1}^M R_i^{n-1}} - \frac{1}{R_i} + u_i g_i(R), \quad (4.1)$$

donde $R = (R_1, R_2, R_3, \dots, R_M) \in \mathbb{R}^M$, u_i son los controles y g_i son funciones de clase $C^\infty((\mathbb{R}^+)^M)$.

En solidificación, los controles u_i representan, por ejemplo, una fuerza externa generada mecánicamente por un campo magnético, véase [37] y las referencias que contienen. Por lo tanto, físicamente el sistema (4.1) representa el control de un número finito de partículas bajo la acción de unas fuerzas generadas por campos magnéticos en cada una de ellas.

En este capítulo mostramos que es el sistema (4.1) es controlable. Más aún, esto ocurre con la aplicación de un único control actuando sobre la partícula de menor condición inicial.

4.1. Control al punto de equilibrio inestable

Sean las funciones $G_i : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ y $G : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$ definidas por

$$G_i(R, u) = \frac{\sum_{i=1}^M R_i^{n-2}}{\sum_{i=1}^M R_i^{n-1}} - \frac{1}{R_i} + u_i g_i(R) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

$$G(R, u) = (G_1(R, u), G_2(R, u), \dots, G_M(R, u)).$$

Entonces, si denotamos por A el punto de equilibrio del sistema (1.8), donde todos los radios son iguales, se sigue que $G(A, 0) = 0$. Por lo tanto, el punto $(A, 0) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ es un punto de equilibrio del sistema (4.1). La linealización del sistema (4.1) alrededor de este punto es

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\partial G}{\partial R}(A, 0)R + \frac{\partial G}{\partial u}(A, 0)u. \quad (4.2)$$

El camino a seguir será, dar las condiciones bajo las cuales el sistema (4.2) cumple la condición de rango de Kalman. Obteniendo como consecuencia, la controlabilidad local alrededor punto de equilibrio $(A, 0)$ del sistema (4.1), véase Apéndice 6.2.

El resultado principal de esta sección es dado en el teorema siguiente:

Teorema 4.1.1 *Supongamos que se cumple:*

$$g_1(A) \neq 0 \quad , \quad g_i(A) = 0 \quad , \quad i = 2, 3, \dots, M.$$

Entonces, el sistema (4.1) es localmente controlable al punto de equilibrio $(A, 0)$.

Como corolario de este teorema, la controlabilidad del sistema (4.1) se logra mediante un único control afín, actuando sobre la primera partícula. En efecto, basta considerar la condición siguiente:

$$g_1(A) \neq 0 \quad , \quad g_i \equiv 0 \quad , \quad i = 2, 3, \dots, M. \tag{4.3}$$

4.1.1. Cálculo de la matriz jacobiana

Sean $i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$. Entonces, calculamos las respectivas derivadas parciales, por lo cual se distinguen los siguientes casos:

1. Primer caso. Si $i = j$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_j}{\partial R_i} &= \frac{\sum_{k=1}^M R_k^{n-1} \frac{\partial}{\partial R_i} \left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-2} \right) - \sum_{k=1}^M R_k^{n-2} \frac{\partial}{\partial R_i} \left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1} \right)}{\left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1} \right)^2} + \frac{1}{R_i^2} + u_i \cdot \frac{\partial}{\partial R_i} (g_i(R)) \\
&= \frac{\sum_{k=1}^M R_k^{n-1} \cdot [(n-2)R_i^{n-3}] - \sum_{k=1}^M R_k^{n-2} [(n-1)R_i^{n-2}]}{\left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1} \right)^2} + \frac{1}{R_i^2} + u_i \frac{\partial}{\partial R_i} (g_i(R)) \\
&= \frac{\sum_{k \neq i} (n-2)R_k^{n-1} R_i^{n-3} - \sum_{k \neq i} (n-1)R_k^{n-2} R_i^{n-2} - R_i^{2n-4}}{\left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1} \right)^2} + \frac{1}{R_i^2} + u_i \frac{\partial}{\partial R_i} (g_i(R)) \\
&= \frac{\sum_{k \neq i} (n-2)R_k^{n-1} R_i^{n-1} - \sum_{k \neq i} (n-1)R_k^{n-2} R_i^n - R_i^{2n-2} + \left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1} \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1} R_i \right)^2} + u_i \frac{\partial}{\partial R_i} (g_i(R)).
\end{aligned}$$

Evaluando en el punto $(A, 0)$, obtenemos

$$\frac{\partial G_j}{\partial R_i}(A, 0) = \frac{\partial F_i}{\partial R_i}(A, 0) = a^{-2} \left(1 - \frac{1}{M} \right). \quad (4.4)$$

2. Segundo caso. Si $i \neq j$, entonces

$$\frac{\partial G_j}{\partial R_i} = \frac{\sum_{k=1}^M R_k^{n-1} \cdot \frac{\partial}{\partial R_i} \left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-2} \right) - \sum_{k=1}^M R_k^{n-2} \cdot \frac{\partial}{\partial R_i} \left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1} \right)}{\left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1} \right)^2} + u_j \cdot \frac{\partial}{\partial R_i} (g_j(R)).$$

Operando

$$\frac{\partial G_j}{\partial R_i} = \frac{\sum_{k \neq i} (n-2)R_k^{n-1}R_i^{n-3} - \sum_{k \neq i} (n-1)R_k^{n-2}R_i^{n-2} - R_i^{2n-4}}{\left(\sum_{k=1}^M R_k^{n-1}\right)^2} + u_j \cdot \frac{\partial}{\partial R_i} (g_j(R)).$$

Evaluando en el punto $(A, 0)$, obtenemos

$$\frac{\partial G_j}{\partial R_i}(A, 0) = -\frac{a^{-2}}{M}. \quad (4.5)$$

Además

$$\frac{\partial G}{\partial u_i}(A, 0) = g_i(A) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (4.6)$$

4.1.2. Análisis del sistema linealizado

En esta sección probamos el control alrededor del punto de equilibrio $(A, 0)$, del sistema linealizado (4.2). Por inducción obtendremos la matriz de Kalman y finalmente aplicamos la condición de rango, véase Apéndice 6.2. De (4.4), (4.5) y (4.6)

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\partial G}{\partial R}(A, 0)R + \frac{\partial G}{\partial u}(A, 0)u = CR + Du,$$

donde

$$C = \begin{bmatrix} a^{-2} \left(1 - \frac{1}{M}\right) & -\frac{a^{-2}}{M} & \cdots & -\frac{a^{-2}}{M} \\ -\frac{a^{-2}}{M} & a^{-2} \left(1 - \frac{1}{M}\right) & \cdots & -\frac{a^{-2}}{M} \\ \vdots & & & \vdots \\ -\frac{a^{-2}}{M} & -\frac{a^{-2}}{M} & \cdots & a^{-2} \left(1 - \frac{1}{M}\right) \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} g_1(A) \\ g_2(A) \\ \vdots \\ g_M(A) \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Por otro lado, para cada $p \in \mathbb{N}$, definimos la matriz

$$E_p = \begin{bmatrix} a^{-2p} \left(1 - \frac{1}{M}\right) & -\frac{a^{-2p}}{M} & \cdots & -\frac{a^{-2p}}{M} \\ -\frac{a^{-2p}}{M} & a^{-2p} \left(1 - \frac{1}{M}\right) & \cdots & -\frac{a^{-2p}}{M} \\ \vdots & & & \vdots \\ -\frac{a^{-2p}}{M} & -\frac{a^{-2p}}{M} & \cdots & a^{-2p} \left(1 - \frac{1}{M}\right) \end{bmatrix}.$$

A continuación, probamos que para todo $p \in \mathbb{N}$, se cumple $C^p = E_p$. En efecto, sea

$$P = \{p \in \mathbb{N} : C^p = E_p\}.$$

De (4.7), $1 \in P$. Supongamos que $C^p = E_p$ (hipótesis auxiliar), y calculamos la potencia $p + 1$ -ésima de la matriz C

$$\begin{aligned} C^{p+1} = C^p \cdot C = E_p \cdot C &= \begin{bmatrix} a^{-2p} \left(1 - \frac{1}{M}\right) & -\frac{a^{-2p}}{M} & \cdots & -\frac{a^{-2p}}{M} \\ -\frac{a^{-2p}}{M} & a^{-2p} \left(1 - \frac{1}{M}\right) & \cdots & -\frac{a^{-2p}}{M} \\ \vdots & & & \vdots \\ -\frac{a^{-2p}}{M} & -\frac{a^{-2p}}{M} & \cdots & a^{-2p} \left(1 - \frac{1}{M}\right) \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} a^{-2} \left(1 - \frac{1}{M}\right) & -\frac{a^{-2}}{M} & \cdots & -\frac{a^{-2}}{M} \\ -\frac{a^{-2}}{M} & a^{-2} \left(1 - \frac{1}{M}\right) & \cdots & -\frac{a^{-2}}{M} \\ \vdots & & & \vdots \\ -\frac{a^{-2}}{M} & -\frac{a^{-2}}{M} & \cdots & a^{-2} \left(1 - \frac{1}{M}\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^{-2(p+1)} \left(1 - \frac{1}{M}\right) & -\frac{a^{-2(p+1)}}{M} & \cdots & -\frac{a^{-2(p+1)}}{M} \\ -\frac{a^{-2(p+1)}}{M} & a^{-2(p+1)} \left(1 - \frac{1}{M}\right) & \cdots & -\frac{a^{-2(p+1)}}{M} \\ \vdots & & & \vdots \\ -\frac{a^{-2(p+1)}}{M} & -\frac{a^{-2(p+1)}}{M} & \cdots & a^{-2(p+1)} \left(1 - \frac{1}{M}\right) \end{bmatrix} = E_{p+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $p + 1 \in P$. Entonces, para cada $p \in \mathbb{N}$

$$C^p \cdot D = \begin{bmatrix} a^{-2p}g_1(A) - \frac{a^{-2p}}{M} \sum_{k=1}^M g_k(A) \\ a^{-2p}g_2(A) - \frac{a^{-2p}}{M} \sum_{k=1}^M g_k(A) \\ \vdots \\ a^{-2p}g_M(A) - \frac{a^{-2p}}{M} \sum_{k=1}^M g_k(A) \end{bmatrix}.$$

Así, la matriz de Kalman del sistema linealizado (4.2), viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &= [D, CD, C^2D, \dots, C^{M-1}D] = \\ &= \begin{bmatrix} g_1(A) & a^{-2}g_1(A) - \frac{a^{-2}}{M} \sum_{k=1}^M g_k(A) & \dots & a^{-2(M-1)}g_1(A) - \frac{a^{-2(M-1)}}{M} \sum_{k=1}^M g_k(A) \\ g_2(A) & a^{-2}g_2(A) - \frac{a^{-2}}{M} \sum_{k=1}^M g_k(A) & \dots & a^{-2(M-1)}g_2(A) - \frac{a^{-2(M-1)}}{M} \sum_{k=1}^M g_k(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_M(A) & a^{-2}g_M(A) - \frac{a^{-2}}{M} \sum_{k=1}^M g_k(A) & \dots & a^{-2(M-1)}g_M(A) - \frac{a^{-2(M-1)}}{M} \sum_{k=1}^M g_k(A) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces el sistema linealizado es controlable si y sólo si $\text{rank}(\mathbb{K}) = M$. Por lo tanto, si consideramos la condición siguiente

$$g_1(A) \neq 0 \quad , \quad g_i(A) = 0 \quad , \quad i = 2, 3, \dots, M,$$

entonces la matriz \mathbb{K} , se convierte en

$$\begin{bmatrix} g_1(A) & a^{-2}g_1(A) - \frac{a^{-2}}{M}g_1(A) & \dots & a^{-2(M-1)}g_1(A) - \frac{a^{-2(M-1)}}{M}g_1(A) \\ 0 & -\frac{a^{-2}}{M}g_1(A) & \dots & -\frac{a^{-2(M-1)}}{M}g_1(A) \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & -\frac{a^{-2}}{M}g_1(A) & \dots & -\frac{a^{-2(M-1)}}{M}g_1(A) \end{bmatrix},$$

matriz cuyo rango es igual a M .

Entonces el sistema (4.2) es controlable. Por lo tanto podemos concluir que el sistema (4.1) es localmente controlable alrededor del punto $(A, 0)$.

Capítulo 5

Conclusiones

El estudio de la solidificación es un problema relevante por sus variadas aplicaciones a la vida real, debido a que casi todo lo que usamos en la vida cotidiana ha pasado por un proceso de solidificación. En este proceso intervienen muchas variables tales como la temperatura, presión, densidad, potencial químico, etc.

El modelo obtenido debe reflejar las principales propiedades de este tipo de procesos, propiedades como desaparición en tiempo finito de partículas, conservación del volumen, área total no creciente, etc.

Los diferentes modelos que describen este tipo de fenómenos, se denominan modelos de transición de fases. En la introducción de este trabajo exploramos la literatura de las ecuaciones de Cahn-Hilliard, Mullins-Sekerka y Monopolo, derivado del modelo LSW. Además, en la jerarquía de estos modelos se observa que, ecuaciones más simples brindan una aproximación adecuada durante el proceso de solidificación, dependiendo de la etapa que se requiera analizar. En efecto, la ecuación de Cahn-Hilliard es buena aproximación durante una primera etapa de evolución de la variable temporal, denominada descomposición espi-nodal. Durante una segunda etapa, se observa que la difusión entre las dos fases es mucho

mayor que en la interface, por ello la ecuación de Mullins-Sekerka brinda una buena aproximación. Finalmente, en el proceso denominado madurez Ostwald, se observa una gran cantidad de partículas de forma casi esférica, en competición por la masa. En esta etapa, una buena aproximación es la del Monopolo.

Respecto al Monopolo, se demostró la controlabilidad local alrededor del punto de equilibrio inestable. Cabe resaltar que, al ser el Monopolo un modelo de campo-interfase (partículas intercambiando masa a través de un campo), la controlabilidad actuando sobre una única partícula refleja la estrecha relación de todas las partículas por medio de $\theta(t)$.

Para el control se consideró controles afines. Por ejemplo, en solidificación de metales, este control representa la fuerza generada por un campo magnético.

Además de los resultados presentados, actualmente estamos estudiando el control óptimo y la estabilización del control.

Capítulo 6

Apéndice

6.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Los resultados de esta sección pueden consultarse en Lukes [25]. Nos interesa saber el estudio de estabilidad en torno a puntos de equilibrio, además el modelo Monopolo es un sistema dinámico autónomo.

Definición 6.1.1 *Un sistema dinámico de la forma*

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (6.1)$$

se denomina autónomo, ya que f es independiente del tiempo.

Definición 6.1.2 *Un punto de equilibrio x_0 del sistema autónomo (6.1) es estable, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $\varphi(t)$ es una solución de (6.1) cumpliendo*

$$|\varphi(0) - x_0| < \delta \quad \text{entonces} \quad |\varphi(t) - x_0| < \epsilon, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Si además, existe $\delta_1 > 0$ cumpliendo

$$|\varphi(0) - x_0| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = x_0,$$

entonces, x_0 se dice asintóticamente estable.

Probar estabilidad de un punto de equilibrio a partir de la definición es una tarea laboriosa, por ello enunciaremos algunos teoremas que brindan condiciones necesarias para determinar la estabilidad.

Definición 6.1.3 Sean, x_0 un punto de equilibrio de (6.1) y U una vecindad de x_0 . Una función diferenciable $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina función de Lyapunov en x_0 , si satisface

1. $V(x_0) = 0$, $V(x) > 0$, para todo $x \in U - \{x_0\}$.

2. $\frac{dV}{dt} = (\nabla V \cdot f)(x) \leq 0$, para todo $x \in U$.

Además, si satisface

3. $\frac{dV}{dt} = (\nabla V \cdot f)(x) < 0$, para todo $x \in U - \{x_0\}$,

se denomina función de Lyapunov estricta, en x_0 .

Teorema 6.1.1 Sea x_0 un punto de equilibrio de (6.1). Si existe una función de Lyapunov para x_0 , entonces x_0 es estable. Además si la función de Lyapunov es estricta entonces x_0 es asintóticamente estable.

Además de este teorema, existe otro muy utilizado para determinar si un punto de equilibrio x_0 es asintóticamente estable. Existen diferentes versiones de este teorema. Enunciamos el que usamos en este trabajo.

Teorema 6.1.2 (Teorema de Invarianza de Lasalle) Supongamos que para el sistema autónomo (6.1), existe una función $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con primeras derivas parciales continuas tal que

$$\frac{dV}{dt} = (\nabla V \cdot f)(x) \leq 0 , \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Sea $E = \{x : (\nabla V \cdot f)(x) = 0\}$ y M un subconjunto invariante en E . Entonces toda solución acotada de (6.1) converge a un punto de M , cuando $t \rightarrow +\infty$.

6.2. Control de sistemas dinámicos

Los resultados de esta sección pueden consultarse en Coron [5]. Empezamos con algunas definiciones y resultados de control lineal. Sea $n, m \in \mathbb{N}$ y $T > 0$. Consideramos el sistema lineal

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) & , \text{ para todo } t \in (0, T), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (6.2)$$

donde $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La función $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa el estado y $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ el control. En la práctica $m \leq n$, ya que nos interesa aplicar una mínima cantidad de controles.

Definición 6.2.1 *El sistema (6.2) es controlable en tiempo $T > 0$ si: dados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe $u \in L^2((0, T); \mathbb{R}^m)$ tal que la solución de (6.2) satisface $x(T) = x_1$.*

Teorema 6.2.1 (Teorema de Kalman) *El sistema (6.2) es controlable en tiempo $T > 0$ si y sólo si*

$$\text{rank} [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n. \quad (6.3)$$

Mas aún, si existe $T > 0$ en el cual el sistema (6.2) es controlable, entonces el sistema es controlable para todo \mathbb{R}^+ . De ahora en adelante diremos que (A, B) es controlable si cumple (6.3).

Consideremos el sistema de control no lineal

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u). \quad (6.4)$$

Definición 6.2.2 *Un punto $(x_\epsilon, u_\epsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ se denomina punto de equilibrio de (6.4), si $f(x_\epsilon, u_\epsilon) = 0$.*

Teorema 6.2.2 Sea $(x_\epsilon, u_\epsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un punto de equilibrio de (6.4). Supongamos que el sistema linealizado alrededor de este punto

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_\epsilon, u_\epsilon)x + \frac{\partial f}{\partial u}(x_\epsilon, u_\epsilon)u,$$

es controlable. Entonces (6.4) es localmente controlable.

6.3. Código Matlab

Código modelo Monopolo, caso particular: $M = 2, n = 3$.

```
function main
disp('-----');
disp('Simulación del modelo de partículas. Caso: M=2 , n=3');
disp('El modelo es el siguiente :');
disp('dx/dt= (x+y)/(x^2+y^2)-1/x');
disp('dy/dt= (x+y)/(x^2+y^2)-1/y');
disp('con condiciones iniciales : ')
disp('x(0)=x_0>0 , y(0)=y_0>0');
disp('-----');
disp('-----');
disp('Ingreso de las condiciones iniciales');
a=-1;
while a<=0
    a=input('Ingrese el valor de x_0 : ');
    if a<=0
        disp('Valor ingresado incorrecto, debe ingresar un valor positivo: ');
    else
        disp('dato inicial ingresado, es correcto : ')
        a=a;
```

```
end
end
disp('-----');
b=-2;
while b<=0
    b=input('Ingrese la segunda condición inicial, y_0 : ');
    if b<=0
        disp('Valor ingresado incorrecto, debe ingresar un valor positivo: ');
    else
        disp('dato inicial ingresado, es correcto: ')
        b=b;
    end
end
end
z=a*a/2
tmax= (1/0.1)*(a*a*a*a*a*a+a*a*a*b*b*b)^(1/3);
Tmax=ceil(tmax);
%Condiciones iniciales
options=odeset('RelTol',1e-6,'Stats','on');
%Entrada de los datos iniciales
x0 = [a ; b];
tspan = [0 , Tmax];
%solucion por ode45.m
[t,x]=ode23s(@monopole,tspan,x0,options);
%Gráficas
figure;hold on
plot(t,x(:,1),'r*-'); plot(t,x(:,2),'b*-'), grid on
legend('x','y') ; ylabel('radio') ;xlabel('tiempo')
```

```
return
%Definición de la ecuación diferencial
function [dx_dt]=monopole(t,x)
dx_dt(1)=(x(1)+x(2))/((x(1))^2+(x(2))^2)-1/x(1);
dx_dt(2)=(x(1)+x(2))/((x(1))^2+(x(2))^2)-1/x(2);
dx_dt=dx_dt';
return
```

Bibliografía

- [1] N. D. Alikakos, P. W. Bates and X. Chen, *Convergence of the Cahn-Hilliard equation to the Hele-Shaw model*, Arch. Rational Mech. Anal, 128(1994), 165-205.
- [2] S. Allen and J. Cahn, *Microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening*, Acta Metallurgica, 27(1979),1085–1095.
- [3] P. W. Bates, X. Chen, X. Deng, *A Numerical Scheme for the Two Phase Mullins-Sekerka Problem*, Electronic Journal of Differential Equations 11(1995), 1–28.
- [4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer,1983.
- [5] J. M. Coron, *Control and Nonlinearity*, American Mathematical Society, 2007.
- [6] V. Cristini, J. Lowengrub, *Three-dimensional crystal growth- II: nonlinear simulation and control of the Mullins-Sekerka instability*, Journal of Crystal Growth, 266 (2004), 552–567.
- [7] H. B. Callen, 1985. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*.
- [8] X. Chen, *Global Asymptotic Limit of Solutions of the Cahn-Hilliard Equation*, Journal of Differential Geometry 44(1996), 262–311.
- [9] X. Chen, J. Hong, F. Yi, *Existence, Uniqueness, and Regularity of Classical Solutions of the Mullins-Sekerka Problem*, Communications in Partial Differential Equations 21(11/12) (1996), 1705–1727.
- [10] S. Dai, *On the shortening rate of collections of plane convex curves by the area-preserving mean curvature flow*, submitted.
- [11] S. Dai, *Universal bounds on the coarsening rates for some models of phase transitions*, PhD thesis, University of Maryland, 2005.
- [12] X. Deng, J. Hong, F. Yi, *A Numerical Analysis Approach for the Hele-Shaw Problem*, M. S. Thesis, Brigham Young University, April 1994.

- [13] S. Dai, B. Niethammer, R. L. Pego, *Crossover in coarsening rates for the monopole approximation of the Mullins-Sekerka model with kinetic drag*. Oxford Centre for Nonlinear PDE, Math. Inst. Oxford Univ. 2009.
- [14] S. Dai and R. L. Pego, *Universal bounds on coarsening rates for means fields models of phase transitions*, SIAM J. Math. Anal., 37(2)(2005), 347-371.
- [15] S. Dai and R. L. Pego, *An upper bound on the coarsening rate for mushy zones in a phase field model*. *Interfaces and Free Boundaries*, Comm. Math. Phys. 229 (2002), 375-395.
- [16] J. Escher and G. Simonett, *Classical solutions of multidimensional Hele-Shaw models*, Soc. for Ind. and Ap. Math. 28(5)(1997), 1028-1047.
- [17] J. Escher and G. Simonett, *A Center Manifold Analysis for the Mullins-Sekerka Model*, J. Journal of Differential Equations. 143(1998), 267-292.
- [18] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.
- [19] S. C. Hardy, P. W. Voorhees *Ostwald Ripening in a System with a High Volume fraction of Coarsening Phase*, Met. Trans. A, 19(1988), 2713-2721.
- [20] J. D. Fehribach, *Mullins-Sekerka stability analysis for melting-freezing waves in helium-4*. European Journal of Applied Mathematics 5(1994), 21-37.
- [21] P. C. Fife, *Models for phase separation and their mathematics*, Electronic Journal of Differential Equations 48(2000), 1-26.
- [22] M. C. Flemings, *Solidification Processing*, Mc Graw-Hill, 1974.
- [23] S. Li, J. Lowengrub, P. H. Leo and V. Cristini, *Nonlinear Stability Analysis of Self-Similar Crystal Growth: Control of the Mullins-Sekerka Instability*, Acta Metallurgica, 27(1979), 1085-1095.
- [24] I. M. Lifshitz, V. V. Slyozov, *The kinetics of precipitation from supersaturated solid solutions*, Electronic Journal Physical Chemical Solid 19(1961), 35-50.
- [25] D. L. Lukes, *Differential Equations: Classical to Controlled*, American Press, 1982.
- [26] W. Mullins and R. Sekerka, *Morphological Stability of a Particle Growing by Diffusion and Heat Flow*, Journal of Applied Physics 34(2)(1963), 323-329.
- [27] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, Butterworth Heineman, 1996.
- [28] B. Niethammer, *Derivation of the LSW theory for Ostwald ripening by homogenization methods*. Arch. Ration. Mech. Analysis, 147(1999), 119-178.
- [29] B. Niethammer, *The LSW model for Ostwald ripening with kinetic undercooling*. Proc. R. Soc. Edinb., 130(2000), 1337-1361.

-
- [30] B. Niethammer and F. Otto, *Ostwald ripening: the screening length revisited*. Calc. Var. PDE, 13(1)(2001), 33–68.
- [31] R. L. Pego, *Front Migration in the Nonlinear Cahn Hilliard Equation*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences 422(1863)(1989), 261–278.
- [32] R. L. Pego, *Lectures on dynamics in models of coarsening and coagulation*. In “ Dynamics in models of coarsening, coagulation, condensation and quantization ” (Weizhu Bao and Jian-Guo Liu, eds.) Lec. Notes Ser. Inst. Math. Sci., Nat. Univ. Singapore. World Scientific. Singapore, 2007.
- [33] O. Penrose, *Metastable states for the Becker-Doering cluster equations*. Comm. Phys. 124(1989), 515–541.
- [34] O. Penrose, *The Becker-Doring equations at large times and their connection with the LSW theory of coarsening*. J. Statist. Phys. 89(1997), 305–320.
- [35] B. Stoth, *Convergence of the Cahn-Hilliard Equation to the Mullins- Sekerka Problem in Spherical Symmetry*, Journal of Differential Equations 125(1996), 154–183.
- [36] B. Stoth, *The Hele-Shaw Problem and Area-Preserving Curve-Shortening Motions*, Archive for Rational Mechanics and Analysis 123(1993), 117–151.
- [37] A. Sukhov and J. Berakdar *Local Control of Ultrafast Dynamics of Magnetic Nanoparticles*, Physical Review Letters, 102 (2009), 1-4.
- [38] P. W. Voorhees, *The theory of Ostwald ripening*. J. Stat. Phys., 38(1/2)(1985), 231– 252.
- [39] C. Wagner, *Theorie der Alterung von Niederschlägen durch Umlösen*, Electronic Journal Physical Chemical Solid 65(1961), 581–591.