

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS  
FÍSICA

**DISPERSIÓN DE FLOQUET DE FERMIONES DE  
DIRAC SIN MASA: EL CASO DEL GRAFENO**

**Lic. Angiolo Miguel Huamán Gutiérrez**  
Maestrando

**Dr. Gonzalo Usaj**  
Director

**Miembros del Jurado**

Dra. María José Sánchez (Instituto Balseiro)

Dr. Alejandro Fainstein (Instituto Balseiro)

Dr. César Proetto (Instituto Balseiro)

Diciembre de 2015

Instituto Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo  
Comisión Nacional de Energía Atómica  
Argentina

A mi familia,  
a mis amigos.

# Índice de contenidos

Índice de contenidos	ii
Resumen	iv
Abstract	v
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Grafeno . . . . .	4
1.2.1. Características generales del grafeno monocapa . . . . .	4
1.2.2. Aproximación de enlaces fuertemente ligados y ecuación de Dirac . . . . .	6
1.3. Teoría de Floquet . . . . .	8
1.4. Teoría de Floquet aplicada al grafeno y generación de la brecha dinámica . . . . .	12
<b>2. Dispersión en un borde plano</b>	<b>14</b>
2.1. Incidencia normal . . . . .	15
2.2. Dispersión oblicua . . . . .	19
<b>3. Efecto Goos-Hänchen anómalo en grafeno irradiado</b>	<b>26</b>
3.1. Desplazamiento Goos-Hänchen de un haz de ancho finito . . . . .	27
3.2. Aplicación al caso del borde plano . . . . .	31
<b>4. Estados de borde en grafeno irradiado</b>	<b>34</b>
4.1. Láseres con diferente helicidad . . . . .	35
4.2. Láseres con la misma helicidad . . . . .	40
<b>5. Dispersión por obstáculos circulares irradiados</b>	<b>44</b>
5.1. Ondas isotrópicas . . . . .	45
5.1.1. Soluciones fuera de la región irradiada . . . . .	45
5.1.2. Soluciones dentro de la región irradiada . . . . .	47
5.1.3. Coeficientes de reflexión, densidades y corrientes de probabilidad . . . . .	50
5.2. Dispersión de ondas planas . . . . .	53
5.2.1. Funciones de onda de dispersión . . . . .	53
5.2.2. Límite asintótico $r \gg R$ y secciones eficaces . . . . .	55
5.2.3. Densidades de probabilidad y corrientes de probabilidad . . . . .	57
5.2.4. Corrimiento Goos-Hänchen en campo cercano: $r \gtrsim R$ . . . . .	61
<b>6. Conclusiones</b>	<b>63</b>

Índice de contenidos	iii
<b>Bibliografía</b>	<b>66</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>68</b>

# Resumen

En este trabajo se estudian algunos efectos producidos en la interacción de electrones de Dirac sin masa con radiación electromagnética. El ejemplo más conocido para este sistema es el grafeno monocapa en presencia de un haz láser bajo incidencia normal. Esto es interesante porque mientras que el grafeno no irradiado posee una estructura de bandas sin brecha de energías, en presencia de luz circularmente polarizada adquiere una brecha de energías de no equilibrio (una brecha de cuasi-energías para ser más precisos), con varias consecuencias interesantes. Principalmente se analizan dos fenómenos: la dispersión inelástica en bordes que separan regiones irradiadas y no irradiadas en diferentes configuraciones geométricas, así como la formación de estados quirales (es decir, con una velocidad determinada únicamente por la polarización del láser) localizados en estos bordes.

En ambos casos, el campo láser genera un potencial dependiente del tiempo que da lugar a una dispersión inelástica en la que los electrones pueden emitir o absorber cuantos de luz. Usaremos un haz láser monocromático que genera un potencial periódico y armónico en el tiempo. Para esto último presentaremos la teoría de Floquet para resolver la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Este método transforma el problema en otro independiente del tiempo pero en un espacio extendido. A su vez nos limitaremos a las excitaciones de baja energía (onda larga) respecto del nivel de Fermi, donde el hamiltoniano efectivo no irradiado tiene la forma de un hamiltoniano de Dirac para fermiones sin masa (de ahí el nombre dado en el párrafo anterior). Este método nos permitirá obtener la brecha de cuasi-energías mencionada. Para el problema de la dispersión estudiaremos dos tipos de bordes: rectos y circulares, y veremos algunas modificaciones a la paradoja de Klein (ausencia de dispersión en dirección opuesta al haz incidente), así como un corrimiento (a lo largo del borde) de los haces dispersados, un fenómeno conocido como efecto Goos-Hänchen, aunque con características peculiares. En el problema de los estados localizados entre dos regiones irradiadas, veremos que éstos sólo existen con cuasi-energías dentro de la brecha inducida por la radiación y que hay una quiralidad neta sólo cuando los campos de radiación en las dos regiones irradiadas tienen helicidades opuestas. Estos estados se explican en base a las propiedades topológicas del sistema.

**Palabras clave:** GRAFENO, TEORÍA DE FLOQUET, ESTADOS QUIRALES

# Abstract

In this work we study the interaction between massless Dirac fermions and a monochromatic electromagnetic field. The best known example of this kind of system being monolayer graphene in the presence of a laser beam at normal incidence. This is interesting because while non-illuminated graphene has a gapless band structure, in the presence of circularly polarized light it acquires a non-equilibrium energy gap (a quasi-energy gap to be more precise) with many interesting consequences. We mainly investigate two phenomena: inelastic scattering in boundaries separating illuminated and non illuminated regions in graphene using different geometrical setups, along with the rising of chiral states (that is, states with a velocity determined only by the laser polarization) localized at the borders.

In both cases, the laser fields generates a time dependent potential which gives place to inelastic scattering in which electrons are allowed to absorb or emit light quanta. We will use a monochromatic laser which leads to periodic harmonic time dependent potential. To solve this problem we present the so called Floquet Theory in order to handle the time dependent Schrödinger equation. This method renders the problem into another that is time independent but in an extended Hilbert space. At the same time, we will limit ourselves to low energy excitations (long wavelength) with the Fermi level as a reference. In this situation the hamiltonian has the form of a Dirac hamiltonian for massless fermions (here the origin of the name given in the paragraph before). This method will permit us to obtain the cuasi-energy gap mentioned above. For the scattering problem we will study two types of borders: straight and circular, and here we will see some modifications to the so called Klein paradox (absence of backscattering), as well as a shift (along the border) in the reflected beams, a phenomenon known as Goos-Hänchen shift, although with odd properties. For the problem of localized states between two irradiated regions, we will see that they only exist with quasi-energies inside the gap induced by the radiation and that there is a net quirality only when the radiation fields of the two regions have opposite helicity. These properties are explained using the topological properties of the system.

**Keywords:** GRAPHENE , FLOQUET THEORY , CHIRAL STATES

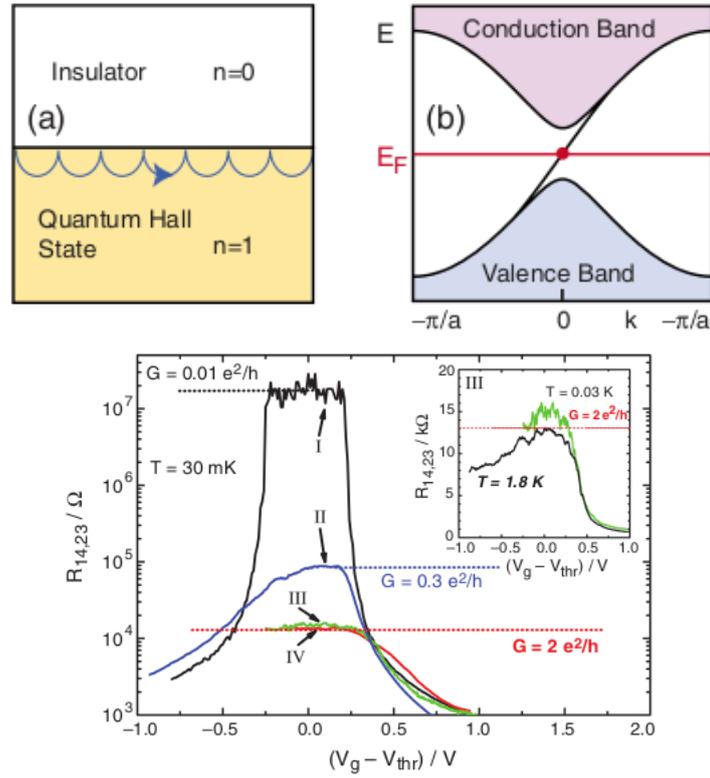
# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Introducción

En los últimos años ha habido un gran interés tanto teórico como experimental hacia un nuevo tipo de materiales conocidos como aislantes topológicos (TI por sus siglas en inglés). Éstos son materiales que, al igual que los aislantes ordinarios, poseen una brecha de energía en su estructura de bandas (en una muestra sin bordes o *bulk*) que separan las bandas de valencia y conducción, pero que además poseen estados de conducción protegidos en los bordes (en caso de materiales bidimensionales), o en su superficie (para materiales tridimensionales), con energías dentro de esta brecha, como se observa en el panel superior de la figura 1.1. Esta protección evita que dichos estados desaparezcan debido a efectos de desorden o impurezas. Estos estados son una consecuencia de la combinación de interacción espín-órbita y simetría de inversión temporal [1], aunque más adelante hablaremos acerca de una nueva forma de inducir estas propiedades. El estudio teórico de los aislantes topológicos data de hace algunas décadas, pero a partir de su descubrimiento experimental en 2007 ha surgido un mayor interés por esta nueva fase de la materia. Quizá el antecedente más próximo de los aislantes topológicos es el efecto Hall cuántico, descubierto en cintas bidimensionales a inicio de los años ochenta. Sin embargo, en el efecto Hall cuántico se requieren campos magnéticos intensos, mientras que los aislantes topológicos ocurren incluso en ausencia de campos externos. En estos materiales el papel del campo magnético externo lo desempeña la interacción espín-órbita, y es por esto que se espera que sustancias aislantes con elevado número atómico (donde es mayor la interacción espín-órbita) presenten las propiedades de estos TI.

El caso más sencillo de un TI bidimensional es el efecto Hall de espín. Este efecto fue predicho en 2005 en grafeno [3], un material bidimensional formado por átomos de carbono densamente agrupados en una estructura tipo panal de abejas. Desde el punto de vista de sus propiedades electrónicas, y sin tomar en cuenta la interacción espín-órbita, el grafeno es un material sin brecha de energía en su estructura de bandas, y en el que las excitaciones de baja energía está descritas por una ecuación tipo Dirac para partículas sin masa. La inclusión de la interacción espín-órbita en la referencia [3] convierte al grafeno en un aislante topológico. Desafortunadamente, el efecto predicho en el grafeno resulta ser demasiado pequeño como para que pueda medirse experimentalmente. No obstante, este efecto pudo observarse en uno de los primeros y más importantes experimentos en el área de los aislantes topológicos. Éste consistió en la observación del efecto Hall de espín bidimensional en capas delgadas



**Figura 1.1:** Panel superior. En la interfaz entre un aislante ordinario y otro en estado de efecto Hall cuántico aparecen estados que conectan la brecha de energías y que se mueven en una dirección bien definida (tomado de ref. [1]). Panel inferior. La primera evidencia experimental del efecto Hall de espín hallada en heteroestructuras de HgTe (tomado de [2]).

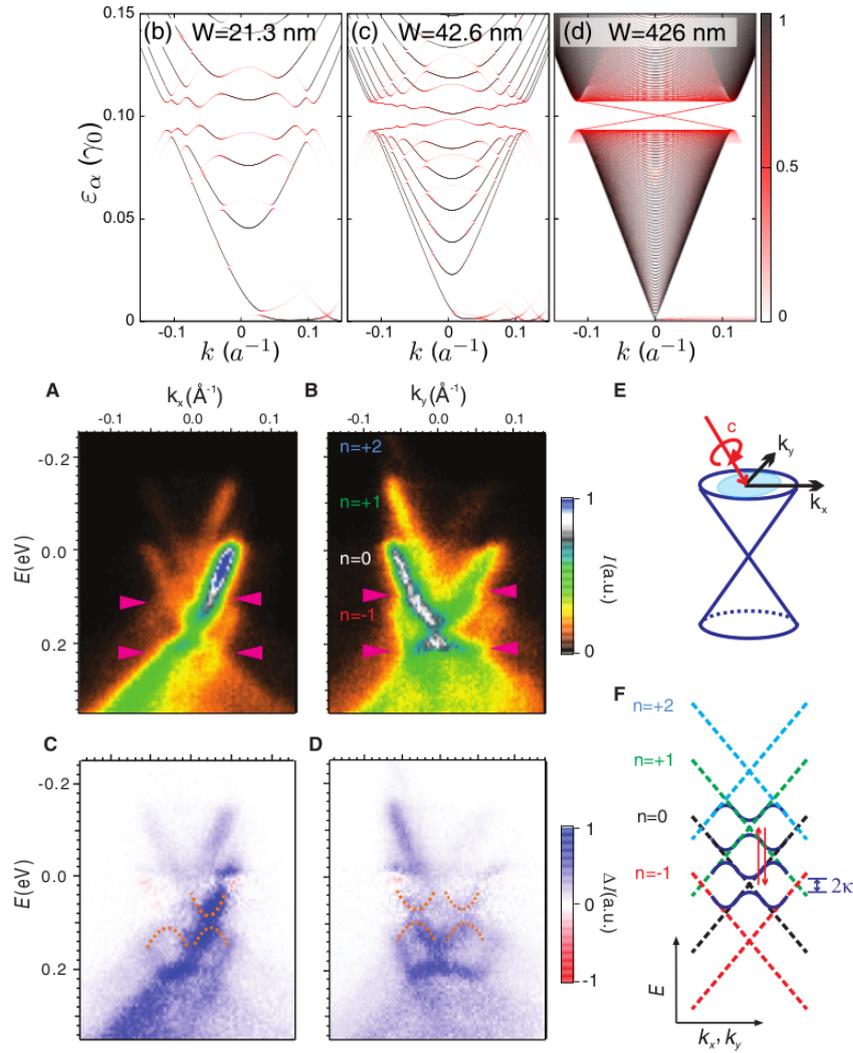
de telururo de mercurio (HgTe) encerradas entre capas de telururo de cadmio mercurio ( $\text{Hg}_x\text{Cd}_{1-x}\text{Te}_x$ ) [2]. En el experimento se observó efectivamente una conductancia cuantizada sólo en los bordes de la muestra. En el panel inferior de la figura 1.1 se muestra algunos de los resultados experimentales a los que se llegaron, en particular se observa la resistividad cuantizada. Este experimento avivó el interés por encontrar nuevas formas de inducir propiedades topológicas en sustancias que, en condiciones normales, no las tienen.

Las peculiaridades en la estructura de bandas que permiten la formación de un TI podrían lograrse (en principio) mediante métodos convencionales, tales como presión o dopamiento. Sin embargo, recientemente se ha encontrado una nueva manera de inducir propiedades topológicas en sistemas inicialmente topológicamente triviales mediante el uso de perturbaciones dependientes del tiempo, particularmente radiación electromagnética. Además, en nuestro problema la interacción con el campo dependiente del tiempo rompe la simetría de inversión temporal, lo cual lleva a nuevas y exóticas formas de aislantes topológicos. Este tipo de interacción da como resultado sistemas fuera del equilibrio, en los que la energía no está bien definida y, como veremos más adelante en el caso de perturbaciones periódicas, es reemplazada por el concepto de cuasi-energía. El grafeno irradiado es un modelo típico en estos sistemas. Abrir una brecha de energías en el grafeno es una parte crucial en sus potenciales aplicaciones como transistor, entre otras, aunque como ya se dijo, el efecto de la interacción espín-órbita, que permitiría abrir esta brecha, es demasiado pequeño. Sin embargo, se ha descubierto que la radia-

ción electromagnética circularmente polarizada puede lograr el mismo efecto de abrir una brecha (a la que llamaremos *dinámica* debido a la dependencia temporal) en el espectro de cuasi-energías del grafeno, y otorgarle a la estructura de bandas resultante un carácter topológico [4], [5]. Por ejemplo, exponiendo una cinta de grafeno a esta radiación se han predicho estados de borde quirales [6], [7]. La explicación detrás de esto es la brecha de *cuasi-energías* de la que ya se habló anteriormente. La gran ventaja de esta forma de interacción es la posibilidad de ajustar el tamaño de la brecha ajustando la intensidad de la radiación empleada. Esto ha abierto toda una serie de posibilidades de investigación en las propiedades del grafeno irradiado y han dado lugar a un nuevo tipo de materiales llamados Aislantes Topológicos de Floquet (FTI, por sus siglas en inglés), entre los cuales el grafeno irradiado es un ejemplo bastante estudiado, aunque también hay otros trabajos en heteroestructuras de HgTe/CdTe [8], [9] y en sistemas de átomos fríos atrapados en redes ópticas [10], y en general en sistemas que tengan una estructura de bandas del tipo de fermión de Dirac sin masa. Por otra parte, para poner de manifiesto la existencia de estos estados, se han realizado experimentos para observar los estados de Floquet en la superficie de un FTI de Bi<sub>2</sub>Se<sub>3</sub> [11], usando espectroscopía de fotoemisión con resolución en tiempo y ángulo (ARPES, por sus siglas en inglés), donde se observan las estructuras de cuasi-energías de no equilibrio de Floquet semejantes a las que obtendremos nosotros de manera teórica en la sección correspondiente. En el panel inferior de la figura 1.2 se observan algunas de estas bandas de cuasi-energías.

Motivados por estos resultados, en nuestro trabajo vamos a estudiar algunos de los efectos que produce la radiación al interactuar con electrones descritos por un hamiltoniano tipo Dirac sin masa (electrones de Dirac, por simplicidad), de entre los cuales el grafeno es el caso más conocido; es por esto que en todo el trabajo emplearemos el término grafeno para referirnos en general a los electrones de Dirac. La radiación incide en forma normal al grafeno como se muestra en la figura 1.3. En una primera parte nos centraremos en la dispersión de estos electrones al incidir sobre una región de grafeno irradiado limitada por un borde plano. Usaremos radiación láser monocromática circularmente polarizada, y ya que se trata de un problema dependiente del tiempo desarrollaremos la Teoría de Floquet, que nos permitirá convertirlo en otro problema independiente del tiempo pero a costa de aumentar el tamaño del espacio de Hilbert. Esta técnica nos permitirá deducir la brecha dinámica de la que ya hemos hablado. Volviendo a la dispersión en un borde plano, allí observaremos un fenómeno conocido como corrimiento de Goos-Hänchen, que ya había sido reportado en grafeno [12], aunque no usando radiación electromagnética.

Otro aspecto importante que abordamos es la formación de estados de borde con velocidad de grupo en una dirección bien definida (a los que llamamos *quirales*) en geometrías ligeramente modificadas respecto de las usadas en [6], donde puede verse claramente la aparición de estados dentro de la brecha dinámica, y que llevan asociada una velocidad de grupo bien definida y dependiente solamente del sentido de giro del campo vectorial asociado a la radiación. Finalmente, siguiendo con la dispersión en regiones de grafeno irradiado, estudiamos ahora el caso de dispersión contra obstáculos circulares irradiados y observaremos la formación de corrientes quirales y un corrimiento Goos-Hänchen cerca de la zona irradiada, como el hallado en el borde plano.

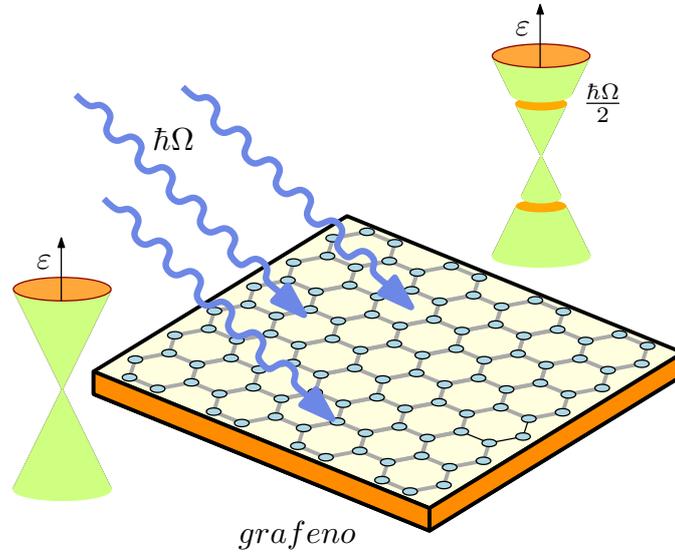


**Figura 1.2:** Panel superior. Evolución de las relaciones de dispersión para los estados quirales en una nanocinta cuando el ancho  $W$  varía (extraído de [7]). Panel inferior. Estados de Floquet obtenidos mediante espectroscopía de fotoemisión con resolución en ángulo y tiempo (ARPES) sobre muestras de  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$ , usando luz circularmente polarizada. La estructura de quasi-energías de Floquet puede observarse en los gráficos (A) hasta (D) (tomado de [11]).

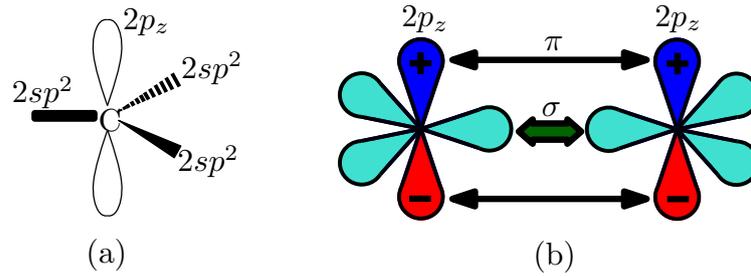
## 1.2. Grafeno

### 1.2.1. Características generales del grafeno monocapa

El grafeno es un material bidimensional formado por átomos de carbono. Su estructura cristalina es la de una red triangular con una base de dos átomos formando una estructura que asemeja a un panal de abejas. Esta estructura puede representarse como dos redes de Bravais triangulares desplazadas entre sí. La forma de este arreglo bidimensional puede explicarse de la estructura electrónica del carbono. El carbono posee seis electrones en una configuración  $1s^2 2s^2 2p^2$ . La estructura cristalina del grafeno proviene de la hibridización  $sp^2$  entre el orbital  $2s$  y dos orbitales  $2p$  (fig. 1.4), dando lugar a tres orbitales  $sp^2$ . El orbital no hibridizado  $p_z$  forma enlaces  $\pi$  (los orbitales  $sp^2$  forman enlaces  $\sigma$ ), responsables de las propiedades de transporte electrónico en el



**Figura 1.3:** Grafeno monocapa sometido a radiación láser. A la izquierda se observa el espectro de energías típico, sin brecha de energía. A la derecha se muestra el espectro resultante debido a la interacción con el láser. Se observa la formación de una brecha a la altura de  $\hbar\Omega/2$  aproximadamente.



**Figura 1.4:** (a) Hibridación  $sp^2$  de los átomos de carbono. El orbital  $p_z$  se mantiene no hibridado. (b) Enlaces  $\sigma$  y  $\pi$  debido a los orbitales  $sp^2$  y  $p_z$  respectivamente. El grafeno debe muchas de sus más importantes propiedades a los electrones  $p_z$ .

grafeno. Los vectores primitivos en la red triangular del grafeno pueden escribirse como:

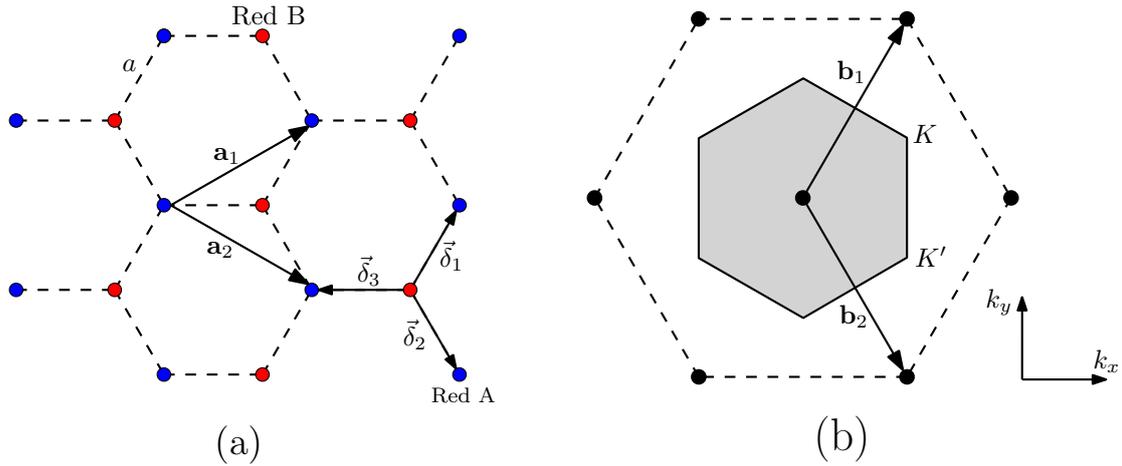
$$\mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}(3, \sqrt{3}), \quad \mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}(3, -\sqrt{3}), \quad (1.1)$$

donde  $a \approx 1,42 \text{ \AA}$  es la distancia entre átomos vecinos. La red recíproca es también triangular y sus vectores primitivos son:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{3a}(1, \sqrt{3}), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{3a}(1, -\sqrt{3}). \quad (1.2)$$

De aquí en adelante será útil reconocer en el grafeno dos subredes que llamaremos  $A$  y  $B$  (fig. 1.5). Se puede observar en la figura 1.5 que los primeros vecinos de un átomo en una de las subredes están en la otra subred. Los vectores que determinan estos primeros vecinos son:

$$\boldsymbol{\delta}_1 = \frac{a}{2}(1, \sqrt{3}), \quad \boldsymbol{\delta}_2 = \frac{a}{2}(1, -\sqrt{3}), \quad \boldsymbol{\delta}_3 = a(-1, 0). \quad (1.3)$$



**Figura 1.5:** (a) Estructura cristalina del grafeno mostrando las dos subredes y los vectores primitivos  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$ . Se muestran además los vectores  $\vec{\delta}_i$  de los primeros vecinos. (b) Red recíproca del grafeno. Se observa la primera zona de Brillouin y los puntos de Dirac  $K$  y  $K'$ .

Mencionaremos aquí también que existe un par de puntos de particular importancia en el borde la zona de Brillouin del grafeno a los que denominamos *puntos de Dirac*. Están dados por:

$$\mathbf{K} = \frac{2\pi}{3a} \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \mathbf{K}' = \frac{2\pi}{3a} \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \quad (1.4)$$

El origen del nombre será claro en la siguiente sección, donde estudiaremos la estructura de bandas del grafeno en la aproximación de enlaces fuertemente ligados.

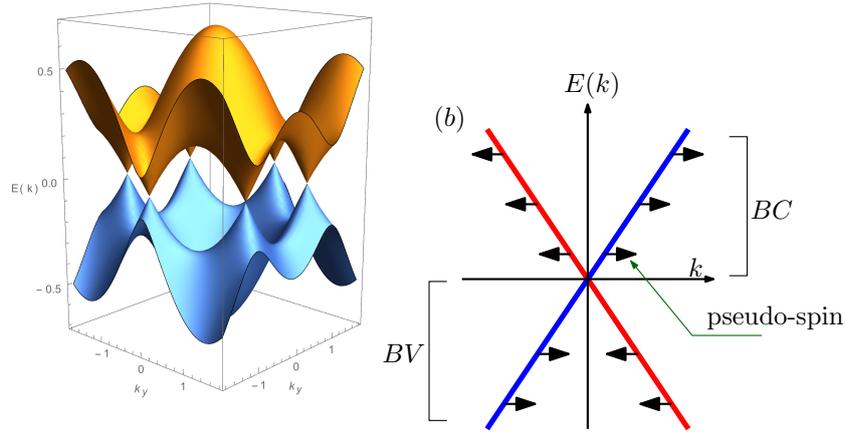
### 1.2.2. Aproximación de enlaces fuertemente ligados y ecuación de Dirac

Para la descripción de las características principales del espectro de bandas del grafeno basta con usar una aproximación de enlaces fuertemente ligados considerando únicamente saltos entre los primeros vecinos [13], esto significa que los electrones de una subred pueden saltar únicamente hacia átomos en la otra subred. Además supondremos un elemento de salto (o *hopping*)  $t$  homogéneo en toda la red. El hamiltoniano en esta aproximación es:

$$H = \epsilon_0 \sum_{j,\sigma} a_{j\sigma}^\dagger a_{j\sigma} + \epsilon_0 \sum_{j,\sigma} b_{j\sigma}^\dagger b_{j\sigma} - t \sum_{\{i,j\},\sigma} (a_{j\sigma}^\dagger b_{i\sigma} + b_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma}), \quad (1.5)$$

donde los operadores  $a_{i\sigma}$  y  $b_{i\sigma}$  ( $a_{i\sigma}^\dagger$  y  $b_{i\sigma}^\dagger$ ) destruyen (crean) un electrón en la posición  $j$  y con spin  $\sigma$  en la subred A y B, respectivamente. Para diagonalizar el hamiltoniano (1.5) pasamos al espacio de momentos. En ese caso los operadores  $a_{i\sigma}$  y  $b_{i\sigma}$  pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} a_{j\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_{jA}} a_{\mathbf{k}\sigma}, \\ b_{j\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_{jB}} b_{\mathbf{k}\sigma}, \end{aligned} \quad (1.6)$$



**Figura 1.6:** Estructura de bandas del grafeno en la aproximación de enlaces fuertemente ligados a primeros vecinos únicamente. El nivel de Fermi se ubica en  $E(\mathbf{k}) = 0$ . Se observa la ausencia de una brecha de energía. En la figura (b) se muestra un acercamiento del diagrama de bandas cerca del punto  $\mathbf{K}$  donde se observan las bandas de conducción (BC) y valencia (BV). Además se ve que en la BC el pseudo-espín es paralelo al número de onda  $\mathbf{k}$ , mientras que en la banda de valencia ambas cantidades son antiparalelas. En ausencia de campos externos el pseudo-espín es una cantidad conservada, lo cual llevará a lo que se conoce como paradoja de Klein [14].

donde  $N$  es el número de celdas en la red. El hamiltoniano toma la forma:

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} [a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \quad b_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger] \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & -tf(\mathbf{k}) \\ -tf^*(\mathbf{k}) & \varepsilon_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\mathbf{k}\sigma} \\ b_{\mathbf{k}\sigma} \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

La matriz en la expresión anterior puede diagonalizarse fácilmente y da lugar a las dos bandas (conducción y valencia)  $\epsilon(\mathbf{k}) = \epsilon_0 \pm t|f(\mathbf{k})|$ , donde  $f(\mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}\cdot\delta_1} + e^{-i\mathbf{k}\cdot\delta_2} + e^{-i\mathbf{k}\cdot\delta_3}$ . En función de las componentes de  $\mathbf{k}$  tenemos:

$$|f(k_x, k_y)|^2 = 3 + 2 \cos(a\sqrt{3}k_y) + 4 \cos\left(\frac{3a}{2}k_x\right) \cos\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}k_y\right). \quad (1.8)$$

En el panel izquierdo de 1.6 se muestra esta estructura de bandas. Allí se observa que las dos bandas se tocan en seis puntos de la primera zona de Brillouin, es decir no hay una brecha de energías. De estos seis puntos hay sólo dos no equivalentes,  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}'$ . Éstos son los puntos de Dirac que ya se mencionaron en la sección 1.2.1. El nombre se debe a que cerca de estos puntos la relación de dispersión  $\epsilon(\mathbf{k})$  toma la misma forma que para el caso de electrones relativistas sin masa, aunque con  $v_F$  en lugar de  $c$  (velocidad de la luz). En efecto, cerca de los puntos de Dirac  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}'$  la relación de dispersión puede aproximarse al orden más bajo escribiendo  $\mathbf{k} = \mathbf{K} + \mathbf{q}$ , donde  $q \ll K$ . Se obtiene lo siguiente:

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \epsilon_F \pm \hbar v_F \sqrt{q_x^2 + q_y^2}, \quad (1.9)$$

donde el signo  $+$  ( $-$ ) corresponde a la banda de conducción (valencia). Estas dos bandas se caracterizan por la ausencia de una brecha de energía entre ellas y por poseer una velocidad de grupo  $\mathbf{v}_g = \partial\epsilon(\mathbf{q})/\partial\mathbf{q}$  constante en módulo e igual a  $v_F$ , aunque la dirección respecto del vector unitario  $\hat{q} = (q_x\hat{x} + q_y\hat{y})/\sqrt{q_x^2 + q_y^2}$  dependerá de la banda

en particular. Puede demostrarse fácilmente que:

$$\mathbf{v}_g = \begin{cases} +v_F \hat{q} & \text{banda de conducción} \\ -v_F \hat{q} & \text{banda de valencia.} \end{cases} \quad (1.10)$$

En esta aproximación los electrones presentan una relación de dispersión que recuerda mucho a la correspondiente para partículas relativistas sin masa, aunque con una velocidad  $v_F \approx 10^6$  m/s, es decir apenas una pequeña fracción de la velocidad de la luz. Pasemos ahora a la forma que adquiere la ecuación de Schrödinger en esta aproximación. Debido a los dos átomos en la celda unitaria del grafeno, la función de onda tiene dos componentes (se trata de un espinor), donde cada uno mide la densidad de probabilidad en cada subred. En la aproximación dada por (1.9) y cerca del punto de Dirac  $\mathbf{K}$  la ecuación de Schrödinger se convierte en una ecuación de Dirac para electrones sin masa:

$$i\hbar \partial_t \Psi(\mathbf{r}, t) = v_F \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.11)$$

En esta ecuación  $\mathbf{p} = -i\hbar \nabla$  es el operador de momento y las matrices  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$  son las matrices de Pauli. Sin embargo, estas matrices no tienen relación con el espín (que no tiene presencia en nuestro modelo). Estas matrices reflejan en su lugar la presencia de dos subredes en la estructura cristalina del grafeno. Por sus semejanzas con el espín usual la llamaremos *pseudo-espín*. Existe una ecuación semejante para las cercanías del punto de Dirac  $\mathbf{K}'$  [15].

### 1.3. Teoría de Floquet

Al tratar el problema de la interacción del grafeno con un haz láser debemos resolver una ecuación de Schrödinger con un potencial dependiente del tiempo. Si el haz láser usado es monocromático el potencial resultante será periódico en el tiempo, lo cual permite el uso de técnicas específicas para estos casos. El propósito de esta sección es estudiar el formalismo de Floquet que nos permite resolver este tipo de situaciones. Veremos que esta técnica es adecuada para el estudio de la interacción del grafeno con radiación circularmente polarizada. Primero mostraremos el método en general para un potencial  $H_I(t)$  que es periódico en el tiempo, y luego presentaremos su aplicación específica al caso que nos concierne.

El método de Floquet es una técnica muy adecuada en el estudio de sistemas cuánticos descritos por hamiltonianos periódicos en el tiempo  $H(t) = H(t + T)$ . La ecuación de Schrödinger correspondiente es:

$$\left( H(\mathbf{r}, t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.12)$$

El teorema de Floquet establece que existen soluciones para la ecuación anterior de la forma:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\varepsilon t/\hbar} \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (1.13)$$

donde  $\Phi$  es una función periódica en el tiempo con el mismo período del hamiltoniano:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t + T). \quad (1.14)$$

Aquí  $\varepsilon$  es un parámetro real que es único salvo múltiplos de  $\hbar\Omega$  ( $\Omega = 2\pi/T$ ). Se le suele

llamar la *cuasi-energía*. Este término refleja la analogía con el *cuasi-momentum*  $\mathbf{k}$ , que caracteriza los estados de Bloch en un sólido cristalino periódico. Reemplazando (1.13) en la ecuación de Schrödinger se obtiene la ecuación de autovalores para  $\varepsilon$ . Usando el operador hermítico:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = H(\mathbf{r}, t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (1.15)$$

se encuentra la siguiente ecuación:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)\Phi(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (1.16)$$

Para el operador hermítico  $\mathcal{H}$  es conveniente introducir el espacio compuesto  $\mathcal{R} \otimes \mathcal{T}$  formado por el espacio de Hilbert usual  $\mathcal{R}$  de funciones de cuadrado integrable y el espacio  $\mathcal{T}$  de funciones periódicas en el tiempo. Para  $\mathcal{R}$  el producto interno se define en la forma usual:

$$\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \int d^3\mathbf{r} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \varphi_m(\mathbf{r}) = \delta_{n,m}, \quad (1.17)$$

y la parte temporal se expande en la base de componentes de Fourier  $e^{im\omega t}$ :

$$\langle n | m \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i(m-n)\Omega t} = \delta_{n,m}. \quad (1.18)$$

Expandir este espacio como  $\mathcal{R} \otimes \mathcal{T}$  es equivalente a escribir  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  como una serie de Fourier:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\Omega t} \phi_m(\mathbf{r}), \quad (1.19)$$

Si reemplazamos la ecuación anterior en (1.16) y usamos a su vez una expansión en serie de Fourier para el hamiltoniano (que se ha supuesto periódico en el tiempo) podemos obtener un sistema de ecuaciones acopladas para las componentes  $\phi_m$ . Cada una de estas componentes serán llamadas *canales* o *réplicas*. En lugar de dar una expresión general para este resultado vamos a obtenerla directamente en el caso de la interacción del grafeno en la aproximación (1.11) en presencia de un campo electromagnético descrito por un potencial vector  $\mathbf{A}(t)$  armónico. Usando la sustitución de Peierls  $\hbar\mathbf{k} \rightarrow \hbar\mathbf{k} + e\mathbf{A}(t)/c$  (o  $t \rightarrow t \exp(i e/\hbar c \int \mathbf{dl} \cdot \mathbf{A})$  si trabajamos en la aproximación de enlaces fuertemente ligados), la ecuación (1.11) se convierte en la siguiente (estamos suponiendo un calibre en el que el potencial escalar es nulo):

$$i\hbar \partial_t \Psi = v_F \boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(t)] \Psi. \quad (e > 0), \quad (1.20)$$

Usaremos un potencial vector rotante de la forma:

$$\mathbf{A}(t) = A_0 (\cos \Omega t \hat{x} + \sin \Omega t \hat{y}), \quad (1.21)$$

que representa un láser que incide perpendicularmente sobre la monocapa de grafeno. Para obtener la ecuación 1.20 hemos usado el calibre de radiación (potencial escalar nulo), y no consideramos efectos magnéticos, tales como un término de Zeeman; además suponemos que la monocapa de grafeno coincide con el plano  $z = 0$ . Se trata de un vector que gira en sentido antihorario. Ya que  $\mathbf{A}(t)$  varía periódicamente en el tiempo, el teorema de Floquet establece que la solución de la ecuación de Schrödinger

anterior puede escribirse en la forma (1.13). Reemplazando en (1.20) obtenemos la siguiente ecuación para  $\Phi$  (omitimos por el momento la notación de la dependencia en las variables espaciales):

$$i\hbar \partial_t \Phi + \varepsilon \Phi = v_F \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[ \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(t) \right] \Phi. \quad (1.22)$$

Usando el potencial vectorial (1.21) podemos hacer la expansión en serie de Fourier temporal del correspondiente término en el hamiltoniano. En nuestro caso sólo tenemos dos términos en la expansión:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} = \frac{A_0}{2} (\sigma_- e^{i\Omega t} + \sigma_+ e^{-i\Omega t}), \quad (1.23)$$

donde  $\sigma_{\pm} = \sigma_x \pm i\sigma_y$  tienen la siguiente forma:

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

A su vez tenemos la expansión en serie de Fourier para  $\Phi$ :

$$\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_m(\mathbf{r}) e^{im\Omega t}, \quad (1.25)$$

usando esta expansión en serie de Fourier llegamos a un sistema de ecuaciones acopladas para las componentes  $\phi_m$ :

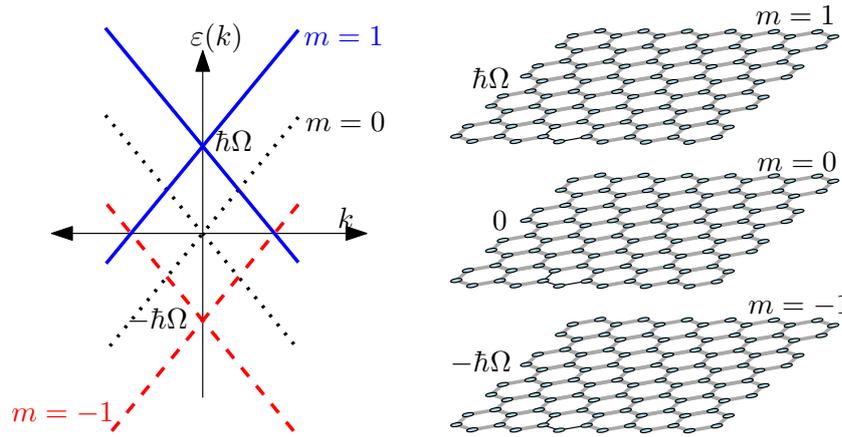
$$\varepsilon \phi_m = (v_F \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + m \hbar \Omega) \phi_m + \frac{ev_F A_0}{2c} (\sigma_- \phi_{m-1} + \sigma_+ \phi_{m+1}). \quad (1.26)$$

El sistema anterior representa un conjunto infinito de ecuaciones acopladas. Con este método hemos reducido un problema con dependencia temporal a uno independiente del tiempo pero en un espacio extendido, al que denominamos *espacio de Floquet*, definido como el producto directo  $\mathcal{R} \otimes \mathcal{T}$  entre el espacio de Hilbert usual  $\mathcal{R}$  y el espacio de las funciones periódicas en el tiempo  $\mathcal{T}$ . Este espacio puede expandirse en la base  $|\Psi_{\sigma}, m\rangle$ , donde  $\sigma$  es un índice que indica la subred (o pseudo-spin) y  $m$  es un índice en la expansión de Fourier. Podemos describir esto en forma gráfica.

En la figura 1.7 se observan algunas copias del grafeno, cada una de ellas representa las diferentes componentes  $\phi_m$  de la solución (1.25), desplazadas en energía una cantidad  $m\hbar\Omega$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Estas copias no son independientes, si no que están acopladas entre sí mediante el potencial electromagnético  $\mathbf{A}(t)$ . Este acoplamiento tiene algunas restricciones dependiendo de la forma del potencial dependiente del tiempo. De la ecuación (1.26) vemos que en nuestro caso el potencial  $\mathbf{A}(t)$  acopla el canal  $m$  con los canales adyacentes  $m-1$  y  $m+1$ . Para resolver el sistema (1.26) es necesario truncar la base de elementos  $|\Psi_{\sigma}, m\rangle$ . Esto tiene que hacerse sobre la base de consideraciones físicas.

En nuestro caso mostraremos los resultados que se obtienen usando sólo los canales  $m = 0$  y  $m = 1$ , diferenciando la justificación para la sección siguiente. Es decir, nuestra función de onda (1.25) tiene la forma:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\varepsilon t/\hbar} [\phi_0(\mathbf{r}) + \phi_1(\mathbf{r}) e^{i\Omega t}], \quad (1.27)$$



**Figura 1.7:** Una representación pictórica de la ecuación (1.26) sin acoplamiento entre los canales. Tenemos una serie de réplicas o *canales* separados por múltiplos enteros de la energía del fotón láser  $\hbar\Omega$ . La radiación láser acopla estos canales mediante la absorción o emisión de fotones virtuales.

y las ecuaciones para  $\phi_0$  y  $\phi_1$  son entonces:

$$\begin{aligned}\varepsilon\phi_1 &= (v_F\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + \hbar\Omega)\phi_1 + \frac{ev_FA_0}{2c}\sigma_-\phi_0, \\ \varepsilon\phi_0 &= \frac{ev_FA_0}{2c}\sigma_+\phi_1 + v_F\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\phi_0,\end{aligned}$$

o en forma matricial:

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{H}}_F \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Al operador  $\tilde{\mathcal{H}}_F$  lo denominamos *hamiltoniano de Floquet* y en nuestra aproximación de dos canales tiene la forma:

$$\tilde{\mathcal{H}}_F = \begin{pmatrix} v_F\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + \hbar\Omega & \frac{ev_FA_0}{2c}\sigma_- \\ \frac{ev_FA_0}{2c}\sigma_+ & v_F\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

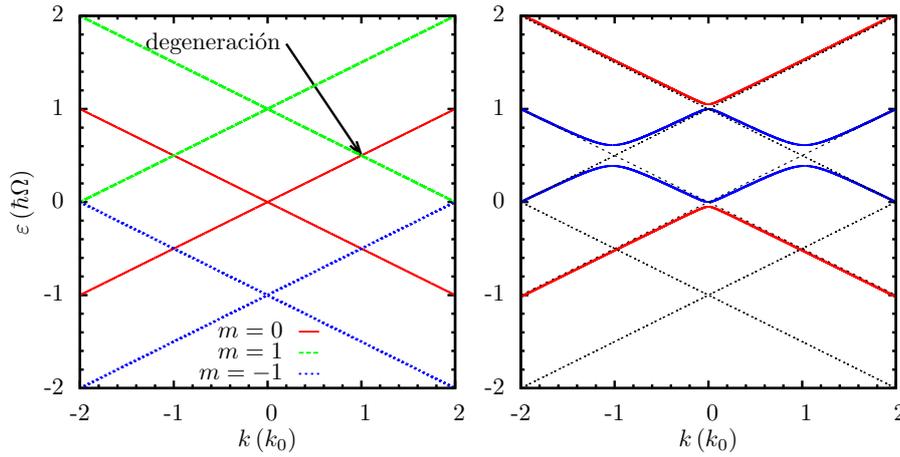
Teniendo en cuenta la forma del siguiente operador matricial:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 & p_- \\ p_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{\pm} = p_x \pm ip_y, \quad (1.30)$$

obtenemos finalmente:

$$\tilde{\mathcal{H}}_F = \begin{pmatrix} \hbar\Omega & v_Fp_- & 0 & 0 \\ v_Fp_+ & \hbar\Omega & ev_FA_0/c & 0 \\ 0 & ev_FA_0/c & 0 & v_Fp_- \\ 0 & 0 & v_Fp_+ & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

El hamiltoniano (1.31) corresponde al potencial vector dado por (1.21), más adelante veremos variaciones de este caso. Pasemos ahora a resolver el sistema (1.28). Allí veremos cómo la radiación láser modifica las propiedades de las bandas en el grafeno, o mejor dicho, genera una nueva estructura efectiva de bandas para el sistema fuera de equilibrio.



**Figura 1.8:** Panel izquierdo. Espectro de quasi-energías del grafeno sin acoplamiento entre canales. Éste es un caso más o menos trivial y resulta en la función  $\pm\hbar v_F \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  desplazada en cantidades  $m\hbar\Omega$ , donde  $m$  es un entero e indica el canal correspondiente. Aquí puede notarse que existen energías donde se cruzan varios canales, por ejemplo en los valores de energías  $\hbar\Omega/2$  (canales  $m = 0$  y  $m = 1$ ) y en la energía nula (canales  $m = -1$ ,  $m = 0$  y  $m = 1$ ). Panel derecho. Relación de dispersión en grafeno irradiado para  $\eta = 0.23$ . Se observa la generación de una brecha de quasi-energías alrededor del punto de degeneración  $\hbar\Omega/2$  señalado en el panel izquierdo, entre los canales  $m = 0$  y  $m = 1$  en el caso no irradiado.

## 1.4. Teoría de Floquet aplicada al grafeno y generación de la brecha dinámica

El método de Floquet explicado en la sección anterior nos permite obtener interesante resultados acerca de la forma cómo se modifica la estructura de bandas (o más precisamente, la estructura de bandas de quasi-energía) del grafeno en presencia de radiación circularmente polarizada. Habíamos visto que en el grafeno (sin irradiar) la banda de conducción toca a la banda de valencia a la altura de la energía de Fermi y en seis puntos distintos de la primera zona de Brillouin, llamados puntos de Dirac (llamados también *valles*), de los cuales sólo dos son no equivalentes y que denotamos  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}'$ . Si suponemos que no existe acoplamiento entre estos dos valles, podemos tratar cada uno por separado, en particular nos limitaremos al valle  $\mathbf{K}$ . Más adelante daremos una condición para descartar el acople entre valles.

Veamos primero del caso del grafeno sin acoplamiento en el valle  $\mathbf{K}$ . La ecuación para las componentes  $\phi_m$  en (1.25) puede obtenerse de (1.26) haciendo  $A_0 = 0$ . Si en la ecuación así obtenida ensayamos soluciones en forma de ondas planas  $\phi_m(\mathbf{r}) = \phi_{m0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  obtenemos el siguiente espectro de quasi-energías:

$$\varepsilon = m\hbar\Omega \pm \hbar v_F \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \quad (1.32)$$

Se observa que ésta es la misma relación de dispersión del grafeno no irradiado pero desplazada en múltiplos de la energía del fotón láser  $\hbar\Omega$ . En la figura 1.8 se observa esta relación de dispersión para tres valores de  $m$  (es decir, tres canales) y en un corte con el plano  $k_y = 0$ . Puede verse que los canales  $m = 0$  y  $m = 1$  son degenerados en  $k_x = k_0 = \Omega/2v_F$  con una energía  $\hbar\Omega/2$  (en realidad hay infinitos canales que degeneran con esta energía y esto puede verse graficando más canales). Ahora, si observamos el hamiltoniano de Floquet (1.29) notamos que hay un término que depende de la

intensidad de la radiación y que acopla los canales  $m = 0$  y  $m = 1$ . Si asumimos que la intensidad de la radiación es pequeña y sólo nos interesa estudiar las energías en torno a  $\hbar\Omega/2$ , podemos retener únicamente los canales  $m = 0$  y  $m = 1$ , y por consiguiente tratar con la matriz de Floquet (1.29). Hay que señalar que esto es sólo una aproximación que puede mejorarse incluyendo más canales de entre los que degeneran en  $\hbar\Omega/2$ , es decir  $m = 2$  y  $m = -1$ , o  $m = 3$  y  $m = -2$ . Trabajar únicamente en los canales  $m = 0$  y  $m = 1$  nos lleva a retener, en las soluciones encontradas a posteriori, sólo las primeras contribuciones no nulas en  $A_0$ . Es conveniente definir el parámetro adimensional  $\eta = ev_F A_0 / \hbar c \Omega$  que mide la intensidad de la radiación láser incidente. Dicho esto, podemos resolver la ecuación (1.28) usando una solución tipo ondas planas en ambos canales:

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \phi_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \phi_1(\mathbf{r}) = \phi_1 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (1.33)$$

donde  $\phi_0$  y  $\phi_1$  son espinores complejos de dos componentes que no dependen de  $\mathbf{r}$ . Con este ensayo podemos resolver la ecuación de autovalores (1.28) y obtener la relación de dispersión para  $\varepsilon$ . Esto se reduce a resolver la ecuación algebraica:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \hbar\Omega - \varepsilon & \hbar v_F k_- & 0 & 0 \\ \hbar v_F k_+ & \hbar\Omega - \varepsilon & ev_F A_0 / c & 0 \\ 0 & ev_F A_0 / c & -\varepsilon & \hbar v_F k_- \\ 0 & 0 & \hbar v_F k_+ & -\varepsilon \end{bmatrix} = 0 \quad (1.34)$$

La ecuación algebraica resultante puede simplificarse notablemente si escribimos  $\varepsilon = \hbar\Omega(1 + \mu)/2$ . Luego de un poco de álgebra se obtienen las siguientes cuatro soluciones para  $\varepsilon$  (se han definido la cantidad adimensional  $q^2 = (k_x^2 + k_y^2)/k_0^2$ ):

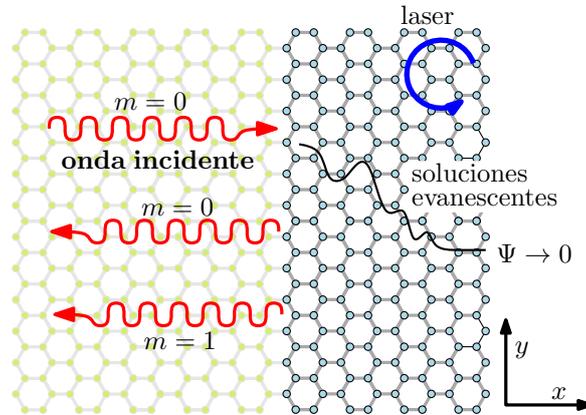
$$\varepsilon(\mathbf{q}) = \frac{\hbar\Omega}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + 2\eta^2 + q^2 \pm 2\sqrt{\eta^4 + q^2(1 + \eta^2)}} \right). \quad (1.35)$$

En el panel derecho de la figura 1.8 se muestran estas funciones. El efecto de la radiación es abrir una brecha en el espectro de cuasi-energías justo alrededor de la energía  $\hbar\Omega/2$  donde los canales  $m = 0$  y  $m = 1$  degeneraban en el caso no irradiado. Diremos que esta brecha es *dinámica* ya que estamos tratando un problema no estacionario donde las energías no están bien definidas. Como ya se dijo, para que nuestra aproximación de dos niveles funcione debemos limitarnos a valores pequeños de  $\eta$ , lo que por su definición significa que la intensidad de la radiación debe ser pequeña en comparación con su energía. Por otra lado, se observa también una pequeña brecha en las proximidades de  $\mu = 0$ , mucho más pequeña que la encontrada en  $\hbar\Omega/2$ . Sin embargo, usando la aproximación de dos niveles ( $m = 0$  y  $m = 1$ ) no es posible hacer una descripción adecuada de la brecha en  $\mu = 0$  ya que, como se observa en el panel izquierdo de 1.8, existe una degeneración en  $\mu = 0$  entre por lo menos los canales  $m = -1, 0$  y  $1$ , por lo que deberíamos incluir los tres para obtener una solución completa al orden más bajo en  $\eta$  [16]. Teniendo en cuenta estas consideraciones podemos aproximar las soluciones para  $\mu$  en torno a  $k = k_0$  y  $-k_0$  y de esta forma estimar el ancho de la brecha de cuasi-energías. Se ve que este ancho es del orden de  $\delta\varepsilon \approx \eta\hbar\Omega$ , es decir, está en proporción directa a la intensidad del campo láser. Esta brecha dinámica será la responsable de muchos de los resultados que obtendremos más adelante.

# Capítulo 2

## Dispersión en un borde plano

En este capítulo vamos a estudiar la dispersión de electrones al incidir sobre una región de grafeno irradiado con luz circularmente polarizada. Los electrones provienen de una región de grafeno sin irradiar. Para empezar analizaremos el caso sencillo de una interfaz rectilínea a lo largo de la recta  $x = 0$ , es decir paralela a la dirección  $\hat{y}$ , relegando otras geometrías a capítulos posteriores. La regiones no irradiada e irradiada son  $x < 0$  y  $x > 0$ , respectivamente. En el capítulo anterior ya se mostró, usando la Teoría de Floquet, la apertura de una brecha de cuasi-energías en el grafeno irradiado con luz circularmente polarizada. Si hacemos incidir electrones con energías dentro de esta brecha tendremos soluciones evanescentes en la región irradiada, con un corriente de probabilidad neta nula en la dirección normal al borde. Ya que se trata de un proceso inelástico, esperamos electrones dispersados en cada uno de los canales  $m = 0$  y  $m = 1$  que usamos dentro de nuestra aproximación. Veremos que la proporción de electrones dispersados en cada canal (cuantificada mediante los respectivos coeficientes de reflexión en cada canal) es una función del ángulo de incidencia  $\theta$ . Además estamos interesados en la corrientes generadas dentro de la zona irradiada, que como veremos, más adelante, son paralelas al borde y con un sentido establecido, independiente de la dirección de los electrones incidentes y sólo dependiente del sentido de giro (helicidad) del potencial vector asociado al campo láser. Estas corrientes son llamadas *quirales*.



**Figura 2.1:** Geometría de la dispersión normal donde se observan un haz incidente en el canal  $m = 0$  y los respectivos haces dispersados en los canales  $m = 0$  y  $m = 1$ . No existe corriente transmitida en la región irradiada debido a la imposición de estados evanescentes en dicha región.

## 2.1. Incidencia normal

Empecemos con el caso más sencillo matemáticamente, y es cuando la incidencia sobre el borde de la región irradiada es normal. Ya que estamos pensando en soluciones viajeras que inciden normalmente sobre una interfaz recta podemos hacer  $k_y = 0$  en nuestras soluciones. En la región no irradiada el hamiltoniano es simplemente (1.11). Sin embargo podemos legítimamente resolver esta ecuación usando el método de Floquet. En este caso las ecuaciones que se obtienen están desacopladas para cada canal así que pueden resolverse en forma exacta. Sin entrar en detalles en los cálculos, la solución está dada por la función:

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = e^{-i\varepsilon t/\hbar} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_m(\mathbf{r}) e^{im\Omega t},$$

donde

$$\phi_m(\mathbf{r}) = a_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_x x} + b_m \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ik_x x}, \quad (2.1)$$

y además  $k_x = (\varepsilon - m\hbar\Omega)/\hbar v_F$ . En el capítulo anterior se había definido  $k_0 = \Omega/2v_F$  ya que esta cantidad aparecerá repetidamente y será usada como unidad de medida para varias cantidades posteriores. Por otro lado, del hamiltoniano (1.11) puede obtenerse una ecuación de continuidad en donde la densidad de corriente está dada por:

$$\mathbf{J} = v_F \Psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \Psi. \quad (2.2)$$

En nuestro caso la componente de la densidad de corriente total en la dirección  $\hat{y}$  es nula. Aplicando la ecuación anterior se obtiene que en la solución  $\phi_m$  el primer (segundo) término corresponde a una propagación en la dirección positiva (negativa) de  $\hat{x}$ . Sin pérdida de generalidad podemos hacer  $a_0 = 1$ , lo que indica que se tiene un flujo unitario de partículas en el canal  $m = 0$  incidiendo con energía  $\varepsilon$ . Supondremos también que no hay partículas incidentes en el canal  $m = 1$  y por ello haremos  $a_1 = 0$ . Luego,  $b_0$  y  $b_1$  pueden interpretarse como los coeficientes o amplitudes de reflexión en los canales  $m = 0$  y  $m = 1$ , respectivamente, a los que llamaremos  $r_0$  y  $r_1$ . Las soluciones en la región no irradiada son entonces:

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{r}) &= r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i(\hbar\Omega - \varepsilon)x/\hbar v_F}, \\ \phi_0(\mathbf{r}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\varepsilon x/\hbar v_F} + r_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon x/\hbar v_F} \quad (x < 0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Volveremos a estas ecuaciones más adelante. Pasemos ahora a resolver las ecuaciones en la región irradiada. En esta región las soluciones se obtienen de resolver la ecuación (1.28) con el hamiltoniano de Floquet (1.31). Ya que nos interesa el rango de cuasi-energías cerca de  $\hbar\Omega/2$ , escribiremos la solución de esta ecuación en la aproximación de dos canales poniendo de manifiesto las dos componentes  $u_{mA}$  y  $u_{mB}$  (con  $m = 0, 1$ ) del espinor en cada canal:

$$\phi(\mathbf{r}) = \{[u_{1A}(\mathbf{r}), u_{1B}(\mathbf{r})], [u_{0A}(\mathbf{r}), u_{0B}(\mathbf{r})]\}^T, \quad (2.4)$$

y buscaremos soluciones que sean evanescentes en la región irradiada. La ecuación  $\tilde{\mathcal{H}}_F \phi(\mathbf{r}) = \varepsilon \phi(\mathbf{r})$  implica que:

$$\begin{aligned} u_{1A}(\mathbf{r}) &= -\frac{v_F}{\hbar\Omega - \varepsilon} p_- u_{1B}(\mathbf{r}), \\ u_{0B}(\mathbf{r}) &= \frac{v_F}{\varepsilon} p_+ u_{0A}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

por lo que sólo dos funciones  $u_{0A}(\mathbf{r})$  y  $u_{1B}(\mathbf{r})$ , deben determinarse en primer lugar. Estas dos funciones satisfacen:

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{v_F^2}{\hbar\Omega - \varepsilon} p^2 + \hbar\Omega - \varepsilon \right] u_{1B}(\mathbf{r}) &= -\frac{v_F e A_0}{c} u_{0A}(\mathbf{r}), \\ \left[ \frac{v_F^2}{\varepsilon} p^2 - \varepsilon \right] u_{0A}(\mathbf{r}) &= -\frac{v_F e A_0}{c} u_{1B}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma más compacta usando algunas definiciones:

$$\varepsilon = \frac{\hbar\Omega}{2}(1 + \mu), \quad q = \frac{eA_0}{\hbar c}, \quad \eta = \frac{q}{2k_0}. \quad (2.7)$$

La parametrización de  $\varepsilon$  sugiere que estamos principalmente interesados en  $|\mu| \ll 1$ . Con estas definiciones las ecuaciones (2.6) se convierten en:

$$\begin{aligned} [\nabla^2 + k_0^2(1 - \mu)^2] u_{1B} &= -qk_0(1 - \mu)u_{0A} \\ [\nabla^2 + k_0^2(1 + \mu)^2] u_{0A} &= qk_0(1 + \mu)u_{1B}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Podemos resolver las ecuaciones anteriores haciendo la sustitución  $u_{1B} = C e^{-Kx}$  y  $u_{0A} = D e^{-Kx}$ , siendo  $C$  y  $D$  constantes de integración. Ya que queremos soluciones con cuasi-energías dentro de la brecha dinámica, buscaremos las soluciones que decaigan con  $x$  para  $x > 0$ . Reemplazando en las ecuaciones (2.8) obtenemos una ecuación para  $K$ :

$$[K^2 + k_0^2(1 - \mu)^2][K^2 + k_0^2(1 + \mu)^2] + q^2 k_0^2(1 - \mu^2) = 0. \quad (2.9)$$

Necesitamos que esta ecuación tenga soluciones con parte real positiva. Esto se puede obtener si imponemos la condición  $\mu^2 \leq \eta^2/(1 + \eta^2)$ , es decir cuando:

$$-\frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} \leq \mu \leq \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}}. \quad (2.10)$$

Este rango está dentro de la brecha dinámica hallada en el capítulo anterior, así que de aquí se llega a una importante conclusión: las soluciones evanescentes en la región irradiada son aquéllas con cuasi-energías dentro de la brecha dinámica. De esta forma puede decirse que esta brecha cumple el mismo papel de la barrera de potencial en la referencia [12]. Las soluciones que nos interesan son evidentemente aquéllas que tienen la parte real positiva, como ya se señaló, y su forma general es:

$$K_{1,2} = k_0 \left[ -1 - \mu^2 \pm 2i \sqrt{-\mu^2(1 + \eta^2) + \eta^2} \right]^{1/2}. \quad (2.11)$$

Queda claro que  $K_1 = K_2^*$ . De aquí también se obtiene una relación entre los coeficientes  $C$  y  $D$ :

$$D = \Pi_{1,2} C, \quad (2.12)$$

donde se han definido las funciones  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ :

$$\Pi_{1,2} = \frac{2\eta(1+\mu)}{(K_{1,2}/k_0)^2 + (1+\mu)^2} = \frac{\mu \mp i\sqrt{\eta^2 - \mu^2(1+\eta^2)}}{\eta(1-\mu)}, \quad (2.13)$$

Aquí también se observa claramente que  $\Pi_1 = \Pi_2^*$ . Una situación interesante, que además simplifica muchas expresiones, se da cuando  $\mu = 0$ , es decir cuando la cuasi-energía es  $\hbar\Omega/2$ . Este punto corresponde al centro de la brecha de cuasi-energías y en este caso  $\Pi_{1,2} = \mp i$ . En resumen, las soluciones en la región irradiada son:

$$\begin{aligned} u_{1A}(\mathbf{r}) &= -\frac{i}{k_0(1-\mu)} [C_1 K_1 e^{-K_1 x} + C_2 K_2 e^{-K_2 x}], \\ u_{1B}(\mathbf{r}) &= C_1 e^{-K_1 x} + C_2 e^{-K_2 x}, \\ u_{0A}(\mathbf{r}) &= C_1 \Pi_1 e^{-K_1 x} + C_2 \Pi_2 e^{-K_2 x}, \\ u_{0B}(\mathbf{r}) &= \frac{i}{k_0(1+\mu)} [C_1 K_1 \Pi_1 e^{-K_1 x} + C_2 K_2 \Pi_2 e^{-K_2 x}]. \quad (x > 0) \end{aligned} \quad (2.14)$$

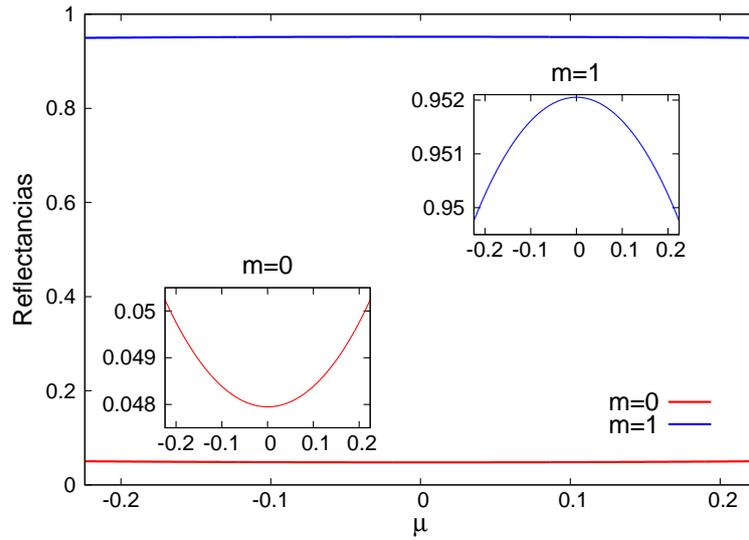
Nuestro objetivo es determinar la proporción de electrones dispersados en cada canal, es decir determinar  $r_0$  y  $r_1$ . Esto se obtiene de la continuidad de la función de onda global en  $x = 0$ . Igualando (2.3) y (2.14) en  $x = 0$  se obtiene un sistema de ecuaciones para las constantes de integración  $r_0$ ,  $r_1$ ,  $C_1$  y  $C_2$ :

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{i}{k_0(1-\mu)} [C_1 K_1 + C_2 K_2], \\ -r_1 &= C_1 + C_2, \\ 1 + r_0 &= C_1 \Pi_1 + C_2 \Pi_2, \\ 1 - r_0 &= \frac{i}{k_0(1+\mu)} [C_1 K_1 \Pi_1 + C_2 K_2 \Pi_2], \end{aligned} \quad (2.15)$$

Del sistema anterior podemos resolver los coeficientes de reflexión  $r_0$  y  $r_1$  en función de  $\mu$  y  $\eta$ . De aquí podemos obtener las reflectancias en cada canal de la forma usual:

$$R_0 = |r_0|^2, \quad R_1 = |r_1|^2. \quad (2.16)$$

Más adelante veremos que estas definiciones deben modificarse ligeramente en el caso general de incidencia oblicua, en donde deberemos usar rigurosamente las definiciones para las reflectancias como el cociente entre la densidad de corriente dispersada en cada canal y la incidente (que en nuestro caso es sólo en el canal  $m = 0$ ). La dependencia de  $R_0$  y  $R_1$  se muestra en la figura 2.2 en función de  $\mu$  en el rango (2.10). Allí observamos que, en un intervalo de valores en el eje vertical de entre 0 y 1, ambas funciones son casi homogéneas dentro de la brecha dinámica, aunque un acercamiento a cada una de ellas muestra una dependencia en  $\mu$  no trivial. Se ve que  $R_0$  es mucho menor a  $R_1$ , lo que indica que la mayor parte de los electrones incidentes se reflejan en el canal  $m = 1$ . Esto es una consecuencia de la naturaleza quiral de la ecuación de Schrödinger a bajas energías para los electrones en grafeno (que corresponde a una ecuación de Dirac para partículas sin masa), y está íntimamente ligada con la llamada paradoja de Klein, ya anteriormente identificada en grafeno no irradiado [14]. También puede verificarse de la gráfica la relación entre  $R_0$  y  $R_1$ , la cual es a su vez una consecuencia directa de la



**Figura 2.2:** Reflectancia en cada uno de los canales en función de la energía  $\mu$  dentro del gap dinámico para  $\eta = 0,23$ . Vistas en el intervalo entre 0 y 1 parecen constantes, aunque las figuras insertadas muestran una dependencia no constante en  $\mu$ .

conservación del flujo de probabilidad:

$$R_0 + R_1 = 1, \quad (2.17)$$

como era de esperarse. Resulta también interesante observar el comportamiento de  $R_0$  y  $R_1$  en función del parámetro  $\eta$  en el centro de la brecha ( $\mu = 0$ ). Escogemos  $\mu = 0$  porque en este caso se pueden obtener expresiones analíticas sencillas aproximadas para  $r_0$  y  $r_1$ . Además, este cálculo nos dará una idea de la proporción de electrones dispersados en cada canal en función de la intensidad del campo incidente, la cual supondremos que no cambia dramáticamente al alejarnos del centro de la brecha. Ya se había mencionado que cuando  $\mu = 0$  las expresiones para  $K_{1,2}$  y  $\Pi_{1,2}$  se simplifican notablemente. En ese caso se tiene que:

$$\begin{aligned} K_{1,2} &= k_0 \sqrt{-1 \pm 2\eta i}, \\ \Pi_{1,2} &= \mp i. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Usando estos resultados y luego de un cálculo tedioso aunque directo llegamos a que hasta la primera corrección no nula se tiene:

$$R_1(\eta) \approx 1 - \eta^2, \quad R_0(\eta) \approx \eta^2, \quad (2.19)$$

Es decir que, obviando términos cuadráticos en  $\eta$ , los electrones incidentes se reflejan pasando hacia el canal  $m = 1$ . Recordemos que los electrones sólo pueden reflejarse hacia atrás (es decir, no pueden transmitirse) ya que hemos impuesto la condición de estados evanescentes en la región irradiada. Un incremento en la intensidad del campo láser aumenta la probabilidad de reflexión en el canal  $m = 0$ . Sin embargo, este resultado debe tomarse con cuidado ya que nuestra aproximación de sólo dos canales supone una intensidad pequeña en el campo láser (es decir, se requiere  $\eta \ll 1$ ). Este resultado admite una explicación sencilla si tomamos en cuenta que el efecto del campo

láser  $\mathbf{A}(t)$  es mezclar las componentes con diferente pseudo-espín y a su vez emitir o absorber un fotón. Pasemos ahora a estudiar el caso de la dispersión con incidencia no perpendicular al borde de la región irradiada.

## 2.2. Dispersión oblicua

Las soluciones con  $k_y = 0$  obviamente no poseen asociada una densidad de corriente a lo largo de la dirección  $\hat{y}$ . Debido al carácter quirral de la radiación electromagnética (que resulta del sentido de giro del potencial vector), esperamos que una solución viajera a lo largo de  $\hat{y}$ , es decir con  $k_y \neq 0$ , presente características peculiares. Estudiar este tipo de soluciones es equivalente a estudiar la dispersión bajo una incidencia oblicua, como se muestra en la figura 2.3. En esta sección abordamos este problema. Debido a la simetría traslacional del sistema a lo largo del eje  $\hat{y}$  (esta dirección determina el borde) tenemos que la correspondiente componente del momento lineal se conserva. Supongamos que los electrones inciden con una energía  $\varepsilon = \hbar\Omega(1 + \mu)/2$  y un momento  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ . En la región no irradiada tenemos las siguientes ecuaciones desacopladas:

$$v_F \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \phi_m = \frac{\hbar\Omega}{2}(1 + \mu - 2m)\phi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (2.20)$$

Debido a la ya mencionada simetría en  $\hat{y}$  podemos escribir  $\phi_m = f_m(x) e^{iyk_y}$ , siendo  $f_m(x)$  un espinor de dos componentes. A su vez, ya que queremos soluciones viajeras en la región no irradiada podemos hacer  $f_m(x) = \chi_m e^{ik_x x}$ . La ecuación para el espinor  $\chi(x)$  resulta ser:

$$[k_x \sigma_x + k_y \sigma_y - k_0(1 + \mu - 2m)] \chi_m = 0. \quad (2.21)$$

Esta ecuación matricial tiene dos soluciones independientes para  $\chi_m$  con  $k_x = \pm k_{xm}$ , donde:

$$k_{xm} = \sqrt{k_0^2(1 + \mu - 2m)^2 - k_y^2} > 0, \quad (2.22)$$

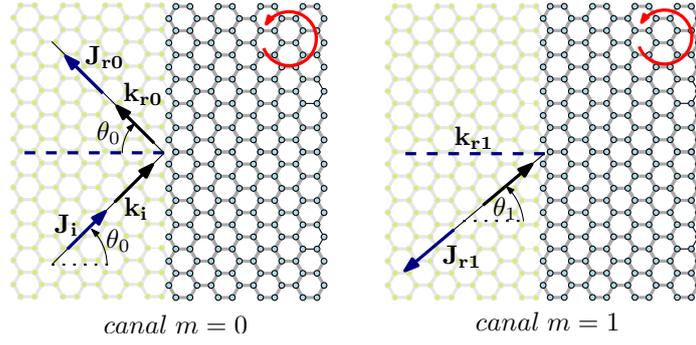
lo que da lugar también a dos soluciones independientes para  $\phi_m$ , a las que llamaremos  $\phi_m^{(1)}$  y  $\phi_m^{(2)}$ . Estas soluciones son (salvo constantes multiplicativas):

$$\begin{aligned} \phi_m^{(1)} &= \begin{pmatrix} s_m e^{-i\theta_m} \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(k_{xm}x + k_y y)}, \\ \phi_m^{(2)} &= \begin{pmatrix} -s_m e^{i\theta_m} \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(-k_{xm}x + k_y y)}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde se debe tener en cuenta las definiciones siguientes (además de (2.22)):

$$\begin{aligned} s_m &= \frac{|1 + \mu - 2m|}{1 + \mu - 2m} = \text{sgn}(1 - \mu - 2m), \\ \tan \theta_m &= \frac{k_y}{k_{xm}}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nótese que cuando  $\mu = 0$  (centro de la brecha dinámica), tenemos que  $\theta_0 = \theta_1$ . La función de onda completa fuera de la región irradiada se obtiene como la superposición



**Figura 2.3:** Geometría del problema de dispersión con incidencia oblicua donde se observan las ondas incidentes y dispersadas. La región más oscura corresponde al grafeno irradiado. Allí se observa como peculiaridad que el haz de electrones dispersados en el canal  $m = 1$  se superpone con el haz incidente. La explicación a esto puede deducirse de la inversión del pseudo-espín debido al campo láser.

de los diferentes canales (2.23):

$$\Psi(x, y, t) = e^{-izt/\hbar} e^{ik_y y} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ b_m \begin{pmatrix} s_m e^{-i\theta_m} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_{xm}x} + d_m \begin{pmatrix} -s_m e^{i\theta_m} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ik_{xm}x} \right] e^{im\Omega t}. \quad (2.25)$$

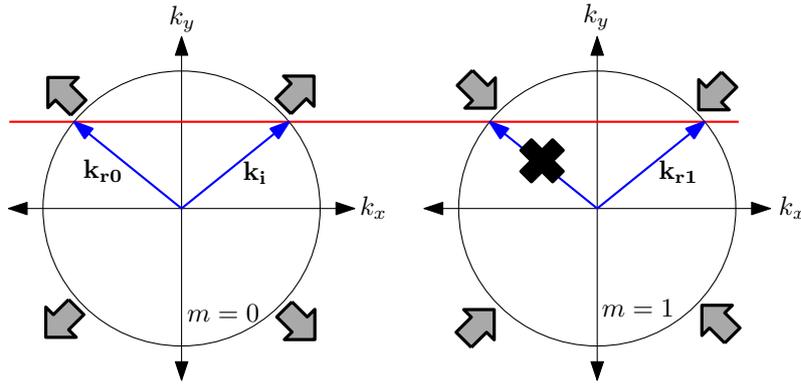
Mostramos la solución general sólo para enfatizar que en esta situación (cuando no hay radiación) es posible obtener la solución completa, más adelante retendremos sólo las componentes en los canales  $m = 0$  y  $m = 1$ . Las soluciones dentro de la región irradiada se obtienen de forma similar a como se hizo en el caso de la incidencia normal. Si trabajamos únicamente con los canales  $m = 0$  y  $m = 1$  tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \varepsilon \phi_0 &= v_F \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \phi_0 + \frac{ev_F A_0}{2c} \sigma_+ \phi_1 \\ \varepsilon \phi_1 &= (v_F \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + \hbar \Omega) \phi_1 + \frac{ev_F A_0}{2c} \sigma_- \phi_0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Por la simetría de traslación en  $\hat{y}$  podemos escribir  $\phi_0 = e^{ik_y y} f_0(x)$  y  $\phi_1 = e^{ik_y y} f_1(x)$ . A su vez, los espinores  $f_0$  y  $f_1$  tienen componentes  $f_{0A}$ ,  $f_{0B}$ ,  $f_{1A}$  y  $f_{1B}$ . Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 f_{0A} + [k_0^2(1 + \mu)^2 - k_y^2] f_{0A} &= qk_0(1 + \mu) f_{1B}, \\ \partial_x^2 f_{1B} + [k_0^2(1 + \mu)^2 - k_y^2] f_{1B} &= -qk_0(1 - \mu) f_{0A}, \\ f_{0B} &= -\frac{i\hbar v_F}{\varepsilon} (\partial_x - k_y) f_{0A}, \\ f_{1A} &= -\frac{i\hbar v_F}{\varepsilon - \hbar \Omega} (\partial_x + k_y) f_{1B}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Podemos resolver directamente las dos primeras ecuaciones del grupo anterior. Para esto ensayamos las soluciones  $f_{0A} = R e^{-Kx}$  y  $f_{1B} = Q e^{-Kx}$ , donde  $R$  y  $Q$  son constantes de integración y  $K$  es un número complejo con parte real positiva, de modo que



**Figura 2.4:** Variaciones en el pseudo-espín debido a la interacción con el campo láser que explican el efecto de la peculiar dirección de propagación del haz dispersado en el canal  $m = 1$  en la figura 2.3. La figura muestra dos cortes (paralelos al plano  $k_x - k_y$ ) del espectro de cuasi-energías cerca de  $\hbar\Omega/2$  para los canales  $m = 0$  y  $m = 1$ . En  $m = 0$  ( $m = 1$ ) el pseudo-espín y  $\mathbf{k}$  son paralelos (antiparalelos) ya que estamos cerca del punto de cruce  $\hbar\Omega/2$ . Debido a que no podemos tener soluciones que posean un flujo no nulo hacia dentro de la región irradiada, sólo queda tomar la solución que posee un flujo en corriente casi en la misma dirección del flujo incidente.

resulten soluciones evanescentes en  $x > 0$ . Luego de resolver el sistema formado por las dos primeras ecuaciones de (2.27) obtenemos:

$$\begin{aligned} f_{0A} &= \Pi_1 Q_1 e^{-K_1 x} + \Pi_2 Q_2 e^{-K_2 x}, \\ f_{1B} &= Q_1 e^{-K_1 x} + Q_2 e^{-K_2 x}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  son las soluciones (la una conjugada de la otra), con parte real positiva provenientes de la ecuación:

$$(K^2 + k_0^2(1 + \mu)^2 - k_y^2)(K^2 + k_0^2(1 - \mu)^2 - k_y^2) + 4\eta^2 k_0^4(1 - \mu^2) = 0, \quad (2.29)$$

cuyas soluciones son:

$$K_{1,2} = k_0 \sqrt{k_y^2 - 1 - \mu^2 \pm \sqrt{\eta^2 - \mu^2(1 + \eta^2)}}. \quad (2.30)$$

Éstas son exactamente las mismas soluciones que se obtendrían de (2.9) con el término adicional  $k_y^2$ . De la misma forma debemos restringirnos al intervalo  $-\eta/\sqrt{1 + \eta^2} \leq \mu \leq \eta/\sqrt{1 + \eta^2}$  para obtener soluciones evanescentes. La parte real de  $K_1$  y  $K_2$  puede considerarse (por su ubicación en la función de onda), como una medida de la longitud de penetración de los electrones dentro de la región irradiada. Por otra parte, las cantidades  $\Pi_{1,2}$  están definidas en función de  $K_{1,2}$  de forma similar al caso del borde plano:

$$\Pi_{1,2} = \frac{2\eta k_0^2(1 + \mu)}{K_{1,2}^2 + k_0^2(1 + \mu)^2 - k_y^2}. \quad (2.31)$$

Es trivial demostrar que :

$$\Pi_1 = \left(\frac{1 + \mu}{1 - \mu}\right)^{1/2} e^{-i\delta}, \quad \Pi_2 = \Pi_1^*, \quad \tan \delta = \frac{\sqrt{\eta^2 - \mu^2(1 + \eta^2)}}{\mu}. \quad (2.32)$$

Puede notarse que cuando  $\mu = 0$  se obtiene  $\delta = \pi/2$  y  $\Pi_1 = -i$ , es decir lo mismo que se obtuvo con la pared plana. Finalmente, utilizando las dos últimas ecuaciones (2.27) obtenemos las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \Pi_1 Q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(K_1+k_y)}{k_0(1+\mu)} \end{pmatrix} e^{-K_1 x + i k_y y} + \Pi_2 Q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(K_2+k_y)}{k_0(1+\mu)} \end{pmatrix} e^{-K_2 x + i k_y y}, \\ \phi_1 &= Q_1 \begin{pmatrix} \frac{i(k_y-K_1)}{k_0(1-\mu)} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-K_1 x + i k_y y} + Q_2 \begin{pmatrix} \frac{i(k_y-K_2)}{k_0(1-\mu)} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-K_2 x + i k_y y} \quad (x > 0). \quad (2.33)\end{aligned}$$

Como ya se señaló, a partir de la ecuación (2.25) nos quedamos con las soluciones en los canales  $m = 0$  y  $m = 1$  solamente. En el canal  $m = 1$  sólo retenemos la solución con densidad de corriente saliente, puesto que sólo queremos electrones incidentes en el canal  $m = 0$ :

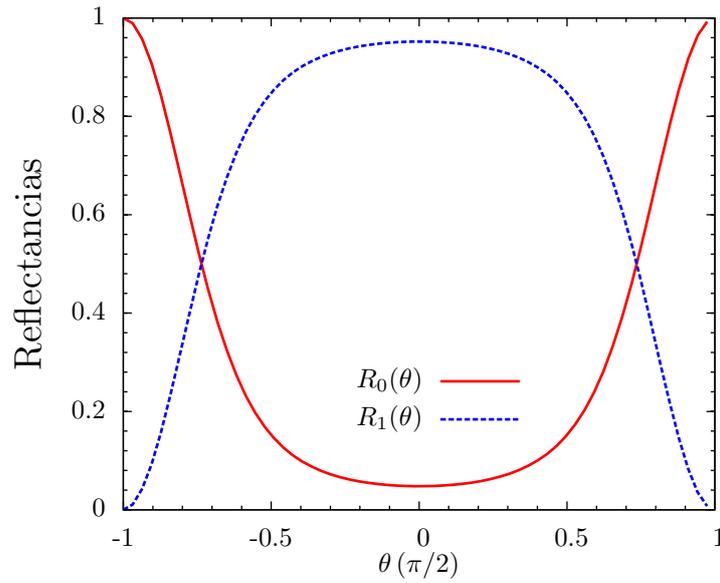
$$\begin{aligned}\phi_0 &= \phi_i + \phi_{r0} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta_0} \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(k_{x0}x + k_y y)} + r_0 \begin{pmatrix} -e^{i\theta_0} \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(-k_{x0}x + k_y y)}, \\ \phi_1 &= \phi_{r1} = r_1 \begin{pmatrix} -e^{-i\theta_1} \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(k_{x1}x + k_y y)} \quad (x > 0), \quad (2.34)\end{aligned}$$

Los subíndices en las soluciones anteriores significan incidente ( $i$ ), dispersado en el canal  $m = 0$  ( $r_0$ ) y dispersado en el canal  $m = 1$  ( $r_1$ ). Ahora mostraremos que los coeficientes  $r_0$  y  $r_1$  tienen el mismo significado de la sección anterior y también serán determinados por la condición de continuidad de las soluciones (2.33) y (2.34) en  $x = 0$ . A fin de definir más claramente el carácter de cada uno de estos coeficientes, calcularemos las densidades de corriente asociadas a cada uno de los términos en (2.34), usando la relación ya conocida  $\mathbf{J} = v_F \phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi$ . Obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_i &= 2v_F (\cos \theta_0 \mathbf{i} + \sin \theta_0 \mathbf{j}) \\ \mathbf{J}_{r0} &= 2v_F |r_0|^2 (-\cos \theta_0 \mathbf{i} + \sin \theta_0 \mathbf{j}) \\ \mathbf{J}_{r1} &= 2v_F |r_1|^2 (-\cos \theta_1 \mathbf{i} - \sin \theta_1 \mathbf{j}). \quad (2.35)\end{aligned}$$

Un hecho notable que puede observarse en las ecuaciones anteriores es que los electrones dispersados en el canal  $m = 1$  ( $r_1$ ) se mueven casi en la misma línea que los incidentes, aunque obviamente en sentido opuesto. Esto está ilustrado en la figura 2.3 y puede explicarse observando la figura 2.4. En esta figura se muestran dos cortes para un mismo valor de  $\mu$  de la cuasi-energía en el plano  $k_x - k_y$ . Si estamos cerca del  $\hbar\Omega/2$ , se ve de la figura 1.8 que los electrones se hallan en la banda de conducción en el canal  $m = 0$  (donde el pseudo-espín y  $\mathbf{k}$  son paralelos) pero en la banda de valencia del canal  $m = 1$  (donde el pseudo-espín y  $\mathbf{k}$  son antiparalelos). De las dos posibilidades en el canal  $m = 1$  que conservan la componente  $k_y$  del momentum, hay una que posee un flujo de corriente hacia dentro de la región irradiada, lo cual está prohibido ya que hemos impuesto estados evanescentes en la región irradiada. Es más, cuando  $\mu = 0$  la trayectoria de ambos tipos de electrones coinciden (recordemos que cuando  $\mu = 0$  se tiene que  $\theta_0 = \theta_1$ ). Los coeficientes de reflexión en cada canal pueden definirse como los respectivos cocientes entre la densidad de corriente dispersada y la incidente:

$$R_0 = \frac{|J_{r0}|}{|J_i|}, \quad R_1 = \frac{|J_{r1}|}{|J_i|}, \quad (2.36)$$



**Figura 2.5:** Reflectancia en los canales  $m = 0$  y  $m = 1$  en función del ángulo de incidencia y en el centro de la brecha dinámica ( $\mu = 0$ ). Cuando  $\theta = 0$  se obtiene el mismo resultado de la incidencia normal, como era de esperarse, aunque cuando  $\theta$  se acerca a  $\pm\pi/2$  se obtiene el resultado opuesto. Se ha usado  $\eta = 0.23$ .

y con los resultados (2.35) obtenemos:

$$R_0 = |r_0|^2, \quad R_1 = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_0} |r_1|^2. \quad (2.37)$$

Al plantear la conservación de la corriente de probabilidad en la dirección  $\hat{x}$  tenemos que  $J_{ix} + J_{r0x} + J_{r1x} = 0$ . Usando las definiciones de  $R_0$  y  $R_1$  se llega rápidamente al resultado esperado:

$$R_0 + R_1 = 1. \quad (2.38)$$

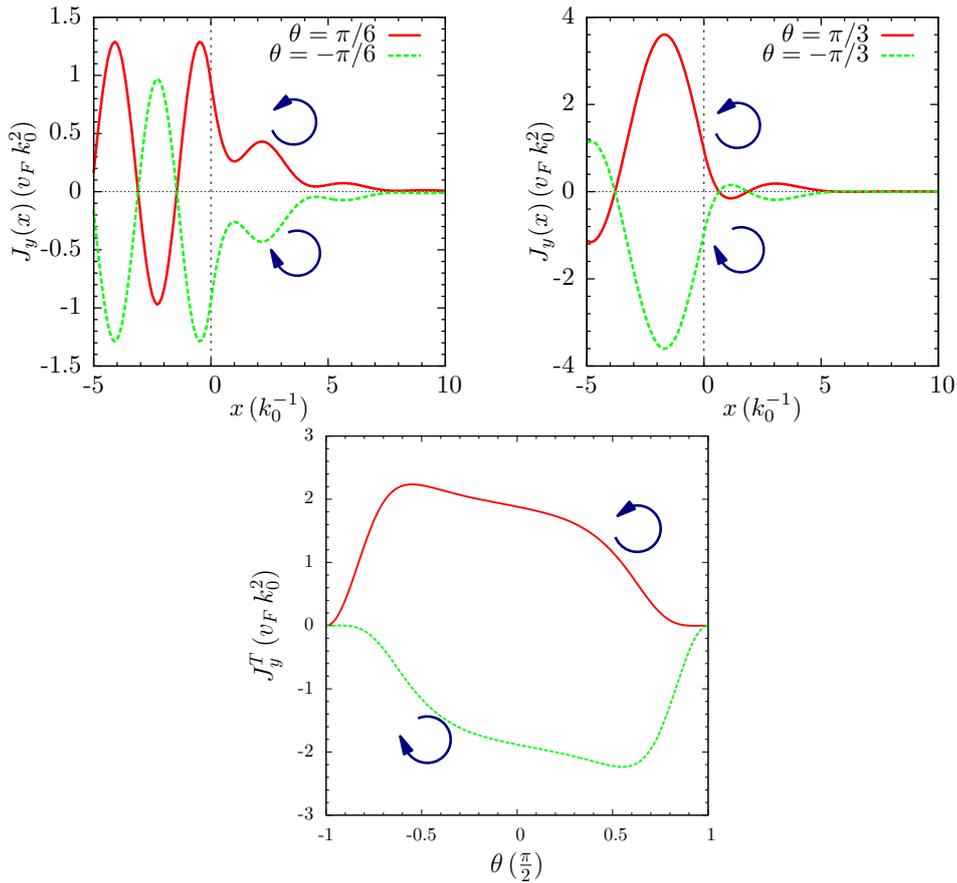
Es decir, la conservación de la corriente de probabilidad se reduce a la relación usual entre los coeficientes de reflexión en cada canal. Se puede hacer una analogía con los coeficientes de reflexión y transmisión en óptica clásica, aunque en nuestro caso no existe la posibilidad de transmisión hacia la zona irradiada. En la figura 2.5 se observa la dependencia de  $R_0$  y  $R_1$  cuando  $\mu = 0$ , en función del ángulo de incidencia cuando  $\eta = 0,23$ . Nótese que en particular, cuando  $\theta = 0$ , se recupera el resultado de la sección anterior, es decir la gran mayoría de electrones se dispersan en el canal  $m = 1$ . Sin embargo, se observa que a medida que la incidencia se hace más paralela al borde ( $\theta \approx \pm\pi/2$ ), la situación se invierte y la mayoría de electrones se emiten en el canal  $m = 0$ .

Pasemos ahora al análisis del promedio temporal de la densidad de corriente de probabilidad en la dirección  $\hat{y}$ . Nos concentramos en esta componente de la corriente ya que dentro de la región irradiada ésta es la única componente no nula. En efecto, puede mostrarse analíticamente que la componente  $\hat{x}$  se anula idénticamente en ambas regiones. Esto también puede entenderse desde el punto de vista de la forma de la función de onda, ya que hemos impuesto la condición de ondas evanescentes. La componente  $J_y(x)$  de la corriente se puede calcular a partir de  $J_y = v_F \phi^\dagger \sigma_y \phi$  y usando la función de onda completa dada por (2.33) con la correspondiente dependencia temporal,

es decir:

$$\psi(t, \mathbf{r}) = e^{-i\varepsilon t/\hbar} [\phi_0(\mathbf{r}) + \phi_1(\mathbf{r}) e^{i\Omega t}], \quad (2.39)$$

y promediando en el tiempo. Esta corriente resulta ser evanescente (en la dirección  $\hat{x}$ ). Además, es claro que debido a la simetría de traslación a lo largo de la dirección  $\hat{y}$ , esta corriente no puede depender de la variable  $y$ . El cálculo de  $J_y$  puede hacerse analíticamente usando las correspondientes soluciones, aunque nosotros mostraremos aquí algunos resultados numéricos. En la figura 2.6 (paneles superiores) se muestran gráficas de  $J_y(x)$  para los dos sentidos de giro del campo vectorial  $\mathbf{A}(t)$ , antihorario y horario, y para cuatro diferentes ángulos de incidencia, aunque simétricos respecto de la dirección  $\theta = 0$  (incidencia normal). Se observa que el sentido de las corriente está marcadamente definido por el sentido de giro de  $\mathbf{A}(t)$ , y que la incidencia con un ángulo  $-\theta$  con un campo  $\mathbf{A}(t)$  rotando en sentido horario es el simétrico opuesto (es decir con signo opuesto), a una incidencia con ángulo  $\theta$  en un campo de radiación en sentido horario. Manteniendo fijo el sentido de rotación del campo vectorial, la dirección de la corriente en la zona irradiada no se ve afectada por la dirección de incidencia de los electrones. Diremos que estas corrientes son *quirales*.



**Figura 2.6:** Paneles superiores. Componentes  $\hat{y}$  de la densidad de corriente como función de la coordenada  $x$ . La recta  $x = 0$  marca la interfaz de la región irradiada ( $x > 0$ ). Se indica también en cada caso el sentido de giro del campo  $\mathbf{A}(t)$ . Se nota que el sentido de la corriente, principalmente dentro de la región irradiada, depende de la helicidad de  $\mathbf{A}(t)$  y no de la dirección de incidencia de los electrones. (Panel inferior) Componente  $\hat{y}$  total de la densidad de corriente, es decir integrada entre  $x = 0$  y  $x \rightarrow +\infty$ .

Otra manera de cuantificar esta asociación entre corrientes y sentido de giro del potencial vector es mediante la corriente total  $J_y^T$ , integrada en  $x \in [0, +\infty)$ . En la figura 2.6 (panel inferior) se muestran estas corrientes. Allí se observa más claramente que una helicidad antihoraria en el potencial vector genera una corriente neta hacia arriba (en la dirección positiva), cumpliéndose lo opuesto para el caso de helicidad horaria. Esta correspondencia entre el sentido de las corrientes y la helicidad  $\mathbf{A}(t)$  será muy importante en el capítulo siguientes, cuando trabajemos ya no con ondas planas sino con haces de extensión o ancho finito.

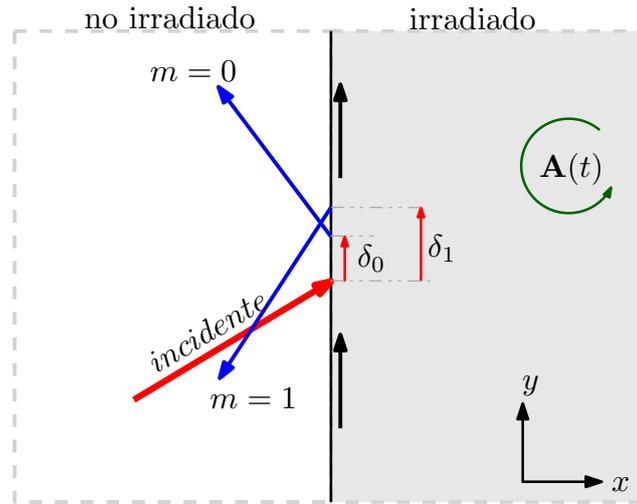
# Capítulo 3

## Efecto Goos-Hänchen anómalo en grafeno irradiado

En el capítulo anterior estudiamos el fenómeno de dispersión mediante soluciones del tipo onda plana  $e^{i(xk_x+yk_y)}$  en la región no irradiada. Naturalmente estas soluciones están homogéneamente distribuidas (en la dirección  $\hat{y}$ , mientras que en la dirección  $\hat{x}$  se observan oscilaciones producto de la interferencia con las ondas dispersadas) en el espacio así que dicen poco acerca de la distribución de los electrones en el grafeno. Aún así, cantidades tales como la reflectancia pueden obtenerse usando este tipo de soluciones. En este capítulo estudiaremos algunas nuevas características que surgen de usar soluciones en forma de haz con un ancho finito.

Al usar haces de extensión finita veremos que estos haces exhiben un desplazamiento a lo largo del borde que separa las regiones irradiada y no irradiada, conocido como efecto Goos-Hänchen. Este fenómeno se identificó inicialmente en óptica electromagnética [17]. Se trata de un efecto de interferencia que ocurre cuando hay una reflexión interna total y consiste en el desplazamiento lateral paralelo del haz reflejado a lo largo de la interfaz. Este efecto ha sido recientemente estudiado teóricamente en grafeno [12] usando junturas p-n mediante potenciales electrostáticos y usando haces gaussianos como funciones de onda, aunque también se ha estudiado la dinámica de paquetes localizados [18], con resultados similares en ambos trabajos. Por otro lado, también se ha calculado este efecto en bordes antiferromagnéticos, aunque usando luz en lugar de electrones y en presencia de un campo magnético externo [19]. En los dos primeros casos se ha encontrado una simetría en el corrimiento respecto del ángulo de incidencia del haz de electrones, a diferencia del caso del borde antiferromagnético donde esta simetría está ausente por efecto del campo magnético.

Una explicación inicial para este efecto es la formación de estados evanescentes a uno de los lados de la interfaz debido a los potenciales de barrera usados o al índice de refracción relativo en el caso electromagnético. En nuestro caso proponemos una interfaz recta entre una región de grafeno no irradiada y otra irradiada. En esta última sabemos que la radiación induce un brecha en el espectro de cuasi-energías de modo que usando electrones que inciden desde la región no irradiada con cuasi-energías dentro de esta brecha podemos obtener estados evanescentes en la región irradiada y un efecto tipo Goos-Hänchen. Veremos que este efecto es anómalo, en el sentido que no posee la simetría respecto del ángulo de incidencia que se obtuvo usando sólo barreras electrostáticas [12]. En este sentido nuestro caso tiene ciertas semejanzas con lo obtenido en la referencia [19]. Esta ausencia de simetría puede entenderse como una



**Figura 3.1:** Geometría del efecto Goos-Hänchen donde se observan los haces incidente y dispersados en cada uno de los canales usados en nuestra aproximación. A diferencia del capítulo anterior, esta vez trabajaremos con haces de un ancho finito. Las cantidades  $\delta_0$  y  $\delta_1$  son los desplazamientos de los haces dispersados respecto de la posición esperada por la óptica geométrica.

consecuencia de la quiralidad de las corrientes inducidas por la radiación, lo cual puede entenderse observando las corrientes de probabilidad formadas en la región irradiada para los dos diferentes sentidos de giro del potencial vector.

### 3.1. Desplazamiento Goos-Hänchen de un haz de ancho finito

En esta sección vamos a aplicar los resultados obtenidos en el capítulo anterior al análisis del corrimiento Goos-Hänchen de un haz de ancho finito reflejado sobre una región de grafeno irradiado. En primer lugar veremos que es posible obtener ecuaciones para los desplazamientos  $\delta_{r0}$  y  $\delta_{r1}$  del haz reflejado en cada uno de los canales usados en nuestra aproximación. Un haz de electrones de espesor finito puede escribirse como una superposición de ondas planas moviéndose en direcciones ligeramente distintas [12]. Como es usual, empezaremos con un haz de electrones incidiendo en el canal  $m = 0$ :

$$\Phi_0(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y f(k_y - \bar{k}_y) e^{ik_y y + ik_0(k_y)x} \begin{pmatrix} e^{-i\theta_0} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

donde  $\bar{k}_y$  es una componente media en la dirección  $\hat{y}$  del momento  $\mathbf{k}$ . La función  $f(k_y - \bar{k}_y)$  puede ser cualquier función diferente de cero únicamente en una pequeña vecindad de  $\bar{k}_y$ , aunque para simplificar los cálculos y a fin de obtener resultados analíticos usaremos la siguiente función gaussiana (dejando de lado una constante de normalización):

$$f(k_y - \bar{k}_y) = e^{-\frac{(k_y - \bar{k}_y)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.2)$$

El parámetro  $\sigma$  indica el ancho de la distribución, y por ello el rango de valores donde  $f$  tiene una valor apreciable. En  $x = 0$ , es decir en el borde de la zona irradiada,

las dos componentes del espinor anterior pueden evaluarse analíticamente usando la aproximación lineal:

$$\theta_0(k_y) \approx \theta_0(\bar{k}_y) + (k_y - \bar{k}_y) \left. \frac{d\theta_0}{dk_y} \right|_{k_y=\bar{k}_y}. \quad (3.3)$$

Esta aproximación es usual en este tipo de cálculos y se justifica si suponemos que el ancho  $\sigma$  es pequeño en comparación de  $k_0$  (véase la figura 3.2) y así además la función  $\theta_0(k_y)$  varía suavemente con  $k_y$ . Usando esta aproximación se obtienen las siguientes expresiones para las componentes  $A$  y  $B$  del espinor  $\Phi_0$ :

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(A)}(y) &= N \exp(i(y\bar{k}_y - \theta_0(\bar{k}_y))) \times \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} \left(y - \left. \frac{d\theta_0}{dk_y} \right|_{k_y=\bar{k}_y}\right)^2\right), \\ \Phi_0^{(B)}(y) &= N \exp(iy\bar{k}_y) \times \exp(-y^2\sigma^2/2), \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde  $N = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon e^{-\epsilon^2/2\sigma^2}$ . Puede notarse que ambas componentes del espinor son gaussianas centradas en posiciones diferentes, que denotamos  $y_0^A$  y  $y_0^B$ . En este caso tenemos  $y^A = (d\theta_0/dk_y)_{\bar{k}_y}$  y  $y^B = 0$  (el subíndice en  $y^A$  indica que ésta tiene que evaluarse en  $\bar{k}_y$ . En adelante mantendremos esta notación por simplicidad). Definiremos la posición  $\bar{y}_0$  de la onda incidente (en  $x = 0$  obviamente) como el punto medio entre los puntos  $y_0^A$  y  $y_0^B$  definidos anteriormente, es decir  $\bar{y}_0 = (1/2)(d\theta_0/dk_y)_{\bar{k}_y}$ . En la figura 3.2.b se ilustran estas definiciones. Se observa que esta posición varía con la derivada de  $\theta_0$  respecto de  $k_y$  y puede evaluarse analíticamente:

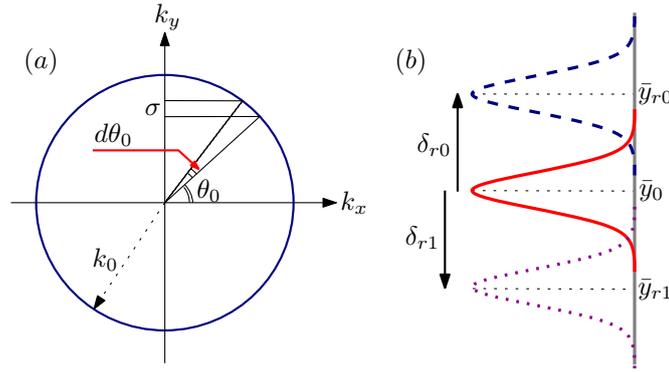
$$\frac{d\theta_0}{dk_y} = \frac{k_0^2(1 + \mu)^2 + k_y^2}{(k_0^2(1 + \mu)^2 - k_y^2)^{1/2} k_0^2(1 + \mu)^2} = \frac{1 + \sin^2 \theta_0}{k_0(1 + \mu) \cos \theta_0}, \quad (3.5)$$

donde en la última igualdad se ha tenido en cuenta que  $k_y = k_0(1 + \mu) \sin \theta_0$ . Se observa que esta separación es par respecto de  $\theta = 0$ . Es importante señalar que este resultado para  $\bar{y}_0$  no coincide con el obtenido en la referencia [12], en donde se obtuvo  $\bar{y}_0 = 0$ . Esto es consecuencia de la elección de los espinores en las soluciones (3.1). En [12] se usaron los espinores:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} \\ e^{i\theta/2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -e^{i\theta/2} \\ e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

para la onda incidente y reflejada en el canal  $m = 0$  respectivamente (la ref. [12] trabaja sólo con potenciales electrostáticos). Esta elección trae como consecuencia un cambio en la fase del coeficiente de reflexión  $r_0$ , que pasa de  $\varphi_0$  a  $\varphi_0 + \theta_0$ . A su vez, las ecuaciones finales resultan más simétricas, aunque desde luego la física del problema se mantiene. En este trabajo mantendremos la elección de espinores dada por (3.1).

Pasemos ahora a las componentes reflejadas en los canales  $m = 0$  y  $m = 1$ . Las expresiones para los haces de electrones en estos canales pueden escribirse de forma similar a  $\Phi_0$  pero esta vez usando los coeficientes de reflexión  $r_0$  y  $r_1$  que hallamos en el capítulo anterior junto con los espinores correspondientes. Las expresiones resultantes son:



**Figura 3.2:** (a) Se muestran las aproximaciones necesarias para la integración de los espinores (3.1) y (3.7). (b) Perfil en  $x = 0$  de los espinores (3.1) y (3.7). Los subíndices indican la onda incidente (0), dispersada en el canal  $m = 0$  ( $r_0$ ) y dispersada en el canal  $m = 1$  ( $r_1$ ). Aunque cada componente de estos espinores está centrada en puntos diferentes,  $\bar{y}^A$  y  $\bar{y}^B$ , se puede definir una posición media  $\bar{y} = (\bar{y}^A + \bar{y}^B)/2$ . El corrimiento de las ondas reflejadas en cada canal se define como la diferencia entre su posición media con la de la onda incidente. Estos corrimientos están exagerados.

$$\begin{aligned}\Phi_{r_0}(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y r_0 f(k_y - \bar{k}_y) e^{ik_y y - ik_0(k_y)x} \begin{pmatrix} -e^{i\theta_0} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \Phi_{r_1}(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y r_1 f(k_y - \bar{k}_y) e^{ik_y y + ik_1(k_y)x} \begin{pmatrix} -e^{-i\theta_1} \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Podemos integrar estas funciones usando la aproximación (3.3) aplicada también a  $\theta_1$  aunque en esta parte debemos tener en cuenta que  $r_0$  y  $r_1$  tienen dependencia en  $k_y$ . Los coeficientes  $r_0$  y  $r_1$  se pueden expresar como  $r_0 = |r_0| e^{i\varphi_0}$  y  $r_1 = |r_1| e^{i\varphi_1}$ . Veremos que a fin de determinar la forma (gaussiana) de las funciones anteriores, será importante observar la variación de las fases  $\varphi_0$  y  $\varphi_1$  de los coeficientes anteriores. Supondremos que estas fases tienen un comportamiento suave y haremos las siguientes aproximaciones:

$$\varphi_0(k_y) \approx \varphi_0(\bar{k}_y) + (k_y - \bar{k}_y) \left( \frac{d\varphi_0}{dk_y} \right)_{\bar{k}_y} \quad (3.8)$$

$$\varphi_1(k_y) \approx \varphi_1(\bar{k}_y) + (k_y - \bar{k}_y) \left( \frac{d\varphi_1}{dk_y} \right)_{\bar{k}_y}. \quad (3.9)$$

Mediante estas aproximaciones obtenemos para el canal  $m = 0$  en particular las siguientes expresiones para sus componentes espinoriales:

$$\begin{aligned}\Phi_{r_0}^{(A)}(y) &= -\exp\left(i(\varphi_0(\bar{k}_y) + y\bar{k}_y + \theta_0(\bar{k}_y))\right) \times \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left(y + \left(\frac{d\varphi_0}{dk_y}\right)_{\bar{k}_y} + \left(\frac{d\theta_0}{dk_y}\right)_{\bar{k}_y}\right)^2\right) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon |r_0(\epsilon + \zeta)| e^{-\epsilon^2/2\sigma^2}, \\ \Phi_{r_0}^{(B)}(y) &= \exp\left(i(\varphi_0(\bar{k}_y) + y\bar{k}_y)\right) \times \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left(y + \left(\frac{d\varphi_0}{dk_y}\right)_{\bar{k}_y}\right)^2\right) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon |r_0(\epsilon + \chi)| e^{-\epsilon^2/2\sigma^2}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Las integrales que aparece en las expresiones anteriores podría obtenerse (al menos

numéricamente) ya que se conoce la forma de  $r_0$ , aunque no es relevante para estudiar la posición del máximo del haz. De cualquier forma, más adelante haremos un cálculo numérico completo de las funciones de onda  $\Phi_0$ ,  $\Phi_{r0}$  y  $\Phi_{r1}$ . Mediante un procedimiento similar llegamos a los siguientes resultados para las componentes espinoriales en el canal  $m = 1$ :

$$\begin{aligned}\Phi_{r1}^{(A)}(y) &= -\exp\left(i(\varphi_1(\bar{k}_y) + y\bar{k}_y - \theta_1(\bar{k}_y))\right) \times \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left(y + \left(\frac{d\varphi_1}{dk_y}\right)_{\bar{k}_y} - \left(\frac{d\theta_1}{dk_y}\right)_{\bar{k}_y}\right)^2\right) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon |r_1(\epsilon + \zeta)| e^{-\epsilon^2/2\sigma^2}, \\ \Phi_{r1}^{(B)}(y) &= \exp\left(i(\varphi_1(\bar{k}_y) + y\bar{k}_y)\right) \times \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left(y + \left(\frac{d\varphi_1}{dk_y}\right)_{\bar{k}_y}\right)^2\right) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon |r_1(\epsilon + \chi)| e^{-\epsilon^2/2\sigma^2}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Veamos ahora cómo definir el desplazamiento de los haces reflejados en cada canal con respecto del haz incidente usando los resultados (3.10) y (3.11). Para esto definimos la posición media  $\bar{y}$  para las ondas dispersada en cada canal de igual forma a como se hizo con la onda incidente, es decir como la posición intermedia entre las posiciones medias de cada una de sus componentes espinoriales  $y^A$  y  $y^B$ . De esta forma obtenemos:

$$\begin{aligned}\bar{y}_{r0} &= \frac{y_{r0}^A + y_{r0}^B}{2} = \frac{1}{2}\left(-2\frac{d\varphi_0}{dk_y} - \frac{d\theta_0}{dk_y}\right)_{\bar{k}_y} \\ \bar{y}_{r1} &= \frac{y_{r1}^A + y_{r1}^B}{2} = \frac{1}{2}\left(-2\frac{d\varphi_1}{dk_y} + \frac{d\theta_1}{dk_y}\right)_{\bar{k}_y}\end{aligned}\quad (3.12)$$

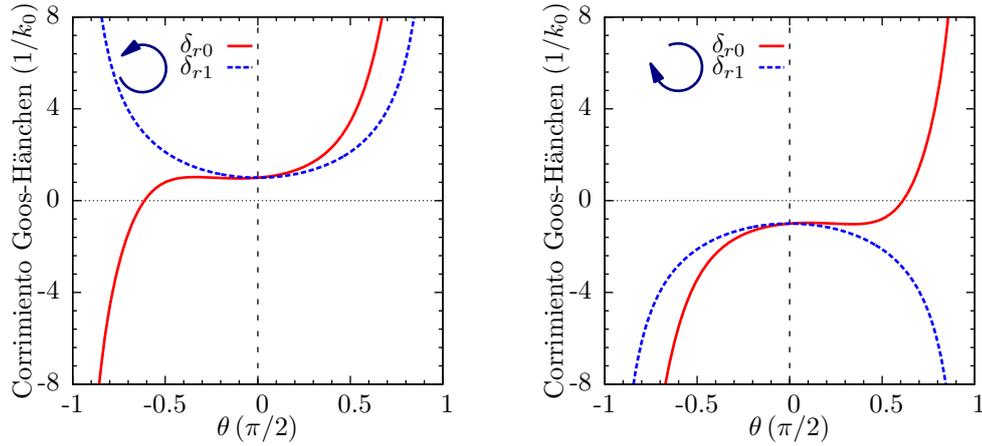
Los desplazamientos  $\delta_{r0}$  y  $\delta_{r1}$  de los haces reflejados se definen entonces como la diferencia entre sus posiciones medias y la del haz incidente:

$$\begin{aligned}\delta_{r0} &= \bar{y}_{r0} - \bar{y}_0 = -\left(\frac{d\varphi_0}{dk_y}\right)_{\bar{k}_y} - \left(\frac{d\theta_0}{dk_y}\right)_{\bar{k}_y}, \\ \delta_{r1} &= \bar{y}_{r1} - \bar{y}_0 = -\left(\frac{d\varphi_1}{dk_y}\right)_{\bar{k}_y}.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Se puede observar que el desplazamiento del haz (como se definió anteriormente), depende principalmente de la derivada de las fases  $\varphi_0$  y  $\varphi_1$  de los coeficientes de reflexión, ya que el término  $d\theta_0/dk_y$  depende únicamente de la geometría del problema. Usando la regla de la cadena podemos escribir las ecuaciones (3.13) en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\delta_{r0} &= -\left(\frac{d\theta_0}{dk_y}\right)_{\bar{k}_y} \left(1 + \left(\frac{d\varphi_0}{d\theta_0}\right)_{\bar{k}_y}\right) \\ \delta_{r1} &= -\left(\frac{d\theta_0}{dk_y}\right)_{\bar{k}_y} \left(\frac{d\varphi_1}{d\theta_0}\right)_{\bar{k}_y}\end{aligned}\quad (3.14)$$

La expresión  $d\theta_0/dk_y$  puede obtenerse de la ecuación (3.5). Estas ecuaciones muestran que la dependencia con  $\theta_0$  de las fases de los coeficientes de reflexión son las cantidades cruciales en este problema. En la siguiente sección abordaremos el cálculo de  $\delta_{r0}$  y  $\delta_{r1}$  usando algunos resultados del capítulo anterior.



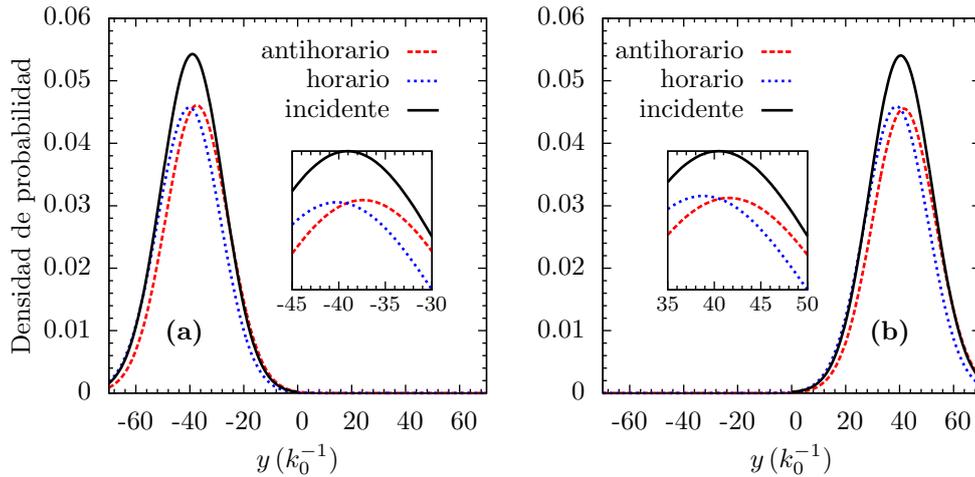
**Figura 3.3:** Corrimiento Goos-Hänchen de los electrones reflejados en cada uno de los canales. El sentidos de giro de  $\mathbf{A}(t)$  está indicado en cada caso. Este corrimiento presenta una simetría peculiar: al hacer  $\theta \rightarrow -\theta$  y cambiar el sentido de giro del campo vectorial, ambas gráficas coinciden. Por otra parte, en el canal  $m = 1$  se observa que la dirección de este corrimiento es independiente del ángulo de incidencia y sólo depende de la quiralidad del potencial vector. Esto se observa sólo parcialmente en el canal  $m = 0$ . Allí se ve un ángulo crítico que indica un cambio de signo en el corrimiento en este canal, similar a lo obtenido en la Ref. [12]. Los valores usados fueron  $\eta = 0,23$  y  $\mu = 0$ .

## 3.2. Aplicación al caso del borde plano

Discutamos ahora algunos resultados provenientes de las ecuaciones (3.14). El caso de  $\delta_{r1}$  es el más sencillo ya que puede mostrarse (incluso analíticamente) que la fase  $\varphi_1$  del coeficiente de reflexión  $r_1(\theta)$  varía en forma lineal con  $\theta_0$  cuando  $\mu = 0$ , aunque esta dependencia será diferente cuando se cambie el sentido de giro del campo  $\mathbf{A}(t)$ . En concreto, para un giro antihorario del campo vector tenemos  $d\varphi_1/d\theta_0 = -1$ , mientras que para un giro horario se tiene  $d\varphi_1/d\theta_0 = 1$ . Entonces el desplazamiento lateral del haz está dado por la segunda expresión (3.14) con  $d\varphi_1/d\theta_0 = \pm 1$ :

$$\delta_{r1} = \begin{cases} +\frac{1 + \sin^2 \theta_0}{k_0 \cos \theta_0}, & \mathbf{A}(t) \text{ antihorario} \\ -\frac{1 + \sin^2 \theta_0}{k_0 \cos \theta_0}, & \mathbf{A}(t) \text{ horario} \end{cases} \quad (3.15)$$

Estas expresiones son independientes del valor de  $\eta$  (en tanto éste sea pequeño y pueda usarse la aproximación de dos canales). En la figura 3.3 se muestran en líneas punteadas los corrimientos  $\delta_{r1}$  en función del ángulo de incidencia para los dos diferentes sentidos de giro del potencial vectorial. Claramente se nota que el sentido del corrimiento (negativo o positivo) depende únicamente del sentido de giro de  $\mathbf{A}(t)$ , y no de la dirección de incidencia del haz de electrones, como sí ocurre por ejemplo en la referencia [12], donde el análisis se hace sólo en el rango de ángulos de incidencia  $[0, \pi/2]$ , suponiendo una simetría respecto de la otra mitad  $[-\pi/2, 0]$ . Esta anomalía en la dirección del desplazamiento puede explicarse a partir de los resultados obtenidos en la sección anterior, en particular ahí vimos que en la región irradiada se forman corrientes localizadas en una dirección bien determinada y que sólo dependía de la dirección de polarización de la radiación láser, es decir corrientes quirales. Un cambio en el sentido de la polarización cambia la dirección de las corrientes localizadas. Si admi-

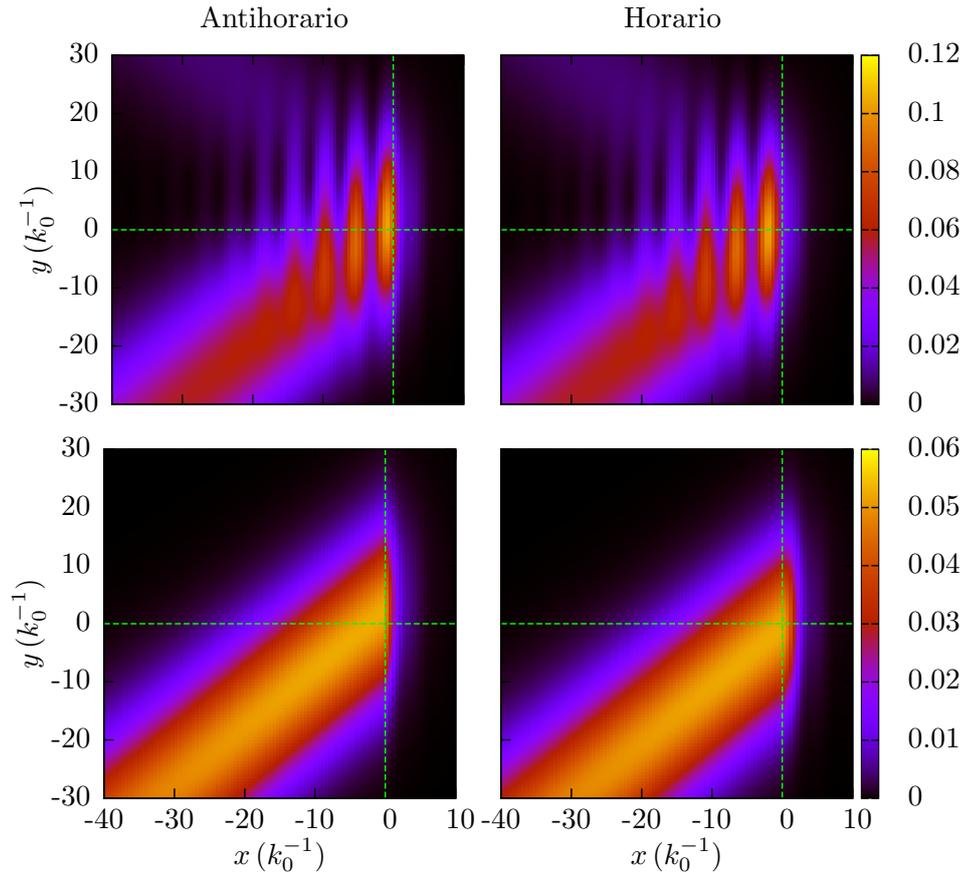


**Figura 3.4:** La figura muestra secciones (a lo largo de  $x = -40 k_0^{-1}$ ) de la densidad de probabilidad en el canal  $m = 1$  (líneas punteadas) en función de  $y$ . La línea sólida corresponde con la densidad asociada al haz incidente. En (a) el haz incide desde abajo con  $k_y > 0$  y en (b) inciden desde arriba con  $k_y < 0$ . En ambos casos se nota que el corrimiento en el caso antihorario es positivo mientras que en el caso horario es negativo, independientemente de la dirección de incidencia del haz. Los parámetros usados fueron  $\mu = 0$ ,  $\eta = 0,23$ ,  $\bar{k}_y = \pm 0,7 k_0$  y  $\sigma = 0,1 k_0$ .

timos que el desplazamiento Goos-Hänchen se debe a la penetración de los electrones en la región excluida (donde existe una brecha dinámica en la cuasi-cuasi-energía y por ello no hay estados), entonces la dirección de movimiento de estos electrones debe estar determinada sólo por la polarización de la luz y no por la dirección del haz incidente. En nuestro caso, teniendo en cuenta la quiralidad del campo vectorial y el hecho ya observado anteriormente de la formación de corrientes quirales en la zona irradiada, haremos el análisis en el rango completo  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Estos corrimientos anómalos en el canal  $m = 1$  pueden apreciarse mejor en la figura 3.4. Allí se muestra la dependencia de la densidad de probabilidad de los electrones reflejados en el canal  $m = 1$  (líneas punteadas) comparándola con la densidad de probabilidad del haz incidente (línea sólida). Las figuras representan una sección de  $x = -40 k_0^{-1}$  constante. Quizá otra de las más resaltantes características que puede observarse en la figura 3.3 es que incluso a incidencia normal  $\theta_0 = 0$ , existe un corrimiento finito que puede calcularse de (3.15) y resulta igual a  $\pm 1/k_0$ . Además se observa una divergencia en el corrimiento cuando  $\theta \rightarrow \pm\pi/2$ , lo cual es consecuencia del factor  $1/\cos\theta$  presente en todas las expresiones (3.15).

Pasemos ahora al canal  $m = 0$ . Para los electrones dispersados en este canal se observa en la figura 3.3 que el signo del corrimiento no está determinado completamente por la quiralidad del campo vectorial, sino también por el ángulo de incidencia de los electrones, ya que existe un ángulo crítico donde hay un cambio de signo en el corrimiento. Este ángulo crítico depende del sentido de giro del potencial  $\mathbf{A}(t)$  y es negativo para un giro antihorario y positivo para uno horario. El hecho de que este ángulo crítico aparezca en el canal  $m = 0$  tiene cierta semejanza con los resultados obtenidos en [12], donde estudian un caso de grafeno no irradiado y también hallan un ángulo crítico donde el corrimiento Goos-Hänchen cambia de signo. Además de esto, se observa un cierto tipo de simetría (o quizá antisimetría) que nos permite pasar de la figura de la izquierda a la de la derecha en 3.3 (salvo un signo), mediante el cambio en el sentido de giro de  $\mathbf{A}(t)$  y haciendo  $\theta \rightarrow -\theta$ .

Se pueden visualizar estos corrimientos calculando la densidad de probabilidad pro-



**Figura 3.5:** Densidades de probabilidad promediadas en el tiempo en los canales  $m = 0$  (arriba) y  $m = 1$  (abajo) para quiralidades antihoraria y horaria del potencial vectorial  $\mathbf{A}(t)$  del láser. En cada caso las líneas verticales señalan el borde de la región irradiada ( $x > 0$ ).

mediada en el tiempo en cada canal. En la región no irradiada este cálculo puede hacerse usando las soluciones  $\Phi_0$ ,  $\Phi_{r0}$  y  $\Phi_{r1}$ . Para  $m = 0$  tenemos:

$$\rho_0(\mathbf{r}) = |\Phi_0(\mathbf{r}) + \Phi_{r0}(\mathbf{r})|^2, \quad (3.16)$$

mientras que para  $m = 1$  se tiene:

$$\rho_1(\mathbf{r}) = |\phi_{r1}(\mathbf{r})|^2. \quad (3.17)$$

En la región irradiada debemos usar las soluciones dadas por la ecuación (2.33) en el caso antihorario. Las soluciones para el caso horario son análogas. En la figura 3.5 se muestran estos resultados. En los gráficos superiores se muestra el canal  $m = 0$ , donde se observan algunas oscilaciones debidas a efectos de interferencia entre los haces incidentes y dispersados, así como una diferente longitud de penetración en la región irradiada para cada quiralidad de  $\mathbf{A}(t)$ . Allí se observan ligeros corrimientos en todos los canales. En el canal  $m = 1$  se ve que en campo de quiralidad antihorario, el haz reflejado se desplaza ligeramente hacia arriba respecto del reflejado cuando el campo tiene quiralidad horaria. Esto corrobora los resultados de la figura 3.4.

# Capítulo 4

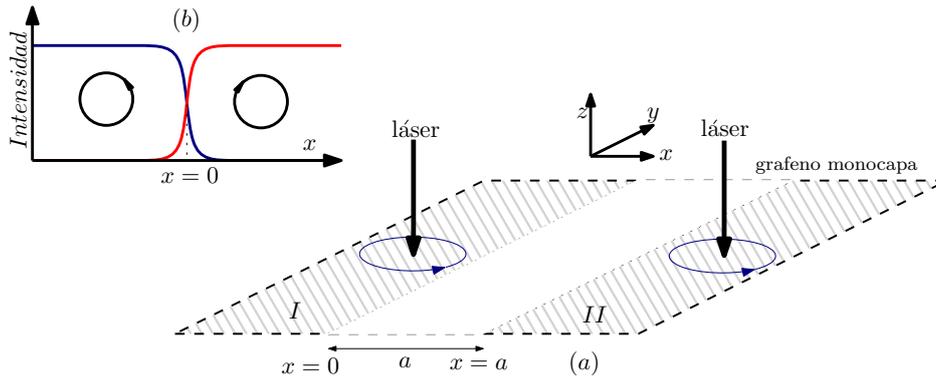
## Estados de borde en grafeno irradiado

Basados en trabajos anteriores [16], y siguiendo la misma línea de razonamiento, vamos a estudiar la aparición de estados localizados en grafeno monocapa en una configuración de “pozo” como se muestra en la figura 4.1. Las zonas irradiadas corresponden a las regiones  $x < 0$  y  $x > a$  y las llamaremos regiones I y II, respectivamente. Ya que queremos estudiar propiedades relacionadas con la topología del sistema usaremos dos configuraciones: en la primera, las helicidades del potencial vector a cada lado de la zona central no irradiada son opuestas, mientras que en el segundo caso ambas son iguales y antihorarias. En ambas situaciones incluiremos una diferencia de fase  $\varphi$  entre ambos potenciales y estudiaremos algunas propiedades en función de esta diferencia. Veremos que estas dos configuraciones dan resultados cualitativamente distintos debido a las diferentes propiedades topológicas que se derivan de usar potenciales vectoriales de igual o diferente helicidad. Como en los capítulos anteriores, nos limitaremos a la aproximación de dos canales  $m = 0$  y  $m = 1$ , ya que estamos interesados sólo en la brecha centrada en  $\hbar\Omega/2$ . Esta parte sirve como punto de partida para trabajos posteriores en donde pretendemos realizar cálculos de transporte en nanoestructuras formadas por regiones irradiadas de grafeno, o en fermiones de Dirac sin masa en general, en el espíritu de la Ref.[20].

Las soluciones en la zona no irradiada ( $0 \leq x \leq a$ ) son las mismas en las dos situaciones que queremos estudiar, así que empezaremos por ellas. En el capítulo anterior obtuvimos estas soluciones pero en un caso muy particular, el de ondas viajeras de la forma  $e^{ikx}$ , con  $k \in \mathbb{R}$ . Hicimos esto porque nuestro objetivo era estudiar precisamente este tipo de soluciones, y esto nos llevó, entre otras cosas, al efecto Goos-Hänchen. En esta parte necesitamos soluciones más generales, que incluyan la posibilidad de que la función de onda se amortigüe incluso en la zona no irradiada. Estas soluciones, separadas en sus componentes  $u_{mA}$  y  $u_{mB}$  con  $m = 0, 1$ , tienen la forma:

$$\begin{aligned} u_{1A} &= e^{iyk_y} (a_1 e^{\mathcal{K}_1 x} + b_1 e^{-\mathcal{K}_1 x}) \\ u_{1B} &= e^{iyk_y} (a_1 \Omega_1^{(1)} e^{\mathcal{K}_1 x} + b_1 \Omega_2^{(1)} e^{-\mathcal{K}_1 x}) \\ u_{0A} &= e^{iyk_y} (a_0 e^{\mathcal{K}_0 x} + b_0 e^{-\mathcal{K}_0 x}) \\ u_{0B} &= e^{iyk_y} (a_0 \Omega_1^{(0)} e^{\mathcal{K}_0 x} + b_0 \Omega_2^{(0)} e^{-\mathcal{K}_0 x}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $\mathcal{K}_0 = (k_y^2 - (1 + \mu)^2)^{1/2}$  y  $\mathcal{K}_1 = (k_y^2 - (1 - \mu)^2)^{1/2}$ , y además  $k_y$  se mide en uni-



**Figura 4.1:** (a) Esquema mostrando las dos zonas irradiadas en el grafeno, en este caso con el potencial vector girando en el mismo sentido (antihorario) a los lados de la zona central no irradiada. Los bordes entre regiones con radiación y sin ella son las rectas  $x = 0$  y  $x = a$ . Debido a la presencia de una brecha dinámica en las regiones irradiadas, esperamos que este sistema se comporte como un pozo cuántico, y veremos si allí surgen estados localizados quirales. (b) En el caso particular cuando  $a = 0$ , no existe zona no irradiada y el problema se simplifica notablemente. En este caso resulta conveniente imaginar que el cambio en el sentido de giro o fase de los campos vectorial se hace en forma suave, de modo que hay una pequeña región alrededor de  $x = 0$  donde estos campos se superponen.

dades de  $k_0$ , mientras  $x$  se mide en  $1/k_0$ . Los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$  ( $i = 0, 1$ ) son constantes de integración. Dependiendo del valor de  $k_y$ , las cantidades  $\mathcal{K}_1$  y  $\mathcal{K}_2$  pueden ser reales o imaginarias, y en este último caso nos quedaremos con la raíz de parte imaginaria positiva (la solución con parte imaginaria negativa está incluida explícitamente en el segundo término). Además tenemos los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned}\Omega_1^{(0)} &= \frac{i(1 + \mu)}{(\mathcal{K}_0 + k_y)}, & \Omega_2^{(0)} &= \frac{i(1 + \mu)}{(-\mathcal{K}_0 + k_y)} \\ \Omega_1^{(1)} &= \frac{i(1 + \mu)}{(\mathcal{K}_1 + k_y)}, & \Omega_2^{(1)} &= \frac{i(1 + \mu)}{(-\mathcal{K}_1 + k_y)}.\end{aligned}\quad (4.2)$$

La dependencia en la variable  $y$ , común a todas las expresiones en (4.1), se debe a la simetría traslacional a lo largo del eje  $\hat{y}$  que el sistema posee. Nótese que estamos incluyendo la posibilidad de que las soluciones sean exponenciales reales (evanescentes) así como exponenciales complejas (funciones periódicas). El primer caso ocurrirá cuando  $k_y^2 - (1 + \mu)^2$  o  $k_y^2 - (1 - \mu)^2$  sean negativos. Esto nos permitirá incluir un mayor rango de valores de  $k_y$  en las relaciones de dispersión que obtendremos más adelante.

## 4.1. Láseres con diferente helicidad

En este primer caso las helicidades de  $\mathbf{A}(t)$  a ambos lados de la zona no irradiada son diferentes. Esto da como resultado que las topologías de estas dos regiones sean también diferentes y podemos esperar estados quirales en los bordes [16],[6],[7]. Para caracterizar esto seguiremos el procedimiento mostrado en [16], donde se calculan los números de Chern relacionados con las brechas de quasi-energía generadas por la radiación, aunque

sin entrar en los detalles. El potencial vector en cada lado irradiado tiene la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_I(t) &= A_0[\mathbf{i} \cos(-\Omega t + \varphi) + \mathbf{j} \sin(-\Omega t + \varphi)] \\ \mathbf{A}_{II}(t) &= A_0[\mathbf{i} \cos(\Omega t + \varphi) + \mathbf{j} \sin(\Omega t + \varphi)].\end{aligned}\quad (4.3)$$

La contribución a los números de Chern es +1 en la región II y -1 en la región I [16]. Esta diferencia en los números de Chern proviene de la diferente helicidad del potencial vector  $\mathbf{A}(t)$ . Dado que estos números de Chern son invariantes topológicos para cada zona irradiada y ya que en los bordes hay un cambio en la helicidad de la radiación (y a su vez en los invariantes tales como los números de Chern), esto lleva a la formación de estados de conducción dentro de la brecha dinámica. Este resultado se conoce como la correspondencia “bulto”–frontera (*bulk-boundary correspondence*)[1]. En nuestro caso, esta correspondencia establece que el número de estados  $n_D$  moviéndose hacia arriba (en la dirección positiva de  $\hat{y}$ ) menos el número  $n_I$  de aquellos que se mueven hacia abajo (dirección negativa) es igual a la diferencia entre los números de Chern, es decir:

$$n_D - n_I = 2. \quad (4.4)$$

En nuestros resultados tendremos la oportunidad de verificar esto. Hay que señalar, sin embargo, que la relación entre estados de borde y números de Chern es más ambigua en los FTI que en los TI usuales. Nosotros no ahondaremos en el tema pero para más detalles sobre esto pueden verse las referencias [6] y [21]. Para resolver las ecuaciones que siguen supondremos la aproximación más sencilla en la que estos potenciales se anulan en forma discontinua o abrupta en los bordes  $x = 0$  y  $x = a$  (matemáticamente, esto se logra agregando funciones de Heaviside  $\theta(x - x_0)$  adecuadas en cada ecuación (4.3)). Esto simplifica notablemente el tratamiento del problema. Sin embargo, para la discusión de los resultados que obtendremos en el caso particular cuando  $a = 0$  (no hay separación entre zonas irradiadas), resulta útil suponer que existe una pequeña región donde ambos potenciales coexisten, de modo que el potencial total será la suma:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_I(t) + \mathbf{A}_{II}(t) = 2A_0 \cos(\Omega t) (\mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi). \quad (4.5)$$

Se nota que la polarización resultante es lineal en la dirección del ángulo de desfase  $\varphi$ . Volveremos a este resultado más adelante. Hasta ahora hemos presentado el hamiltoniano de Floquet en el caso de una helicidad antihoraria para el vector  $\mathbf{A}(t)$  aunque sin la fase  $\varphi$  que ahora tenemos. La inclusión de esta fase modifica ligeramente las soluciones, que ahora tienen la forma siguiente:

$$\begin{aligned}u_{1A} &= \frac{-ie^{iyk_y}}{1 - \mu} (M_1 (K_1 - k_y) e^{-K_1 x} + M_2 (K_2 - k_y) e^{-K_2 x}) \\ u_{1B} &= e^{iyk_y} (M_1 e^{-K_1 x} + M_2 e^{-K_2 x}) \\ u_{0A} &= e^{iyk_y} (M_1 \Pi_1 e^{-K_1 x} + M_2 \Pi_2 e^{-K_2 x}) e^{-i\varphi} \\ u_{0B} &= \frac{ie^{iyk_y}}{1 + \mu} (M_1 \Pi_1 (K_1 + k_y) e^{-K_1 x} + M_2 \Pi_2 (K_2 + k_y) e^{-K_2 x}) e^{-i\varphi}, \quad (x < 0).\end{aligned}\quad (4.6)$$

Los coeficientes  $M_1$  y  $M_2$  son constantes de integración y las funciones  $K_i$  y  $\Pi_i$  ( $i = 1, 2$ ) están definidas en (2.30) y (2.31) del capítulo 2, respectivamente. En caso que el giro sea ahora en sentido horario y con el potencial  $\mathbf{A}_I(t)$ , el hamiltoniano  $\tilde{\mathcal{H}}_F$  se convierte

en:

$$\tilde{\mathcal{H}}_F^I = \begin{pmatrix} \hbar\Omega & v_F p_- & 0 & v_F e A_0 e^{-i\varphi}/c \\ v_F p_+ & \hbar\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_F p_- \\ v_F e A_0 e^{i\varphi}/c & 0 & v_F p_+ & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

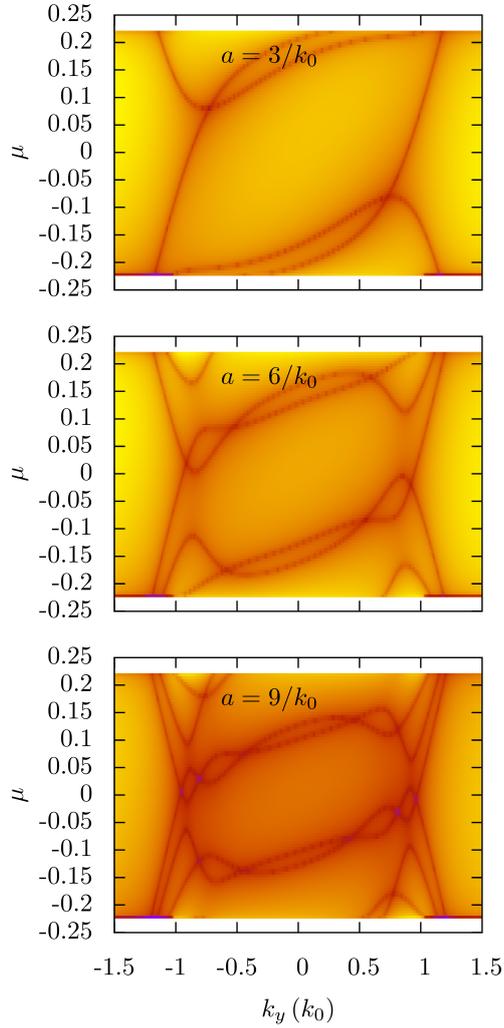
Las soluciones con este hamiltoniano son ligeramente diferentes a las obtenidas en el caso de rotación antihoraria, aunque el procedimiento para resolver  $\tilde{\mathcal{H}}_F^I \Phi = \varepsilon \Phi$  es el mismo. Las incluimos aquí como referencia:

$$\begin{aligned} u_{1A} &= e^{iyk_y} (Q_1 e^{K_1 x} + Q_2 e^{K_2 x}) \\ u_{1B} &= \frac{ie^{iyk_y}}{1-\mu} (Q_1 (K_1 - k_y) e^{K_1 x} + Q_2 (K_2 - k_y) e^{K_2 x}) \\ u_{0A} &= \frac{-ie^{iyk_y}}{1+\mu} (Q_1 \Pi_1 (K_1 + k_y) e^{K_1 x} + Q_2 \Pi_2 (K_2 + k_y) e^{K_2 x}) e^{i\varphi} \\ u_{0B} &= e^{iyk_y} (Q_1 \Pi_1 e^{K_1 x} + Q_2 \Pi_2 e^{K_2 x}) e^{i\varphi} \quad (x > a), \end{aligned} \quad (4.8)$$

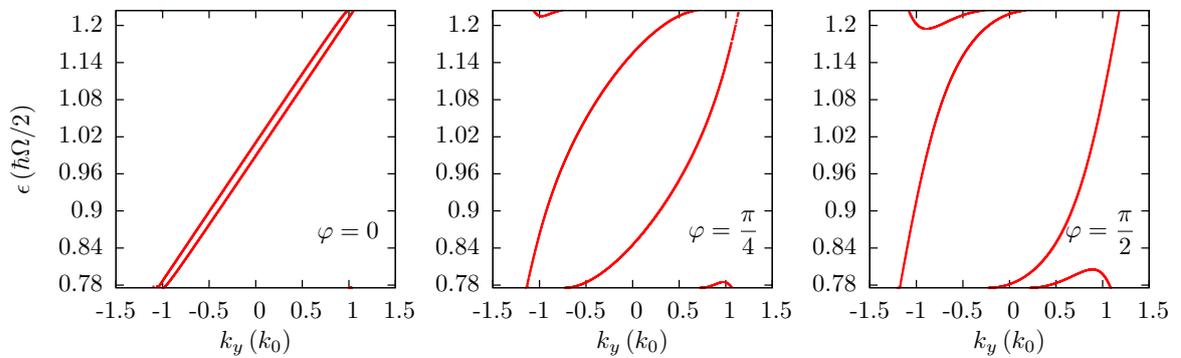
siendo  $Q_1$  y  $Q_2$  también constantes de integración. Ahora tenemos las soluciones en cada una de las regiones irradiadas. De la continuidad en  $x = 0$  y  $x = a$  obtenemos un conjunto homogéneo de ocho ecuaciones que puede escribirse como  $\mathcal{Q}\mathcal{U} = 0$ , donde  $\mathcal{U}$  es el vector con los coeficientes  $M_i$ ,  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $a_j$  y  $b_j$  ( $j = 0, 1$ ), siendo  $\mathcal{Q}$  una matriz de  $8 \times 8$ . La ecuación que determina las cuasi-energías de los estados localizados está dada por  $\det[\mathcal{Q}] = 0$ . Esta ecuación puede resolverse numéricamente (mediante el método de bisección, por ejemplo), pero debido a la complejidad de las expresiones nosotros emplearemos otra estrategia, que consiste en graficar  $\log |\det[\mathcal{Q}]|$ , ya que esta cantidad diverge en los puntos donde  $\det[\mathcal{Q}] = 0$ .

En la figura 4.2 se muestran algunas gráficas de la relación de dispersión de estos estados en función de  $k_y$ , para tres distancias de separación entre las regiones irradiadas y para un desfase  $\varphi = \pi/2$ . Puede verse que la complejidad en estas relaciones de dispersión crece cuando la separación entre las zonas irradiadas aumenta; se distinguen además dos diferentes tipos de estados: en uno la velocidad de grupo  $d\varepsilon/dk_y$  varía con  $k_y$ , pasando de positiva a negativa y anulándose en un punto  $k_y$  determinado. Cuando  $a = 3k_0^{-1}$  pueden verse dos de estos estados (uno cerca de cada borde de la brecha dinámica), y su número aumenta cuando la separación aumenta, como se ve en las figuras para  $a = 6k_0^{-1}$  y  $a = 9k_0^{-1}$ . Estos estados corresponden a lo que llamaríamos *modos transversales* en sistemas confinados, como los que se encuentran usualmente en pozos cuánticos. Existe otro tipo de estados que es peculiar al sistema, y son aquéllos en donde la velocidad de grupo tiene el mismo signo independientemente de  $k_y$ , es decir que estos estados se mueven siempre hacia adelante (mejor dicho, en la dirección positiva de  $\hat{y}$ ), y por ello deben unir los dos bordes de la brecha dinámica. Esta dirección queda determinada por el sentido de rotación de los campos vectoriales  $\mathbf{A}(t)$  en las dos regiones irradiadas, y esto quiere decir que un cambio simultáneo en el sentido de giro ambos invierte la dirección de movimiento de estos estados. A estos estados llamamos *quirales*. Considerando estos dos tipos de estados, puede verse que en los tres casos, para cada cuasi-energía  $\varepsilon$ , se satisface la ecuación (4.4), y de esta manera se verifica la correspondencia “bulto”-frontera. Cabe mencionar también que, sólo cuando la separación es pequeña, existen zonas de cuasi-energías dentro de la brecha dinámica en donde los estados localizados son sólo quirales, cuando la separación

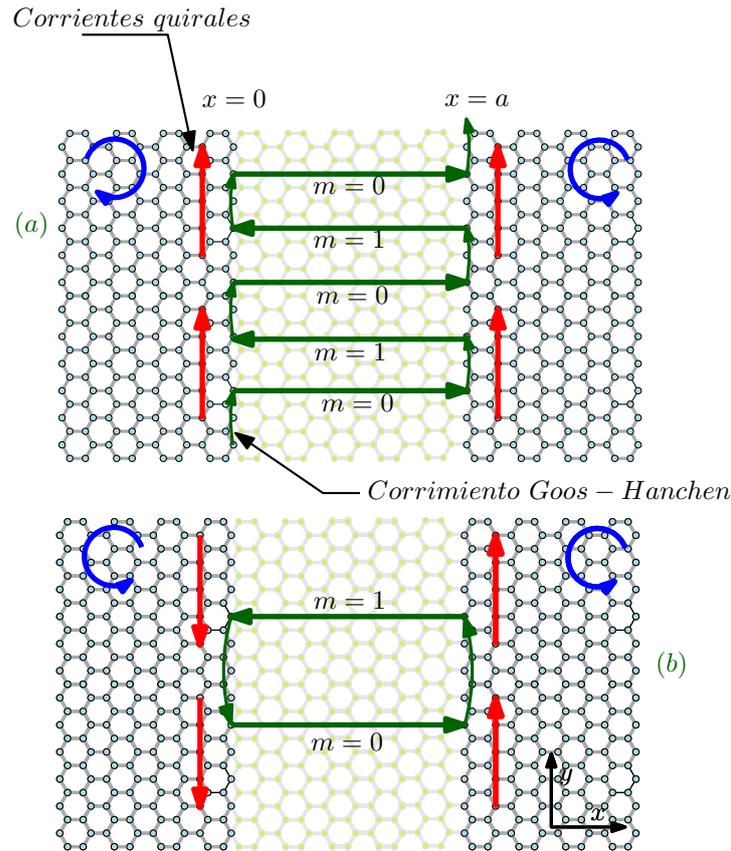
aumenta empiezan a aparecer estados con ambas quiralidades que llenan la brecha dinámica.



**Figura 4.2:** Se muestran las relaciones de dispersión para separación no nula y en unidades de  $1/k_0$ . El valor de  $\varphi$  es  $\pi/2$ . Se observa la formación de estados quirales que cruzan la brecha dinámica. Además hay estados no quirales y cuyo número aumenta con la separación entre las zonas irradiadas.



**Figura 4.3:** Relaciones de dispersión cuando  $a = 0$ . Se observa que hay sólo dos estados que unen la brecha dinámica dinámico y que para cada valor de  $\varepsilon$  existen en total dos estados que se mueven hacia la derecha, es decir con velocidad de grupo  $v_g = \partial\varepsilon/\partial k_y$  positiva. El valor de  $\eta = 0.23$



**Figura 4.4:** Una explicación de la formación (o no formación) de estados en nuestro problema a partir del efecto Goos-Hänchen. En ambos casos sólo que considera la reflexión en el canal  $m = 1$  (si los electrones inciden en el  $m = 0$ ), ya que a incidencia normal los electrones se dispersan en su mayoría por este canal. El corrimiento está dado por la dirección de las corrientes quirales formadas en las regiones irradiadas. En (a) las corrientes inducen un flujo neto hacia arriba, mientras que en (b) los electrones no se desplazan en promedio.

En el caso particular en el que  $a = 0$ , la matriz  $\mathcal{Q}$  es sólo de  $4 \times 4$ , ya que no hay región no irradiada. En la figura 4.3 se muestran tres relaciones de dispersión para los estados localizados correspondientes a tres valores diferentes de  $\varphi$ . Allí se puede observar también que la diferencia entre el número de estados que viajan hacia arriba menos el número de los que viajan hacia abajo es constante e igual a 2. Además, se ve que para  $k_y = 0$  hay, en los tres casos, estados con velocidad de grupo no nula siguiendo la dirección positiva del borde. Resulta interesante notar cómo la velocidad de grupo puede ser controlada mediante la diferencia de fase entre los campos vectoriales.

El hecho de que estos estados existan incluso cuando  $k_y = 0$  puede interpretarse, en una primera aproximación, como una manifestación del efecto Goos-Hänchen que vimos en el capítulo 3. Recordemos que incluso cuando  $k_y = 0$ , es decir cuando el flujo de electrones incide normalmente sobre la región irradiada, existe un corrimiento para ambos canales, en una dirección fijada por el sentido de las corrientes de probabilidad que se forman en el borde de la región irradiada. En la figura 4.4.a se esquematiza esto cuando  $a \neq 0$ , pero ya que el corrimiento a incidencia normal es constante e igual a  $1/k_0$ , el límite  $a \rightarrow 0$  mantiene las mismas características. Para ver esto, usemos en

particular la figura 4.3 cuando  $\varphi = 0$ . La velocidad de grupo puede estimarse allí como:

$$v_g = \frac{\Omega}{2} \frac{d\mu}{dk_y} \approx \eta v_F, \quad (4.9)$$

ya que el ancho de la brecha es del orden de  $\eta\hbar\Omega$ . Por otra parte, la longitud de penetración  $\delta x$  de los electrones dentro de la región irradiada puede aproximarse a partir de la densidad de probabilidad allí, que a grandes rasgos varía según el módulo de  $e^{2K_1x}$ , así que como una estimación de esta longitud podemos tomar  $(2\Re(K_1))^{-1}$ , y cuando  $\mu = 0$  esta cantidad resulta aproximadamente igual a  $1/(2\eta v_F)$ . Desde un punto de vista semiclásico, la rapidez del electrón puede estimarse como la distancia recorrida a lo largo del borde, dada por el corrimiento Goos-Hänchen e igual a  $1/k_0$ , entre el tiempo que viaje a lo largo de la región irradiada, que puede estimarse como  $2\delta x/v_F$ . La velocidad así calculada coincide con (4.9), lo cual apoya la idea acerca del origen de estos estados quirales.

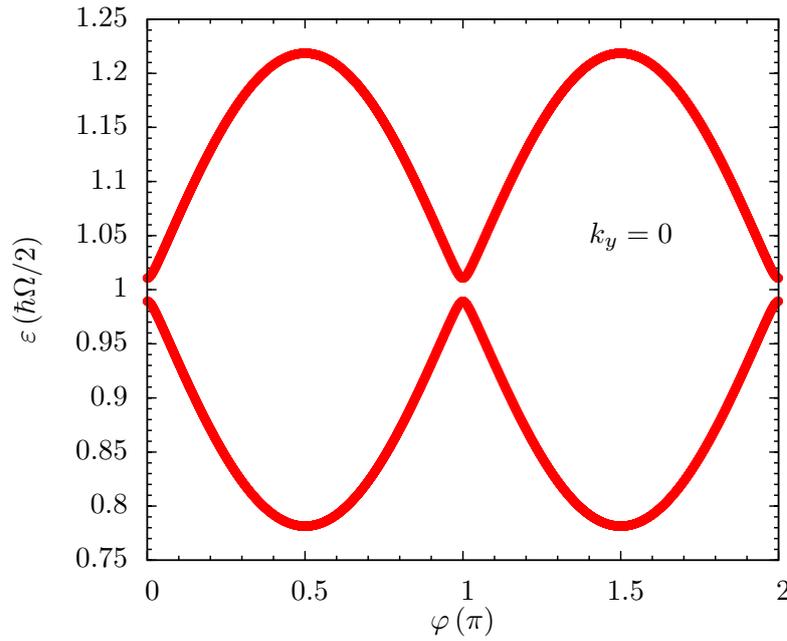
Por otra parte, la figura 4.5 muestra las energías de los estados localizados pero ahora en función de la fase  $\varphi$ , en particular cuando  $k_y = 0$ . Puede notarse que esta función tiene un período  $\pi$ . Aunque no se muestra en esta figura, puede deducirse a partir de lo que se vio en la figura 4.3 que si permitimos que  $k_y$  varíe hacia valores diferentes de cero, la gráfica anterior se desplaza verticalmente, de modo tal que para todo valor de  $\varepsilon$  dentro de la brecha dinámica se tiene al menos un estado localizado, correspondiente al menos a una valor de  $k_y$ . Esto se deduce también de los estados que unen ambos extremos de la brecha dinámica, y que se muestran en la figura 4.3. El período  $\pi$  en 4.5 también puede explicarse si recordamos que, según la ecuación (4.5), la polarización en una pequeña región intermedia hipotética, donde se superponen ambos potenciales, está linealmente polarizada en la dirección  $\hat{i} \cos \varphi + \hat{j} \sin \varphi$ , y por ellos la transformación  $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$  no tiene efecto observable alguno, ya que no altera la magnitud del vector  $\mathbf{A}(t)$  resultante, del que en última instancia dependen las propiedades de las brechas de energía.

## 4.2. Láseres con la misma helicidad

En esta parte supondremos que ambas zonas irradiadas poseen el mismo sentido de giro aunque con una diferencia de fase  $\varphi$ . Tenemos entonces en la región I un potencial de la forma  $\mathbf{A}_I(t) = A_0[\mathbf{i} \cos(\Omega t + \varphi) + \mathbf{j} \sin(\Omega t + \varphi)]$ , mientras que en la región II tendremos el potencial ya usado anteriormente  $\mathbf{A}_{II}(t) = A_0[\mathbf{i} \cos(\Omega t) + \mathbf{j} \sin(\Omega t)]$ . De forma similar al análisis que hicimos en la sección anterior, en la situación donde  $a = 0$  puede ser útil imaginar una región en donde ambas formas de radiación  $\mathbf{A}_I$  y  $\mathbf{A}_{II}$  se superponen. En esta hipotética región el potencial vector total es también circularmente polarizado:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_I(t) + \mathbf{A}_{II}(t) = 2A_0 \cos^2(\varphi/2)[\mathbf{i} \cos(\Omega t + \varphi/2) + \mathbf{j} \sin(\Omega t + \varphi/2)], \quad (4.10)$$

es decir, su intensidad varía como  $2A_0 \cos^2(\varphi/2) = A_0(1 + \cos \varphi)$ , con período  $2\pi$ . En la región I la fase  $\varphi$  introduce factores de la forma  $e^{\pm i\varphi}$  en los elementos de  $\mathcal{H}_F$  que



**Figura 4.5:** Energía de los estados localizados para  $a = 0$  en función de la diferencia de fase  $\varphi$  cuando  $k_y = 0$  en el caso de diferentes helicidades. Se observa una periodicidad de  $\pi$ , debido a la polarización lineal del campo vectorial total en la interfaz, suponiendo una pequeña región donde ambos campos coexisten.

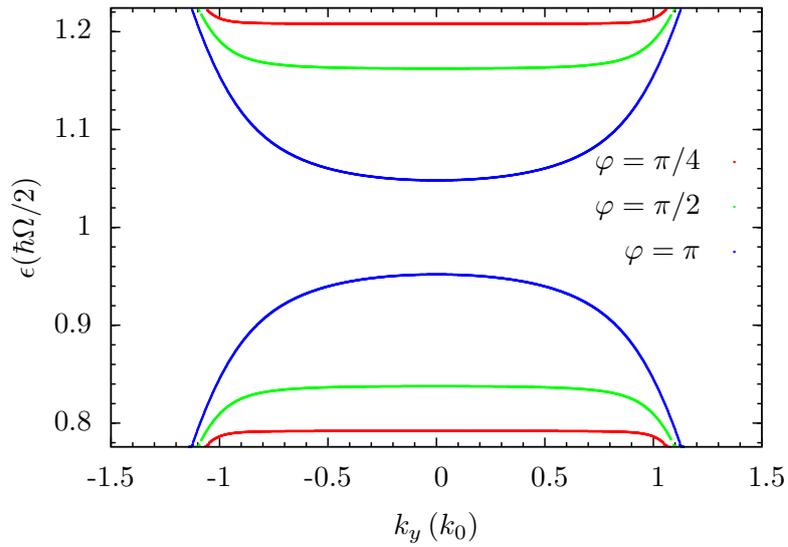
mezclan las diferentes réplicas:

$$\tilde{\mathcal{H}}_F^I = \begin{pmatrix} \hbar\Omega & v_F p_- & 0 & 0 \\ v_F p_+ & \hbar\Omega & v_F e A_0 e^{i\varphi}/c & 0 \\ 0 & v_F e A_0 e^{-i\varphi}/c & 0 & v_F p_- \\ 0 & 0 & v_F p_+ & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Está claro que el hamiltoniano de Floquet en la región II se obtiene del anterior haciendo simplemente  $\varphi = 0$ . El procedimiento para resolver la ecuación de Schrödinger es completamente análogo a lo ya visto anteriormente, así como las soluciones finales. Nuevamente, las condiciones de continuidad a lo largo de las fronteras  $x = 0$  y  $x = a$  definen un sistema homogéneo de ocho ecuaciones y ocho incógnitas que puede escribirse en la forma  $\mathcal{Q}\mathcal{V} = 0$ , donde  $\mathcal{V}$  es la columna de coeficientes de las soluciones. Las soluciones no triviales corresponden a los valores de quasi-energía (en función de  $k_y$ ,  $a$  y  $\varphi$ ) que satisfacen la ecuación  $\det[\mathcal{Q}] = 0$ . Para ver las diferencias cualitativas que se presentan en este caso en comparación con el caso anterior, nos basta con analizar el caso sencillo  $a = 0$ . En este caso es claro que el sistema  $\mathcal{Q}\mathcal{V} = 0$  tiene cuatro incógnitas y puede trabajarse en forma más o menos analítica. En este caso  $\det[\mathcal{Q}] = 0$  puede escribirse como una ecuación real y tiene la forma:

$$2|K_1|^2(\Pi_1^2 + \Pi_2^2) + |\Pi_1|^2 [(K_1 - K_2)^2 \cos \varphi - (K_1 + K_2)^2] = 0. \quad (4.12)$$

Hay que recordar que  $K_1 = K_2^*$  y  $\Pi_1 = \Pi_2^*$ , lo que hace que la expresión anterior sea real. Las soluciones de esta ecuación son las quasi-energías de los estados de borde permitidos y pueden obtenerse numéricamente (nosotros hemos usado en método de bisección), aunque en el caso particular de  $\varphi = 0$  se puede proceder en forma analítica.



**Figura 4.6:** Relaciones de dispersión  $\varepsilon(k_y)$  cuando los potenciales vector poseen la misma quiralidad.

Antes debemos recordar que estamos restringiendo los valores de  $\mu$  al rango:

$$-\sqrt{\eta^2 - \mu^2(1 + \eta^2)} \leq \mu \leq \sqrt{\eta^2 - \mu^2(1 + \eta^2)}, \quad (4.13)$$

en donde es posibles hallar soluciones evanescentes en la región irradiada. En efecto, si tenemos en cuenta que  $\Pi_1 = |\Pi_1| e^{i\delta}$ , donde  $\tan \delta = \sqrt{\eta^2 - \mu^2(1 + \eta^2)}/\mu$ , la expresión (4.12) se reduce a:

$$\text{sen } \delta = 0. \quad (4.14)$$

Lo cual implica que  $\tan \delta = 0$  y por ello  $\mu = \pm\eta/\sqrt{1 + \eta^2}$ , es decir, estos estados aparecen en el borde de la brecha dinámica. Esto puede entenderse dado que, al ser el sentido de giro de  $\mathbf{A}(t)$  en ambas regiones el mismo, y la diferencia de fases nula, estamos frente al mismo sistema homogéneo que habíamos visto en el capítulo 1. Cuando  $\varphi \neq 0$ , debemos tratar el problema numéricamente. En la figura 4.6 se muestran las relaciones de dispersión de los estados localizados para tres valores diferentes de la diferencia de fase  $\varphi$ . En el caso de quiralidades diferentes para el campo vectorial  $\mathbf{A}(t)$  visto en la sección anterior, se observó un tipo particular de estados que tenía una velocidad de grupo positiva para todo  $k_y$ . Estos estados no están presentes en la figura 4.6, y se debe a que las propiedades topológicas en ambos lados irradiados son las mismas, es decir, los número de Chern son los mismos a ambos lados y la correspondencia “bulto”-frontera señala que hay la misma cantidad de estados que se mueven hacia la derecha e izquierda. Sin embargo, sí hay estados dentro de la brecha dinámica, aunque éstos no sean quirales. La aparición de estos estados puede explicarse también a grandes rasgos mediante el corrimiento Goos-Hänchen, aunque esto sería más claro en el caso que el ancho de la región no irradiada fuese finito. En la figura 4.4.b se ilustra esto en el caso particular de  $k_y = 0$ . Debido a que las corrientes quirales formadas a cada lado de la zona no irradiada tiene direcciones opuestas, y que éstas son las que en última instancia determinan la dirección del corrimiento, los electrones no presentan un desplazamiento neto a lo largo de los bordes.

También es interesante observar la dependencia de la energía de estos estados loca-

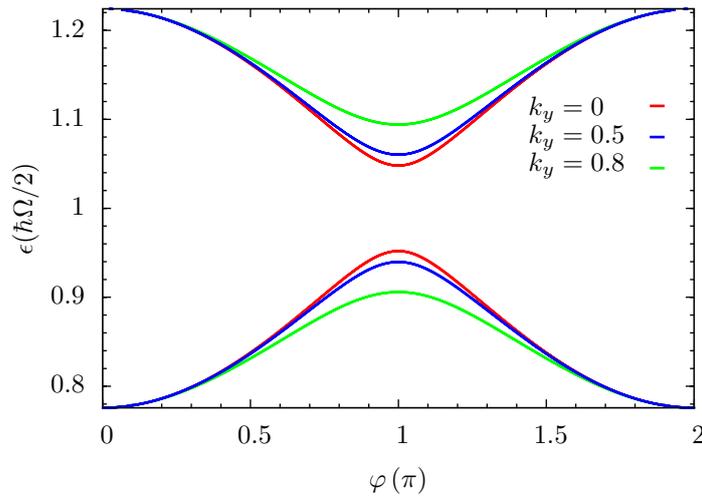
lizados ahora como función de la diferencia de fases  $\varphi$ . En la figura 4.7 se muestra esto para tres valores de  $k_y$  (en unidades de  $k_0$ ). Esta función muestra un tipo de brecha cuyo ancho es mínimo cuando  $k_y = 0$ , y que aumenta en forma suave cuando  $|k_y| > 0$ . Para fijar ideas, supongamos en lo que sigue que  $k_y = 0$ . Se observa que  $\varepsilon(\varphi)$  posee una periodicidad de  $2\pi$ , en comparación con el período  $\pi$  visto en el caso de quiralidades opuestas. Esta periodicidad puede entenderse suponiendo que en lugar de un cambio abrupto en la fase de  $\mathbf{A}(t)$ , de 0 para  $x > 0$  a  $\varphi$  para  $x < 0$ , éste se produce en una pequeña región de ancho  $\delta x$  en torno a  $x = 0$ . Como ya se vio anteriormente, en esta región el potencial vector resultante es circularmente polarizado aunque con una amplitud efectiva dada  $2A_0 \cos^2(\varphi/2) = A_0(1 + \cos \varphi)$ , que es una función con período  $2\pi$ . En el capítulo 1 se vio que el ancho de la brecha dinámica  $\delta\varepsilon$  podía aproximarse por:

$$\delta\varepsilon \approx \eta\hbar\omega. \quad (4.15)$$

En nuestro caso podemos tomar  $\eta$  proporcional a la amplitud del campo efectivo  $A_0(1 + \cos \varphi)$ , y de allí obtenemos que la brecha se comporta como:

$$\delta\varepsilon \propto 1 + \cos \varphi, \quad (4.16)$$

con período  $2\pi$ . Quedan algunos detalles por discutir. En la figura 4.7 se observa que para  $\varphi = 0$  y  $\varphi = 2\pi$  se tiene la brecha dinámica completa, lo cual es lógico ya que esos casos corresponden a tener un sistema homogéneo desde todo punto de vista (sería simplemente el caso que resolvimos en la sección 1.4). Queda la cuestión acerca de por qué, cuando  $\varphi = \pi$ , se observa una brecha dinámica, aún cuando en este caso el potencial vector efectivo es nulo (en la pequeña región donde se superponen), puesto que ya habíamos visto en Sec. 1.2 que en estas condiciones había una degeneración en los estados y la ausencia de una brecha dinámica. En realidad cuando  $\varphi = \pi$ , si bien es cierto que no hay potencial neto en la interfaz, el sistema presenta aún una inhomogeneidad (el cambio de fase en la interfaz), y esto necesariamente sigue dejando estados dentro de la brecha dinámica.



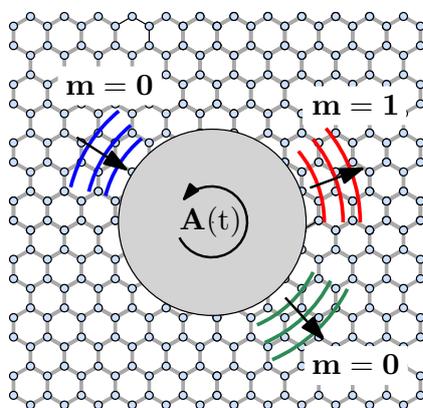
**Figura 4.7:** Cuasi-energía de los estados localizados en función del desfase  $\varphi$ , para tres diferentes valores de  $k_y$  (en unidades de  $k_0$ ) en el caso de helicidad igual. Se observa una periodicidad en  $2\pi$  debido a la intensidad  $A_0(1 + \cos \varphi)$  del campo vectorial total circularmente polarizado en la interfaz.

## Capítulo 5

# Dispersión por obstáculos circulares irradiados

En los capítulos anteriores hemos estudiado sistemas con bordes rectos entre regiones irradiadas y sin irradiar, lo que nos ha permitido deducir importantes conclusiones acerca de la dispersión inelástica en el grafeno irradiado. Pasemos ahora a estudiar de qué manera un cambio en la geometría del problema puede alterar nuestros resultados. El sistema que usaremos será una región circular irradiada ya que esperamos que esta configuración nos permita también un estudio más o menos analítico del fenómeno de dispersión, y además esperamos hacer algunas comparaciones con otros trabajos que estudian sistemas parecidos aunque sin radiación [22]. Esta configuración es interesante entre otras cosas porque puede realizarse mediante dispositivos láser convencionales y además debido a que se han realizado experimentos de transporte de carga en este tipo de sistemas [23].

La motivación para esta parte es entender los aspectos básicos de este problema, para luego, en un trabajo posterior, poder estudiar propiedades de transporte en geometrías más complejas, como por ejemplo arreglos de zonas irradiadas. La solución de este problema puede encontrarse primero resolviendo el problema más sencillo de electrones incidiendo sobre la región circular provenientes de todas las direcciones, es decir usando una solución con simetría circular. A este problema lo llamamos *disper-*



**Figura 5.1:** La figura muestra esquemáticamente el problema que se plantea. Se envían electrones en un haz con simetría circular en torno a la región irradiada y en el canal  $m = 0$  (líneas curvas azules). Se obtienen electrones dispersados en ambos canales  $m = 1$  (líneas curvas rojas) y  $m = 0$  (líneas curvas verdes).

*sión isotrópica*. Las soluciones halladas aquí servirán como base para el problema de la dispersión de un haz homogéneo de electrones, representado por una onda plana.

## 5.1. Ondas isotrópicas

La geometría de este problema sugiere usar coordenadas polares en lugar de cartesianas como lo habíamos venido haciendo. Supondremos además que las funciones de onda poseen una dependencia periódica en  $\theta$  de la forma  $\exp(il\theta)$ , siendo  $l$  un entero que servirá para etiquetar las diferentes soluciones. Esto lleva a que todas las cantidades medibles, tales como densidad de probabilidad y corriente, tengan una simetría de rotación circular. Usaremos el mismo hamiltoniano de Floquet (1.29) en la aproximación de dos canales que hemos usado en las secciones anteriores aunque ahora ensayaremos soluciones con simetría circular en coordenadas polares. Veremos que la razón entre el flujo de electrones dispersados en cada canal está en relación con el cociente  $l/k_0R$ , donde  $R$  es el radio de la zona irradiada y  $k_0$  es el momentum elemental anteriormente definido como  $k_0 = \Omega/2v_F$ .

### 5.1.1. Soluciones fuera de la región irradiada

Busquemos las soluciones a nuestro problema en la zona exterior no irradiada, a la que llamaremos *región asintótica*. Aunque sabemos que en esta región pueden obtenerse trivialmente soluciones generales (sin necesidad de truncar el número de canales de Floquet), nos restringiremos directamente a la aproximación de dos canales  $m = 0$  y  $m = 1$ . Si el radio de la zona irradiada es  $R$ , entonces tenemos el siguiente hamiltoniano de Floquet ( $r > R$ , siendo  $r$  la distancia al centro de la región irradiada):

$$\tilde{\mathcal{H}}_F = \begin{pmatrix} \hbar\Omega & v_F p_- & 0 & 0 \\ v_F p_+ & \hbar\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_F p_- \\ 0 & 0 & v_F p_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

con  $p_{\pm} = p_x \pm ip_y$ . Si cada espinor en  $\phi_0$  y  $\phi_1$  tiene componentes  $(u_{mA}(\mathbf{r}), u_{mB}(\mathbf{r}))$ , con  $m = 0, 1$ , la función de onda de Floquet puede escribirse como:

$$\phi(\mathbf{r}) = \{[u_{1A}(\mathbf{r}), u_{1B}(\mathbf{r})], [u_{0A}(\mathbf{r}), u_{0B}(\mathbf{r})]\}^T. \quad (5.2)$$

Las componentes anteriores satisfacen el siguiente conjunto de ecuaciones acopladas:

$$\begin{aligned} \hbar\Omega u_{1A} + v_F p_- u_{1B} &= \varepsilon u_{1A}, \\ v_F p_+ u_{1A} + \hbar\Omega u_{1B} &= \varepsilon u_{1B}, \\ v_F p_- u_{0B} &= \varepsilon u_{0A}, \\ v_F p_+ u_{0A} &= \varepsilon u_{0B}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

De aquí se obtienen rápidamente las ecuaciones para  $u_{1B}$  y  $u_{0A}$ :

$$p^2 u_{1B} - \left(\frac{\hbar\Omega - \varepsilon}{v_F}\right)^2 u_{1B} = 0, \quad p^2 u_{0A} - \left(\frac{\varepsilon}{v_F}\right)^2 u_{0A} = 0. \quad (5.4)$$

A partir de estas soluciones podemos hallar  $u_{1A}$  y  $u_{0B}$ :

$$\begin{aligned} u_{1A} &= -\frac{v_F}{\hbar\Omega - \epsilon} p_- u_{1B}, \\ u_{0B} &= \frac{v_F}{\epsilon} p_+ u_{0A}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Para resolver las ecuaciones anteriores serán útiles las siguientes expresiones en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} p_{\pm} &= -i e^{\pm i\theta} \hbar \left( \partial_r \pm i \frac{1}{r} \partial_{\theta} \right), \\ p^2 &= -\hbar^2 \left( \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta}^2 \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Vamos a buscar soluciones que tengan simetría de rotación en  $\theta$ , es decir:

$$u_{1B} = e^{il\theta} f(r), \quad u_{0A} = e^{il\theta} g(r), \quad (5.7)$$

donde  $l$  es un número entero. Mediante el cambio de variables  $\xi = k_0(1 - \mu)r$  y  $\zeta = k_0(1 + \mu)r$  (donde  $\mu$  se define a partir de la cuasi-energía como  $\epsilon = \hbar\Omega(1 + \mu)/2$ ), se obtienen las siguientes ecuaciones para  $\tilde{F}(\xi) = f(r)$  y  $\tilde{G}(\zeta) = g(r)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{F}}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\tilde{F}}{d\xi} + \left(1 - \frac{l^2}{\xi^2}\right) \tilde{F} &= 0, \\ \frac{d^2 \tilde{G}}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d\tilde{G}}{d\zeta} + \left(1 - \frac{l^2}{\zeta^2}\right) \tilde{G} &= 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ambas ecuaciones tienen la forma de la ecuación de Bessel y sus dos soluciones independientes son las funciones de Hankel  $H_l^{(1)}$  y  $H_l^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} f(r) &= A_l H_l^{(1)}(k_0 r(1 - \mu)) + B_l H_l^{(2)}(k_0 r(1 - \mu)), \\ g(r) &= C_l H_l^{(1)}(k_0 r(1 + \mu)) + D_l H_l^{(2)}(k_0 r(1 + \mu)), \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde  $A_l$ ,  $B_l$ ,  $C_l$  y  $D_l$  son constantes de integración. Las soluciones para  $u_{1B}$  y  $u_{0A}$  son finalmente (el superíndice  $(e)$  indica que la solución es para la parte exterior no irradiada):

$$\begin{aligned} u_{1B}^{(e)} &= e^{il\theta} \left[ A_l H_l^{(1)}(k_0 r(1 - \mu)) + B_l H_l^{(2)}(k_0 r(1 - \mu)) \right], \\ u_{0A}^{(e)} &= e^{il\theta} \left[ C_l H_l^{(1)}(k_0 r(1 + \mu)) + D_l H_l^{(2)}(k_0 r(1 + \mu)) \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para obtener las otras soluciones  $u_{1A}$  y  $u_{0B}$  a partir de la ecuación (5.5) usaremos las siguientes relaciones de recurrencia para las funciones de Hankel ( $j = 1$  o  $2$ ):

$$\begin{aligned} 2 \frac{dH_l^{(j)}}{dx}(x) &= H_{l-1}^{(j)}(x) - H_{l+1}^{(j)}(x), \\ \frac{2l}{x} H_l^{(j)}(x) &= H_{l-1}^{(j)}(x) + H_{l+1}^{(j)}(x), \end{aligned} \quad (5.11)$$

que aplicadas a nuestro problema particular toman la forma:

$$p_+ e^{i\theta} H_l^{(j)}(\sigma r) = +i\hbar\sigma e^{i(l+1)\theta} H_{l+1}^{(j)}(\sigma r), \quad (5.12)$$

$$p_- e^{i\theta} H_l^{(j)}(\sigma r) = -i\hbar\sigma e^{i(l-1)\theta} H_{l-1}^{(j)}(\sigma r). \quad (5.13)$$

Después de estas consideraciones se obtienen finalmente las siguientes soluciones en la región exterior:

$$\begin{aligned} u_{1A}^{(e)} &= i e^{i(l-1)\theta} \left[ A_l H_{l-1}^{(1)}(k_0 r(1-\mu)) + B_l H_{l-1}^{(2)}(k_0 r(1-\mu)) \right], \\ u_{1B}^{(e)} &= e^{i\theta} \left[ A_l H_l^{(1)}(k_0 r(1-\mu)) + B_l H_l^{(2)}(k_0 r(1-\mu)) \right], \\ u_{0A}^{(e)} &= e^{i\theta} \left[ C_l H_l^{(1)}(k_0 r(1+\mu)) + D_l H_l^{(2)}(k_0 r(1+\mu)) \right], \\ u_{0B}^{(e)} &= i e^{i(l+1)\theta} \left[ C_l H_{l+1}^{(1)}(k_0 r(1+\mu)) + D_l H_{l+1}^{(2)}(k_0 r(1+\mu)) \right]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

De la misma forma como se hizo en capítulos anteriores, vamos a interpretar los coeficientes de las soluciones con flujo saliente (es decir, en la dirección radial positiva) como coeficientes de reflexión. Para esto tenemos que determinar la corriente de probabilidad de las soluciones anteriores. Antes de pasar a este punto resolvamos las ecuaciones en la zona irradiada.

### 5.1.2. Soluciones dentro de la región irradiada

Busquemos ahora las soluciones en la región irradiada. Ya que queremos estudiar el rango de cuasi-energías dentro de la brecha dinámica vamos a buscar soluciones evanescentes (en realidad, al imponer la condición de soluciones evanescentes veremos que es necesario que la energía de los electrones incidentes se encuentre dentro de esta brecha). El hamiltoniano de Floquet es:

$$\tilde{\mathcal{H}}_F = \begin{pmatrix} \hbar\Omega & v_F p_- & 0 & 0 \\ v_F p_+ & \hbar\Omega & v_F e A_0 / c & 0 \\ 0 & v_F e A_0 / c & 0 & v_F p_- \\ 0 & 0 & v_F p_+ & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Usaremos la misma forma de la función de onda de Floquet que usamos anteriormente:

$$\phi(\mathbf{r}) = \{[u_{1A}(\mathbf{r}), u_{1B}(\mathbf{r})], [u_{0A}(\mathbf{r}), u_{0B}(\mathbf{r})]\}^T. \quad (5.16)$$

El procedimiento de solución de  $\tilde{\mathcal{H}}_F \phi = \varepsilon \phi$  es fundamentalmente igual al usado en la solución del problema del borde plano, es decir en coordenadas cartesianas, con la diferencia de que al usar ahora coordenadas polares obtendremos ecuaciones diferenciales para funciones especiales. La ecuación  $\tilde{\mathcal{H}}_F \phi(\mathbf{r}) = \varepsilon \phi(\mathbf{r})$  implica que:

$$\begin{aligned} u_{1A}(\mathbf{r}) &= -\frac{v_F}{\hbar\Omega - \varepsilon} p_- u_{1B}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\hbar k_0 (1-\mu)} p_- u_{1B}(\mathbf{r}) \\ u_{0B}(\mathbf{r}) &= \frac{v_F}{\varepsilon} p_+ u_{0A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\hbar k_0 (1+\mu)} p_+ u_{0A}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (5.17)$$

por lo que sólo dos funciones  $u_{0A}(\mathbf{r})$  y  $u_{1B}(\mathbf{r})$  deben determinarse. Estas funciones satisfacen:

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{v_F^2}{\hbar\Omega - \varepsilon} p^2 + \hbar\Omega - \varepsilon \right] u_{1B}(\mathbf{r}) &= -\frac{v_F e A_0}{c} u_{0A}(\mathbf{r}) \\ \left[ \frac{v_F^2}{\varepsilon} p^2 - \varepsilon \right] u_{0A}(\mathbf{r}) &= -\frac{v_F e A_0}{c} u_{1B}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Con los parámetros  $k_0$ ,  $q$  y  $\eta$  definidos anteriormente las ecuaciones (5.18) se convierten en:

$$\begin{aligned} \left[ \nabla^2 + k_0^2(1 - \mu)^2 \right] u_{1B} &= -qk_0(1 - \mu) u_{0A} \\ \left[ \nabla^2 + k_0^2(1 + \mu)^2 \right] u_{0A} &= qk_0(1 + \mu) u_{1B}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Buscaremos soluciones con la misma dependencia angular en  $\theta$  que en la región no irradiada, es decir  $u_{1B} = e^{i\ell\theta} f(r)$  y  $u_{0A} = e^{i\ell\theta} g(r)$ . Definiendo la nueva variable  $z = k_0 r$  obtenemos las siguientes ecuaciones para  $F(z) = f(r)$  y  $G(z) = g(r)$ :

$$\begin{aligned} \left[ \left( \partial_z^2 + \frac{1}{z} \partial_z - \frac{\ell^2}{z^2} \right) + (1 - \mu)^2 \right] F(z) &= -2\eta(1 - \mu) G(z) \\ \left[ \left( \partial_z^2 + \frac{1}{z} \partial_z - \frac{\ell^2}{z^2} \right) + (1 + \mu)^2 \right] G(z) &= 2\eta(1 + \mu) F(z). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Para resolver el sistema anterior vamos a usar la siguiente sustitución:

$$F(z) = C I_\ell(\lambda z), \quad G(z) = D I_\ell(\lambda z), \quad (5.21)$$

donde las  $I_\ell$  son las funciones modificadas de Bessel de segundo tipo. Se sabe que ellas satisfacen:

$$\left( \partial_z^2 + \frac{1}{z} \partial_z - \frac{\ell^2}{z^2} \right) I_\ell(\lambda z) = \lambda^2 I_\ell(\lambda z). \quad (5.22)$$

Reemplazando en (5.20) obtenemos la condición necesaria que debe satisfacer  $\lambda$  para obtener soluciones no triviales (es decir, con  $C = D = 0$ ):

$$[\lambda^2 + (1 - \mu)^2][\lambda^2 + (1 + \mu)^2] + 4\eta^2(1 - \mu^2) = 0. \quad (5.23)$$

Ya que esta ecuación tiene coeficientes reales y que  $\lambda$  aparece sólo en la forma  $\lambda^2$  las soluciones serán de la forma  $a + ib$ ,  $a - ib$ ,  $-a - ib$  y  $-a + ib$  ( $a$  y  $b$  reales). Para reducir el número de soluciones linealmente independientes usaremos las siguientes propiedades de los funciones de Bessel modificadas:

$$\begin{aligned} I_\nu(z e^{m\pi i}) &= e^{mv\pi i} I_\nu(z) \quad (m \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{C}) \\ I_n(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Del primero de los resultados anteriores se deduce que  $I_n(z)$  y  $I_n(-z)$  no son independientes cuando el orden es entero:

$$I_n(-z) = (-1)^n I_n(z), \quad (5.25)$$

mientras que  $I_n(z)$  y  $I_n(z^*)$  sí lo son:

$$I_n(z^*) = [I_n(z)]^*. \quad (5.26)$$

Bastará considerar solamente las dos raíces conjugadas con parte real positiva. Éstas se obtienen de:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{-1 - \mu^2 \pm 2i\sqrt{\eta^2 - \mu^2(1 + \eta^2)}}, \quad (5.27)$$

con  $\lambda_1 = \lambda_2^*$  y  $\Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) > 0$ . Está claro que para tener raíces con parte real positiva se requiere que  $|\mu| < \eta/\sqrt{1 + \eta^2}$ , nuevamente dentro de la brecha dinámica. Obtenemos las siguientes soluciones (el superíndice  $(i)$  indica que se trata de las soluciones en la región interior  $r < R$ ):

$$\begin{aligned} u_{1B}^{(i)} &= e^{i\theta} [d_1 \Pi_1 I_l(\lambda_1 k_0 r) + d_2 \Pi_2 I_l(\lambda_2 k_0 r)] \\ u_{0A}^{(i)} &= e^{i\theta} [d_1 I_l(\lambda_1 k_0 r) + d_2 I_l(\lambda_2 k_0 r)], \end{aligned} \quad (5.28)$$

donde los factores  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  está definidos como:

$$\Pi_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2}^2 + (1 + \mu)^2}{2\eta(1 + \mu)} \quad (5.29)$$

estas funciones satisfacen  $\Pi_1^* = \Pi_2$ . Las otras soluciones se obtienen rápidamente a partir de (5.17) usando las siguientes propiedades de las funciones modificadas de Bessel:

$$\begin{aligned} \frac{2l}{x} I_l &= I_{l-1} - I_{l+1} \\ 2 \frac{dI_l}{dx} &= I_{l-1} + I_{l+1}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

y de aquí se desprenden las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} p_+ e^{i\theta} I_l(\sigma r) &= -i \hbar \sigma e^{i(l+1)\theta} I_{l+1}(\sigma r) \\ p_- e^{i\theta} I_l(\sigma r) &= -i \hbar \sigma e^{i(l-1)\theta} I_{l-1}(\sigma r). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Usando estas propiedades en (5.17) se obtienen finalmente las soluciones en la región interior:

$$\begin{aligned} u_{1A}^{(i)} &= \frac{i}{1 - \mu} e^{i(l-1)\theta} [d_1 \Pi_1 \lambda_1 I_{l-1}(\lambda_1 k_0 r) + d_2 \Pi_2 \lambda_2 I_{l-1}(\lambda_2 k_0 r)] \\ u_{1B}^{(i)} &= e^{i\theta} [d_1 \Pi_1 I_l(\lambda_1 k_0 r) + d_2 \Pi_2 I_l(\lambda_2 k_0 r)] \\ u_{0A}^{(i)} &= e^{i\theta} [d_1 I_l(\lambda_1 k_0 r) + d_2 I_l(\lambda_2 k_0 r)] \\ u_{0B}^{(i)} &= \frac{-i}{1 + \mu} e^{i(l+1)\theta} [d_1 \lambda_1 I_{l+1}(\lambda_1 k_0 r) + d_2 \lambda_2 I_{l+1}(\lambda_2 k_0 r)] \end{aligned} \quad (5.32)$$

Ahora que ya poseemos las soluciones en cada una de las regiones, debemos imponer la condición de continuidad en  $r = R$ . Veremos que esta condición permite (como ya se hizo en capítulos anteriores), obtener relaciones para los coeficientes de reflexión en cada canal. En la siguiente sección abordamos este problema.

### 5.1.3. Coeficientes de reflexión, densidades y corrientes de probabilidad

En la sección anterior se obtuvieron las soluciones (5.14) y (5.32) para las regiones exterior e interior, respectivamente. Para asegurar la continuidad de la función de onda en cada uno de los canales impondremos condiciones de empate en  $r = R$  entre ambas soluciones. Esta condición debe ser válida para todo valor de  $l$  y  $\theta$ . Esto da como resultado un sistema de ecuaciones homogéneo  $\mathcal{S}\mathcal{V} = 0$  para los coeficientes presentes en dichas soluciones ( $\mathcal{V}$  es el vector formado por dichos coeficientes). Antes de ir más allá en este aspecto del problema veamos qué papel cumplen cada uno de los coeficientes en las soluciones (5.14) y (5.32) y de qué forma esto puede ayudarnos a reducir el sistema  $\mathcal{S}\mathcal{V} = 0$ .

Los coeficientes  $A_l$ ,  $B_l$ ,  $C_l$  y  $D_l$  de las funciones (5.14) admiten una interpretación simple en términos de las corrientes de probabilidad asociadas. Para notar esto basta considerar las formas asintóticas de las funciones de Hankel para argumentos grandes ( $x \gg 1$ ):

$$\begin{aligned} H_l^{(1)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - (l + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2})} \\ H_l^{(2)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - (l + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2})}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Podría pensarse en principio que las soluciones que poseen el factor  $H_l^{(1)}$  representan una onda dirigida en la dirección radial positiva (saliente), mientras que aquellas con  $H_l^{(2)}$  representan una onda en la dirección radial negativa (entrante). Sin embargo, esto sólo es cierto en el canal  $m = 0$ , mientras que en canal  $m = 1$  los papeles están invertidos. Esto se debe a la forma que adquiere la densidad de corriente radial en el límite asintótico y que está íntimamente asociada a la forma del espinor presente en las soluciones. En este caso será conveniente hacer la descomposición en componentes radial y transversal de la densidad de corriente  $\mathbf{J} = v_F \psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi$ :

$$\mathbf{J} = J_r \mathbf{e}_r + J_\theta \mathbf{e}_\theta, \quad (5.34)$$

Se puede probar fácilmente que cada término está dado por:

$$J_r = v_F \psi^\dagger \sigma_r \psi, \quad J_\theta = v_F \psi^\dagger \sigma_\theta \psi, \quad (5.35)$$

donde:

$$\sigma_r = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_\theta = i \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

A fin de aclarar los resultados que siguen vamos a descomponer las soluciones (5.14) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \begin{pmatrix} u_{1A} \\ u_{1B} \end{pmatrix} = e^{il\theta} (U_1 + V_1) \\ \phi_0 &= \begin{pmatrix} u_{0A} \\ u_{0B} \end{pmatrix} = e^{il\theta} (V_0 + U_0). \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$(5.38)$$

Los espinores  $U_0$ ,  $U_1$ ,  $V_0$  y  $V_1$  pueden deducirse de (5.14) y están dados por:

$$\begin{aligned} U_1 &= A_l \begin{pmatrix} ie^{-i\theta} H_{l-1}^{(1)}(k_0 r(1-\mu)) \\ H_l^{(1)}(k_0 r(1-\mu)) \end{pmatrix}, \quad V_1 = B_l \begin{pmatrix} ie^{-i\theta} H_{l-1}^{(2)}(k_0 r(1-\mu)) \\ H_l^{(2)}(k_0 r(1-\mu)) \end{pmatrix} \\ V_0 &= C_l \begin{pmatrix} H_l^{(1)}(k_0 r(1+\mu)) \\ ie^{i\theta} H_{l+1}^{(1)}(k_0 r(1+\mu)) \end{pmatrix}, \quad U_0 = D_l \begin{pmatrix} H_l^{(2)}(k_0 r(1+\mu)) \\ ie^{i\theta} H_{l+1}^{(2)}(k_0 r(1+\mu)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Usando estas expresiones podemos escribir la densidad de corriente de probabilidad (promediada en el tiempo) asociada a cada uno de estos espinores usando las formas asintóticas de las funciones de Hankel:

$$\begin{aligned} J_r(U_1) &\approx -\frac{4v_F}{\pi k_0 r(1-\mu)} |A_l|^2 \\ J_r(V_1) &\approx \frac{4v_F}{\pi k_0 r(1-\mu)} |B_l|^2 \\ J_r(U_0) &\approx -\frac{4v_F}{\pi k_0 r(1+\mu)} |D_l|^2 \\ J_r(V_0) &\approx \frac{4v_F}{\pi k_0 r(1+\mu)} |C_l|^2, \end{aligned} \quad (5.40)$$

y de aquí se puede deducir que los espinores  $V_0$  y  $V_1$  (asociados a los coeficientes  $C_l$  y  $B_l$ ) son salientes en los canales  $m = 0$  y  $m = 1$ , respectivamente. Llamemos a estos coeficientes  $r_0(l)$  y  $r_1(l)$ , en el mismo orden. La solución que acompaña a  $D_l$  es una onda incidente en el canal  $m = 0$  y se puede igualar a 1 sin pérdida de generalidad. A su vez hacemos  $A_l = 0$  ya que este coeficiente está asociado a una solución con flujo de corriente entrante (dirigido hacia el centro) pero en el canal  $m = 1$ , y sólo queremos soluciones que incidan desde el canal  $m = 0$ . De esta forma, el sistema de ecuaciones  $\mathcal{SV} = 0$  se reduce a un sistema no homogéneo de cuatro variables  $r_0(l)$ ,  $r_1(l)$ ,  $d_1$  y  $d_2$ . Los módulos al cuadrado de  $r_0(l)$  y  $r_1(l)$  se muestran en la figura 5.2 en función del parámetro  $l$ . Allí se observa una muy importante característica de los coeficientes  $r_0(l)$  y  $r_1(l)$  y es que tienden a valores constantes cuando el parámetro  $l$  cumple la condición  $l \gg k_0 R$ . Es decir:

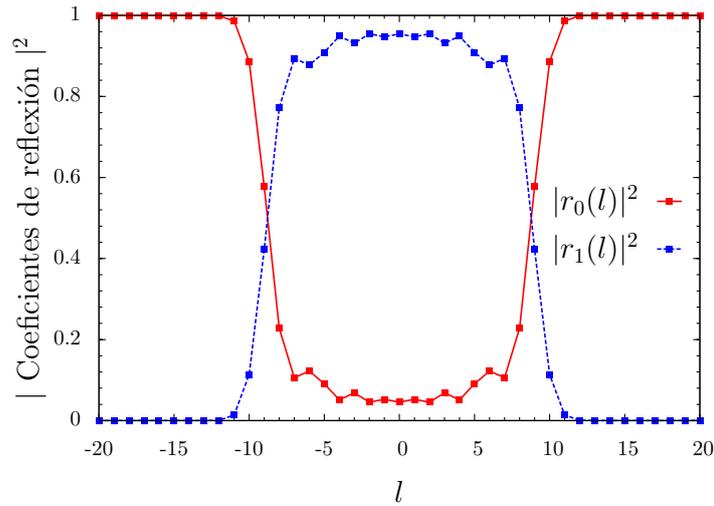
$$\begin{aligned} |r_1(l)| &\rightarrow 0 \\ |r_0(l)| &\rightarrow 1. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Podríamos estar tentados a identificar  $|r_0(l)|^2$  y  $|r_1(l)|^2$  con las reflectancias en cada canal, aunque un análisis más detallado muestra que esto no es exactamente así. Para ver esto usaremos la conservación de la corriente de probabilidad. La suma de las densidades (5.40) debe ser nula, de ahí se obtiene (recordando que  $A_l = 0$ ,  $D_l = 1$ ,  $B_l = r_1(l)$  y  $C_l = r_0(l)$ ):

$$|r_0(l)|^2 + \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) |r_1(l)|^2 = 1 \quad (5.42)$$

De aquí pueden definirse de manera obvia las reflectancias en los canales  $m = 0$  y  $m = 1$ :

$$R_0 = |r_0(l)|^2, \quad R_1 = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) |r_1(l)|^2, \quad (5.43)$$



**Figura 5.2:** Gráficas de los módulos al cuadrado de  $r_0(l)$  y  $r_1(l)$  en función de  $l$  con  $\mu = 0$ ,  $\eta = 0,23$  y  $k_0R = 8$ . En este caso se observa que estas cantidades tienden a valores constantes iguales a 1 y 0 respectivamente cuando  $|l| \gg k_0R$ . Aunque la figura corresponde al caso particular de  $\mu = 0$  los valores límite 1 y 0 se mantienen incluso para casos cuando  $\mu \neq 0$ .

que claramente satisfacen la relación  $R_0 + R_1 = 1$ . En particular, en el caso límite  $l \gg k_0R$  se tiene que (5.42) se satisface de manera trivial ya que  $|r_0(l)|^2 \rightarrow 1$  y  $|r_1(l)|^2 \rightarrow 0$ . Desde un punto de vista semiclassical, podemos considerar  $|l|/k_0$  como una forma de parámetro  $b$  de impacto en este modelo, entonces el resultado (5.41) puede explicarse ya que al ser el radio adimensional  $k_0R$  tan pequeño respecto de  $|l|$ , esto es equivalente a que  $b \gg R$ , y los electrones no impactan contra la región irradiada, es decir se dispersan totalmente en el canal  $m = 0$ , que es el canal por el que incidieron. Veamos si es posible recuperar los resultados obtenidos con el borde plano a partir de los obtenidos aquí. El límite de borde plano puede obtenerse haciendo  $k_0R \gg l$ . En esta aproximación podemos usar el siguiente límite asintótico para las funciones  $I_l$ :

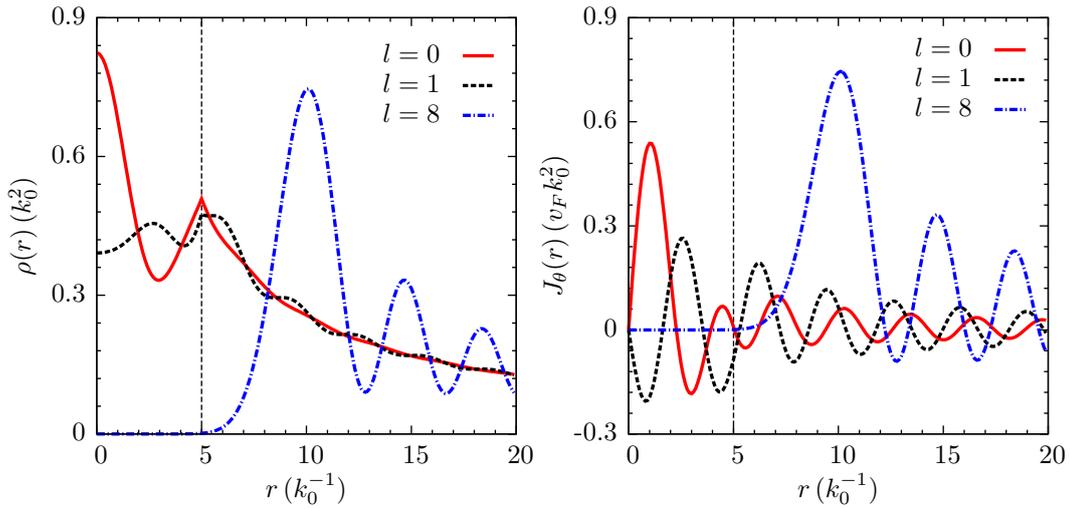
$$I_l(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad |z| \gg n \text{ y } |\arg(z)| < \pi/2. \quad (5.44)$$

Por simplicidad consideremos únicamente el caso  $\mu = 0$ . Luego de algunos cálculos obtenemos:

$$R_0 \approx \eta^2, \quad R_1 \approx 1 - \eta^2. \quad (5.45)$$

Este resultado coincide con el obtenido en el capítulo 2.

Pasemos a analizar la densidad de corriente. Esperamos observar la misma dependencia con el sentido de giro del campo  $\mathbf{A}(t)$  que encontramos en el caso del borde plano. Es de esperar además que las corrientes, tanto radial como transversal, no dependan de  $\theta$ . Se puede demostrar en particular que la componente radial (promediada en el tiempo) de la corriente es nula. En la figura figura 5.3 se muestran la densidad de probabilidad total en cada uno de los canales involucrados así como la componente transversal de la densidad de corriente de probabilidad. Se observa que existe una acumulación de carga en el interior de la región irradiada que alcanza un máximo en el origen para valores pequeños de  $l$ . Cuando  $l$  se hace más grande que  $k_0R$  la zona irradiada queda casi completamente vacía de electrones y además aparecen pronunciadas oscilaciones en la zona no irradiada.



**Figura 5.3:** Densidad de probabilidad (panel izquierdo) y componente transversal de la densidad de corriente (panel derecho), ambos promediados en el tiempo y en función de la distancia adimensional  $r$  al centro de la zona irradiada para tres valores diferentes del parámetro  $l$ . Se ha usado  $k_0 R = 5$  y la línea vertical punteada señala esta posición en ambos casos. Se nota que para valores pequeños de  $l$  existe un cierto confinamiento de carga dentro de la zona irradiada y un decaimiento fuera de ésta. Cuando  $l$  se hace más grande este confinamiento desaparece y se observan importantes oscilaciones en la zona exterior no irradiada. Un comportamiento similar se observa en la densidad de corriente. Se han usado  $\mu = 0$  y  $\eta = 0,23$ .

## 5.2. Dispersión de ondas planas

Pasemos ahora al problema inicial de una onda plana dispersándose en una región irradiada circular. En esta parte vamos a utilizar algunos de los resultados de la sección anterior, especialmente las soluciones obtenidas, con las cuales vamos a construir las soluciones en este caso. Nuestro principal interés será calcular la distribución angular de los electrones dispersados en cada canal, así como la respectiva densidad de probabilidad y corriente. Al determinar estas cantidades veremos una asimetría angular (particularmente en la densidad de probabilidad) en las regiones cercanas a la zona irradiada. Esta característica puede explicarse en una primera aproximación mediante el efecto Goos-Hänchen estudiado en el capítulo 3. Por otra parte, en lo que respecta a las cantidades calculadas en el límite asintótico, tales como la sección eficaz, observamos una completa simetría angular en torno a la dirección del haz incidente.

### 5.2.1. Funciones de onda de dispersión

Construyamos las soluciones para la ecuación de Schrödinger en este problema usando las soluciones (5.14) y (5.32). Vamos a tomar en este caso una onda incidente en la dirección  $\hat{x}$  (omitiendo la parte temporal):

$$\phi_{inc}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

Teniendo en mente las soluciones halladas en el capítulo anterior, podemos escribir la exponencial anterior en términos de las funciones de Bessel usando la expansión de

Jacobi-Anger:

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} i^l J_l(z) e^{il\theta}. \quad (5.47)$$

Supondremos además que la onda incidente está en el canal  $m = 0$ , por lo cual  $k = k_0(1 + \mu)$ . Entonces, usando (5.47) podemos escribir la función de onda incidente fuera de la región irradiada en el canal  $m = 0$  como:

$$\phi_{inc}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} i^l J_l(k_0 r(1 + \mu)) e^{il\theta}. \quad (5.48)$$

Esta onda plana es claramente una solución de la ecuación de Floquet en el canal  $m = 0$  y corresponde al primer término de  $\phi_0$  en la ecuación (2.3). La solución completa  $\phi_0$  en este canal sería la suma de la onda plana incidente (5.48) más una onda dispersada:

$$\phi_0 = \phi_{inc}(\mathbf{r}) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_0(l) e^{il\theta} \begin{pmatrix} H_l^{(1)}(k_0 r(1 + \mu)) \\ i e^{i\theta} H_{l+1}^{(1)}(k_0 r(1 + \mu)) \end{pmatrix}, \quad (5.49)$$

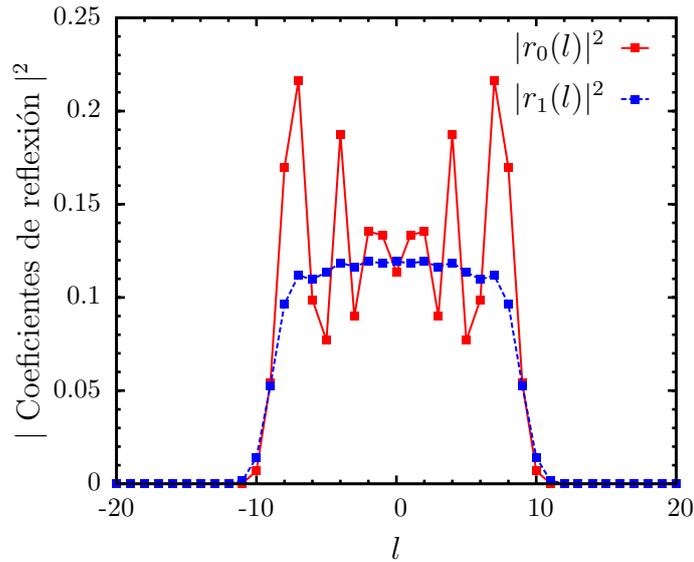
donde no debe confundirse el factor  $r_0(l)$  con el calculado en las secciones anteriores. La suma incluye todos los valores enteros de  $l$  ya que de acuerdo con (5.48) la onda plana incidente tiene infinitas contribuciones con diferentes valores enteros de  $l$ . Esto además será importante cuando querramos imponer la continuidad de la función de onda. En el canal  $m = 1$  podemos escribir una combinación lineal de las mismas soluciones (5.14) en las que hacemos  $A_l = 0$ , adelantándonos al hecho de que sólo queremos ondas incidentes en el canal  $m = 0$ . Si además denotamos  $B_l = r_1(l)$  tenemos:

$$\phi_1 = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_1(l) e^{il\theta} \begin{pmatrix} i e^{-i\theta} H_{l-1}^{(2)}(k_0 r(1 - \mu)) \\ H_l^{(2)}(k_0 r(1 - \mu)) \end{pmatrix}. \quad (5.50)$$

Las soluciones en la parte interior irradiada se tomarán como combinaciones lineales de las soluciones (5.32). Igual a como hicimos en ese caso, aquí cada componente espinorial de Floquet  $\phi_m(\mathbf{r})$  puede escribirse como  $[u_{mA}(\mathbf{r}), u_{mB}(\mathbf{r})]^T$  con  $m = 0$  ó  $1$ . Estas soluciones son:

$$\begin{aligned} u_{1A}^{(i)} &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{1 - \mu} e^{i(l-1)\theta} [d_1 \Pi_1 \lambda_1 I_{l-1}(\lambda_1 k_0 r) + d_2 \Pi_2 \lambda_2 I_{l-1}(\lambda_2 k_0 r)] \\ u_{1B}^{(i)} &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{il\theta} [d_1 \Pi_1 I_l(\lambda_1 k_0 r) + d_2 \Pi_2 I_l(\lambda_2 k_0 r)] \\ u_{0A}^{(i)} &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{il\theta} [d_1 I_l(\lambda_1 k_0 r) + d_2 I_l(\lambda_2 k_0 r)] \\ u_{0B}^{(i)} &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{1 + \mu} e^{i(l+1)\theta} [d_1 \lambda_1 I_{l+1}(\lambda_1 k_0 r) + d_2 \lambda_2 I_{l+1}(\lambda_2 k_0 r)]. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Donde las funciones  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  son las mismas que se definieron para el caso de las ondas isotrópicas. Igualando las soluciones (5.49), (5.50) y (5.51) en  $r = R$  para todos



**Figura 5.4:** Cuadrado del módulo de los coeficientes ( $|r_0(l)|^2$ ) y ( $|r_1(l)|^2$ ) en el problema de la dispersión de ondas planas. Se observa que ambos coeficientes tienden a cero cuando  $|l| \gg k_0 R$ , muy diferente de lo que se encontraba en el caso de dispersión con simetría circular. El cálculo se hizo para  $\mu = 0$  y  $\eta = 0.23$ .

los valores de  $\theta$  obtenemos las ecuaciones necesarias para calcular los coeficientes  $r_0(l)$  y  $r_1(l)$ . En la figura (5.4) se muestra el módulo al cuadrado de  $r_0$  y  $r_1$  en función de  $l$ . A diferencia del caso de las ondas con simetría circular vistas en la sección anterior, aquí vemos que ambos coeficientes  $r_0$  y  $r_1$  tienden a cero cuando  $|l| \gg k_0 R$ .

### 5.2.2. Límite asintótico $r \gg R$ y secciones eficaces

En esta parte calcularemos algunas cantidades en el límite asintótico  $r \gg R$ , en particular las secciones eficaces de dispersión en cada canal. Este cálculo se realiza suponiendo que tenemos un detector muy lejos de la región irradiada, es decir en el límite asintótico mencionado. La figura 5.4 muestra que los coeficientes  $r_0(l)$  y  $r_1(l)$  sólo son apreciablemente diferentes de cero dentro del rango aproximado  $-k_0 R \lesssim l \lesssim k_0 R$ , es decir que el parámetro adimensional  $k_0 R$  nos da un estimado del máximo de componentes  $l$  involucradas en el problema. En ese sentido, si bien el valor de  $k_0 R$  puede usarse para truncar la suma en las funciones de onda, aunque nosotros realizaremos un cálculo completo.

La forma asintótica de las soluciones salientes en los canales  $m = 0$  y  $m = 1$  (que se observan en las ecuaciones (5.49) y (5.50), respectivamente) pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (5.33), que dan el límite asintótico de las funciones de Hankel. Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{e^{ik_0 r(1-\mu)}}{\sqrt{r}} f_1(\theta) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} \\ e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \\ \phi_0 &= \frac{e^{ik_0 r(1+\mu)}}{\sqrt{r}} f_0(\theta) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} \\ e^{i\theta/2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

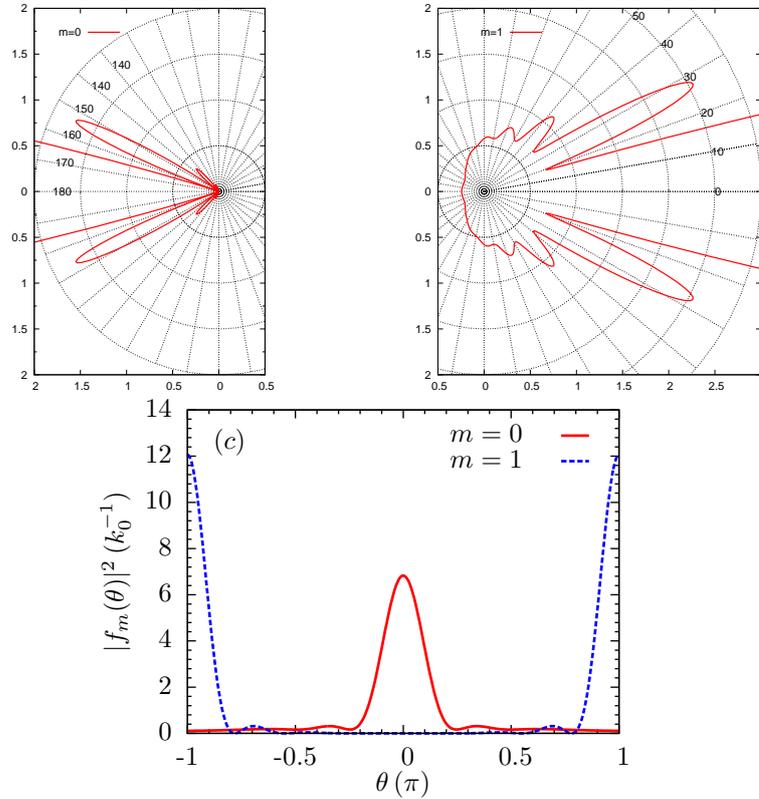
donde los espinores que acompañan a cada solución representan una onda moviéndose en la dirección radial saliente, es decir satisfacen  $J_r = 1$ , y donde las funciones  $f_1(\theta)$  y

$f_0(\theta)$  están dadas por:

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= \frac{2}{\sqrt{\pi(1-\mu)k_0}} e^{-i\theta/2} e^{i\pi/4} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_1(l) e^{il(\theta+\pi/2)}, \\ f_0(\theta) &= \frac{2}{\sqrt{\pi(1+\mu)k_0}} e^{i\theta/2} e^{-i\pi/4} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_0(l) e^{il(\theta-\pi/2)}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Ya que la flujo incidente está normalizado a 1, la sección eficaz diferencial puede calcularse a partir de las siguientes relaciones [24]:

$$\frac{d\sigma_m}{d\theta} = |f_m(\theta)|^2, \quad m = 0, 1, \quad (5.54)$$



**Figura 5.5:** En las figuras se muestra la dependencia angular (cerca del origen de coordenadas por claridad) de las secciones eficaces diferenciales en cada canal. En el panel izquierdo se aprecia claramente que la componente en el canal  $m = 1$  una sección eficaz no nula sólo en un entorno de  $\theta = \pi$  es decir en dirección opuesta al haz incidente, mientras que en el canal  $m = 0$  casi todas las partículas se dispersan hacia adelante (en ausencia de *backscattering*). (c) Sección eficaz diferencial en cada canal. Aquí se observa más claramente que los electrones en el canal  $m = 0$  atraviesan el obstáculo radiado y se mueven hacia adelante ( $\theta = \pi$ ), mientras que en el canal  $m = 1$  la mayoría de electrones se dispersan hacia atrás ( $\theta = \pi$ ).

para cada canal por separado. Resulta interesante estudiar el comportamiento de las secciones diferenciales eficaces en su dependencia angular ya que esto nos indica la proporción de electrones dispersados en determinadas direcciones. La figura 5.5.c muestra la dependencia de  $|f_0(\theta)|^2$  y  $|f_1(\theta)|^2$  en función de  $\theta$  en una gráfica lineal para  $k_0 R = 5$ .

Se observa una simetría respecto de la dirección  $\theta = 0$  y un máximo pronunciado en  $\theta = 0$  para el canal  $m = 0$ , mientras que otro importante máximo aparece en  $\theta = \pi$  (que es equivalente a  $-\pi$ ) en el canal  $m = 1$ . Estos resultados son fundamentalmente los mismos que obtuvimos para la pared plana (aunque en este último caso no había la posibilidad de transmisión hacia adelante), y son consecuencia de la inversión del pseudo-espín producida por el campo electromagnético. Hay que señalar que estos resultados son válidos cuando  $k_0 R \gg 1$  (en nuestro caso  $k_0 R = 5$ ). En el otro límite, cuando  $k_0 R \ll 1$ , se observa que tanto  $|f_0(\theta)|^2$  como  $|f_1(\theta)|^2$  varía débilmente con  $\theta$  (en particular  $|f_0(\theta)|^2 \approx 0$ ), y ninguna de estas dos cantidades presentan picos pronunciados como en el caso  $k_0 R \gg 1$ .

En las figuras 5.5.a y 5.5.b se muestra un detalle de  $|f_0(\theta)|^2$  y  $|f_1(\theta)|^2$  en una gráfica polar, en donde para cada canal se ve una serie de pequeños máximos o resonancias alrededor del máximo principal de 5.5.c. Creemos que estas resonancias podrían deberse a estados cuasi-ligados dentro de la región irradiada, como se señala en la referencia [22], aunque afirmar esto en nuestro caso requiere una mayor investigación.

A modo de referencia, señalamos que el cálculo de la sección eficaz total  $\sigma_m^T$  puede hacerse integrando sobre todos los valores de  $\theta$ . El resultado en función de los coeficientes  $r_1(l)$  y  $r_0(l)$  es:

$$\begin{aligned}\sigma_0^T &= \frac{8}{k_0(1+\mu)} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |r_0(l)|^2 \\ \sigma_1^T &= \frac{8}{k_0(1-\mu)} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |r_1(l)|^2.\end{aligned}\tag{5.55}$$

### 5.2.3. Densidades de probabilidad y corrientes de probabilidad

Los resultados anteriores conciernen al comportamiento de la función de onda en la región asintótica  $r \gg R$ . Ahí se vio que existe una cierta simetría angular alrededor de la dirección incidente. Además de esto podemos estudiar la distribución angular (y radial) de las densidades de probabilidad y corrientes de probabilidad de los electrones dispersados en un rango espacial más general, incluyendo zonas cercanas a la región irradiada. Veremos que en las cercanías de  $r = R$  surgen fenómenos interesantes relacionados al efecto Goos-Hänchen que vimos en el capítulo 3.

La densidad de probabilidad  $\rho$  promediada en el tiempo se obtiene como la norma de las funciones de onda para los canales  $m = 0$  y  $m = 1$  (existe un término de interferencia entre los canales  $m = 0$  y  $m = 1$  que se integra a cero al tomar el promedio temporal). Esto puede hacerse por separado y la densidad total sería la suma de ambas contribuciones. En particular, para la función de onda en el canal  $m = 1$  (la dispersada hacia atrás) tenemos:

$$\rho_1 = \rho_t^{cs} + \sum_k' \Omega_k e^{ik\theta}.\tag{5.56}$$

El apóstrofe en esta suma significa que el término  $k = 0$  está excluido. Aquí onde hemos

definido  $\rho_1^{cs}$  como la parte con simetría central de la densidad  $\rho_1$ :

$$\rho_1^{cs} = \sum_l |r_1(l)|^2 [ |H_{l-1}^{(1)}(s)|^2 + |H_l^{(1)}(s)|^2 ], \quad (5.57)$$

y además tenemos los coeficientes  $\Omega_k$  ( $s = k_0 r(1 - \mu)$ ):

$$\Omega_k = \sum_l r_1(l)^* r_1(k+l) [ H_{l-1}^{(1)}(s) H_{l+k-1}^{(2)}(s) + H_l^{(1)}(s) H_{l+k}^{(2)}(s) ]. \quad (5.58)$$

Es obvio por su misma definición que  $\rho_1$  es real y positiva, de aquí se deduce la siguiente propiedad para los  $\Omega_k$ :

$$\Omega_k = \Omega_{-k}^*. \quad (5.59)$$

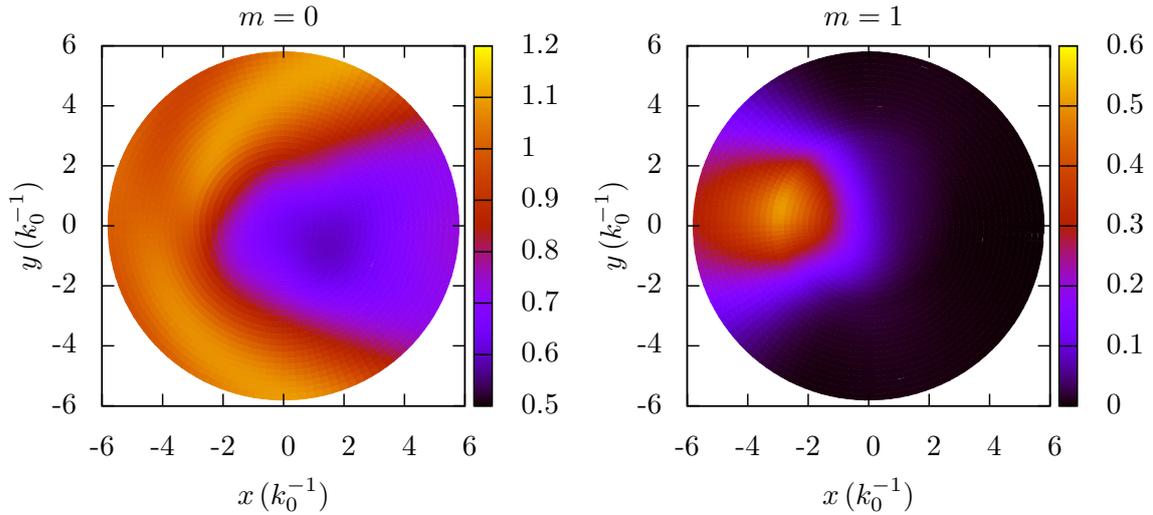
Esta propiedad también podría deducirse de la definición (5.58). Por otra parte, podemos expresar  $\rho_1$  en la ecuación (5.56) escribiendo  $\Omega_k$  en sus partes real e imaginaria y separando la suma de valores positivos y negativos de  $k$ , de manera que quede más explícita la dependencia respecto de  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_1^{cs} + \sum_{k=1}^{\infty} (\Omega_k + \Omega_{-k}) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} i(\Omega_k - \Omega_{-k}) \sen k\theta \\ &= \rho_1^{cs} + \sum_{k=1}^{\infty} (\Omega_k + \Omega_k^*) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} i(\Omega_k - \Omega_k^*) \sen k\theta \\ &= \rho_1^{cs} + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re(\Omega_k) \cos k\theta - \sum_{k=1}^{\infty} 2\Im(\Omega_k) \sen k\theta. \end{aligned} \quad (5.60)$$

La ecuación anterior muestra claramente que la densidad de probabilidad en este canal no tiene simetría alrededor de la dirección  $\theta = 0$  debido al último término en (5.60). Sin embargo, en el límite asintótico las funciones de onda sí tienen esta simetría, como se vio en el cálculo de las secciones eficaces, y por ello en estas condiciones la suma (5.60) se reduce a:

$$\rho_t(r \gg R, \mu = 0) = \rho_t^{cs} + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re(\Omega_k) \cos k\theta. \quad (5.61)$$

Es decir, en el límite asintótico las cantidades  $\Omega_k$  son reales. Hay que señalar que este resultado podría obtenerse escribiendo el límite asintótico de las funciones de Hankel en (5.58) y estudiando las simetrías presentes en  $r_1(l)$ . También se puede hacer un análisis similar con la probabilidad total en el canal  $m = 0$ , es decir tomando en cuenta la suma de la onda incidente (5.48) y la onda dispersada. Esto es adecuado ya que así se manifiesta claramente la continuidad de la función de onda, la cual no se vería si sólo graficáramos la componente dispersada en el canal  $m = 0$ . Las gráficas de densidad en los dos canales se muestran en la figura 5.6 para un radio adimensional  $k_0 R = 3$ ,  $\mu = 0$  y  $\eta = 0.14$ . En el canal  $m = 0$  se observa que existe una densidad de probabilidad casi homogénea fuera de la zona irradiada debida al fondo de probabilidad de la onda plana incidente, salvo en una región a la derecha del círculo  $k_0 R = 3$  (que define el borde la zona irradiada). Aquí la densidad es menor y se debe a la superposición de la onda plana incidente con los electrones dispersados en el canal  $m = 0$ , de aquí se deduce que

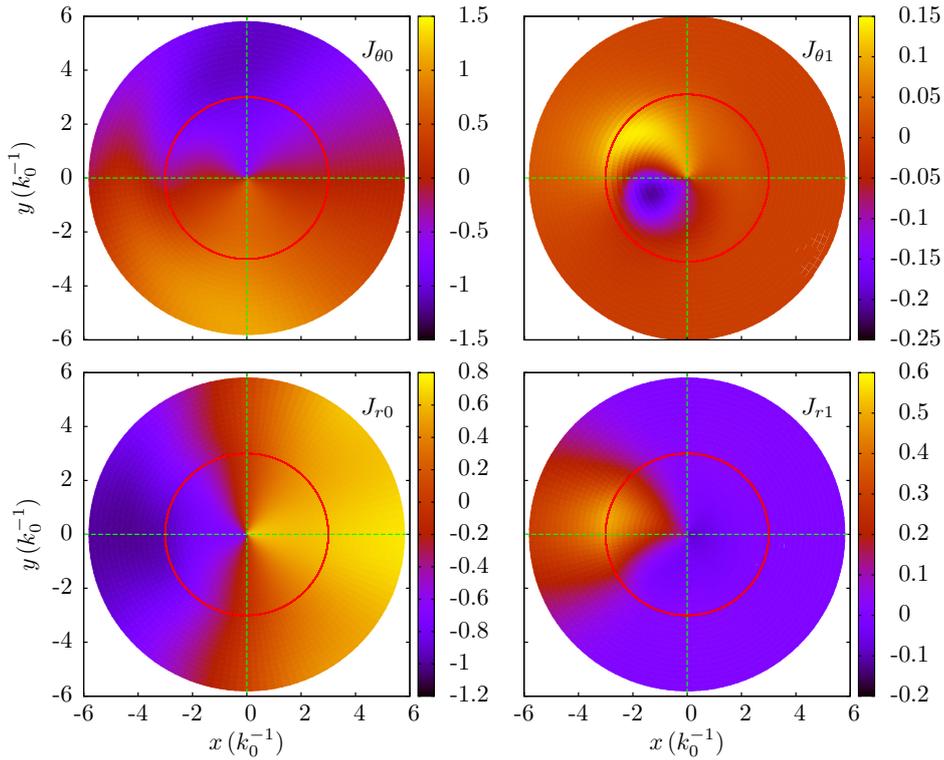


**Figura 5.6:** Densidad de probabilidad en los canales  $m = 0$  y  $m = 1$  en el problema de dispersión de una onda plana. Aquí se ve que en el canal  $m = 1$  la densidad de probabilidad es importante delante de la zona irradiada, como ya se había visto en el caso del borde plano. Esto indica que los electrones se dispersan en el canal  $m = 1$  hacia atrás. Detrás de la zona irradiada y en el canal  $m = 0$  hay un vacío respecto de la densidad de la onda incidente y se debe a la interferencia de esta onda con los electrones dispersados en este canal, que mayoritariamente se dispersan hacia adelante. Los parámetros usados fueron  $\eta = 0.14$ ,  $\mu = 0$  (centro de la brecha),  $k_0 R = 3$ .

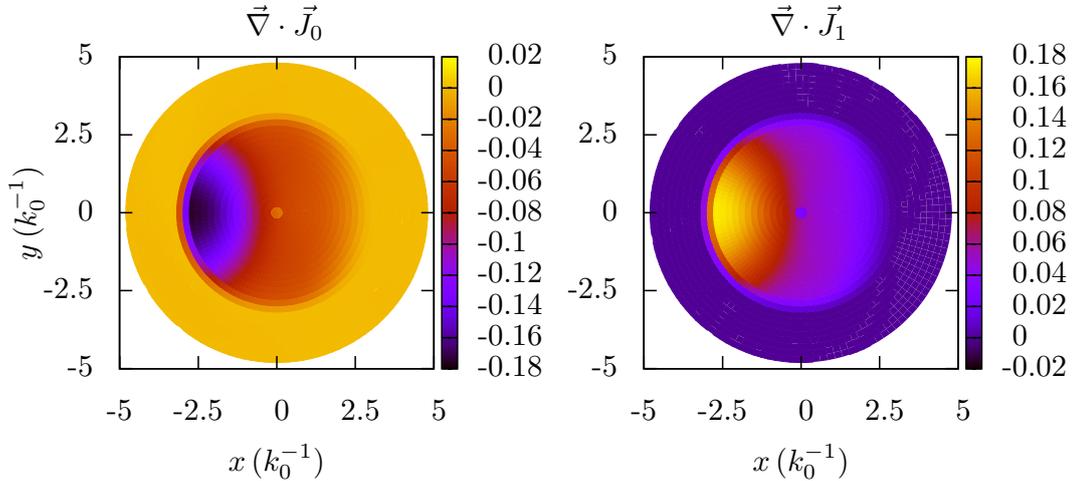
éstos se dispersan principalmente hacia adelante. Aquí no es posible hacer un completo paralelismo con el caso del borde plano ya que aquí sí hay la posibilidad de dispersión hacia adelante, que no había en el borde plano. En el canal  $m = 1$  la densidad es cero salvo en zonas detrás de la región irradiada. Esto es un indicador de que los electrones en este canal se dispersan principalmente hacia atrás. Éste sí es el mismo efecto que encontramos en el problema del borde plano.

Estos mismos resultados pueden deducirse también de la densidad de corriente fuera de la zona irradiada. En la figura 5.7 se muestran las componentes radiales  $J_r$  y transversales  $J_\theta$  en cada canal por separado. Recordando que la onda plana incide en la dirección  $+\hat{i}$ , vemos que las componentes del canal  $m = 0$  constituyen precisamente una onda de este tipo, con un vector densidad de corriente principalmente apuntando hacia a derecha, lo cual indica que las partículas dispersadas en este canal se mueven principalmente en esa dirección. Esto mismo se discutió al analizar el panel izquierdo de la figura 5.6. Por otro lado, en el canal  $m = 1$  se observan una importante componente radial positiva hacia atrás además de una marcada asimetría angular, a la que volveremos más adelante. Esta dispersión hacia atrás es el mismo efecto que señalamos en el caso del borde plano e indica un importante *backscattering* en este canal. Queda por analizar la variación de la componente transversal, que como puede verse cambia de signo aproximadamente a lo largo de la línea  $\theta = \pi$ .

También es posible analizar la corriente de probabilidad en términos de la divergencia de este campo. Éstas se muestran en la figura 5.8 para ambos canales.

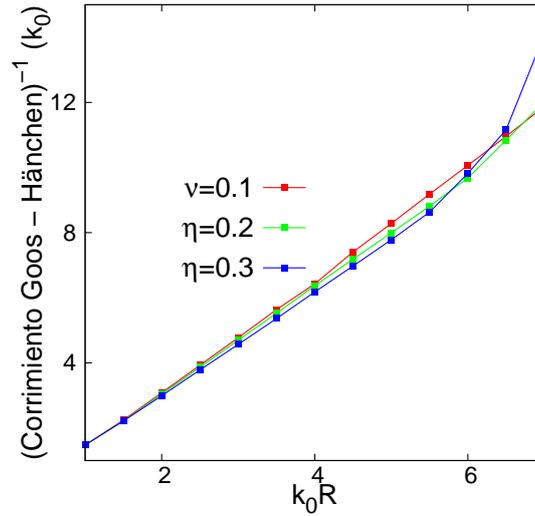


**Figura 5.7:** Densidades de corriente radial y transversal en los canales  $m = 0$  y  $m = 1$ . Los parámetros usados fueron  $\eta = 0.14$ ,  $\mu = 0$  (centro de la brecha) y  $k_0 R = 3$ . Los círculos rojos indican el borde de la zona irradiada y los electrones inciden desde la región  $x < 0$ . Estos resultados están en acuerdo con lo obtenido para las secciones diferenciales eficaces.



**Figura 5.8:** Divergencia de las corrientes de probabilidad  $\mathbf{J}_0$  y  $\mathbf{J}_1$  en cada canal. Los parámetros usados son los mismos que en 5.7.

Estas divergencias muestran la conversión de un canal en otro, es decir en la región donde la divergencia del canal  $m = 0$  es mínima negativa, la divergencia en el canal  $m = 1$  es máxima positiva. Las escalas de color en cada caso sugieren que la divergencia total es cero. Hay que resaltar que la divergencia no muestra las mismas asimetrías que se observaron en la densidad de probabilidad ni en la corriente. Pasemos ahora a estudiar las asimetrías encontradas en la densidad de probabilidad cerca de la zona irradiada y veamos su relación con el efecto Goos-Hänchen visto en el capítulo 3.



**Figura 5.9:** Inversa de los corrimientos Goos-Hänchen en función de  $k_0R$  para las ondas dispersadas (hacia atrás) en el canal  $m = 1$ . Se observa que dentro de un intervalo razonable de valores de  $k_0R$  este corrimiento es independiente de  $\eta$ .

#### 5.2.4. Corrimiento Goos-Hänchen en campo cercano: $r \gtrsim R$

Además de haber encontrado que la mayoría de electrones se dispersan hacia atrás en el canal  $m = 1$ , en la figura 5.6 se observa una ligera asimetría (respecto de  $\theta = 0$  para  $m = 0$  y  $\theta = \pi$  para  $m = 1$ ) en la densidad de probabilidad. Matemáticamente, esto es una consecuencia de la forma particular de la ecuación (5.60), donde los términos en  $\sin(k\theta)$  dan cuenta de la falta de simetría. Desde el punto de vista físico, esta asimetría puede explicarse (al menos en una primera aproximación) usando el efecto Goos-Hänchen visto en el capítulo 3. Haremos el análisis para el canal  $m = 1$ , donde según la figura 5.6 este efecto es ligeramente más fácil de observar. En esta primera aproximación nos centraremos en las ondas incidentes en una pequeña región angular en torno a  $\theta = \pi$ , de modo tal que podemos considerar esta región como si fuese plana y usar los resultados obtenidos en el capítulo 3 para la dispersión sobre borde plano. En particular, en este modelo sencillo la incidencia es normal, así que según los resultados para el borde plano el corrimiento Goos-Hänchen en el canal  $m = 1$  es:

$$\delta_1 \approx \frac{1}{k_0} \quad (5.62)$$

Si denotamos como  $\delta\theta_m$  la posición angular del máximo de densidad de probabilidad en el canal  $m = 1$  y en  $r = R$  (en el borde de la zona irradiada) y asociamos este máximo al desplazamiento de Goos-Hänchen, entonces podemos concluir que:

$$\delta\theta_m \approx \frac{1}{k_0R} \quad (5.63)$$

La expresión anterior es independiente de  $\eta$ , aunque esto es obvio ya que se obtuvo del resultado correspondiente para el borde plano, que a su vez es independiente de  $\eta$ . En la figura 5.9 se muestran los corrimientos angulares del máximo de probabilidad en el borde de la zona irradiada para tres diferentes valores de  $\eta$ . Hasta un valor de  $k_0R$  aproximadamente igual a 6 estos corrimientos son aproximadamente iguales para los tres valores de  $\eta$ . Esta independencia de  $\eta$  parece confirmar el origen del fenómeno como

---

producto del efecto Goos-Hänchen, ya que según lo visto en el capítulo 3, a incidencia normal el corrimiento Goos-Hänchen está dado por  $1/k_0$ .

# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo estudiamos varios aspectos relacionados con la interacción entre un campo electromagnético (un láser) descrito por un potencial vectorial  $\mathbf{A}(t)$  y electrones de Dirac que obedecen la ecuación (1.11), tomando al grafeno como modelo típico para este sistema. Si bien este problema es dependiente del tiempo, debido a la forma de la interacción  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(t)$ , dado que el vector  $\mathbf{A}(t)$  varía en forma armónica con el tiempo con una frecuencia angular  $\Omega$ , pudimos emplear el método de Floquet, que nos permitió pasar de un problema con dependencia temporal a otro independiente del tiempo en el que la función de onda se escribe como una superposición de diferentes componentes a las que llamamos *canales* de Floquet.

La aplicación de este método a nuestro problema nos llevó a una estructura de no equilibrio, o de cuasi-energías, en las que hallamos una brecha dinámica. En el caso del grafeno no irradiado se tocaban en puntos específicos de la primera zona de Brillouin. Esta brecha está centrada en  $\hbar\Omega/2$ , y su tamaño o ancho es proporcional a  $\eta \hbar\Omega$ , donde  $\eta$  es una cantidad adimensional directamente relacionada con la razón entre la intensidad del campo electromagnético y su energía. Muchos de los resultados que se obtuvieron posteriormente tienen una explicación en esta brecha dinámica.

El primer problema que abordamos fue la dispersión de electrones cuando éstos inciden, provenientes de una región de grafeno sin irradiar, contra una región irradiada, en particular sobre un borde plano. La motivación de este problema es que existen varios trabajos donde se estudian también la dispersión de electrones en grafeno pero al chocar contra barreras electrostáticas del tipo  $U = U_0$ , es decir se trata de potenciales que sólo suben o bajan el diagrama de bandas en una cantidad  $U_0$ . Allí se han encontrado fenómenos interesantes como la paradoja de Klein (la ausencia de dispersión hacia atrás o *backscattering*) y el corrimiento Goos-Hänchen (desplazamiento lateral, a lo largo del borde, de los haces reflejados). Nosotros quisimos estudiar de qué forma la radiación podría modificar estos resultados. Para introducirnos en el tema, inicialmente restringimos el problema a una incidencia normal y usamos una aproximación que consistía en trabajar únicamente en dos canales de Floquet, los  $m = 0$  y  $m = 1$ , aunque esta aproximación se mantendrá a lo largo de todo el trabajo. Esta aproximación se justifica ya que queremos estudiar la brecha dinámica formada por la degeneración entre ambos canales. Allí encontramos que, debido a que la interacción con el campo electromagnético permite transiciones entre los dos canales usados, los electrones dispersados hacia atrás estaban en su gran mayoría en el canal  $m = 1$ . Esto se entendió como producto de la inversión del pseudo-espín inducida por el campo láser. Para generalizar, incluimos la posibilidad de incidencia oblicua, donde obtuvimos algunas importantes

conclusiones, como que a incidencia casi paralela al borde ocurre lo contrario al caso de incidencia normal, esta vez las mayoría de electrones de dispersaban en el canal  $m = 0$  en lugar del  $m = 1$ , aunque esto podía entenderse por el hecho de que mientras más rasante es la incidencia, menos penetración en la zona irradiada hay, y por ello menos efecto del campo electromagnético, que es el que en última instancia induce el cambio en el pseudo-espín. Además, debido también a la inversión del pseudo-espín, el haz dispersado en el canal  $m = 1$  tiene una dirección tal que se superpone a la del haz incidente, justo cuando este último incide con una energía en el centro de la brecha dinámica. Para incidencias fuera del centro de esta brecha, el haz dispersado (en  $m = 1$ ) se dispersa ligeramente por encima o por debajo del incidente, dependiendo de si la energía de este último es mayor o menor a  $\hbar\Omega/2$  (centro de la brecha).

Como se mencionó en el párrafo anterior, usando haces de electrones (en lugar de ondas planas) se pudo observar, al menos teóricamente, un corrimiento en el haz dispersado. Este fenómeno, conocido desde inicios del siglo XX, se denomina efecto Goos-Hänchen. Para estudiarlo en grafeno irradiado usamos funciones de onda localizadas en la dirección transversal a su movimiento, es decir haces de electrones. Al observar los haces reflejados en cada canal se observó que aquí también hay un corrimiento lateral en el haz aunque con algunas anomalías no observadas en el caso electrostático. El haz dispersado en el canal  $m = 1$  se desplazaba en el mismo sentido independientemente de la dirección de incidencia, mientras no se cambiara el sentido de giro del campo vectorial. Diferentes sentidos de giro de  $\mathbf{A}(t)$  llevaban a corrimientos en sentidos opuesto en el haz reflejado. Calculando las corrientes de probabilidades generadas en la región irradiada observamos que éstas tienen la misma característica, y es que su sentido (siempre paralelo al borde) depende solamente del giro del campo vectorial. Para el haz dispersado en el canal  $m = 0$  no se pudo obtener un resultado tan concluyente puesto que allí se encontró que el sentido del corrimiento Goos-Hänchen cambia cuando el rayo incidente pasa a través de cierto ángulo crítico. Este mismo resultado, con diferencias en el tratamiento, fue encontrado en la referencia [12].

En conexión con estos resultados, también se estudió la formación de estados localizados quirales en las interfaces o bordes entre regiones irradiadas y no irradiadas. En concreto se usó un sistema formado por un “pozo” de grafeno no irradiado, rodeado de regiones irradiadas. Allí se encontraron estados localizados con una velocidad de grupo determinada por el sentido de giro relativo del campo vectorial a ambos lados de la parte no irradiada.

Finalmente, pasamos a una geometría más elaborada que consistía en una zona irradiada circular de radio  $R$ . Allí estudiamos la dispersión tanto de ondas de simetría circular como de ondas planas. En el caso circular las soluciones estaban etiquetadas por un número cuántico entero  $l$ , que podía interpretarse como una medida del parámetro de impacto de los electrones. Este número además nos daba una medida del grado de confinamiento de electrones en la zona irradiada: para valores grandes de  $l$  comparados con  $k_0R$  la zona irradiada está casi vacía de electrones y además se presentan fuertes oscilaciones en la densidad en la zona exterior. Luego pasamos a la dispersión de ondas planas y encontramos que en campo lejano (cuando se cumple  $r \gg R$ ), la distribución angular de los electrones dispersados es simétrica respecto de la dirección de incidencia, donde además vemos que la mayoría de electrones que se dispersan hacia atrás lo hacen en el canal  $m = 1$ . Sin embargo, esta simetría angular se pierde cuando vamos a zonas cercanas a la región irradiada. Esta ausencia de simetría en  $r \approx R$  se pudo explicar en una primera aproximación por el efecto Goos-Hänchen que encontramos en

el borde plano. Aquí también pudimos verificar algunos resultados hallados en capítulos anteriores como la dispersión hacia atrás de los electrones dispersados en el canal  $m = 1$  y hacia adelante para los electrones en  $m = 0$ .

En un trabajo futuro se pretende calcular el transporte de carga a través de zonas radiadas inhomogéneas (lo cual requiere de una técnica numérica compleja) basadas en las geometrías estudiadas aquí y analizar la manifestación de los fenómenos descritos en la conductancia, por ejemplo. Por otro lado, el análisis efectuado sirve como punto de partida para analizar casos (más realistas) donde la perturbación dependiente del tiempo no se encuentra presente en todo momento sino que lo hace en forma de pulsos (técnicas de *pump and probe*). En ese caso, si bien el tratamiento del problema es diferente ya que no puede hacerse utilizando la técnica de Floquet directamente, existen regímenes donde resulta útil partir de una interpretación “a lo Floquet” (el experimento de tr-Arpes en TI [11], es un ejemplo de ello).

# Bibliografía

- [1] Hasan, M. Z., Kane, C. L. Colloquium: Topological insulators. *Reviews of Modern Physics*, **82**, 3045, 2010.
- [2] König, M., Wiedmann, S., Brüne, C., Roth, A., Buhmann, H., Molenkamp, L. W., *et al.* Quantum Spin Hall Insulator State in HgTe Quantum Wells. *Science*, **318**, 766, 2007.
- [3] Kane, C. L., Mele, E. J. Quantum spin hall effect in graphene. *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 226801, 2005.
- [4] Rudner, M. S., Lindner, N. H., Berg, E., Levin, M. Anomalous Edge States and the Bulk-Edge Correspondence for Periodically Driven Two-Dimensional Systems. *Phys. Rev. X*, **3** (3), 031005, jul. 2013. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.3.031005>.
- [5] Kitagawa, T., Oka, T., Brataas, A., Fu, L., Demler, E. Transport properties of non-equilibrium systems under the application of light: Photo-induced quantum hall insulators without landau levels. *Phys. Rev. B*, **84** (1), 235108, abr. 2011. URL <http://arxiv.org/abs/1104.4636>.
- [6] Usaj, G., Perez-Piskunow, P. M., Foa Torres, L. E. F., Balseiro, C. a. Irradiated graphene as a tunable Floquet topological insulator. *Phys. Rev. B*, **90** (11), 115423, sep. 2014. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.90.115423>.
- [7] Perez-Piskunow, P. M., Usaj, G., Balseiro, C. a., Torres, L. E. F. F. Floquet chiral edge states in graphene. *Phys. Rev. B*, **89** (12), 121401, mar. 2014. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.89.121401>.
- [8] Cayssol, J., Dóra, B., Simon, F., Moessner, R. Floquet topological insulators. *Phys. Status Solidi RRL*, **7**, 101–108, 2013.
- [9] Lindner, N. H., Refael, G., Galitski, V. Floquet topological insulator in semiconductor quantum wells. *Nature Physics*, **7**, 490, 2011.
- [10] Dalibard, J., *et al.* Colloquium: Artificial gauge potentials for neutral atoms. *Rev. Mod. Phys.*, **83**, 1523, 2011.
- [11] Wang, Y. H., *et al.* Observation of Floquet-Bloch States on the Surface of a Topological Insulator. *Science*, **342**, 453, 2013.
- [12] Beenakker, C. W. J., Sepkhanov, R. a., Akhmerov, a. R., Tworzydło, J. Quantum Goos-Hänchen Effect in Graphene. *Phys. Rev. Lett.*, **102** (14), 146804, abr. 2009. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.146804>.

- [13] Wallace, P. R. The band theory of graphite. *Physical Review*, **71**, 622, 1947.
- [14] Katsnelson, M. I., Novoselov, K. S., Geim, A. K. Chiral tunnelling and the Klein paradox in graphene. *Nature Physics*, **2**, 620, 2006.
- [15] Castro Neto, A. H., Guinea, F., Peres, N. M. R., Novoselov, K. S., Geim, A. K. The electronic properties of graphene. *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 109, 2009.
- [16] Calvo, H. L., Foa Torres, L. E. F., Perez-Piskunow, P. M., Balseiro, C. a., Usaj, G. Floquet interface states in illuminated three-dimensional topological insulators. *Phys. Rev. B*, **91** (24), 241404, jun. 2015. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.91.241404>.
- [17] Goos, V. F., Hänchen, H. Ein neuer und fundamentaler versuch zur totalreflexion. *Annalen der Physik*, **436**, 333–346, 1947.
- [18] Jang, M. S., Kim, H., Atwater, H. A., , III, W. A. G. Time dependent behavior of a localized electron at a heterojunction boundary of graphene. *Applied Physics Letters*, **97**, 043504, 2010.
- [19] Lima, F., Dumelow, T., Albuquerque, E. L., Costa, J. A. P. Nonreciprocity in the Goos – Hänchen shift on oblique incidence reflection off antiferromagnets. **28** (2), 306–313, 2011.
- [20] Foa Torres, L. E. F., Perez-Piskunow, P. M., Balseiro, C. A., Usaj, G. Multi-terminal Conductance of a Floquet Topological Insulator. *Phys. Rev. Lett.*, **113**, 266801, 2014.
- [21] Perez-Piskunow, P. M., Foa Torres, L. E. F., Usaj, G. Hierarchy of Floquet gaps and edge states for driven honeycomb lattices. *Phys. Rev. A*, **91**, 043625, 2015.
- [22] Katsnelson, M. I., Guinea, F., Geim, A. K. Scattering of electrons in graphene by clusters of impurities. *Phys. Rev. B*, **79**, 195426, 2009.
- [23] Karch, J., Drexler, C., Olbrich, P., Fehrenbacher, M., Hirmer, M., Glazov, M. M., *et al.* Terahertz radiation driven chiral edge currents in graphene. *Physical Review Letters*, **107**, 276601, 2011.
- [24] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory. Course of Theoretical Physics, volume 3. Pergamon Press, 1977.

# Agradecimientos

A todas las personas que me apoyaron durante estos días: a mi familia, a mis amigos en Lima y en Bariloche, al Dr. Gonzalo Usaj por su paciencia y el conocimiento transmitido.