



ugr | Universidad
de Granada

MASTER EN ESTADÍSTICA APLICADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Estimación Lineal Mínimo Cuadrática
en Modelos ARH(1) Afectados por Ruido

Felicita Doris Miranda Huaynalaya

TRABAJO DE FIN DE MASTER

Directora

Dra. D^a María Dolores Ruiz Medina

Granada, diciembre 2011

Deseo mostrar mi más sincero agradecimiento, este trabajo no se hubiera llevado a cabo sin la ayuda y el apoyo de la Dra. D^a María Dolores Ruiz Medina, por su constante y valiosa dedicación a lo largo de estos meses y por su excelente labor como directora de esta memoria.

Tambien deseo agradecer todas las muestras de ayuda y estímulo recibidas por familiares, amigos(as) y todos ellos que han tomado parte de alguna u otra forma, en la realización de la misma.

Índice general

1. Filtrado Espacio-Temporal de la Secuencia de Datos Funcionales Espaciales Fractales	9
1.1. Modelo estadístico funcional	9
1.2. Estructura de dependencia funcional y sus aproximación empírica	10
1.3. Estimador funcional lineal por mínimos cuadrados	11
1.4. Estimación empírica B-Spline y sus aproximaciones	12
1.4.1. Aproximación de Funcionales Lineal con Penalización	13
1.4.2. Aproximación de Funcionales Lineal basado en Observaciones Discreta	14
1.5. Estructuras de datos funcionales con dependencia espacial	15
1.5.1. Datos Funcional Geostadística	16
1.5.2. Datos Funcional asociado con procesos puntos	16
1.5.3. Datos Areal Funcional	17
1.6. Métodos Cokriging para datos funcional espacial	18
1.6.1. Modelo lineal espacial para datos funcionales	18
2. Estimación de Máximo Verisimilitud Funcional del Modelo ARH(p)	20
2.1. Formulación del modelo	20
2.1.1. El caso ARH(p)	21
2.2. Diagonalización y Filtro de Kalma en el caso ARH(1)	21
2.2.1. Filtro y suavizado Kalman	22
2.2.2. Filtro Kalman forward	23
2.3. Diagonalización y Filtro de Kalma en el caso ARH(p)	24
2.3.1. Filtro y suavizado Kalman	25
2.3.2. Filtro Kalman forward	26
2.3.3. Suavizado Kalman backward	27
2.4. Algoritmo EM	27
2.4.1. Estimaciones iniciales	27
2.4.2. Pasos E y M	28

2.4.3. El caso ARH(p)	30
2.5. Generación del proceso	32
3. Estimación Lineal Mínimo Cuadrática en Modelos ARH(1) mediante Proyección	33
3.1. Introducción	33
3.2. Resolución de la Ecuación Estimación Funcional mediante Proyección	34
3.3. Predicción optima mediante el filtro de Kalman	36
3.4. Conclusión	39

Introducción

Muchos procesos físicos, biológicos, medio ambiente, geofísico, incluyen la variabilidad en el espacio y el tiempo. Como resultado de las dificultades causadas por grandes conjuntos de datos y el modelado de las interacciones de espacio, tiempo y espacio temporal, los métodos tradicional espacio-tiempo son limitados. Al mismo tiempo, el creciente número de situaciones donde la información de la muestra funcional está disponible ha permitido que las herramientas estadísticas funcionales que deben aplicarse en el análisis de estas características. De hecho, la estadística funcional proporciona un marco más informativo y ricos contexto en el que la complejidad de tales características puede ser debidamente analizada.

En el contexto de la estimación de parámetros mínimo contraste, nos referimos a Anh, Leonenko y Sakhno (2004) sobre la estimación de parámetros de campos aleatorios fraccional a partir de información de la muestra funcional. El libro de Christakos (2000) proporciona una visión general de las diferentes metodologías aplicado en el análisis estadístico de campos aleatorios espacio-temporal, incluyendo los modelos diferenciales fraccional y análisis de heterogeneidad. Por otro lado, las diferentes familias covarianza espacio-temporales recientemente se han introducido y analizado como una herramienta para el modelado estadístico de datos espacio-temporales (ver Berg et al. 2008; Gneiting 2002; Kelbert et al. 2005; Ma 2005; Porcu y Mateu 2007; Stein 2005; entre otros). En el caso en el que pesados-cola y núcleos fractales son considerados para un modelo (véase, por ejemplo, Antoniadis y Sapatinas 2003, Berg et al. 2008 y Kelbert et al. 2005), el problema de estimación funcional asociados es un problema mal planteado. Una opción es aplicar los métodos de proyección numéricos localizando un espacio dimensional finito en el que la inversión estable es posible, en términos de una base ortonormal adecuada. Otra forma es considerar un espacio funcional, con una geometría adecuada, compensando singularidad del espectro, donde la inversión de la ecuación Wiener-Hopf asociados es limitada.

Estadísticas Funcional (véase, por ejemplo, Christakos 2005; Ferraty Vieu y 2006, Ramsay y Silverman 2005) proporciona un contexto usual para el análisis de sistemas complejos. Entre la amplia gama de campos aplicados donde se requiere el análisis estadístico de información de la muestra funcional, se hará referencia a las aplicaciones epidemiológicas (véase Christakos y Hristopulos 1998). El enfoque funcional permite resolver clasificación complejos y los problemas de discriminación, que son fundamentales en la detección de factores de riesgo tales como la alteración de genes celulares (el riesgo de

cáncer humano) (véase Hall et al 2001; Müller de 2005; Müller y Stadtmüller de 2005, que aplicó modelos lineal funcional generalizado). Adicionalmente, la dinámica colectiva evoluciona espacialmente y temporalmente de actuar de manera crítica a coordinar el desarrollo multicelular (por ejemplo, morfo-genéticas movimientos de las células y la transcripción de genes que requiere de buena coordinación espacial y temporal). Las conexiones entre datos genómica de alto rendimiento, que se obtiene a nivel molecular y nivel celular, y mayor nivel organizacional y funcional se establecen a partir de lecturas relevante biológicamente involucrado de las escalas temporales y espaciales (ver Germain et al. 1999; Haoudi Bensmail y 2006; Monk 2003, entre otros). La alta dimensionalidad de los datos generados por estos estudios requiere el desarrollo de nuevas herramientas en Estadísticas Funcional para un procesamiento eficiente y el análisis de estos conjuntos de datos. Transformaciones ortogonales y biortogonal son usualmente aplicado para reducir la dimensionalidad. Por ejemplo, las transformaciones espectrales discretas y continuas (por ejemplo, el análisis de componentes principales funcional, descomposición en valores singular, la transformada de Fourier) se consideran para el modelado y procesamiento de conjunto de datos de expresión genoma (véase, por ejemplo, Alter 2000, 2003; Klevezc y Murray 2001; Yao et al. 2003, 2005). El problema de predicción en secuencias biológicas, y, en particular, en datos de expresión génica (ver Bar-Joseph 2004; Bar-Joseph et al 2003;. Raychadhuri et al. 2000, entre otros) también se formula en un contexto funcional cuando los segmentos no observados debe ser estimado. Los modelos Autorregresivos Hilbert son considerado a representar secuencias de datos funcionales. Estas secuencias pueden estar constituidos, por ejemplo, segmentos de secuencias biológicas, por las imágenes en el análisis espacio-temporal de la deformación de dos dimensiones y el movimiento de las células de las series temporales de imágenes de vídeo digital, etc.

Sin embargo, en muchas aplicaciones, las investigaciones también se enfrentan al problema de la estimación de parámetros de sistemas observada parcialmente. En este sentido, frente a este problema, bajo el supuesto de Gauss, de la familia de modelos ARH(p). Consideramos que el caso de que un ruido de observación funcional aumenta la variabilidad funcional de los datos de producción de una pérdida de información. Las bases ortonormales, al igual que las consideradas en el análisis de componentes principales funcional (base autofunción empírica asociada con el operador de covarianza espacial), no proporciona una proyección adecuada (no diagonaliza la ecuación de estado funcional ARH) con el fin de calcular los estimadores de parámetro de proyección ML en el contexto ARH.

El Análisis estadístico de datos espacio-temporales requiere de las proyecciones de funciones ortogonales u ortonormales que permitan reducir la elevada dimensión de los problemas que se plantean en este análisis (ver Ruiz-Medina y Angulo[82], Wikle y Cressie [110], Wikle [106] y [107]). Trabajaremos en un contexto de espacio de estados. Más concretamente, nos centraremos en el análisis de secuencias de datos funcionales espaciales desde la perspectiva proporcionada por los modelos de series autorregresivas hilbertianas. Estudiaremos el caso de modelos autorregresivos hilbertianos de orden uno, ARH(1). En este trabajo, se desarrollará la implementación del estimador lineal mínimo cuadrático de la ecuación de estados funcional en el modelo ARH(1) afectado por ruido, en sentido fuerte, mediante proyección en la base de autofunciones empíricas del operador de autocovarianza del proceso ARH(1). La aproximación a la predicción del espacio-tiempo que logra la reducción de la dimensión y utiliza un modelo estadístico que es temporalmente dinámica y espacialmente descriptivo (ver Wikle y Cressie 1999). Es decir, que explota el flujo unidireccional del tiempo, en un marco autorregresivo, y es espacialmente "descriptivo" de que el proceso autorregresivo espacialmente colorido. Con la inclusión de una ecuación de medida, esta formulación conduce naturalmente al desarrollo de un filtro de Kalman espacio-temporal que logra la reducción de dimensión en el análisis de grandes conjuntos de datos espacio-temporales.

En la capítulo 1, se estudia el problema funcional de filtrado asociados a los procesos espacio-temporal definido por una ecuación de evolución pseudodiferencial perturbado por un ruido de observación fractal, las condiciones para un cálculo estable de la solución al problema filtrado funcional asociado que son establecidas en función de los espectros de operador de covarianza del proceso de interés y de la observación de ruido Hilbert. La aplicación de perturbación teórica de operadores lineales limitado, se establece de las condiciones en el espacio de parámetros, caracterizando el modelo de observación funcional, para conseguir una inversión estable de la ecuación Wiener-Hopf asociados. También se menciona y desarrolla brevemente algunas técnicas usada en la estimación del modelo de regresión funcional espacial.

En el capítulo 2, En la implementación del método de estimación de proyección ML (máxima verosimilitud) de los parámetros funcional que definen la ecuación ARH(p), se considera la diagonalización de las bases Riesz dual del operador de autocorrelación. Las estimaciones de proyección máxima verosimilitud del operador autocorrelación, y los operadores covarianza de las innovaciones funcionales y los ruidos de observación que se obtienen mediante la combinación de filtrado de Kalman y suavizado con el algoritmo EM. La

implementación del algoritmo filtros de Kalman se realiza en términos de las series definido por los Coeficientes POP del proceso de interés, así como en términos de la transformación POP de los momentos de segundo orden condicional involucrados. El paso expectativa y paso maximización son entonces calculado a partir del filtrado de Kalman forward seguido por una recursión suavizado Kalman backward en términos de coeficientes Fourier asociados a una descomposición.

En el capítulo 3, se estudia la implementación del estimador lineal mínimo cuadrático de la ecuación de estados funcional en el modelo ARH(1) afectado por ruido Hilbert, en sentido fuerte, mediante proyección en la base de autofunciones empíricas del operador de autocovarianza del proceso ARH(1), teniendo en cuenta la secuencia de datos funcionales espaciales del proceso de interés con respecto a la observación del tiempo, sin considerar la localización.

Capítulo 1

Filtrado Espacio-Temporal de la Secuencia de Datos Funcionales Espaciales Fractales

El modelo de observación se define en términos de una secuencia de realizaciones espaciales del proceso de interés, la solución a una ecuación pseudo diferencial espacio-temporal, afectados por fuertes ruido blanco aditivo de Hilbert. Se estudiará las condiciones en el espacio de parámetros, considerando la pesada cola y el comportamiento fractal de la familia núcleo covarianza considerado, para obtener una regularización del problema filtrado funcional asociados. Por lo tanto, la robustez del estimador funcional se obtiene frente a la variabilidad local funcional de los datos. En la práctica, estas condiciones se refieren a los relacionados espectros empíricos con los estimadores operadores covarianza.

1.1. Modelo estadístico funcional

El problema filtrado asociado con el modelo de observación funcional (ver Salmerón y Ruiz-Medina 2009, para el caso de procesos Hilbertiano autorregresivo).

$$Z_t = Y_t + N_t, \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

donde Y es la solución a la ecuación evolución

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(t, x) = L_x Y(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times D \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

con condiciones inicial aleatorias valuado Hilbert

$$Y(0, \cdot) \equiv Y_0(\cdot) \in H^{Y_0}, \quad (1.3)$$

la condición inicial aleatoria definido por una variable aleatoria con valores en el espacio de Hilbert H^{Y_0} de funciones espacial definido en dominio $D \subset \mathbb{R}^n$.

El modelo (??) es entonces interpretado como un modelo estadístico funcional con $N_t, t \in \mathbb{R}_+$, definido como un fuerte ruido blanco Hilbertiano, es decir, como una secuencia de variables aleatorias independientes valuado H^N que satisface

$$E\|N_t\|_{H^N}^2 < \infty, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Los modelos del fuerte ruido blanco Hilbertiano están definido en términos de ruido de colores espaciotemporal fractal con el núcleo de covarianza absolutamente integrable.

1.2. Estructura de dependencia funcional y sus aproximación empírica

La estructura de segundo orden de las variables aleatorias Hilbert valuado del modelo de observación funcional

$$Z_t = Y_t + N_t, \quad t \in [0, T],$$

con $N_t, t \in \mathbb{R}_+$, un fuerte ruido blanco Hilbertiano. El modelo de observación funcional está dado en términos de los siguientes operadores.

Los operadores covarianza de los procesos de Y, N y Z están definido como

$$\begin{aligned} R_{Y_t Y_s} &= E[Y_t \otimes Y_s], \quad t, s \in \mathbb{R}_+, \\ R_{N_\mu N_s} &= E[N_\mu \otimes N_s], \quad \mu, s \in \mathbb{R}_+, \\ R_{Z_\mu Z_s} &= E[Z_\mu \otimes Z_s] = E[Y_\mu \otimes Y_s] + E[N_\mu \otimes N_s], \quad \mu, s \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

específicamente,

$$\begin{aligned} R_{Y_t Y_s}(\phi) &= E[Y_t \langle Y_s, \phi \rangle_{H^Y = \bar{H}^s(D)}], \quad \forall \phi \in D(R_{Y_t Y_s}), \\ R_{N_\mu N_s}(\phi) &= E[N_\mu \langle N_s, \phi \rangle_{H^N = \bar{H}^\beta(D)}], \quad \forall \phi \in D(R_{N_\mu N_s}), \\ R_{Z_\mu Z_s}(\phi) &= E[Z_\mu \langle Z_s, \phi \rangle_{H^Z = \bar{H}^d(D)}], \quad \forall \phi \in D(R_{Z_\mu Z_s}), \end{aligned} \quad (1.4)$$

denotado por $D(A)$ el dominio del operador A . Si los procesos Y y N son estacionario en el tiempo, para $t = s$ y $u = s$, entonces los operadores de covarianza espacial de los procesos Y, N y Z , son invariante en el tiempo.

El operador de covarianza transversal entre el proceso de interés y el proceso observado está dado por

$$R_{Y_t Z_s} = E [Y_t \otimes Z_s], \quad t, s \in \mathbb{R}_+,$$

Es decir,

$$R_{Y_t Z_s}(\phi) = E [Y_t \langle Z_s, \phi \rangle_{H^Z = \bar{H}^d(D)}], \quad \forall \phi \in D(R_{Y_t Z_s}),$$

Para la estimación funcional del proceso de interés Y desde el modelo de observación 1.1, bajo la estacionalidad en el tiempo, se tiene los siguientes estimadores funcional de los operadores de covarianza transversal y espacial de Z , basado en el método de momentos, desde la observación del tiempo $t = 1, \dots, T$,

$$\begin{aligned} \hat{R}_{Z_s Z_s}^T &= \frac{1}{T} \left(\sum_{\mu=1}^T Z_\mu \otimes Z_\mu \right) - \left(\frac{1}{T} \sum_{\mu=1}^T Z_\mu \right) \otimes \left(\frac{1}{T} \sum_{\mu=1}^T Z_\mu \right) \\ \hat{R}_{Z_s Z_{s+k}}^T &= \hat{R}_{Y_s Y_{s+k}}^T = \frac{1}{T-k} \left[\sum_{\mu=1}^{T-k} Z_\mu \otimes Z_{\mu+k} \right] - \left[\frac{1}{T-k} \sum_{\mu=1}^{T-k} Z_\mu \right] \otimes \left[\frac{1}{T-k} \sum_{\mu=1}^{T-k} Z_{\mu+k} \right], \end{aligned} \quad (1.5)$$

para $k = 1, \dots, p$.

En práctica, la información muestral funcional es discreta. Los métodos suavizado se pueden aplicar con el fin de aproximarse a la naturaleza continua de los datos. Es decir, en la práctica, el modelo de observación es definido como

$$Z_t(x) = Y_t(x) + N_t(x), \quad x \in D_Z^{OBS} \subset D, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1.6)$$

donde D_Z^{OBS} es un conjunto discreto contenido en D . La densidad de locaciones espacial definiendo el conjunto D_Z^{OBS} debe garantizar un buen desempeño de las técnicas de suavizado con el fin de aplicar la metodología de las estadísticas funcionales (ver, por ejemplo, Besse et al. 2000, en relación a la implementación de los métodos de estimación funcional en términos de datos funcional suavizado).

1.3. Estimador funcional lineal por mínimos cuadrados

Del modelo de observación funcional 1.1, de la ecuación Wiener-Hopf, se define el estimador lineal por mínimos cuadrados de Y en tiempo $t \in$

$[0, T]$, para el problema filtrado, y en el tiempo futuro para el problema de predicción, se deriva de la siguiente manera

$$E[(Y_t(\cdot) - L_t Z(\cdot))Z_s(\cdot)] = 0, \quad s \in [0, T], \quad (1.7)$$

donde L_t denota el operador lineal que define la transformación óptima, en el sentido de media cuadrática de los datos funcionales espacial a aproximarse a la realización espacial de Y en cada tiempo t de interés, es decir,

$$Y_t = L_t Z.$$

En el caso donde L_t es un operador integral, tenemos

$$\widehat{Y}_t(x) = L_t Z(x) = \int_{[0, T] \times D} l(t, s; x, y) Z_s(y) ds dy, \quad (1.8)$$

donde l denota el núcleo espacio temporal definiendo el operador L_t en el caso integral. Desde la ecuación 1.7, el operador L_t debe satisfacer

$$R_{Y_t Z_s} = L_t R_{Z \cdot Z_s}, \quad s \in [0, T] \quad (1.9)$$

La inversión estable de la ecuación 1.9 conduce a la solución funcional

$$L_t = R_{Y_t Z} [R_{Z \cdot Z_\star}], \quad (1.10)$$

donde \star representa el argumento de segundo tiempo del núcleo l definiendo el operador L_t en el caso integral (ver ecuación 1.8).

En el caso de Gauss, los exponentes s y β son estimados de los espectros empíricos relacionados con la representación umbral Wavelet de los estimadores de operador covarianza de la ecuación 1.5 (ver Bosq 2000, donde proporcionan los resultados de la convergencia de los espectro empírico al teórico).

1.4. Estimación empírica B-Spline y sus aproximaciones

(Ver Guillas, S y Lai, M.J., 2009) Sea Y una variable aleatoria con valores reales. Sea D un dominio poligonal en \mathbb{R}^2 . El modelo de regresión es:

$$Y = f(X) + \epsilon = \langle g, X \rangle + \epsilon = \int_D g(s) X(s) ds + \epsilon, \quad (1.11)$$

donde $g(s)$ está en un espacio funcional H (generalmente $= L^2(D)$), ϵ es una variable aleatoria real que satisface $E\epsilon = 0$ y $EX(s)\epsilon = 0, \forall s \in D$.

A continuación, los métodos de aproximación para determinar una estimación de g donde es definido en una $2D$ dominio espacial D de las observaciones en X obtenidos sobre un conjunto de puntos de diseño en D e Y .

1.4.1. Aproximación de Funcionales Lineal con Penalización

Suponemos que X e Y sigue el modelo de regresión (1.11). La solución $\alpha \in H$ que se resuelve con el siguiente problema de minimización:

$$\alpha = \arg \min_{\beta \in H} E[(Y - \langle \beta, X \rangle)^2] + \rho \|\beta\|_r^2, \quad (1.12)$$

donde $\rho > 0$ es un parámetro y $\|\beta\|_r^2$ denota la semi-norma de β :

$$\|\beta\|_r^2 = \xi_r(\beta, \beta),$$

donde

$$\xi_r(\alpha, \beta) = \int_D \sum_{k=0}^r \sum_{i+j=k} D_1^i D_2^j \alpha D_1^i D_2^j \beta,$$

D_1 y D_2 posición de la derivada parcial con respecto a la primera y segunda variables. A menos que la pena es igual a cero, α no es necesariamente igual a g . Desde $S_d^r(\Delta)$ puede ser denso en el espacio de Hilbert H como $|\Delta| \rightarrow 0$, se considera un espacio spline $S_d^r(\Delta)$ para una suavidad $r \geq 0$ y el grado $d > r$ sobre una triangulación Δ de D con $|\Delta|$ suficientemente pequeñas. La aproximación $S_{\alpha, \rho} \in S_d^r(\Delta)$ de α es

$$S_{\alpha, \rho} = \arg \min_{\beta \in S_d^r(\Delta)} E[(Y - \langle \beta, X \rangle)^2] + \rho \xi_r(\beta). \quad (1.13)$$

Sea $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ una base para $S_d^r(\Delta)$, entonces $S_\alpha = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j$.

$$E(\langle \sum_{i=1}^m c_i \phi_i, X \rangle)^2 + \rho \|\sum_{i=1}^m c_i \phi_i\|_r^2 = 0 \quad (1.14)$$

La estimación empírica de $S_{\alpha, \rho}$. Sea $X_i, i = 1, \dots, n$ una sucesión de variables aleatorias funcional tal que sólo el polinomio cero es perpendicular al

subespacio generado por $\{X_1, \dots, X_n\}$, excepto en un evento cuya probabilidad p_n tiende a cero cuando $n \rightarrow +\infty$. La estimación empírica $\widehat{S}_{\alpha, \rho, n} \in S_d^r(\Delta)$ es la solución de

$$\widehat{S}_{\alpha, \rho, n} = \arg \min_{\beta \in S_d^r(\Delta)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \langle \beta, X_i \rangle)^2 + \rho \|\beta\|_r^2, \quad (1.15)$$

con $\rho > 0$ el parámetro suavizado. La solución de la minimización está dada por $\widehat{S}_{\alpha, \rho, n} = \sum_{i=1}^m c_{n,i} \phi_i$ con vector de coeficientes $c_n = (c_{n,i}, i = 1, \dots, m)$ que satisface $\widehat{A}_n c_n = \widehat{b}_n$, donde

$$\widehat{A}_n = \left[\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \langle \phi_i, X_l \rangle \langle \phi_j, X_l \rangle + \rho \xi_r(\phi_i, \phi_j) \right]_{i,j=1, \dots, m}$$

y

$$\widehat{b}_n = \left[\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n Y_l \langle \phi_j, X_l \rangle \right]_{j=1, \dots, m} = \left[\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (f(X_l) + \epsilon_l) \langle \phi_j, X_l \rangle \right]_{j=1, \dots, m}$$

Para demostrar que $\widehat{S}_{\alpha, \rho, n}$ se aproxima a $S_{\alpha, \rho}$, en la probabilidad. Por simplicidad, se considera el caso donde la penalidad es igual a cero como las entradas de $A - \widehat{A}_n$ y $b - \widehat{b}_n$ son exactamente los mismos con o sin penalización. Para los detalles de teoremas y lemas que se ha usado para la demostración (ver Guillas y Lai, 2009)

1.4.2. Aproximación de Funcionales Lineal basado en Observaciones Discreta

Sea X las observaciones sobre algunos puntos diseñado $s_k, k = 1, \dots, N$ en D . Sea S_X la aproximación spline en forma de cuadrado mínimo discreto de X asumiendo que $s_k, k = 1, \dots, N$ se distribuye uniformemente sobre Δ de D con respecto a $S_d^r(\Delta)$. Consideramos α_S que resuelve el siguiente problema de minimización :

$$\alpha_S = \arg \min_{\beta \in H} E[Y - \langle \beta, S_X \rangle]^2 + \rho \|\beta\|_r^2. \quad (1.16)$$

Se busca aproximar $S_{\alpha_S} \in S_d^r(\Delta)$ de α_S tal que

$$S_{\alpha_S} = \arg \min_{\beta \in S_d^r(\Delta)} E[Y - \langle \beta, S_X \rangle]^2 + \rho \|\beta\|_r^2. \quad (1.17)$$

Primero se analiza como α_S se aproxima a α .

$$F(\beta) = E[(Y - \langle \beta, X \rangle)^2]$$

es una estricta función convexa y así $F_S(\beta) = E[(Y - \langle \beta, X \rangle)^2] + \rho \|\beta\|_r^2$

La estimación empírica de S_α basado en observaciones discretas de superficies aleatorias $X_i, i = 1, \dots, n$. La estimación empírica $\widetilde{S}_{\alpha, \rho, n} \in S_d^r(\Delta)$ es la solución de

$$\widetilde{S}_{\alpha, \rho, n} = \arg \min_{\beta \in S_d^r(\Delta)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Y_i - \langle \beta, S_{X_i} \rangle]^2 + \rho \|\beta\|_r^2.$$

La solución de la minimización de la ecuación anterior está dada por

$$\widetilde{S}_{\alpha, \rho, n} = \sum_{i=1}^m \widetilde{c}_{n,i} \phi_i$$

con $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ una base de $S_d^r(\Delta)$ y con coeficiente vector $\widetilde{c}_n = (\widetilde{c}_{n,i}, i = 1, \dots, m)$ que satisface $\widetilde{A}_n \widetilde{c}_n = \widetilde{b}_n$, y

$$\widetilde{A}_n = \left[\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \langle \phi_i, S_{X_l} \rangle \langle \phi_j, S_{X_l} \rangle + \rho \xi_r(\phi_i, \phi_j) \right]_{i,j=1,\dots,m}$$

donde S_{X_l} es el cuadrado mínimo discreto en forma de X_l y

$$\widetilde{b}_n = \left[\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n Y_l \langle \phi_j, S_{X_l} \rangle \right]_{j=1,\dots,m}$$

Para los detalles de teoremas y lemas que se ha usado para la demostración de la estimación empírica $\widetilde{S}_{\alpha, \rho, n} \in S_d^r(\Delta)$ (ver Guillas y Lai, 2009)

1.5. Estructuras de datos funcionales con dependencia espacial

El proceso funcional espacial se define

$$\{X_s : s \in D \subseteq \mathbb{R}^d\} \tag{1.18}$$

donde s es una función de datos genéricos en el espacio Euclideo d -dimensional, el conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^d$ puede ser fijo o aleatorio, y X_s son variables aleatorias funcional, definido como elementos aleatorios tomando valores en un espacio de dimensión infinita (o espacio funcional). Por lo general X_s , para cada s fijo, es una función real de $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ a \mathbb{R} .

En el análisis de datos espacial univariante o multivariante, la naturaleza de los conjuntos D que se permite clasificar datos espaciales funcionales. Datos funcional Geostatística que aparecen cuando D es un subconjunto fijo de R_d con un volumen positivos y n puntos s_1, \dots, s_n , en D que se eligen para observar las funciones aleatorias $X_i, i = 1, \dots, n$. Cuando se tiene un patrón de puntos de mercado funcional marcó el punto, cuando una función completa se observa en cada punto generada por un proceso estándar de punto. Datos de área Funcionales (o de datos funcional en red) corresponden al caso de D ser un conjunto fijo y contable.

A continuación, los tres tipos clásicos de estructuras de datos espaciales (datos geoestadísticos, los patrones de punto, y los datos de área) que se pueden combinar con datos funcionales (ver Delicado, Giraldo, Comas y Mateu, 2010), donde se aplica las tres estructuras de datos espaciales en datos de temperaturas de 35 estaciones meteorológicas de Canadá)

1.5.1. Datos Funcional Geostatística

Sea el proceso aleatorio funcional (1.18) es de segundo orden fijo e isotropo, es decir, las funciones de media y la varianza son constantes y la covarianza sólo depende de la distancia entre los puntos de muestreo (sin embargo, la metodología también se podría desarrollar sin asumir estas condiciones). Además, tenga en cuenta que por cada fijo $t_0 \in [a, b]$, la sección finito-dimensional $X_s(t_0)$ es una función aleatoria escalar definida en un espacio de probabilidad. Formalmente es,

- $E(X_s(t)) = m(t)$ y $V(X_s(t)) = \sigma^2(t)$ para todo $t \in [a, b]$ y $\forall s \in D$
- $Cov(X_s(t), X_{s+h}(u)) = C(h; t, u)$, con h el vector de retraso espacial, y para todo $t, u \in [a, b]$ Esto asegura que la varianza del proceso asociado $C(0; t, u)$ existe y es finito. Usamos la notación de $C(h, t)$ de $C(h; t, t)$.

1.5.2. Datos Funcional asociado con procesos puntos

Los objetivos del estudio de los procesos de punto con una marca de funcionales son esencialmente los mismos que en otros procesos puntuales

marcados. La pregunta más importante es la de saber si hay dependencia espacial en las marcas funcionales. Tenga en cuenta que el patrón de punto es un estándar único y el tipo de marca es diferente.

Sea $h(\cdot, \cdot)$ una prueba funcional que participan dos funciones (por ejemplo, $h(f, g)$ podría ser una medida de similitud entre las funciones f y g), y sea $\lambda^{(2)}(r), r \in \mathbb{R}^+$, ser la usual densidad producto de segundo orden, para el proceso de punto estacionario e isotrópico Ψ , sea $\lambda_f^{(2)}(r)$ la versión contrapartida de esta densidad de un proceso punto de mercado funcional, es decir, $\lambda_f^{(2)}(r)$ es la densidad asociada a la medida de momento factorial funcional de segundo orden, (cuando esta medida es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue)

$$\alpha_f^{(2)}(A_1 \times A_2) = E \left[\sum_{S_1, S_2 \in \Psi}^{\neq} h(X_{S_1}, X_{S_2}) I_{A_1 \times A_2}(S_1, S_2) \right]$$

donde $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$. La función correlación de margen funcional (Comas et al., 2008) es definido como

$$g_f(r) = \frac{\lambda_f^{(2)}(r)}{\lambda^{(2)}(r) E[h(X_{S_1}, X_{S_2})]}$$

donde $r = \|s_1 - s_2\|$. Comas et al. (2008) propone a estimar $g_f(r)$ en la ventana de observación W por

$$\hat{g}_f(r) = \frac{1}{2\pi r \hat{\lambda}_p^2 |W|} \sum_{S_1, S_2 \in \Psi}^{\neq} \frac{h(X_{S_1}, X_{S_2}) K(\|S_1 - S_2\| - r)}{\hat{E}[h(X_{S_1}, X_{S_2})] e(S_1, \|S_1 - S_2\|)}$$

donde Ψ es el patrón punto observado, $\hat{\lambda}_p$ es un estimador de la intensidad de puntos, $K(\cdot)$ es una función núcleo que es no negativo y simétrica con respecto a la origen, y $e(\cdot)$ es un factor para corregir los efectos de borde.

1.5.3. Datos Areal Funcional

Los datos de área funcional consiste en determinar la pirámide de población. Los objetivos para este tipo de espacio por la FDA son similares a las que se refieren los datos de área univariante o multivariante: la detección de la dependencia espacial (a través de pruebas de autocorrelación espacial), la identificación de agrupaciones espaciales, y para el modelado de la dependencia espacial (por ejemplo, a través de modelos de regresión espacial) son

probablemente las más importantes. La disimilitud se calcula a partir de la información disponible en cada área. Por lo tanto, se puede aplicar a cualquier tipo de característica observable, siempre que la disimilitud (o distancia) se puede definir entre cualquier par de observaciones.

Cuando se trabaja con las pirámides de población, que son casos particulares de funciones de densidad, la distancia adecuada entre ellas es la versión simétrica de la divergencia Kullback-Leibler

$$d_{KL}(f_i, f_j) = \int_a^b \log \left(\frac{f_i(x)}{f_j(x)} \right) f_i(x) dx + \int_a^b \log \left(\frac{f_j(x)}{f_i(x)} \right) f_j(x) dx$$

1.6. Métodos Cokriging para datos funcional espacial

En un modelo funcional lineal con dependencia espacial, la estimación de la regresividad se reduce a un problema cokriging multivariado para la elección adecuada de los espacios funcionales. El problema del kriging en el caso de dimensión infinita bajo ciertas condiciones de regularidad de las funciones. El método se ilustra con el análisis de datos de perfiles de temperatura en el Océano Antártico, donde los mamíferos marinos se utilizan como muestras. Para mas detalles el método y la aplicación (ver Nerini, Monestiez y Manté, 2010; y Nerini y Monestiez, 2008)

1.6.1. Modelo lineal espacial para datos funcionales

Se considera un conjunto de curvas de $E = \{y_i, i = 1, \dots, n\}$ muestra en n ubicaciones espacial aleatorias x_i sobre el dominio D . Cada $y_i(t)$ es una observación única de $Y_i(t)$, una función aleatoria en x_i ubicación donde el argumento t varía en un intervalo compacto τ de \mathbb{R} . La función de Y_i toma valores en un Espacio de Hilbert reproducción del núcleo (RKHS) H de las funciones en τ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ denota su producto interno y $\| \cdot \|_H$ la norma asociada. Bajo los supuestos de estacionariedad de segundo orden, la función de media μ que es la misma en cualquier punto del dominio y que se supone que es desconocido

$$E(Y_i) = \mu, \forall x_i \in D$$

El operador de covarianza lineal $C_{ij} : H \rightarrow H$ entre Y_i en la ubicación x_i y

Y_j en la ubicación $x_j = x_i + h$ se define como sigue

$$C_{ij}(f) = E[(Y_i - \mu) \otimes (Y_j - \mu)(f)] = E(\langle Y_i - \mu \rangle_H (Y_j - \mu)), f \in H.$$

Para estimar Y_0 , la curva en lugar desconocido x_0 , con el modelo lineal (Cuevas et al. y Cardot et al.)

$$\widehat{Y}_0 = \sum_{i=1}^n B_i(Y_i),$$

donde B_i es un operador lineal.

El estimator \widehat{Y}_0 imparcial debe ser realizada por minimizar

$$E\|\widehat{Y}_0 - Y_0\|_H^2$$

Cada función Y_i expresado en términos de una combinación lineal de funciones bases (ϕ_1, \dots, ϕ_p) de H

$$Y_i(t) = \sum_{k=1}^p \alpha_k(x_i) \phi_k(t) = \alpha_i' \Phi(t)$$

donde $\alpha_i = (\alpha_1(x_i), \dots, \alpha_p(x_i))'$ es el p-vector de los coeficientes de ubicación x_i y $\Phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_p(t))'$ los p-vectores de funciones bases.

La hipótesis de estacionariedad de la función aleatoria $Y - I$ expresado en ϕ base ortonormal reduce a los supuestos estacionariedad multivariado clásicos en los coeficientes de la expansión

$$\begin{cases} E(\alpha_i) = a, \forall x_i \in D \\ C_{ij} = E[(\alpha_i - a)(\alpha_j - a)'] \end{cases}$$

donde la media \mathbf{a} es un p-vector de coeficientes, C_{ij} la matriz de covarianza cruzada $p \times p$ con las entradas de $cov(\alpha_k(x_i), \alpha_l(x_j)), k, l = 1, \dots, p$. La estimación de \widehat{Y}_0 se logra a través de los coeficientes de cokriging

$$\widehat{\alpha}_0 = \sum_{i=1}^n B_i' \alpha_i$$

donde las \mathbf{B}_i matrices $p \times p$, con entradas $\{b_{kl}^i\}$, son matrices de ponderación que reduce al mínimo

$$traza(var(\widehat{\alpha}_0 - \alpha_0)).$$

Capítulo 2

Estimación de Máximo Verisimilitud Funcional del Modelo ARH(p)

Los modelos Autorregresivos Hilbert (ARH) representan secuencias de datos funcional. La diagonalización de los modelos ARH(1) y ARH(p) con $p > 1$, en términos de la descomposición espectral del operador autocorrelación involucrado en una versión funcional del patrón de oscilación principal (POP). En la implementación del método de estimación de proyección ML (máxima verosimilitud), se considera la diagonalización de las bases Riesz dual del operador de autocorrelación. Las estimaciones de proyección máxima verosimilitud del operador autocorrelación, y los operadores covarianza de las innovaciones funcionales y los ruidos de observación que se obtienen mediante la combinación de filtrado de Kalman y suavizado con el algoritmo EM. La implementación del algoritmo filtros de Kalman se realiza en términos de las series definido por los Coeficientes POP del proceso de interés, así como en términos de la transformación POP de los momentos de segundo orden condicional involucrados.

2.1. Formulación del modelo

Sea H un real separable del espacio Hilbert de funciones definido en un dominio limitado $D \subset \mathbb{R}^n$ con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, y con norma asociada $\| \cdot \|_H$. Consideramos $\{Z_t, t \in \mathbb{N}\}$ son un proceso valuado Hilbert con media cero en H , es decir, para cada $t \in \mathbb{N}$, $Z_t \in H$, donde para todo $t \geq 0$, Z_t es definido en el espacio probabilístico básico (Ω, A, P) . En el caso ARH(1),

Z satisface la siguiente ecuación:

$$Z_t(x) = A[Z_{t-1}](x) + v_t(x), \quad x \in D, \quad t \in \mathbb{N}^*. \quad (2.1)$$

donde v es un fuerte ruido blanco de Hilbert, es decir, una sucesión de variables aleatorias Hilbert valuado independientes e idénticamente distribuidas sobre H satisfaciendo

$$E(\|V_t\|_H^2) = \sigma_v^2 < \infty$$

incorrelacionada con la condición inicial aleatoria $Z_0 \in H$, que tiene varianza funcional finita, es decir, un operador covarianza traza. El operador de autocorrelación A es un operador acotado definido en un dominio denso en H .

2.1.1. El caso ARH(p)

El modelo ARH(p) proporciona un modelo más flexible que está dado por la ecuación estado:

$$Z_t(x) = A_1(Z_{t-1})(x) + \dots + A_p(Z_{t-p})(x) + v_t(x), \quad t \in \mathbb{N}^*, \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (2.2)$$

donde v es un fuerte ruido blanco de Hilbert, incorrelacionada con las condiciones iniciales aleatorias. Los parámetros funcionales $A_k, k = 1, \dots, p$, son los parámetros de autocorrelación involucrado en la ecuación 2.2, que son definidos en H .

2.2. Diagonalización y Filtro de Kalma en el caso ARH(1)

La proyección de las ecuaciones estado (2.1), el operador de autocorrelación A admite una descomposición espectral.

El operador A debe satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} A\psi_i &= \lambda_i\psi_i, \quad i \in \mathbb{N}, \\ A^*\phi_i &= \lambda_i\phi_i, \quad i \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde A^* denota el operador adjunto de A , $\{\psi_i, i \in \mathbb{N}\}$ y $\{\phi_i, i \in \mathbb{N}\}$ son los sistemas de autofunciones derecha e izquierda asociado con A y A^* , respectivamente y con los puntos espectros $\{\lambda_i, i \in \mathbb{N}\}$ (ver, por ejemplo, Daubechies y Lions 1992; Dunford and Schwartz 1971). Los sistemas $\{\psi_i, i \in \mathbb{N}\}$

y $\{\phi_i, i \in \mathbb{N}\}$ son bases Riesz dual, es decir, son bases de H y su H^* dual satisfaciendo:

$$\langle \phi_i, \psi_j \rangle_H = \delta_{i,j}, \quad i, j \in \mathbb{N}$$

Equivalentemente,

$$\Phi^* \Psi = I, \quad (2.4)$$

con I que representa el operador identidad, y Φ y Ψ ser los operadores de proyección en los sistemas correspondientes $\{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$ y $\{\psi_i : i \in \mathbb{N}\}$. De la ecuación (2.3) y (2.4), se tiene que el operador A admite la diagonalización

$$A = \Psi \Lambda \Phi^*,$$

en términos de los sistemas izquierda $\{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$ y derecha $\{\psi_i : i \in \mathbb{N}\}$. Se denota Λ como el operador diagonal definido por la secuencia de autovalores $\lambda_i, i \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$A[Z_{t-1}](\cdot) = \Psi \Lambda \Phi^*[Z_{t-1}](\cdot),$$

y, de la ecuación (2.4), tenemos

$$\Phi^* Z_t = \Lambda \Phi^* Z_{t-1} + \Phi^* v_t.$$

Es decir, se obtiene la ecuación diagonal autorregresivo

$$a_j(t) = \lambda_j a_j(t-1) + v_j(t), \quad j \in \mathbb{N}, \quad (2.5)$$

en términos de los coeficientes aleatorios temporal (coeficientes POP funcional)

$$\begin{aligned} a_j(t) &= \langle Z_t(\cdot), \phi_j(\cdot) \rangle_H, \quad t \geq 0, \quad j \in \mathbb{N} \\ v_j(t) &= \langle v_t(\cdot), \phi_j(\cdot) \rangle_H, \quad t < 0, \quad j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Equivalentemente, el operador A admite una representación integral de sentido débil en término del núcleo espectral

$$k_A(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i \psi_i(x) \phi_i(y).$$

2.2.1. Filtro y suavizado Kalman

La implementación de la recursión del filtro de Kalman, partimos de la ecuación estado

$$a(t) = \Lambda a(t-1) + v(t), \quad (2.6)$$

donde, para cada tiempo $t \in \mathbb{N}$,

$a(t) = (a_1(t), \dots, a_M(t))^*$, $v(t) = (v_1(t), \dots, v_M(t))^*$, y Λ denota la matriz diagonal $M \times M$ con entrada de los autovalores $\lambda_i, i = 1, \dots, M$.

2.2.2. Filtro Kalman forward

De la Ecuación 2.6. La información muestral es definido por el siguiente modelo observación:

$$Y_t = Z_t + \epsilon_t, \quad (2.7)$$

donde ϵ representa un fuerte ruido blanco Hilbert con media cero, es decir, $\epsilon_t \in H$, para todo $t \geq 0$, y

$$E(\|\epsilon_t\|_H^2) = \sigma_\epsilon^2 < \infty,$$

para todo $t \geq 0$. Proceso ϵ se supone que está correlacionado con Z .

De las observaciones de proceso Y hasta un tiempo t , se calcula el estimador de los coeficientes POP del proceso de interés Z :

$$\hat{a}(t|t) = \hat{a}(t|t-1) + K_t(Y_t - \Psi\hat{a}(t|t-1)),$$

donde $\hat{a}(t|t) = E(a(t)|Y_t, \dots, Y_t)$ y $\hat{a}(t|t-1) = E(a(t)|Y_{t-1}, \dots, Y_1)$. Aquí, K_t es el operador ganancia, es decir, el filtro que define el efecto suavizado en los datos funcional espacial, dado por

$$K_t = P_{t|t-1}\Psi^*(R_\epsilon + \Psi P_{t-1|t-1}\Psi^*)^{-1},$$

en término del operador covarianza R_ϵ del ruido de observación, y el momento condicional de segundo orden

$$P_{t|t-1} = \text{var}(a(t)_{t-1}, \dots, Y_1) = \Lambda P_{t|t-1}\Lambda + Q_t,$$

denotado por $P_t = E((a(t) - \hat{a}(t|t))(a(t) - \hat{a}(t|t))^*)$ y ser $Q_t = \Phi_M^* R_v \Phi_M$ el operador covarianza de los coeficientes POP de v_t . El error cuadrado medio funcional está dado por

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_t\Psi P_{t|t-1},$$

y la predicción de un paso adelante es calculado como

$$\hat{a}(t|t-1) = \Lambda\hat{a}(t-1|t-1).$$

Los valores iniciales considerado son

$$\hat{a}(0|0) = 0,$$

$$P_{0|0} = E(a(0)a(0)^*),$$

con $a(0) = (a_1(0), \dots, a_M(0))^*$ ser el vector constituido por la secuencia truncada de coeficientes POP de la condición inicial aleatoria,

$$Z_0(\cdot) \simeq \sum_{i=1}^M a_i(0)\Psi_i(\cdot).$$

2.3. Diagonalización y Filtro de Kalma en el caso ARH(p)

Los operadores de autocorrelación A_k , $k = 1, \dots, p$ admite una descomposición espectral en términos de bases Riesz dual. La diagonalización de los operadores autocorrelación de la ecuación estado es obtenido por la proyección en los p sistemas de autofunción derecha involucrado en la factorización multiespectral.

$$A_k = \Psi_k \Lambda_k \Phi_k^*, \quad k = 1, \dots, p, \quad (2.8)$$

donde Λ_k denota un operador diagonal definido por la secuencia de autovalores $\lambda_{ik}, i \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, p$, y

$$\begin{aligned} \Phi_k^* \Psi_l &= I, \quad \text{para } k = l, \\ \Phi_k^* \Psi_l &= 0, \quad \text{para } k \neq l, \end{aligned} \quad (2.9)$$

con I y 0 que representa el operador identidad y nulo en H , los operadores de proyección Ψ_k y Φ_k para $k = 1, \dots, p$, en los sistemas autofunción de izquierda y derecha $\{\psi_{ik} : i \in \mathbb{N}\}$ y $\{\phi_{ik} : i \in \mathbb{N}\}$, y factorizando $A_k, \dots, k = 1, \dots, p$, sus operadores adjuntos.

La diagonalización de la ecuación estado (2.2) se obtiene de la ecuación (2.8) y (2.9):

$$\bigoplus_{k=1}^p \Phi_k^* Z_t = \bigoplus_{k=1}^p \Lambda_k \Phi_k^* Z_{t-k} + \bigoplus_{k=1}^p \Phi_k^* v_t.$$

Para el caso donde $\Phi_k = \Phi$, y $\Psi_k = \Psi$, para $k = 1, \dots, p$, las autofunciones de derecha e izquierda asociada a las bases generado en el espacio H . En cualquier función g in H admite la descomposición ortogonal

$$g(x) = H \sum_{j \in \mathbb{N}} g_j \psi_j(x),$$

para todo x , donde $g_j = \langle g, \phi_j \rangle_H$ y $\langle \phi_i, \psi_j \rangle_H = \delta_{ij}$. Entonces la diagonalización de la ecuación estado (2.2)

$$a_j(t) = \sum_{k=1}^p \lambda_{jk} a_j(t-k) + v_j(t), \quad (2.10)$$

en términos de los coeficientes POP

$$a_j(t) = \langle Z_t(\cdot), \phi_j(\cdot) \rangle_H, \quad t \geq 0, \quad j \in \mathbb{N} \quad (2.11)$$

$$v_j(t) = \langle v_t(\cdot), \phi_j(\cdot) \rangle_H, \quad t \geq 0, \quad j \in \mathbb{N} \quad (2.12)$$

donde $\{\lambda_{jk}, j \in \mathbb{N}\}$, $k = 1, \dots, p$, son los operadores de espectro discreto A_k , $k = 1, \dots, p$.

2.3.1. Filtro y suavizado Kalman

En la implementación del filtro Kalman en una formulación vectorial truncada de la ecuación diagonal (2.10), es decir, se tiene su formulación dimensional finita (ver salmerón y Ruiz-Medina 2009a):

$$a(t) = \Lambda_1 a(t-1) + \Lambda_2 a(t-2) + \dots + \Lambda_p a(t-p) + v(t), \quad (2.13)$$

donde, para cada tiempo $t \geq 0$, y M representa el orden de truncamiento

$$a(t-k)_{M \times 1} = (a_1(t-k), \dots, a_M(t-k))^*, \quad k = 0, \dots, p,$$

$$v(t)_{M \times 1} = \Phi_M^* v_t = (v_1(t), \dots, v_M(t))^*.$$

Así, Λ_k , $k = 1, \dots, p$, denota la matriz diagonal $M \times M$ con las entradas de autovalores λ_{jk} , $j = 1, \dots, M$, $k = 1, \dots, p$, que define el espectro discreto de las correspondientes proyección dimensional finita de operadores A_k , $k = 1, \dots, p$. El símbolo * denota transposición.

Ahora, la ecuación (2.13) en versión vectorial que está formulado por la implementación de filtro de Kalman:

$$\underline{a}(t) = \underline{\Lambda} \underline{a}(t-1) + \underline{v}(t), \quad (2.14)$$

donde,

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a(t) \\ a(t-1) \\ \vdots \\ a(t-(p-1)) \end{pmatrix}_{pM \times 1}, \quad \underline{v}(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{pM \times 1}$$

$$\underline{a}(t-1) = \begin{pmatrix} a(t-1) \\ a(t-2) \\ \vdots \\ a(t-(p-1)) \\ a(t-p) \end{pmatrix}_{pM \times 1}, \quad \underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 & \dots & \Lambda_{p-1} & \Lambda_p \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}_{pM \times pM}$$

con I denotando la matriz identidad $M \times M$, y con 0 la matriz nula $M \times M$. La matriz de transición Λ describe la dinámica de los sistemas en términos

de los puntos espectros de los operadores de autocorrelación. La estructura covarianza de los procesos de innovación proyectada \underline{v} está dado por

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} \Phi_M^* R_v \Phi_M & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{pM \times pM} \quad (2.15)$$

donde R_v es el operador covarianza de los v procesos innovación Hilbert valuado.

2.3.2. Filtro Kalman forward

El filtro de kalma del estimador condicional POP se extiende en la forma vectorial

$$\widehat{\underline{a}}_{t|t} = \widehat{\underline{a}}_{t|t-1} + K_t(Y_t - \underline{\Psi}\widehat{\underline{a}}_{t|t-1}),$$

con Y_t definido como en la Ecuación 2.7, y

$$\widehat{\underline{a}}_{t|t-1} = \underline{\Lambda}\widehat{\underline{a}}_{t-1|t-1},$$

$$\underline{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p).$$

Aquí, para $i = 1, \dots, p$, $\Psi_i = \Psi_M$ Para cada $t \geq 0$, el operador ganancia está definido como

$$K_t = P_{t|t-1}\underline{\Psi}^*(R_e + \underline{\Psi}P_{t|t-1}\underline{\Psi}^*)^{-1},$$

en término del operador covarianza R_e , y el operador covarianza a priori del error de estimación del estado funcional

$$P_{t|t-1} = \underline{\Lambda}P_{t-1|t-1}\underline{\Lambda}^* + \underline{Q}_t,$$

con $P_{t|t}$, el operador covarianza estimado del error de estimación de estado funcional, que viene dado por

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_t\underline{\Psi}P_{t|t-1},$$

Los valores iniciales considerado son

$$\widehat{\underline{a}}_{0|0} = (0, \dots, 0)_{pM \times 1}^*,$$

$$P_{0|0} = \text{diag}(\Phi_M^* R_{Z_0^1} \Phi_M, \dots, \Phi_M^* R_{Z_0^p} \Phi_M),$$

donde $\text{diag}(\cdot)$ denota una matriz diagonal, y $R_{Z_0^i}$, $i = 1, \dots, p$, respectivamente denota los operadores covarianza de Z_0^i , $i = 1, \dots, p$, las condiciones iniciales aleatorias Hilbert.

2.3.3. Suavizado Kalman backward

De los estimadores previos, el suavizado Kalman backward es implementado siguiendo la recursión:

$$\begin{aligned}
E(\underline{a}(t-1) \mid Y_{t_1}, \dots, Y_{t_T}) &= \widehat{\underline{a}}_{t-1|t-1} + (P_{t-1|t-1} \widehat{\underline{\Lambda}}^*(P_{t|t-1})^{-1}) \\
&\quad \times (E(\underline{a}(t) \mid Y_{t_1}, \dots, Y_{t_T}) - \widehat{\underline{\Lambda}} \widehat{\underline{a}}_{t-1|t-1}) \\
Var(\underline{a}(t-1) \mid Y_{t_1}, \dots, Y_{t_T}) &= P_{t-1|t-1} + (P_{t-1|t-1} \widehat{\underline{\Lambda}}^*(P_{t|t-1})^{-1}) \\
&\quad \times (Var(\underline{a}(t) \mid Y_{t_1}, \dots, Y_{t_T}) - P_{t|t-1}) \\
&\quad \times (P_{t-1|t-1} \widehat{\underline{\Lambda}}^*(P_{t|t-1})^{-1})^*,
\end{aligned}$$

para $t = T, \dots, 1$, donde, * es la transposición.

2.4. Algoritmo EM

Esta sección proporciona la implementación del algoritmo EM para la estimación del parámetro del modelo ARH(p).

2.4.1. Estimaciones iniciales

En el caso estacionario, los valores del parámetro inicial son calculado a partir de estimadores funcional imparcial del espacio y de operadores covarianza cruzada.

$$R_{Y_0}(\phi) = E[Y_0 \langle Y_0, \phi \rangle_H], \quad \forall \phi \in D(R_{Y_0}),$$

$$R_{Y_0 Y_1}(\phi) = E[Y_0 \langle Y_1, \phi \rangle_H], \quad \forall \phi \in D(R_{Y_0 Y_1}),$$

donde $D(A)$ denota el dominio del operador A .

En el caso donde R_ϵ es diagonal, los siguientes estimadores de momento son considerado:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{Z_0}^T &= \frac{1}{T} \left(\sum_{i=1}^T Y_i \otimes Y_i \right) - \left(\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T Y_i \right) \otimes \left(\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T Y_i \right) - \hat{\sigma}_\epsilon^2 I, \\
\hat{R}_{Z_0 Z_1}^T &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{i=1}^{T-1} Y_i \otimes Y_{i+1} \right) - \left(\frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^{T-1} Y_i \right) \otimes \left(\frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^{T-1} Y_{i+1} \right),
\end{aligned}$$

donde las funciones f y g en H , $f \otimes g$ representa el operador que asocia a cada función h en H , y $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ es calculado a partir del efecto nugget del semivariograma funcional experimental

$$\hat{\gamma}(\Delta t) = \frac{1}{2N(\Delta t)} \sum_{i,j \in S(\Delta t)} \|Y_{t_i} - Y_{t_j}\|_H^2, \quad (2.16)$$

con

$$S(\Delta t) = \{(i, j) \mid |t_i - t_j| = \Delta t\},$$

y $N(\Delta t)$ es el número de pares en $S(\delta t)$.

En el caso donde el ruido de observación tiene un operador covarianza no diagonal, consideramos como valor inicial para R_ϵ el estimador obtenido a partir de la proyección del modelo de observación funcional (2.15) en el sistema de autofunciones de R_{Z_0} . Específicamente, de

$$\Phi^* R_{Z_0} = \tilde{\Lambda} \Phi^*,$$

tenemos

$$\Phi^* R_\epsilon = \Phi^* R_{Y_0} - \tilde{\Lambda} \Phi^*, \quad (2.17)$$

desde $R_{Z_0} = \Phi \tilde{\Lambda} \Phi^*$, y $\Phi \Phi^* = I$, con I denotando el operador identidad, y Φ como el operador proyección en el sistema autofunción asociado con R_{Z_0} , $\tilde{\Lambda}$ representa como el operador diagonal definido a partir del punto espectro de R_{Z_0} .

En el caso, el estimador basado en momento funcional del operador covarianza cruzada son definido como

$$\begin{aligned} \hat{R}_{Y_0 Y_k} &= (R_{Z_0 Z_k}) \\ &= \frac{1}{T-k} \left[\sum_{i=1}^{T-k} Y_i \otimes Y_{i+k} \right] - \left[\frac{1}{T-k} \sum_{i=1}^{T-k} Y_i \right] \otimes \left[\frac{1}{T-k} \sum_{i=1}^{T-k} Y_{i+k} \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

para $k = 1, \dots, p$. Finalmente, el estimador inicial de A_1, \dots, A_p son obtenido de la Ec. 2.18 siguiendo la usual ecuación asociado con la autoregresivo dinámico de orden p (ver, por ejemplo, Bosq 2000).

2.4.2. Pasos E y M

Sea $\{v_t, t \in \mathbb{N}\}$ y $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{N}\}$ una secuencia de ruido de innovación y observación en sentido fuerte ruido blanco Hilbertiano Gaussianas. Es decir, $\{v_t(\cdot), t \in \mathbb{N}\}$ y $\{\epsilon_t(\cdot), t \in \mathbb{N}\}$ son sucesión de variable aleatorias (valor H)

valuado Hilbert Gaussiana centrado distribuido idénticamente con operadores covarianza traza R_v y R_ϵ . Bajo la normalidad de las condiciones inicial aleatoria, la secuencia funcional espacial $\{Z_t, t \in \mathbb{N}\}$ y $\{Y_t, t \in \mathbb{N}\}$ son también Gaussiana.

El paso E

En el caso ARH(1) el cálculo del paso expectación, consideramos la aproximación de la matriz (2.14) de la ecuación estado funcional (2.1), y la recursión Kalman forward y backward. Por lo tanto, bajo la supuesta distribución Gaussiana, para cada $t > 0$, $v(t) = \Phi_M^* v_t$ sigue una distribución normal con vector de media cero, y con matriz covarianza $\Phi_M^* R_v \Phi_M$, con Φ_M , el operador proyección por las M autofunciones derecha asociado con las primeras M valores singulares en orden decreciente y $\epsilon(t) = \Phi_M^* \epsilon_t$ también sigue una distribución normal con vector de media cero, y con la matriz covarianza $\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M$. Como son independientes, entonces el log-verosimilitud basado POP de los datos funcional completo tiene la siguiente expresión en el tiempo estacionario de procesos v y ϵ :

$$\begin{aligned} & C + \log f_{z_0} + \frac{T}{2} \log |\Phi_M^* R_v \Phi_M| - \frac{T}{2} \log |\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M| \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T (a(t_i) - \Lambda a(t_i - 1))^* (\Phi_M^* R_v \Phi_M)^{-1} (a(t_i) - \Lambda a(t_i - 1)) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T (\epsilon(t_i))^* (\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M)^{-1} (\epsilon(t_i)). \end{aligned}$$

Considerando que el efecto de la condición inicial aleatoria es insignificante en el tiempo t_1, \dots, t_T , desde resultados estándar en forma cuadrática, la expectación condicional de los 'datos completos' dado los 'datos incompletos' es calculado como

$$\begin{aligned} & C - \frac{T}{2} \log |\Phi_M^* R_v \Phi_M| - \frac{T}{2} \log |\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M| \\ & - \frac{1}{2} \text{tr} \{ (\Phi_M^* R_v \Phi_M)^{-1} (C_Z - \Lambda B_Z^* - B_Z \Lambda + \Lambda A_Z \Lambda) \}, \\ & - \frac{1}{2} \text{tr} \{ (\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M)^{-1} C_\epsilon \}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde tr denota la traza, y

$$C_Z = \sum_{i=1}^T E(a(t_i) a(t_i)^* | Y_{t_1}, \dots, T_{t_T})$$

$$\begin{aligned}
B_Z &= \sum_{i=1}^T E(a(t_i)a(t_i - 1)^* | Y_{t_1}, \dots, T_{t_T}) \\
A_Z &= \sum_{i=1}^T E(a(t_i - 1)a(t_i - 1)^* | Y_{t_1}, \dots, T_{t_T}) \\
C_Z &= \sum_{i=1}^T E(\Phi_M^* \epsilon_{t_i} (\Phi_M^* \epsilon_{t_i})^* | Y_{t_1}, \dots, T_{t_T})
\end{aligned}$$

El paso M

Diferenciando (2.19) con respecto a Λ , $\Phi_M^* R_v \Phi_M$, y $\Phi_M^* R_\epsilon \Phi_M$, y aplicando propiedades de diferenciación básica de la traza, la estimación de máxima verosimilitud de los parámetros del modelo calculado en el paso M están dados por

$$\begin{aligned}
\widehat{\Lambda} &= \text{diag}[B_Z](\text{diag}[A_Z])^{-1} \\
\Phi_{M \times M}^* \widehat{R}_v \Phi_{M \times M} &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T E \left[\left(a(t_i) - \widehat{\Lambda} a(t_i - 1) \right) \left(a(t_i) - \widehat{\Lambda} a(t_i - 1) \right)^T | Y_1, \dots, Y_T \right] \\
&= \frac{1}{T} \left[C_Z - B_Z \widehat{\Lambda} - \widehat{\Lambda} B_Z^T + \widehat{\Lambda} A_Z \widehat{\Lambda} \right], \\
\Phi_{M \times M}^* \widehat{R}_\epsilon \Phi_{M \times M} &= C_\epsilon | T,
\end{aligned}$$

donde $\text{diag}[A]$ denota la diagonal de la matriz A .

2.4.3. El caso ARH(p)

Una formulación similar del algoritmo EM puede ser derivado, considerando la aproximación vectorial (2.12) de la ecuación estado funcional (2.2). Específicamente, considerando, como antes, los procesos v y ϵ para ser estacionario en el tiempo, la verosimilitud está dada por

$$\begin{aligned}
C &+ \sum_{i=1}^p \log f_{Z_0^i} - \frac{T}{2} \log |Q| - \frac{T}{2} \log |R_\epsilon| \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T (\underline{a}(t_i) - \underline{\Lambda} \underline{a}(t_i - 1))^* (Q)^{-1} (\underline{a}(t_i) - \underline{\Lambda} \underline{a}(t_i - 1)) \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T (\underline{\epsilon}_{t_i})^* (R_\epsilon)^{-1} (\underline{\epsilon}_{t_i}),
\end{aligned}$$

donde \underline{Q} está definido como en la Ec. 2.13, y $\underline{R}_\epsilon = E(\underline{\epsilon}(t_i)\underline{\epsilon}(t_i)^*)$, para $i = 1, \dots, \overline{T}$, con

$$\underline{\epsilon}(t_i) = \begin{pmatrix} \Phi^* \epsilon_{t_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La expectación condicional es entonces calculado como

$$\begin{aligned} & C - \frac{T}{2} \log |\underline{Q}| - \frac{T}{2} \log |\underline{R}_\epsilon| \\ & - \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ (\underline{Q})^{-1} (\underline{C}_Z - \underline{\Lambda} \underline{B}_Z^* - \underline{B}_Z \underline{\Lambda}^* + \underline{\Lambda} \underline{A}_Z \underline{\Lambda}^*) \right\}, \\ & - \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ (\underline{R}_\epsilon) C_\epsilon \right\}, \end{aligned}$$

donde, como antes, tr denota la traza y

$$\begin{aligned} \underline{C}_Z &= \sum_{i=1}^T E(\underline{a}(t_i) \underline{a}(t_i)^* | Y_{t_1}, \dots, Y_{t_T}) \\ \underline{B}_Z &= \sum_{i=1}^T E(\underline{a}(t_i) \underline{a}(t_i - 1)^* | Y_{t_1}, \dots, Y_{t_T}) \\ \underline{A}_Z &= \sum_{i=1}^T E(\underline{a}(t_i - 1) \underline{a}(t_i - 1)^* | Y_{t_1}, \dots, Y_{t_T}) \\ \underline{C}_\epsilon &= \sum_{i=1}^T E(\underline{\epsilon}(t_i) \underline{\epsilon}(t_i)^* | Y_{t_1}, \dots, Y_{t_T}). \end{aligned}$$

Los estimadores verosimilitud se da entonces por

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{\Lambda}} &= \text{diag}[\underline{B}_Z (\text{diag}[\underline{A}_Z])^{-1}] \\ \widehat{\underline{Q}} &= \frac{1}{T} \left[\underline{C}_Z - \underline{B}_Z \widehat{\underline{\Lambda}} - \widehat{\underline{\Lambda}} \underline{B}_Z^T + \widehat{\underline{\Lambda}} \underline{A}_Z \widehat{\underline{\Lambda}}^T \right], \\ \widehat{\underline{R}_\epsilon} &= C_\epsilon / T. \end{aligned}$$

2.5. Generación del proceso

En la generación de los procesos de interés Z , del modelo de observación funcional (2.1), se considera tres familias de operadores autocorrelación integral, dado por los siguientes núcleos:

- Núcleo Exponencial:

$$k(z; \theta) = \frac{1}{\theta} \exp \left\{ -\frac{\|z\|}{\theta} \right\},$$

- Núcleo Cauchy:

$$k(z; \delta) = \frac{1}{\delta * \pi \left(1 + \left(\frac{\|z\| + \gamma}{\delta} \right)^2 \right)},$$

- Núcleo Gamma:

$$k(z; \alpha) = \frac{1}{\alpha^2} * \|z\| * \exp \left\{ -\frac{\|z\|}{\alpha} \right\},$$

donde $\|z\|$ denota la distancia entre las locaciones espaciales, y θ , δ y α son parámetros escalar de los núcleos Exponencial, Cauchy y Gamma. Tener en cuenta, que en el caso de las secuencias de datos funcional espacial, son los A operadores de autocorrelación que representan la interacción espacio temporal. Los tres modelos de autocorrelación proporciona diferente niveles de interacción espacio temporal, que depende del grosor de las colas de sus núcleos.

Capítulo 3

Estimación Lineal Mínimo Cuadrática en Modelos ARH(1) mediante Proyección

3.1. Introducción

Como se comentó anteriormente, en este capítulo se desarrolla la extensión del modelo de observación funcional, afectado por un fuerte ruido blanco de Hilbert, se obtendrá proyectando la base de autofunción sobre los operadores de auto-covarianza. El análisis estadístico de datos espacio-temporal requiere proyecciones ortonormales que permitan reducir la elevada dimensión de los problemas que se plantean en este análisis (ver Ruiz-Medina y Fernández-Pascual (2010), Wikle y Cressie (1999)). Trabajaremos en el análisis de secuencias de datos funcionales espaciales desde la perspectiva proporcionada por los modelos de series autorregresivas hilbertianas. Por tanto, se estudia el caso de la extensión del modelo Autorregresivo de Hilbert de orden uno, **ARH(1)**.

Se realizó una extensa revisión literaria dedicada a la introducción de modelos de covarianza espacio-temporal separables y no separables, en el caso de modelos definidos en tiempo y espacio continuos (ver, De Iaco, Myers, Posa; Ma, Gneiting; Porcu, Mateu, Zinib y Pini; Stein) y de técnicas y métodos en la estimación de modelos con datos funcionales espaciales (ver, Guillas y Lai; Delicado, Giraldo, Comas y Mateu; Nerini y Monestiez; Nerini, Monestiez y Manté). Los modelos Autorregresivos Hilbert son considerados a representar secuencias de datos funcional. Estas secuencias pueden estar constituidos, por ejemplo, segmentos de secuencias biológicas, por las imá-

genes en el análisis espacio-temporal de la deformación de dos dimensiones y el movimiento de las células de las series temporales de imágenes de vídeo digital, etc.. Las condiciones para un cálculo estable de la solución al problema filtrado funcional asociado son establecidas en función de los espectros de operador de covarianza del proceso de interés y de la observación de ruido Hilbert. Las diferentes familias covarianza espacio-temporal recientemente se han introducido y analizado como una herramienta para el modelado estadístico de datos espacio-temporal (ver Berg et al. 2008; Gneiting 2002; Kelbert et al. 2005; Ma 2005; Porcu y Mateu 2007; Stein 2005; entre otros).

Los operadores covarianza de las innovaciones funcionales y los ruidos de observación se obtienen mediante la combinación de filtrado de Kalman y suavizado. Tenga en cuenta que las bases de autofunciones aquí considerados para la proyección del problema de la estimación de parámetro son de dimensiones infinitas.

Específicamente, se realizará la implementación del estimador lineal mínimo cuadrático de la ecuación de estados funcional en el modelo ARH(1) afectado por un fuerte ruido blanco, mediante proyección en la base de autofunciones empíricas del operador de autocovarianza del proceso ARH(1). La proyección de la ecuación de estados funcional en el sistema de base de autofunciones, junto con las proyecciones en dicho sistema de los momentos de segundo orden condicionados a los datos funcionales espaciales, permitirá la implementación del filtrado de Kalman para series funcionales autorregresivas.

3.2. Resolución de la Ecuación Estimación Funcional mediante Proyección

El siguiente modelo es una extensión del modelo ARH(1) afectado por un fuerte ruido blanco de Hilbert de observación.

$$Z_t = Y_t + \epsilon_t = WY_{t-1} + \eta_t + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

donde $Z_t \in H, \eta_t \in H, \epsilon_t \in H$. La función aleatoria Z_t se define como un proceso observable, Y_{t-1} se define como el proceso de interés en el pasado inmediato, η_t es un ruido blanco Hilbert y ϵ_t es un ruido blanco de observación hilbertiano, en sentido fuerte, es decir, una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas sobre H satisfaciendo

$$E[\|\epsilon_t\|_H^2] = \sigma_\epsilon^2 < \infty, \quad (3.2)$$

Se supone que ϵ_t es incorrelado con la condición inicial Y_0 y η_t . El objetivo fundamental de este capítulo es la estimación de Y en el presente o instante t a partir de la observación del proceso Z_t , incorporando la dinámica autorregresiva en el tiempo $t = 1, \dots, T$. La estimación del operador W se realizará a partir de la ecuación:

$$R_{Y_t Y_{t-1}} = W R_{Y_{t-1} Y_{t-1}} = W R_{00}, \quad (3.3)$$

donde se sustituye el operador auto-covarianza $R_{00} = R_Y = E[Y_t \otimes Y_t]$ y el operador de covarianza cruzado $R_{Y_{t-1} Y_t} = R_{10} = R_{01} = E[Y_{t-1} \otimes Y_t]$ por su versiones empíricas dadas por

$$\widehat{R}_{00} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t \otimes Y_t,$$

$$\widehat{R}_{10} = \widehat{R}_{01} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_{t-1} \otimes Y_t.$$

Para la inversión de la versión empírica de la ecuación integral (??), se proyectará en la base ortogonal de autofunciones del operador de auto-covarianza empírico \widehat{R}_{00} , es decir, se proyecta en la base que satisface:

$$\widehat{R}_{00} \widehat{\phi}_k(\cdot) = \lambda_k \widehat{\phi}_k(\cdot), \quad k \in \mathbb{N},$$

donde la base de sistemas de autofunciones $\{\phi_k; k \in \mathbb{N}\}$ y los autovalores $\{\lambda_k; k \in \mathbb{N}\}$.

Sustituyendo las siguientes expresiones

$$Y_{t-1}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{t-1}^k \widehat{\phi}_k(y) \quad (3.4)$$

$$W(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} w_l(x) \widehat{\phi}_l(y), \quad (3.5)$$

donde se utilizará en los cálculos subsiguientes el hecho de que, bajo las condiciones asumidas, la descomposición espectral empírica converge a la teórica, es decir,

$$\widehat{R}_{00} = \widehat{\Phi}^* \widehat{\Lambda} \widehat{\Phi} \longrightarrow \Phi^* \Lambda \Phi = R_{00},$$

cuando $T \longrightarrow \infty$. Por tanto,

$$\widehat{W} = \widehat{\Phi}^* \widehat{R}_{10} \widehat{\Phi} [\widehat{\Phi}^* R_{00} \widehat{\Phi}]^{-1} = \widehat{\Phi}^* \widehat{R}_{10} \widehat{\Phi} \Lambda^{-1},$$

es un estimador consistente.

El modelo de observación (??) proyectado, haciendo uso de la dinámica autorregresiva que verifica el proceso de interés Y , y considerando la condición $\widehat{\Phi}^* \widehat{\Phi} = I$ se expresa como sigue:

$$a_t = H a_{t-1} + J \eta_t(x, y) + J \epsilon_t(x, y), \quad t \in \mathbb{N}, \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$$

donde, como antes, $a_t = \widehat{\Phi}^* Y_t$, es decir en forma matricial $\{a_t^k\}$, $k = 1, \dots, M$, donde M es el nivel de truncamiento del número de proyecciones que se tienen en cuenta en el procesos de interés y $\widehat{\Phi}^* W = B \equiv \{b_1, \dots, b_T\}$. Asumiendo $T \geq M$ y $(\widehat{\Phi}^* \widehat{\Phi})^{-1}$ no singular y donde $J = \widehat{\Phi}(\widehat{\Phi}^* \widehat{\Phi})^{-1}$ y la matriz $M \times M$, $H \equiv JB$. En este caso se considera un sistema de T ecuaciones del tiempo de observacion, en cada proyección del proceso de interés.

3.3. Predicción óptima mediante el filtro de Kalman

El predictor óptimo de a_t observaciones dadas hasta un tiempo t se expresa en forma recursiva en términos de un filtro de Kalman (Kalman, 1960; Meinhold Singpurwalla, 1983)

$$\hat{a}_{t|t} \equiv E\{a_t | Y_t, \dots, Y_1\} = \hat{a}_{t|t-1} + K_t \{Y_t - \widehat{\Phi} \hat{a}_{t|t-1}\} \quad (3.6)$$

El funcional del cuadrado medio del error está dado por

$$P_{t|t} \equiv E[(a_t - \hat{a}_{t|t})(a_t - \hat{a}_{t|t})^*] = P_{t|t-1} + K_t \widehat{\Phi} P_{t|t-1} \quad (3.7)$$

para $t \geq 1$, con cuadrado medio de predicción de errores. K_t , es el operador de la ganancia, es decir el filtro que define el efecto suavizado en los datos funcionales espaciales, dado por

$$K_t = P_{t|t-1} \widehat{\Phi}^* (R_\eta + R_\epsilon + \widehat{\Phi} P_{t|t-1} \widehat{\Phi}^*)^{-1} \quad (3.8)$$

donde $R_\eta = \widehat{\Phi}^* R_\eta \widehat{\Phi}$, es el operador covarianza de la observación del ruido, y $R_\epsilon = \widehat{\Phi}^* R_\epsilon \widehat{\Phi}$, el operador covarianza del ruido de observación del proceso, en el sentido mas fuerte.

Las predicciones en un paso delante, está dado por

$$\hat{a}_{t|t-1} = H \hat{a}_{t-1|t-1}, \quad (3.9)$$

$$P_{t|t-1} \equiv \text{var}\{a_t|Y_{t-1}, \dots, Y_1\} = HP_{t-1|t-1}H^*, \quad (3.10)$$

Para iniciar la recursión Kalman, asumiremos que $\hat{a}_{0|0} \equiv 0$ y $P_{0|0} \equiv JC_0^{Y_k}J^*$, donde la estimación de $\hat{C}_0^{Y_k} = C_0^{Y_k}$

Ahora, se considera la predicción del proceso Y_t basado en el predictor filtro de Kalman $\hat{a}_{t|t}$. El predictor óptimo es entonces:

$$\hat{Y}_{t|t-1} = \hat{\Phi}^* \hat{a}_{t|t} + C'_\epsilon (C_0^Y)^{-1} Y_t, \quad (3.11)$$

donde

$$\begin{aligned} C_0^Y &\equiv \text{cov}\{Y_t, Y_t\}, \\ C_\epsilon(\cdot) &\equiv E\{\epsilon(\cdot, t)v(t)\} \\ C_\epsilon(\cdot, \cdot) &\equiv E\{v(\cdot, t)v(\cdot, t)\}, \end{aligned}$$

también se tiene

$$Y_{t-1}^* \equiv \{Y_{t-1}, \dots, Y_1\}$$

La ecuación está derivado como

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{t-1|t} &\equiv E\{Y_{t-1}|Y_t, Y_{t-1}^*\} \\ &= E\{\hat{\Phi}^* a_{t-1} + \epsilon_t | Y_t, Y_{t-1}^*\} \\ &= \hat{\Phi}^* E\{a_{t-1}|Y_t, Y_{t-1}^*\} + E\{\epsilon_t | Y_t, Y_{t-1}^*\} \\ &= \hat{\Phi}^* \hat{a}_{t-1|t} + E\{\epsilon_{\cdot|t} \epsilon_t\} (\text{cov}\{Y_t, Y_t\})^{-1} Y_t \\ &= \hat{\Phi}^* \hat{a}_{t-1|t} + C'_{\epsilon} (C_0^Y)^{-1} Y_t \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde $C_\epsilon(\cdot, \cdot) \equiv E\{\epsilon(\cdot, t), \epsilon(\cdot, t)\}$ es fácil ver si $\epsilon(\cdot, t)$ y Y_t tiene un conjunto de distribución Gaussiana multivariada.

La varianza condicional de la predicción del error para Y_t está dado por

$$\text{var}\{Y_{t-1} - \hat{Y}_{t-1|t} | Y_t, Y_{t-1}^*\} = \text{var}\{Y_{t-1} | Y_t, Y_{t-1}^*\}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{var}\{Y_{t-1} | Y_t, Y_{t-1}^*\} &= \text{var}\{\hat{\Phi}^* a_{t-1} + \epsilon_t | Y_t, Y_{t-1}^*\} \\ &= \text{var}\{\hat{\Phi}^* a_{t-1} | Y_t, Y_{t-1}^*\} + \text{var}\{\epsilon_t | Y_t, Y_{t-1}^*\} \\ &\quad + 2\text{cov}\{\hat{\Phi}^* a_{t-1}, \epsilon_t | Y_t, Y_{t-1}^*\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ahora de la Ecuación (??), notese que

$$\text{var}\{\widehat{\Phi}^* a_{t-1} | Y_t, Y_{t-1}^*\} = \widehat{\Phi}^* P_{t|t} \widehat{\Phi} \quad (3.14)$$

y siguiendo lo asumido en (3.12), obtenemos

$$\begin{aligned} \text{var}\{\epsilon_t | Y_t, Y_{t-1}^*\} &= E\{\epsilon_t, \epsilon_t\} - (E\{\epsilon_t | Y_t, Y_{t-1}^*\})^2 \\ &= C_\epsilon(\cdot, \cdot) - C_\epsilon(\cdot)' (C_0^Y)^{-1} C_\epsilon(\cdot) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Analizando el tercer término, se tiene $\text{cov}\{\widehat{\Phi}^* a_{t-1}, \epsilon_t\} = 0$

$$\text{cov}\{\widehat{\Phi}^* a_{t-1}, \epsilon_t\} = E[\text{cov}\{\widehat{\Phi}^* a_{t-1}, \epsilon_t | Y_t, Y_{t-1}^*\}] + \text{cov}[E\{\widehat{\Phi}^* a_{t-1}, \epsilon_t | Y_t, Y_{t-1}^*\}] = 0 \quad (3.16)$$

entonces

$$E[\text{cov}\{\widehat{\Phi}^* a_{t-1}, \epsilon_t | Y_t, Y_{t-1}^*\}] = -\text{cov}[E\{\widehat{\Phi}^* a_{t-1}, \epsilon_t | Y_t, Y_{t-1}^*\}]$$

Luego de lo asumido Gaussiano, podemos obtener

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\widehat{\Phi}^* a_{t-1}, \epsilon_t | Y_t, Y_{t-1}^*\} &= -\text{cov}[E\{\widehat{\Phi}^* a_{t-1} | Y_t, Y_{t-1}^*\}, E\{\epsilon_t | Y_t, Y_{t-1}^*\}] \\ &= -\text{cov}[\widehat{\Phi}^* E\{a_{t-1} | Y_t, Y_{t-1}^*\}, C_\epsilon(\cdot)' (C_0^Y)^{-1} Y_t] \\ &= -\text{cov}[\widehat{\Phi}^* \hat{a}_{t-1|t}, C_\epsilon(\cdot)' (C_0^Y)^{-1} Y_t] \\ &= -\widehat{\Phi}^* \text{cov}[\hat{a}_{t-1|t}, Y_t] (C_0^Y)^{-1} C_\epsilon(\cdot) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Finalmente, sustituyendo (3.14), (3.15) y (3.17) en (3.13), se tiene

$$\begin{aligned} \text{var}\{Y_{t-1} | Y_t, Y_{t-1}^*\} &= \widehat{\Phi}^* P_{t|t} \widehat{\Phi} + C_\epsilon(\cdot, \cdot) - C_\epsilon(\cdot)' (C_0^Y)^{-1} C_\epsilon(\cdot) \\ &\quad - 2\widehat{\Phi}^* \text{cov}[\hat{a}_{t-1|t}, Y_t] (C_0^Y)^{-1} C_\epsilon(\cdot) \end{aligned}$$

como

$$\text{var}\{Y_{t-1} - \hat{Y}_{t-1|t} | Y_t, Y_{t-1}^*\} = \text{var}\{Y_{t-1} | Y_t, Y_{t-1}^*\}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} \text{var}\{Y_{t-1} - \hat{Y}_{t-1|t} | Y_t, Y_{t-1}^*\} &= \widehat{\Phi}^* P_{t|t} \widehat{\Phi} + C_\epsilon(\cdot, \cdot) - C_\epsilon(\cdot)' (C_0^Y)^{-1} C_\epsilon(\cdot) \\ &\quad - 2\widehat{\Phi}^* \text{cov}[\hat{a}_{t-1|t}, Y_t] (C_0^Y)^{-1} C_\epsilon(\cdot) \end{aligned}$$

queda demostrado el predictor óptimo y la predicción varianza del error

3.4. Conclusión

Lo que me motivó realizar este trabajo, son los procesos físicos, biológicos, medio ambiente, geofísico, que incluyen la variabilidad en el espacio y el tiempo, y la aplicación en la medicina y la economía. Como resultado de las dificultades causadas por grandes conjuntos de datos y el modelado de las interacciones de espacio, tiempo y espacio temporal, los métodos tradicional espacio-tiempo son limitadores. El avance de las nuevas tecnologías, que ha permitido el diseño de sofisticados dispositivos para la medición y procesamiento de información, se ha incrementado el número de situaciones donde se dispone de información muestral funcional. En la práctica, uno puede usar cualquier procedimiento de predicción estocástica o no estocástica para obtener Y , proceso de observación. Algoritmicamente predecimos Y , proceso en la red de predicción en cada tiempo $t = 1, \dots, T$. Para obtener el nucleo suavizado del operador autocovarianza, se podría usar los más sofisticados procedimientos suavizado espacio-temporal, según nuestra propuesta, la proyección de las autofunciones sobre los operadores autocovarianza y mediante el filtro de Kalman, para la elección del algoritmo suavizado espacio-tiempo. Mi interés después de haber desarrollado la estimación lineal por mínimo cuadrados en el modelo ARH(1) mediante la proyección de autofunciones en el operador auto-covarianza, es realizar una simulación usando el software MatLab, la implementación desarrollada en este trabajo. Sin embargo, será un estudio a futuro para la continuación del trabajo en la simulación en Matlab y aplicación en datos reales, para el interesado en el tema.

Bibliografía

- [1] Abramovich, F. y Angelini, C. (2006). Testing in mixed effects FANOVA models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 4326-4348.
- [2] Abramovich, F., Antoniadis, A., Sapatinas, T. y Vidakovic, B. (2004). Optimal testing in functional analysis of variance models. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, **2**, 323-349.
- [3] Angulo, J.M., Ruiz-Medina, M.D. y Anh, V.V. (2000). Estimation and of fractional generalized random fields. *Journal of the Australian Mathematical Society Series A*, **69**, 1-26.
- [4] Besse, P., Cardot, H. y Stephenson, D. (2000). Autoregressive forecasting of some functional climatic variations. *Scandinavian Journal of Statistics*, **27**, 673-687.
- [5] Bertino, L., Evensen, G. y Wackernagel, H. (2003). Sequential data assimilation techniques in oceanography. *International Statistical Review*, **71**, 223-241.
- [6] Bogaert, P. (1996). Comparison of kriging techniques in a space-time context. *Mathematical Geology*, **28**, 73-86.
- [7] Bosq, D. (2000). *Linear Processes in Function Spaces*, New York. Springer.
- [8] Bosq, D. (2007). General linear processes in Hilbert spaces and prediction. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 879-894.
- [9] Brillinger, D. R. (1973). The analysis of time series collected in an experiment design. *Multivariate analysis, III*, Krishnaiah, P.R: (ed.), Academic Press, 241-256.

- [10] Brillinger, D. R. (1980). Some aspect of the analysis of evoked response experiments. *Statistics and related topics*, Csörgö, M., Dawson, D.A., Rao, J.N.K. and Saleh, A.K. (eds), North-Holland, 15-168.
- [11] Bretherton, C.S., Smith, C. y Wallace, J.M.. (1992). An intercomparison of methods for finding coupled patterns in climate data. *journal of climate*, **5**, 541-560.
- [12] Brown, P.E., Karesen, K.F., Roberts, G.O. y Tonellato, S. (2000). Blur-generated non-separable space-time models. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **62**, 847-860.
- [13] Clarkson, D.B., Fraley, C., Gu, C.C. y Ramsay, J.O. (2005). *S+functional data analysis user's guide*, New York, Springer-Verlag.
- [14] Cressie, N.A. (1993). *Statistics for spatial Data*, Wiley.
- [15] Cressie, N., Irwin, M:E: y Johannesson, G. (2002). Spatial temporal nonlinear filtering based on hierarchical statistical models. *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa Test*, **11(2)**, 249-302.
- [16] Cressie, N. y Huang, H.C. (1999). Classes of nonseparable, spatiotemporal stationary covariance functions. *Journal of the American Statistical Association*, **352**, 3651-3685.
- [17] Cohn, S. y Todling, R. (1996). Appropriate data assimilation schemes for stable and unstable dynamics. *Journal of the Meteorological Society of Japan*, **74(1)**, 63-75.
- [18] Collins, M. (1997). The EM algorithm. *In fulfillment of the Written Preliminary Exam II PhD requirement*.
- [19] Damon, J. y Guillas, S. (2005). Estimation and Simulation of Autorregressive Hilbertian processes with Exogenous Variables. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **8**, 185-204.
- [20] Da Prato, G. y Zabczyk, J. (2002). *Second Order Partial Differential Equations in Hilbert Spaces*. London Mathematical Society Lecture Note Series **293**, Cambridge University Press.
- [21] Dautray, R. y Lions, J.L.. (1992). *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Vol. 3, Spectraal Theory and Applications, Springer-Verlag.

- [22] De Iaco, S., Myers, D.E. y Posa, D. (2002). Nonseparable Space-Time Covariance Models: Some Parametric Families. *Mathematical Geology*, **34**, 23-42.
- [23] Delicado, P., Giraldo, R., Comas, C., y Mateu, J. (2010). Statistic for spatial functional data: some recent contributions. *Environmetrics*, **21**, 224-239.
- [24] Dempster, A.P., Laird, N.M. y Rubin, D.B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, **39**, 1-38.
- [25] Dhrymes, P.J. (1978). *Mathematical for Econometrics*, Springer-Verlag.
- [26] Diggle, P.J., Liang, K.Y. y Zeger, S.L. (1994). *Analysis of Longitudinal Data*. Oxford, Clarendon Press.
- [27] Doucet, A., de Freitas, N. y Gordon N. (2001). *Sequential Monte Carlo methods in practice*. New York.
- [28] Dunford, N. y Schwartz, J.T. (1971). *Linear Operators, Part III, Spectral Operator*. Wiley Interscience.
- [29] Eubank, R.L. y Hart, J.D. (1992). Testing goodness-of-fit in regression via order selection criteria. *The annals of Statistics*, **20**, 1412-1425.
- [30] Eubank, R.L. y LaRiccia, V.N. (1992). Asymptotic comparison of Cramér-von Mises and non-parametric function estimation techniques for testing goodness-of-fit. *The Annals of Statistics*, **20**, 2071-2086.
- [31] Epperson, B.K. (2000). Spatial and space-time correlations in ecological models. *Ecological Modelling*, **132**, 63-76.
- [32] Fan, J. (1996). Test of significance based on wavelet thresholding and neyman's truncation. *Journal of American Statistical Association*, **91**, 674-688.
- [33] Fan, J. y Lin, S.J. (1998). Test of significance when data are curves. *Journal of American Statistical Association*, **93**, 1007-1021.
- [34] Ferraty, F. y Vieu, P. (2006). *Nonparametric Functional Data Analysis*. Springer Series in Statistics. New York, Springer.
- [35] Gelfand, A., Ghosh, S., Knight, J. y Sirmans, C. (1998). Spatiotemporal modeling of residential sales data. *Journal Business Economical Statistics*, **16**, 312-321.

- [36] Glahn, H.R. (1968). Canonical correlation and its relationship to discriminant analysis and multiple regression. *Journal of the atmospheric sciences*, **25**, 23-31.
- [37] Glasbey, C.A., Graham, R. y Hunter, A.G.M. (2001). Spatiotemporal variability of solar energy across a region: a statistical modelling approach. *Solar Energy*, **70**, 373-381.
- [38] Ghil, M., Allen, M.R., Dettinger, M.D., Ide, K., Kondrashov, D., Mann, M.E., Robertson, A.W., Saunders, D., Tian, Y., Varadi, F. y Yiou, P. (2002). Advanced spectral methods for climatic time series. *Reviews of Geophysics*, **40**, 3-1;3-40.
- [39] Gneiting, T. (2002). Stationary covariance functions for space-time data. *Journal of the American Statistical Association*, **97**, 590-600.
- [40] Godtlielseu, F., Chu, C.K., Sorbye, S.H. y Torheim, G. (2001). An estimator for functional data with application to MRI. *Medical Imaging*, **20**, 36-44.
- [41] Gutiérrez Jáimez, r. y González carmona, A. (1991). *Introducción al análisis Multivariante*, Universidad de Granada.
- [42] Guttorp, P., Meiring, W. y Sampson, P. (1994). A space-time analysis of ground-level ozone data. *Environmetrics*, **5**, 241-254.
- [43] Guillas, S. (2001). Rates of convergence of autocorrelation estimates for autoregressive Hilbertian processes. *Statistics Probability Letters*, **55**, 281-291.
- [44] Guillas, S. y Lai, M.J.(2009). Bivariate Splines for Spatial Functional Regression Models. *Journal of Nonparametric Statistics*, **00**, 1-31.
- [45] Hall, P. y Hart, J.D. (1990). Bootstrap test for difference between means in nonparametric regression. *Journal of Americam Statistical Association*, **85**, 1039-1049.
- [46] Hall, P., Poskitt, D.S. y Presnell, B. (2001). A functional data-analytic approach to signal discrimination. *Technometrics*, **43**, 1-9.
- [47] Handcock, M y Wallis, J. (1994). An approach to statistical spatialtemporal modeling of meteorological fields. *Journal of American Statistical Association*, **89**, 368-390.

- [48] Haslett, J. y Raftery, A.E. (1989). Space-time modelling with long-memory dependence: assessing Ireland's wind power resource. *Applied Statistics*, **38**, 1-21.
- [49] Hasselmann, K. (1988). PIPs and POPs: The reduction of complex dynamical systems using principal interaction and oscillation patterns. *Journal of Geophysical interaction*, **93**, 11015-11021.
- [50] Higdon, D. (1999). A process-convolution approach to modelling temperatures in the north Atlantic Ocean. *Environmental and Ecological Statistics*, **5**, 173-190.
- [51] Holden, L., Natvig, B., Sannan, S. y Bungum H. (2000). Modeling spatial and temporal dependencies between earthquakes. *Statistical Research*, **13**.
- [52] Huang, H.C. y Cressie, N. (1996). Spatio-temporal prediction of snow water equivalent using the Kalman filter. *Computational Statistics and Data Analysis*, **822**, 159-175.
- [53] Hutson, V. y Pym, J.S. (1980). *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*, Academic Press Inc.
- [54] Inglot, T. y Ledwina, T. (1996). Asymptotic optimality of data-driven Neyman's tests for uniformity. *The Annals of Statistics*, **24**, 1982-2019.
- [55] Kalman, R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transaction of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 35-45.
- [56] Lavine, M y Lozier, S. (1999). A Markov random field spatio-temporal analysis of ocean temperature. *Environmental and Ecological Statistics*, **6**, 249-273.
- [57] Ledwina, T. (1994). Data-driven version of Neyman's smooth test of fit. *Journal of American Statistical Association*, **89**, 1000-1005.
- [58] Lohmann, G. y Bohn, S. (2002). Using replicator dynamics for analyzing FMRI data of the human brain. *Medical Imaging*, **21**, 485-492.
- [59] Lorenz, E.N. (1956). Empirical orthogonal functions and statistical weather prediction. *Scientific Report Number 1, Statistical Forecasting Project*, MIT, 49.

- [60] Ma, C. (2003). Spatio-temporal stationary covariance models. *Journal of Multivariate Analysis*, **86**, 97-107.
- [61] Ma, C. (2003). Families of spatio-temporal stationary covariance models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **116**, 489-501.
- [62] Ma, C. (2003). Nonstationary covariance functions that model space-time interactions. *Statistics Probability Letters*, **61**, 411-419.
- [63] Mardia, K.V., Goodall, C., Redfern, E.J. y Alonso, F.J. (1998). The Kriged Kalman filter. *Test*, **7**, 217-287.
- [64] Mas, A. (2007). Weak convergence in the functional autoregressive model. *Journal of Multivariate Analysis*, **98**, 1231-1261.
- [65] Matheron, G. (1962). *Traite de Geoestatistique Apliquee*, Tome I, Memoires du Bureau de Recherches Geologiques et minieres, **24**. Editions Bureau de Recherches Geologiques et Minieres, Paris.
- [66] McLachlan, G. y Krishnan, T. (1997). *The EM Algorithm and Extensions*. Wiley series in probability and statistics. John Wiley Sons.
- [67] Meyer, Y. (1992). *wavelet and Operators*. cambridge University Press.
- [68] Müller, H.G. (2005). Functional modelling and classification of longitudinal data. *Scandinavian Journal of Statistics*, **32**, 223-240.
- [69] Müller, H.G. y Stadtmüller, U. (2005). Generalized functional models. *Annals of Statistics*, **33**, 774-885.
- [70] Nan, F.Y. y Nowak, R.D. (1999). Generalized likelihood ratio detection for fMRI using complex data. *Medical Imaging*, **18**, 320-329.
- [71] Nerini, D. y Monestiez, P. (2008). A Cokriging method for spatial functional data with applications in oceanology. First International Workshop on Functional and Operatorial Statistics. Toulouse.
- [72] Nerini, D., Monestiez, P. y Manté, C. (2010). Cokriging for spatial functional data. *Journal of Multivariate Analysis*, **101**, 409-418.
- [73] Nychka, D., Wikle, C. y Royle, J.A. (2002). Multiresolution models for nonstationary spatial covariance functions. *Statistical Modelling: An international Journal*.

- [74] Pfeifer, P. y Deutsch, S. (1980). Stationarity and invertibility regions for low order STARMA models. *Communications in Statistics and Simulation Computation*, **9**, 551-562.
- [75] Porcua, E., Mateua, J., Zinib, A. y Pini, R. (2007). Modelling spatio-temporal data: A new variogram and covariance structure proposal. *Statistics Probability Letters*, **77**, 83-89.
- [76] Preisendorfer, R.W. (1988). Principal component analysis in meteorology and oceanography. *Elsevier*, 425.
- [77] Ramm, A.G. (1990). *random Fields Estimation Theory*, Longman, Essex.
- [78] Ramsay, J.O. y Silverman, B.W. (2005). *Functional Data Analysis*. Springer Series in Statistics.
- [79] Renshaw, E. y Särkkä, A. (2001). Gibbs point processes for studying the development of spatio-temporal stochastic processes. *Computational Statistics and Data Analysis*, **36**, 85-105.
- [80] Ruiz-Medina, M.D. (2008). Wavelet thresholding methods applied to testing significance differences between autoregressive Hilbertian processes. First International Workshop on Functional and Operatorial Statistics (Toulouse, June 19-21, 2008).
- [81] Ruiz-Medina, M.D., Alonso, F.J., Angulo, J.M. y Bueso, M.C. (2003). Functional stochastic modelling and prediction of spatio-temporal processes. *Journal of Geophysical Research*, **108(D24)**, 9003.
- [82] Ruiz-Medina, M.D. y Angulo, J.M. (2002). Spatio-temporal filtering using wavelets. *Stochastic and Environmental Research and Risk Assessment*, **16**), 241-266.
- [83] Ruiz-Medina, M.D., Alonso, F.J. y Fernández-Pascual, R. (2007). Wavelet-vaguelette decomposition of spatiotemporal random fields. *Stochastic and Environmental Research and Risk Assessment*, **21**, 273-281.
- [84] Ruiz-Medina, M.D., Salmerón, R. y Angulo, J.M. (2007). Kalman filtering from POP-based diagonalization of ARH(1). *Computational Statistics and Data Analysis*, **51(10)**, 4994-5008.
- [85] Ruiz-Medina, M.D. y Salmerón, R. (2008). *Maximum-likelihood estimation of functional parameters in autoregressive Hilbertian processes*.

- [86] Ruiz-Medina, M.D. y Fernández-Pascual, R. (2010). Spatiotemporal filtering from fractal spatial functional data sequence. *Stochastic and Environmental Research and Risk Assessment*, **24**, 527-538.
- [87] Ruiz-Medina, M.D. y Salmerón R. (2010). Functional maximum-likelihood estimation of ARH(p) models. *Stochastic and Environmental Research and Risk Assessment*, **24**, 131-146.
- [88] Ruttimann, U.E., Unser, M., Rawlings, R.R., Rio, D., Ramsey, N.F., Mattay, V.S., Hommer, D.W., Frank, J.A. y Weinberger, D.R. (1998). Statistical Analysis of Functional MRI Data in the Wavelet Domain. *Medical Imaging*, **17**, 142-154.
- [89] Salmerón R. y Ruiz-Medina, M.D. (2008). Multispectral decomposition of FAR(p) models. *Stochastic and Environmental Research and Risk Assessment*, DOI: 10.1007/s00477-008-0213.
- [90] Salmerón R. (2008). *Análisis estadístico de datos espacio.temporales mediante modelos funcionales de series temporales*. Tesis Doctoral en Estadística e Investigación Operativa. Granada: Universidad de Granada, Facultad de Ciencias.
- [91] sansó, B., Guenni, L. (1999). Venezuelan rainfall data analysed by using a Bayesian space-time model. *Applied Statistics*, **48**, 345-362.
- [92] Shubov, M.A. (1997). Nonselfadjoint operators generated by the equation of a nonhomogeneous damped string. *Transactions of the American Mathematical Society*, **349**, 4481-4499.
- [93] Shumway, R.H. (1988). *Applied statistical time series analysis*, Prentice-Hall.
- [94] Smith, R. y Robinson, P. (1997). A Bayesian approach to the modelling of spatial-temporal precipitation data. *Lectures Notes in Statistics*, **121**, 237-269.
- [95] Solo, V., Brown, E.N. y Long, C.J. (2003). Spatial Wavelets for temporally correlated fMRI. *International Conference on Imagen Processing ICIP03*, **II**, 843-846.
- [96] Stein, M. (2003). Space-time covariance functions. *Journal of the American Statistical Association*, **100**, 310-321.

- [97] Stoffer, D. (1986). Estimation and identification of space-time ARMAX models in the presence of missing data. *Journal of American Statistical Association*, **81**, 762-772.
- [98] Stroud, J., Müller, P. y Sansó, B.J. (1999). Dynamic models for spatio-temporal data. *Technical report 99-20, Institute of Statistics and Decision Sciences, Duke University*.
- [99] Triebel, H. (1978). *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. North-Holland Publishing. Co. Amsterdam.
- [100] Van Leeuwen, P.J. (2002). A variance-minimizing filter for large-scale applications. *Monthly Weather Review*.
- [101] Von Storch, H., Bürger, G., Schnur, R. y Von Storch, J.S. (1995). Principal oscillation patterns: a review. *Journal of Climate*, **8**, 377-400.
- [102] Von Storch, H., Bruns, T., Fischer-Bruns, I y Hasselmann, K. (1998). Principal oscillation patterns analysis of the 30 to 60 days oscillation in a general circulation model equatorial troposphere. *Journal of Geophysical Research*, **93**, 11022-11036.
- [103] Vogel, C.R. y Wade, J.C. (1994). Iterative SVD-based methods for ill-posed problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **15**, 736-754.
- [104] Waller, L. A., Carlin, B.P., Xia H. y Gelfang, A.E. (1996). Hierarchical spatio-temporal mapping of disease rates. *Journal of the American Statistical Association*, **92**, 607-617.
- [105] Welch, G. y Bishop, G. (2006). An introduction to the kalman filter. *SIGGRAPH 2001 Course*.
- [106] Wikle, C.K. (2001). A kernel-based spectral approach for spatio-temporal dynamic models. *Proceedings of the 1st Spanish Workshop on Spatio-Temporal Modelling of Environmental Processes (METMA), Benicassim, Castellón (Spain), 28-31 october*, 167-180.
- [107] Wikle, C.K. (2002). A kernel-based spectral model for non-Gaussian spatio-temporal processes. *Statistical Modelling: An International Journal*, **2**, 299-314.
- [108] Wikle, C.K. (2003). Spatio-temporal methods in climatology. *Encyclopedia of life Support Systems*. París: EOLSS.

- [109] Wikle, C.K., Berliner, M. y Cressie, N. (1999). Hierarchical Bayesian space-time models. *Environmental Ecological and Statistics*, **5**, 117-154.
- [110] Wikle, C.K. y Cressie, N. (1999). A dimension-reduction approach to space-time Kalman filtering. *Biometrika*, **86**, 815-829.
- [111] Wikle, C.K., Milliff, R.F. y Berliner, L.M. (1999). Spatio-temporal hierarchical bayesian modelling: Tropical Ocean Surface Winds. *JASA, Applications and case Studies*.
- [112] Yao, F., Müller, H.G., Clifford, A.J., Dueker, S.R., Lin Follett, J., Buchholz, B.A.Y. y Vogel, J.S. (2003). *Shrinkage estimation for functional principal component scores with application to the population kinetics of plasma folate*, *Biometrics* **59**, 676-685.
- [113] Yao, F., Müller, H.G., Wang, J.L. (2005). Functional data analysis for sparse longitudinal data *Journal of the American statistical Association*, **100**, 577-590.