

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

Make Steve Valencia Paredes

**Coletor Piezoelétrico de Vibrações Estruturais com
Geometria Sanfonada: Análise Teórica e Experimental**

São Carlos

2020

Make Steve Valencia Paredes

**Coletor Piezoelétrico de Vibrações Estruturais com
Geometria Sanfonada: Análise Teórica e Experimental**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Dinâmica e Mecatrônica

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sergio Varoto

**São Carlos
2020**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

V235c Valencia Paredes, Make Steve
 Coletor Piezoelétrico de Vibrações Estruturais
 com Geometria Sanfonada: Análise Teórica e Experimental
 / Make Steve Valencia Paredes; orientador Paulo Sergio
 Varoto. São Carlos, 2020.

 Dissertação (Mestrado) - Programa de
 Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Área de
 Concentração em Dinâmica e Mecatrônica -- Escola de
 Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo,
 2020.

 1. Materiais piezoelétricos. 2. Vibrações
 mecânicas. 3. Análise modal. 4. Geração de energia em
 baixas frequências. 5. Ressonância. I. Título.

Make Steve Valencia Paredes

Coletor Piezoelétrico de Vibrações Estruturais com Geometria Sanfonada: Análise Teórica e Experimental

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Data de defesa: 27 de Abril de 2020

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Paulo Sergio Varoto
Orientador

Prof. Dr. Americo Barbosa da Cunha Junior
Convidado 1

Prof. Dr. Vitor Ramos Franco
Convidado 2

São Carlos
2020

*Este trabalho é dedicado à minha família, que me apoiou
constantemente para alcançar meus objetivos.*

AGRADECIMENTOS

Eu quero agradecer a Deus por estar presente ao longo da minha vida me encaminhando, acompanhando e ajudando a escolher as melhores decisões.

Ao Prof. Dr. Paulo Sergio Varoto, pela confiança, por ter me aceitado e orientado no processo de desenvolvimento deste trabalho.

A minha família, que é o sustento da minha vida. *Gracias Karina, Mikeyla y Madisson por todo el amor, dedicación paciencia. Gracias padres queridos, Alfonso y Nelly, por estar siempre en el tiempo oportuno. Gracias hnos Marco, Jorge y Geofred por sus consejos y enseñanzas que sigo aprendiendo. Gracias familia.*

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro para a realização desta pesquisa.

“Os ideais que iluminaram meu caminho, e que várias vezes me deram coragem para enfrentar a vida com alegria, foram bondade, beleza e verdade. Sem o sentido de bondade, sem preocupação com o mundo objetivo – o eternamente inalcançável no campo da arte e dos esforços científicos – a vida pareceria vazia para mim. Os objetivos banais dos esforços humanos – posse, ostentação e luxo – sempre me pareceram desprezíveis.”

Albert Einstein

RESUMO

PAREDES, M. S. V. **Coletor Piezoelétrico de Vibrações Estruturais com Geometria Sanfonada: Análise Teórica e Experimental**. 2020. 109p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

No contexto geral da piezoeletricidade, o modelo estrutural conhecido como *cantilever* tem sido usado no projeto e otimização de dispositivos à conversão de sinais de vibração estrutural em energia elétrica. Avanços tecnológicos recentes, principalmente na área de micro-sistemas exigem dispositivos cada vez menores e geralmente mais rígidos, o que inevitavelmente tende a aumentar sua frequência natural fundamental, podendo esta situar-se fora da faixa de frequências de interesse, limitando a utilização do modelo *cantilever*. Para atender às exigências simultâneas de baixo volume e rigidez, busca-se desenvolver coletores que *cantilever* apresentem características geométricas inovadoras, possibilitando alcançar-se valores adequados para as frequências naturais do dispositivo. Neste sentido, este trabalho consiste em desenvolver e comparar modelos matemáticos de coletores piezoelétricos de energia de acordo com uma configuração geométrica conhecida como *fan-folded* ou simplesmente configuração *dobrada em leque*. A idéia é combinar vigas piezoelétricas através de elementos de ligação que teoricamente obedeçam o modelo *cantilever* tal que a montagem resultante possua rigidez equivalente resultando em frequências naturais mais baixas. Assim, quanto maior o número de vigas presentes na montagem, mais flexível será o dispositivo sem acarretar aumento substancial de volume ao mesmo. Modelos eletromecânicos contínuos, utilizando as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko juntamente modelos em elementos finitos são formulados para diversas configurações geométricas consideradas. Os modelos eletromecânicos são utilizados em simulações em ambiente MATLAB e os resultados obtidos para as funções de resposta em frequência (FRF) eletromecânicas são comparados aos correspondentes resultados oriundos das simulações através do método de elementos finitos, bem como a resultados experimentais de ensaios em protótipos construídos para tal fim. Busca-se, então, comparar os modelos de viga utilizados para indicar possíveis melhorias das configurações geométricas dos geradores piezoelétricos. Verifica-se melhores resultados com o modelo de Timoshenko em comparação ao modelo de Euler-Bernoulli, subsidiados pelos resultados experimentais, permitindo assim desenvolvimentos futuros de geradores de tamanho reduzido, incluindo para tanto a possibilidade do uso de técnicas de manufatura aditiva na construção de tais dispositivos.

Palavras-chave: Materiais piezoelétricos. Geração de energia em baixas frequências. Análise modal. Ressonância. Vibrações mecânicas.

ABSTRACT

PAREDES, M. S. V. **Piezoelastic Fan-Folded Structural Vibration Energy Harvester: Theoretical and Experimental Analysis**. 2020. 109p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

In the general context of piezoelectricity, the structural model known as *cantilever* has been widely used in the design and optimization of devices dedicated to the conversion of structural vibration signals into usable electrical energy. Technological advances, especially in the area of micro-systems, demand smaller, lighter and generally more rigid devices, which inevitably tend to increase their fundamental natural frequency, which may fall outside the frequency range of interest, often limiting the use of the cantilever model. In order to meet the simultaneous requirements of reduced volume and stiffness, efforts are taken to develop harvesters that, while still using the cantilever model, possess innovative geometric characteristics, allowing, through the geometry, suitable values for the harvester's natural frequencies. In this sense, this work consists of developing and comparing mathematical models of piezoelectric energy collectors according to a geometric configuration known as *fan-folded*. The idea is to combine multiple piezoelectric beams through connection elements that, theoretically, follow the cantilever model such that the assembly offers adequate values of equivalent stiffness resulting in natural frequencies in the frequency range of interest. Thus, the greater the number of beams present in the assembly, the more flexible the device tend to be without causing a substantial increase in volume. Electromechanical continuous models using the theories of Euler-Bernoulli and Timoshenko, along with finite element models are formulated for several geometric configurations considered in the study. The continuous electromechanical models are used in simulations in MATLAB environment and the results obtained for the electromechanical frequency response functions (FRF) are compared to the corresponding results from finite element simulations, as well as to experimental results from tests in prototypes built for this purpose. The goal is to compare the beam models used to indicate possible improvements in the geometric configurations of the piezoelectric generators. It is seen that, according to experimental data, better results are obtained with the Timoshenko model compared to the Euler-Bernoulli model, thus allowing future developments of small size generators, including the possibility of using additive manufacturing techniques in the construction of such devices.

Keywords: Piezoelectric materials. Energy harvesting in low frequency. Modal analysis. Resonance. Structural vibration, .

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Relação entre os domínios elétrico, térmico e mecânico. Fonte: adaptado de Leo (2007)	21
Figura 2 – Ilustração do processo de conversão eletro-mecânica de energia usando materiais piezoelétricos	22
Figura 3 – Principais fontes alternativas de energia e custos comparação de técnicas: (a) fontes alternativas de energia; (b) principais técnicas de conversão e comparação de custos (extraído de <i>Energy Harvesting and Storage for Electronic Devices 2009-2019, IDTechEx</i>)	23
Figura 4 – Comparação entre domínios para coleta de energia e outras fontes renováveis de energia (extraído de http://www.global.tdk.com/techmag/knowledgebox/vol1.htm)	24
Figura 5 – Coletor piezoelétrico em geometria sanfonada, composto a partir de vigas recobertas com material piezoelétrico e ligadas por massas de conexão. Fonte: autor	26
Figura 6 – Estrutura <i>fan-folded</i> de 5 vigas. Fonte: Autor.	35
Figura 7 – Modelo geométrico de viga cantiléver. Fonte: Autor.	37
Figura 8 – Deformações de flexão e cisalhamento: (a) elemento sem deformação; (b) Elemento com só deformação de cisalhamento; (c) elemento com só deformação de flexão; (d) elemento com deformação total. Fonte: Rao (2007)	38
Figura 9 – Diagrama de um elemento diferencial de viga. Fonte: (LEISSA; QATU, 2011)	39
Figura 10 – Modelo geométrico do gerador piezoelétrico <i>fan-folded</i> a ser estudado.	42
Figura 11 – Modelo geométrico de um sistema com duas vigas.	43
Figura 12 – Características geométricas da secção transversal da viga composta.	45
Figura 13 – Segmento da camada piezoelétrica descrita pela função degrau.	47
Figura 14 – Modos de vibrar da estrutura <i>fan-folded</i> usando ANSYS para (a) 1 viga (b) 2 vigas (c) 3 vigas e (d) 4 vigas.	78
Figura 15 – Resposta em frequência da estrutura <i>fan-folded</i> com parâmetros de experimento 1 para (a) 1 viga (b) 2 vigas (c) 3 vigas e (d) 4 vigas.	80
Figura 16 – Resposta em frequência da estrutura <i>fan-folded</i> com parâmetros de experimento 2 para (a) 1 viga (b) 2 vigas (c) 3 vigas e (d) 4 vigas.	81
Figura 17 – Validação estrutural <i>fan-folded</i> de 1 vigas.	83
Figura 18 – Validação estrutural <i>fan-folded</i> de 2 vigas.	84
Figura 19 – Validação estrutural <i>fan-folded</i> de 3 vigas.	84
Figura 20 – Validação estrutural <i>fan-folded</i> de 4 vigas.	85

Figura 21 – Aceleração da massa na extremidade por aceleração da base. Validação do experimento 2 <i>fan-folded</i> de 1 viga.	85
Figura 22 – Aceleração da massa na extremidade por aceleração da base. Validação do experimento 2 <i>fan-folded</i> de 2 vigas.	86
Figura 23 – Aceleração da massa na extremidade por aceleração da base. Validação do experimento 2 <i>fan-folded</i> de 3 vigas.	86
Figura 24 – Aceleração da massa na extremidade por aceleração da base. Validação do experimento 2 <i>fan-folded</i> de 4 vigas.	87
Figura 25 – Tensão elétrica por aceleração da base. Validação do experimento 2 <i>fan-folded</i> de 1 viga.	87
Figura 26 – Tensão elétrica por aceleração da base. Validação do experimento 2 <i>fan-folded</i> de 2 vigas.	88
Figura 27 – Tensão elétrica por aceleração da base. Validação do experimento 2 <i>fan-folded</i> de 3 vigas.	88
Figura 28 – Tensão elétrica por aceleração da base. Validação do experimento 2 <i>fan-folded</i> de 4 vigas.	89
Figura 29 – Características geométricas (a) com massa e subestrutura na extremidade e (b) com massa equivalente.	105
Figura 30 – Características geométricas (a) com massa e subestrutura na conexão e (b) com massa equivalente.	107
Figura 31 – Características geométricas (a) da viga composta (b) da secção transversal da viga composta.	109

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros geométricos de experimento 1	78
Tabela 2 – Parâmetros geométricos de experimento 2	79
Tabela 3 – Propriedades estruturais e eletromecânicas	79
Tabela 4 – Frequências sem camada de PZT, para os dados do experimento 1 . . .	82
Tabela 5 – Frequências sem camada de PZT, para os dados do experimento 2 . . .	82
Tabela 6 – Frequências com camada de PZT, para os dados do experimento 2 . . .	83

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Justificativa e Motivação	24
1.2	Objetivo	25
1.2.1	Objetivo Geral	25
1.2.2	Objetivos Específicos	25
1.3	Organização da Dissertação	26
2	REVISÃO DE LITERATURA	29
3	DESENVOLVIMENTO DE MODELO ANALÍTICO	35
3.1	Modelo Estrutural	36
3.1.1	Modelo de Viga Cantiléver	36
3.1.2	Modelo de Estrutura Fan-Folded usando teoria de Euler-Bernoulli	41
3.1.3	Modelo de Estrutura Fan-Folded usando teoria de Timoshenko	54
3.2	Modelo Eletromecânico	67
3.2.1	Modelo Eletromecânico usando teoria de Euler-Bernoulli	68
3.2.2	Modelo Eletromecânico usando teoria de Timoshenko	72
3.3	Funções no Domínio de Frequência	73
3.3.1	Funções de resposta usando teoria de Euler-Bernoulli	74
3.3.2	Funções de resposta usando teoria de Timoshenko	75
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	77
4.1	Simulação Numérica	77
4.1.1	Funções de Resposta em Frequência	77
4.2	Avaliação Experimental	81
5	CONCLUSÕES	91
5.1	Trabalhos Futuros	92
	REFERÊNCIAS	93
	APÊNDICES	101
	APÊNDICE A – FORMULAÇÃO DE PROPRIEDADES EQUIVA- LENTES DE MASSA E RIGIDEZ	103

APÊNDICE B – DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS GEOMÉ- TRICOS DA MASSA NA EXTREMIDADE	105
APÊNDICE C – DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS GEOMÉ- TRICOS DAS MASSAS NA CONEXÃO	107
APÊNDICE D – DETERMINAÇÃO DO EIXO NEUTRO DA SEC- ÇÃO TRANSVERSAL DA VIGA	109

1 INTRODUÇÃO

Avanços científicos recentes utilizando os chamados *materiais inteligentes* (originalmente da língua inglesa *smart materials*) (LEO, 2007) tem proporcionado o surgimento de novas tecnologias em diversas áreas da engenharia contemporânea. Tais materiais possuem propriedades que permitem vários efeitos de transdução, conforme ilustrado na Figura 1, dos quais se destaca a relação de transdução entre os domínios mecânico e elétrico que é realizada pelos chamados materiais piezoelétricos (IEEE, 1988), podendo o efeito da transdução ocorrer do domínio mecânico para o elétrico e vice versa. Os materiais piezoelétricos se enquadram na classificação geral de material inteligente e que possuem a capacidade de gerar cargas elétricas quando submetidas à esforços dinâmicos. Assim, se tais esforços forem oriundos de sinais de vibração estrutural, como ilustrado na Figura 1, o dispositivo que contém o material piezoelétrico é capaz de fornecer cargas elétricas que, se processadas através de um circuito elétrico apropriado pode fornecer uma determinada quantidade de energia na forma de uma diferença de potencial (tensão) elétrica e conseqüentemente ser armazenada para uso posterior, ou usada diretamente em outra aplicação. Tal processo recebe o nome de *Colheita, (Coleta ou Geração) Piezoelétrica de Energia Vibratória* ou *Piezoelectric Vibration Energy Harvesting*. O processo de coleta piezoelétrica de energia está ilustrado na Figura 2.

Levando-se em conta que o fenômeno da vibração mecânica é inerente a todos os sistemas

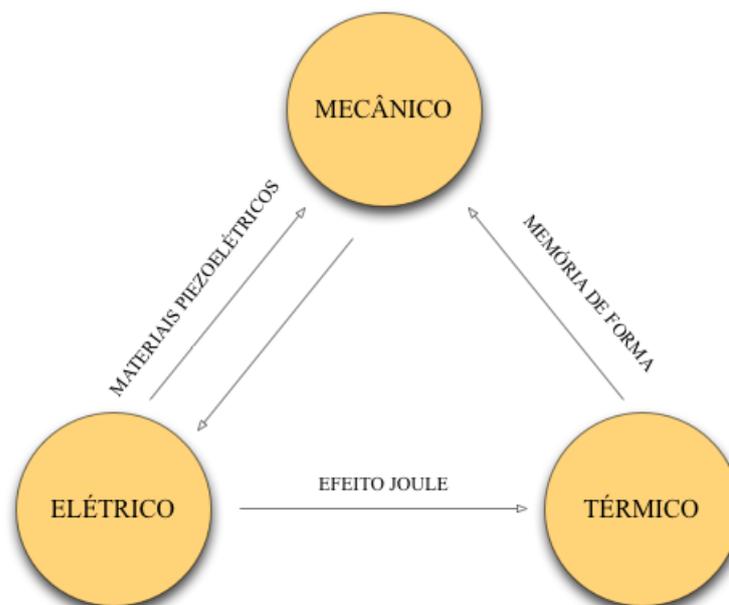


Figura 1: Relação entre os domínios elétrico, térmico e mecânico. Fonte: adaptado de Leo (2007)

estruturais e até mesmo àqueles de natureza biológica, o conceito descrito se apresenta como uma opção extremamente atraente, principalmente para o caso de equipamentos eletrônicos de pequeno porte, tais como sensores, redes de sensores, sistemas de monitoramento da saúde estrutural (*SHM*), e ainda dispositivos biomédicos como é o caso de marca passos cardíacos (ANSARI; KARAMI, 2016). Nestas aplicações, o uso da energia elétrica proveniente da conversão piezoelétrica não necessariamente substitui por completo as baterias ou outras fontes de alimentação, mas pode contribuir para a diminuição do volume das mesmas ou simplesmente ser usada como fonte de carregamento das baterias, reduzindo-se assim as eventuais e necessárias cargas adicionais que tais dispositivos portáteis usualmente requerem. É importante salientar que sinais de vibração estrutural conhecidos como ambientais, por exemplo, decorrentes de vibração de estruturas civis (pontes e edifícios), máquinas em geral (veículos terrestres e aeronaves) e do próprio corpo humano (o batimento cardíaco) diferem em sua natureza temporal, requerendo então atenção especial durante o processo de conversão eletromecânica (ANTON; SODANO, 2007).

Embora a Figura 2 ilustre o processo de conversão de energia a partir de sinais de

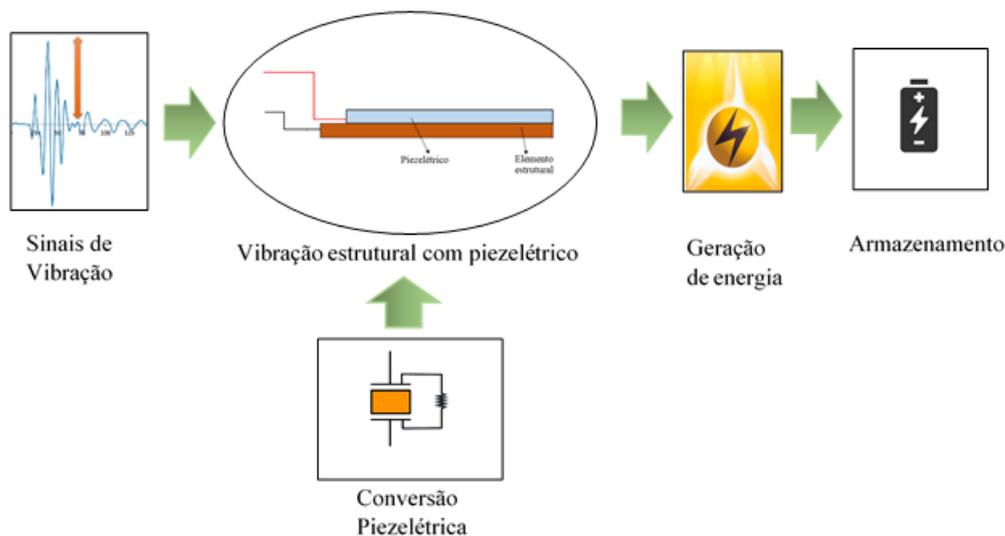


Figura 2: Ilustração do processo de conversão eletro-mecânica de energia usando materiais piezoelétricos

vibração estrutural, várias outras fontes de energia podem ser consideradas (HARROP; DAS, 1988), como por exemplo térmica, eólica, solar, das marés, etc. No caso específico da vibração estrutural os fatores determinantes para o projeto e construção de dispositivos de conversão e armazenamento da energia proveniente da energia cinética estrutural envolvem o conhecimento detalhado das características dos sinais pertinentes ao fenômeno físico em estudo (frequências, amplitudes, etc) (ERTURK; INMAN, 2011b). Portanto, entende-se que a natureza do sinal vibratório possui uma grande influência no processo de conversão, já que sinais periódicos geralmente possuem características de amplitude e frequência bem

definidas, enquanto que sinais aleatórios apresentam características particulares diferentes dos primeiros.

Na Figura 3(a), é apresentada uma comparação da potência obtida a partir de diversas fontes de energia, onde é possível observar que uma das principais fontes de energia alternativa são obtidas das vibrações estruturais. Embora como já mencionado a vibração estrutural seja uma forma de energia amplamente disponível na natureza, somente mais recentemente, através das técnicas de transdução, com especial destaque aos materiais piezoelétricos, tem sido possível o aproveitamento dessa energia em diferentes aplicações. Destaca-se que, a transdução piezoelétrica não é um fenômeno novo, pois seu uso em sensores do tipo acelerômetros piezoelétricos já vem sendo empregada a várias décadas (MCCONNELL; VAROTO, 2008).

Na figura 3(b) se apresenta uma comparação entre várias formas de transdução de energia

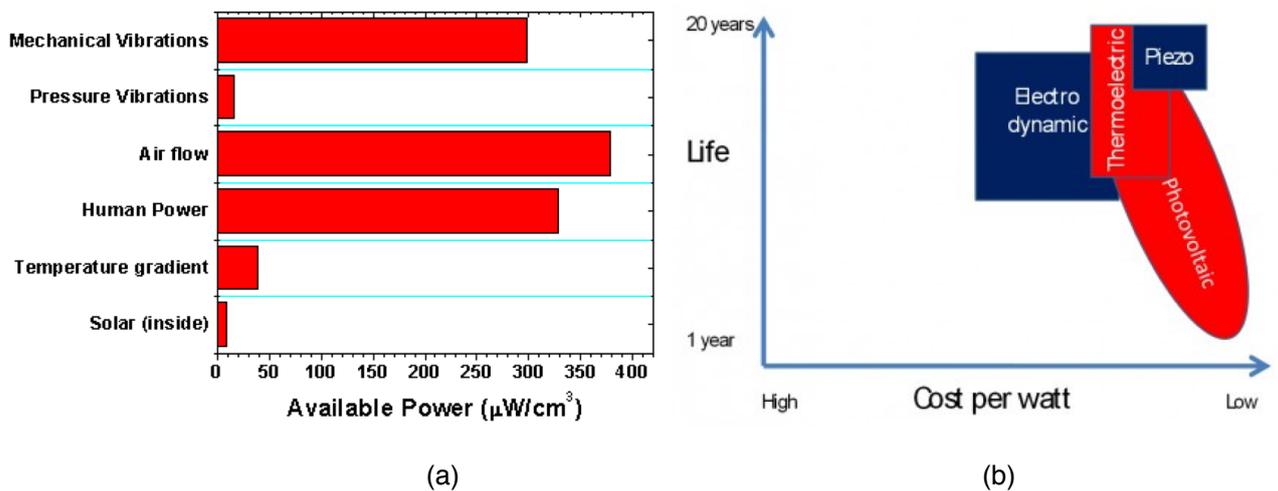


Figura 3: Principais fontes alternativas de energia e custos comparação de técnicas: (a) fontes alternativas de energia; (b) principais técnicas de conversão e comparação de custos (extraído de *Energy Harvesting and Storage for Electronic Devices 2009-2019*, IDTechEx)

e, dentre elas figura a transdução piezoelétrica. A figura fornece uma idéia qualitativa do tempo de vida de dispositivos transdutores de energia com base em vários efeitos físicos em função do custo da energia gerada. Nota-se que a transdução piezoelétrica apresenta uma excelente relação entre a previsão de vida versus custo energético quando comparada a outras formas de transdução (eletrodinâmica, fotovoltaica, etc) sendo mais um fator a contar de forma positiva a favor desta modalidade de conversão energética. Enquanto aspectos negativos ao uso da conversão piezoelétrica figuram ainda o custo das cerâmicas piezoelétricas, que ainda é relativamente alto para fomentar uma massificação de seu uso, a pequena quantidade de energia elétrica gerada pelo material piezoelétrico em comparação por exemplo com outras formas de conversão já em processo de consolidação enquanto

tecnologias disponíveis (solar, eólica, por exemplo), embora neste quesito, se o uso da conversão piezoelétrica for considerada para fins de alimentação de eletrônica de pequeno porte, como já citado, os materiais piezoelétricos possuem destaque em relação às possíveis aplicações. Outro fator ainda detrimental ao uso das cerâmicas piezoelétricas é o fato de, a maioria delas serem compostas a partir do denominado PZT (Titanato Zirconato de Chumbo), podendo apresentar aspectos nocivos ao meio ambiente. Este aparente problema pode, em princípio, ser solucionado mediante o uso de técnicas de encapsulamento do material piezoelétrico no volume do coletor piezoelétrico (ERTURK; INMAN, 2011b; HANNAN et al., 2014; MITCHESON, 2010).

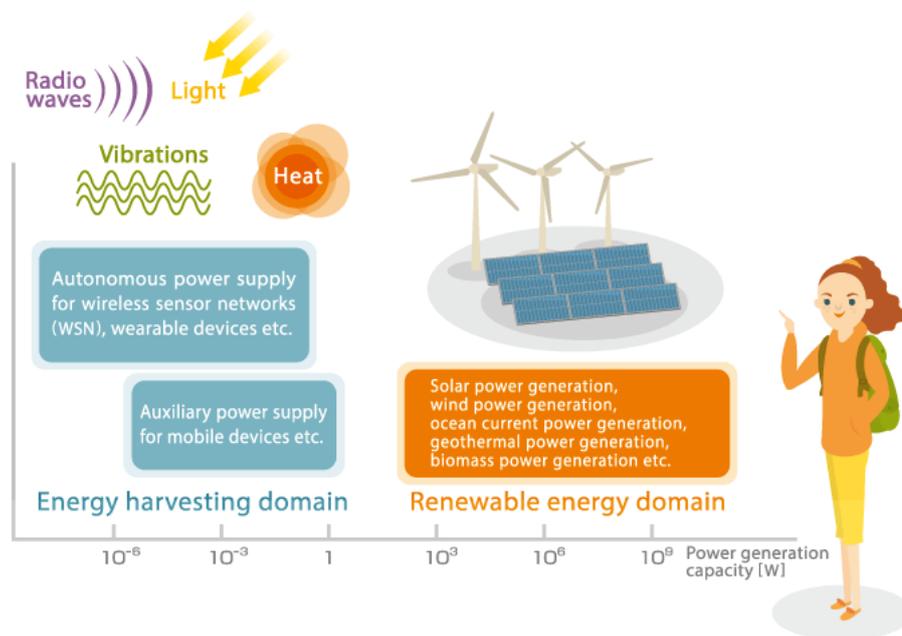


Figura 4: Comparação entre domínios para coleta de energia e outras fontes renováveis de energia (extraído de <http://www.global.tdk.com/techmag/knowledgebox/vol1.htm>)

A figura 4 estabelece uma relação conceitual interessante entre fontes renováveis de energia e o conceito de coleta piezoelétrica. Novamente, observa-se que a fonte de energia oriunda de sinais de vibração estrutural é classificada como de baixa potência elétrica, justificando novamente sua aplicação a eletrônica de baixo porte, conforme apontado no parágrafo precedente.

1.1 Justificativa e Motivação

O presente projeto de pesquisa se alinha com a crescente demanda por fontes alternativas de energia, principalmente quanto ao aproveitamento da energia mecânica proveniente de sinais de vibração que são inerentes à todas as estruturas flexíveis. Portanto, a principal justificativa para a presente proposta está diretamente relacionada ao

desenvolvimento de tecnologias que possibilitem o aproveitamento de fontes alternativas de energia para a geração de energia elétrica.

A execução do projeto certamente contribuirá para a formação acadêmica enquanto atividade extra-curricular, bem como possibilitará a inserção da mesma ao ambiente de pesquisa nacional e possivelmente internacional mediante a participação em eventos da área e publicação de artigos científicos decorrentes do desenvolvimento do projeto.

1.2 Objetivo

1.2.1 Objetivo Geral

Tem-se como objetivo principal o estudo teórico e experimental do comportamento dinâmico de um conversor piezoelétrico de energia composto de vigas recobertas com camadas de material piezoelétrico, e arranjadas de acordo com uma estrutura sanfonada. A geometria do coletor que será investigado está mostrada na Figura 5. A estrutura é formada por vigas metálicas recobertas por camadas de cerâmica piezoelétrica em apenas uma de suas superfícies, formando portanto vigas *unimorph*. As vigas são interligadas entre si através de massas rígidas concentradas nas extremidades de cada viga. A estrutura combinada resultantes pode apresentar um número variável de vigas e, quanto maior o número delas, é esperado que as frequências naturais do sistema resultem cada vez mais baixas. Na extremidade livre da última viga da combinação será colocada uma massa adicional como forma adicional de obter-se frequências naturais na faixa de interesse. Pretende-se então modelar, simular e testar estruturas como a mostrada na Figura 5 de tal forma a obter-se valores das frequências naturais na faixa 0-100 Hz, que abrange a maioria de sinais dinâmicos do tipo ambientais, conforme discutido na seção precedente. A geometria escolhida para o coletor piezoelétrico foi inspirada pelo trabalho de Ansari (ANSARI; KARAMI, 2016) e aqui pretende-se contribuir para a melhoria do modelo matemático bem como a realização de ensaios experimentais para uma adequada verificação dos modelos estudados. Abaixo estão descritos os objetivos específicos do trabalho.

1.2.2 Objetivos Específicos

1. Desenvolver dos modelos analíticos com múltiplos graus de liberdade, usando vigas consecutivas unidas por massas de conexão entre elas e formando uma estrutura *fan-folded*.
2. Estabelecer diferenças entre os modelos estruturais desenvolvidos, seguindo a teoria de *Euler-Bernoulli* e *Timoshenko*.
3. Formular um modelo usando elementos finitos com ajuda do programa ANSYS que permita validar o desenho analítico e que mostre uma correlação com os dados experimentais.

4. Verificar os modelos analíticos formulados a partir de ensaios experimentais em protótipos construídos para tal fim. Neste caso, serão usadas relações de similitude para se construir dispositivos em várias dimensões utilizando técnicas convencionais e materiais usualmente empregados na construção de estruturas (metais) bem como avaliar a possibilidade de construir modelos de geradores usando tecnologia de impressão 3D.

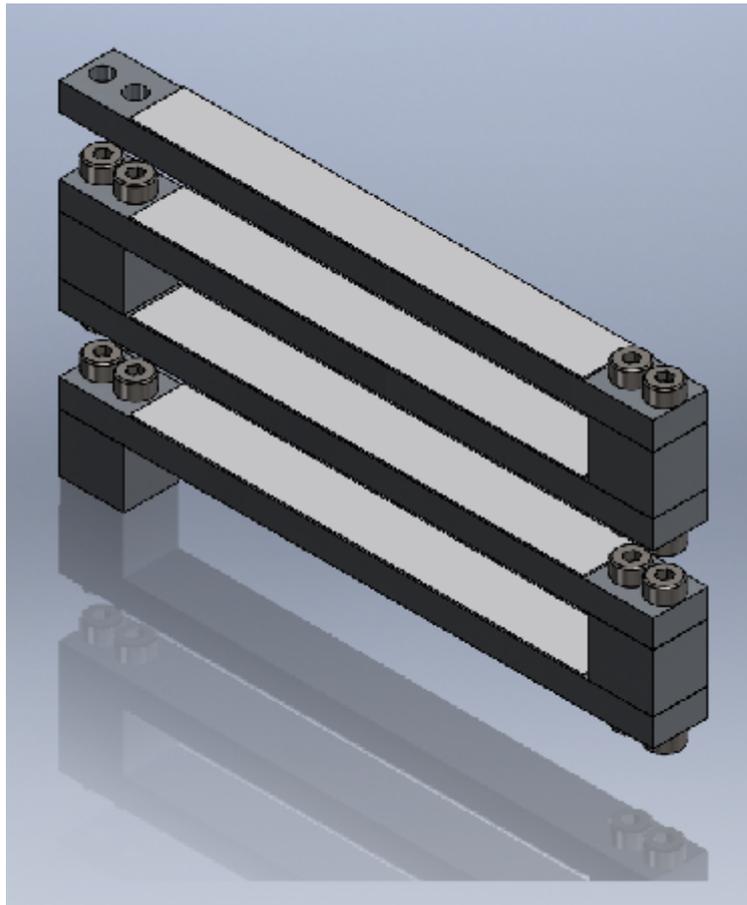


Figura 5: Coletor piezoelétrico em geometria sanfonada, composto a partir de vigas recobertas com material piezoelétrico e ligadas por massas de conexão. Fonte: autor

1.3 Organização da Dissertação

O desenvolvimento do trabalho está organizado da seguinte maneira: O Capítulo 2 está destinado a revisão bibliográfica e a descrever os conceitos básicos e outros elementos necessários para compreensão do tema do trabalho. O Capítulo 3 é destinado ao desenvolvimento do modelo analítico do gerador piezoelétrico em estudo e aos parâmetros requeridos para a análise que será feita nos seguintes capítulos, já no Capítulo 4 se tem resultados de simulações feitas com o programa *MATLAB* e *ANSYS*. De fato essas simulações ajudarão a verificar o modelo analítico e além disso fazer uma comparação com

a análise experimental; No Capítulo 5 foram apresentadas as conclusões deste trabalho. Em seguida, foram apresentadas as referências bibliográficas utilizadas no trabalho e por final alguns apêndices contendo informação adicional sobre as etapas de execução do trabalho.

2 REVISÃO DE LITERATURA

O presente capítulo tem como objetivo realizar uma revisão de literatura sobre o tema escolhido para o projeto de pesquisa que é desenvolvido. Tendo em vista que o tema de pesquisa em coleta piezoelétrica de energia tem sido muito abordado, principalmente na última década, não se pretende aqui esgotar o assunto, mas sim, destacar contribuições importantes no cenário geral do tema e, principalmente aqueles trabalhos que mais contribuíram para a realização do presente projeto.

A utilização de materiais piezoelétricos como mecanismo de transdução para medição de grandezas físicas não é recente. Certamente, o exemplo mais emblemático de tal aplicação seja o acelerômetro, sensor utilizado para medição de vibrações estruturais. No início da década de 1940, dois dinamarqueses, Per V. Brüel and Viggo Kjaer fundaram a empresa Brüel and Kjaer (B&K), que viria com o passar dos anos a se consolidar como líder no mercado de instrumentação para medições estruturais e acústicas. Os primeiros sensores da B&K utilizavam sal rochelle (tartarato de sódio e potássio) como elemento de transdução, pois o mesmo apresentava em seus cristais a propriedade piezoelétrica. Os primeiros acelerômetros piezoelétricos disponíveis comercialmente datam da década de 1950 (WALKER, 2007) e nestas aplicações o quartzo natural, por possuir propriedades piezoelétricas naturais em sua composição era o material usado na construção dos primeiros acelerômetros, o que, certamente fez com que tais sensores tivessem preço elevado no início, não sendo amplamente disponíveis. Avanços tecnológicos bem como a fundação de outras empresas importantes no setor (Kistler, Endevco, PCB) contribuíram de forma decisiva para a disseminação do uso de tais sensores, bem como para o surgimento de novas configurações, utilizando avanços da microeletrônica bem como substituindo-se o quartzo natural pelas cerâmicas piezoelétricas a base de zirconato titanato de chumbo (PZT). Embora o acelerômetro atenda ao princípio fundamental da conversão piezoelétrica de energia, seu uso é exclusivamente para medição de sinais vibratórios (MCCONNELL; VAROTO, 2008), e não para o aprisionamento da energia para uso posterior, tema central do conceito de coleta de energia (ERTURK; INMAN, 2011b).

Os trabalhos de Umeda (UMEDA; NAKAMURA; UEHA, 1996; UMEDA; NAKAMURA; UEHA, 1997) e Goldfarb (GOLDFARB; JONES, 1999) foram talvez os pioneiros em tratar o problema do aproveitamento de energia proveniente de sinais de vibração estrutural. Umeda (UMEDA; NAKAMURA; UEHA, 1996; UMEDA; NAKAMURA; UEHA, 1997) utilizou como motivação para seu trabalho o impacto de um objeto em queda livre em uma placa feita de material piezoelétrico, sendo que este trabalho apresenta resultados de uma modelagem do processo mecânico em questão (choque de um objeto rígido com uma

placa de material piezoelétrico atuando no modo 3-1). Já Goldfarb (GOLDFARB; JONES, 1999) estudou a eficiência do processo de conversão mecânico-elétrico de energia mediante o uso de um conjunto de pastilhas PZT vibrando no modo 3-3. Na mesma época do surgimento destes trabalhos, Yates (WILLIAMS; YATES, 1996) realizou importante estudo da aplicação do conceito de coleta piezoelétrica aplicado a sistemas microeletromecânicos.

Já em meados dos anos 2000, uma revisão bastante completa sobre trabalhos publicados até então na área de geração de energia a partir de materiais piezoelétricos foi feita por Anton *et al* (ANTON; SODANO, 2007). Este trabalho abordou questões importantes sobre o tema, e várias delas ainda não completamente respondidas até os dias atuais. Como exemplo, cita-se aqui o problema que trata da *sintonia da frequência natural do coletor piezoelétrico à(s) frequência(s) do estímulo externos*. Esta é uma questão muito importante no projeto e otimização de coletores piezoelétricos de energia, tendo em vista que, para que os mesmos atinjam níveis adequados de conversão eletromecânica a frequência natural do coletor deve ser muito próxima, teoricamente igual, à correspondente frequência do distúrbio externo, para o caso de sinais harmônicos, principalmente. Logo, a questão da sintonia de frequências é tema recorrentes até a atualidade em trabalhos na área, bem como outras questões importantes tem sido levantadas em revisões atuais sobre o tema (PRIYA *et al.*, 2019; WEI; JING, 2017).

Foi a partir do final da primeira década dos anos 2000 que os primeiros trabalhos de Erturk *et al* foram publicados (ERTURK; INMAN, 2008a; ERTURK; INMAN, 2008c; ERTURK; INMAN, 2009; ERTURK; INMAN, 2008b; ERTURK *et al.*, 2009a). A partir desta época, e principalmente durante a década seguinte verificou-se um crescimento extraordinário de trabalhos publicados em conferências internacionais bem como em periódicos de seletiva política editorial na área de coleta piezoelétrica de energia utilizando o conhecido modelo da viga *cantilever* (RAO, 2007), recoberta parcial ou totalmente com camadas de material piezoelétrico, em configuração *unimorph*, onde apenas uma das superfícies da viga é recoberta ou *bimorph*, situação na qual ambas as superfícies superior e inferior da viga são recobertas por material piezoelétrico. Nesta última configuração, as camadas de material piezoelétrico podem ser eletricamente conectadas de acordo com a conexão em série ou em paralelo (ERTURK; INMAN, 2009) ao circuito resistivo externo.

Além do já citado problema de sintonia entre as frequências natural do coletor e do distúrbio externo, outras questões importantes tem sido abordadas visando a melhoria do processo de conversão de energia. Uma delas trata do aumento da faixa útil de frequências de utilização de um dado conversor. Por faixa útil entende-se aqui uma faixa de frequências que contenha uma ou mais frequências naturais do conversor e que possam ser sintonizadas o mais próximo possível das frequências do distúrbio externo. Por esta razão, vários iniciativas tem sido feitas no sentido de se propor modelos de coletores piezoelétricos que contemplem a utilização de mais de uma de suas frequências naturais de vibração na faixa

de utilização do mesmos (SHAHRUZ, 2008; TANG; YANG; WU, 2012; TANG; YANG, 2015; REZAEISARAY et al., 2015; HANASIRO; VAROTO, 2017). Uma alternativa que pode ser empregada tanto na melhoria da sintonia da frequência do coletor quanto no ajuste de sua faixa de frequências é a utilização de uma massa concentrada na extremidade livre do coletor, para o caso de coletores do tipo *cantilever* (ERTURK; INMAN, 2011b). Neste caso, vários trabalhos tem sido publicados analisando o efeito da massa concentrada bem como seus benefícios ao processo de coleta de energia (KIM et al., 2010; LUMENTUT; HOWARD, 2016; WANG; WANG; ZUO, 2017; HONGJIN; QINGFENG; WUWEI, 2014).

Uma estratégia que vem ganhando muita força no sentido de se aumentar a faixa útil de frequências de um coletor piezoelétrico é o uso intencional de efeitos não lineares. Neste aspecto, o trabalho de Cottone *et al* (COTTONE; VOCCA; GAMMAITONI, 2009) é pioneiro e busca explorar efeitos da dinâmica não linear de osciladores estocásticos para fins de aumentar a faixa de frequências do coletor através de efeitos magnéticos. Desde a publicação deste importante trabalho, muitos outros no mesmo tema tem sido publicados, tanto buscando aumento da faixa de frequências mediante interações magnéticas, que são intrinsecamente mecanismos não lineares (STANTON; MCGEHEE; MANN, 2009; ERTURK; HOFFMAN; INMAN, 2009), também na proposição, análise e comparação de modelos envolvendo os efeitos não lineares (R.; GORMAN; CARTMELL, 2008; LEADENHAM; ERTURK, 2015; ERTURK; INMAN, 2011a; DAQAQ et al., 2014; TRIPLETT; QUINN, 2009; QUINN et al., 2011).

A crescente demanda pela redução do volume de geradores piezoelétricos de energia vem exigindo que dispositivos cada vez menores e consequentemente mais leves estejam disponíveis (BEEBY; TUDOR; WHITE, 2006; COOK-CHENNAULT; THAMBI; SASTRY, 2008; WILLIAMS; YATES, 1996). Uma consequência imediata da redução de volume e massa é o aumento da frequência natural do gerador, principalmente quando o mesmo é projetado e construído a partir de vigas recobertas com material piezoelétrico. Desta forma, com o aumento da frequência natural o gerador pode perder a eficiência principalmente nas baixas frequências em virtude de sua incapacidade de sintonia ao sinal de distúrbio. Inúmeros trabalhos tem sido recentemente publicados no sentido de propor soluções para estabelecer uma relação de compromisso adequada entre o valor das primeiras frequências naturais do gerador e suas características de rigidez e massa. Destes, destacam-se os que buscam tirar vantagem de efeitos não lineares intrínsecos ao sistema (CHEN; JIANG, 2015; GALBIER; KARAMI, 2017; VAROTO, 2017; YANG; TOWFIGHIAN, 2017) e outros que utilizam efeitos geométricos para se obter estruturas mais flexíveis e consequentemente frequências naturais mais baixas (ANSARI; KARAMI, 2016; ASHRAF et al., 2013; ANSARI; KARAMI, 2016; LI; TIAN; DENG, 2014). Vários trabalhos tem sido publicados no sentido de propor aplicações para geradores piezoelétricos que possuam baixo volume como é o caso de biosensores (ANSARI; KARAMI, 2016; ANSARI; KARAMI, 2017; DETERRE et al., 2011; DETERRE et al., 2014; MITCHESON, 2010) destinados a

substituição parcial ou total de baterias em implantes cardíacos.

As dimensões reduzidas da estrutura, aliada à baixos valores de massa e altos valores de rigidez equivalente é o que faz com que a frequência natural fundamental seja muito alta e, altas frequências naturais é uma das maiores preocupações em relação à coleta de energia, principalmente em micro-coletores. Nesse sentido, a busca por estruturas menores mas que possuam baixa frequência natural tem sido alvo de muitas pesquisas na área, como o estudo de (ANSARI; KARAMI, 2015) utilizou uma geometria do tipo *fan-folded* e adicionou massa na extremidade livre e nas conexões. Essa alteração geométrica fez com que a frequência natural reduzisse para a faixa desejada. Além disso, o tipo do material para realizar a conversão de energia mecânica em elétrica também é importante. O artigo (DAGDEVIREN et al., 2014) relata avanços na ciência dos materiais e na engenharia de biocompatibilidade e flexibilidade para apresentar materiais avançados e dispositivos que são capazes de permitir alta eficiência na conversão de energia a partir de excitações externas, que no caso, foram os movimentos do coração, do pulmão e do diafragma.

Pela mesma razão, há o estudo de (LIEN; SHU, 2012) que analisa a resposta elétrica de um array de osciladores piezoelétricos conectados, cujo modelo matemático consiste em obter a impedância equivalente para assim verificar os sinais elétricos. Já o artigo de (PILLATSCH et al., 2017) aborda as consequências em termos de degradação da estrutura em viga do tipo *bimorph*, isto é, verificação de fadiga do material piezoelétrico, o qual tem sua performance diminuída com o tempo, microtrincas se formam devido à tensão aplicada. Além da perda de energia gerada, o efeito mais preocupante da degradação é a mudança na frequência de ressonância que é altamente prejudicial para projetos no tema de coleta de energia. O artigo também apresenta como solução a fabricação de camadas de piezoelétricos já sobre compressão.

No âmbito da pesquisa científica e tecnológica em instituições brasileiras, a área de coleta de energia utilizando materiais piezoelétricos encontra contribuições em praticamente todas as principais áreas de pesquisa em engenharia e ciências básicas. Os trabalhos de De Marqui e colaboradores (DE MARQUI JR; ERTURK; INMAN, 2009; DE MARQUI JR; ERTURK; INMAN, 2010; DE MARQUI JR; VIEIRA, 2011; DE MARQUI JR; ERTURK, 2012) concentram-se em desenvolver modelos lineares e não lineares dedicados a problemas em aeroelasticidade. De forma similar, contribuições voltadas ao estudo e desenvolvimento de modelos dinâmicos lineares e não lineares com o objetivo de aumentar a eficiência de coletores de energia vem sendo desenvolvidos em diversas aplicações (PETERSON; LOPES; JR., 2018; MOTTER et al., 2012; PAULA; INMAN; SAVI, 2015; VAROTO; BONISOLI; LISITANO, 2020). Efeitos não lineares intencionais e seus efeitos no desempenho estrutural e eletromecânico são estudados (BRENNAN; GATTI, 2017; BRENNAN et al., 2017; CLEANTE et al., 2019; VAROTO, 2017) também visando aumentar a eficiência do processo de geração de energia (HANASIRO; VAROTO, 2017; ILIUK et al., 2013; ILIUK

et al., 2014; ROCHA et al., 2017; ROCHA et al., 2018). Tendo em vista que em aplicações práticas os dispositivos construídos em escala tendem a apresentar variabilidade tanto em suas características geométricas quanto nas propriedades do material (FRANCO, 2013), pesquisas na área de caracterização e quantificação de incertezas na área de coleta piezoelétrica de energia também vem sendo conduzidas (GODOY; TRINDADE, 2012; FRANCO; VAROTO, 2017; VAROTO, 2019; PAREDES; MAKI; VAROTO, 2020).

Conforme detalhado em seguida, o presente trabalho tem como meta principal realizar um estudo analítico-computacional e experimental de um gerador piezoelétrico de energia possuindo múltiplos graus de liberdade a partir do modelo de Karami (ANSARI; KARAMI, 2016), bem como explorar sua eficiência quanto à conversão eletromecânica de energia em baixas frequências para diversos tipos de estímulos, incluindo aqueles oriundos de sinais cardíacos típicos, sintetizados a partir de algoritmos numéricos. No capítulo seguinte serão apresentados as modelagens das teorias *Timoshenko* e *Euler – Bernoulli* para o coletor piezoelétrico da presente proposta de trabalho.

3 DESENVOLVIMENTO DE MODELO ANALÍTICO

Este capítulo apresenta o desenvolvimento dos modelos eletromecânicos do coletor piezoelétrico *fan-folded* mostrado na figura 6. Esses modelos foram desenvolvidos de acordo com as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko, para fins de comparação. A obtenção de tais modelos pode ser dividida em duas partes. Inicialmente são formuladas as equações diferenciais parciais no domínio do tempo seguindo as teorias de viga já mencionadas. A partir do modelo estrutural, o qual leva também em consideração as características

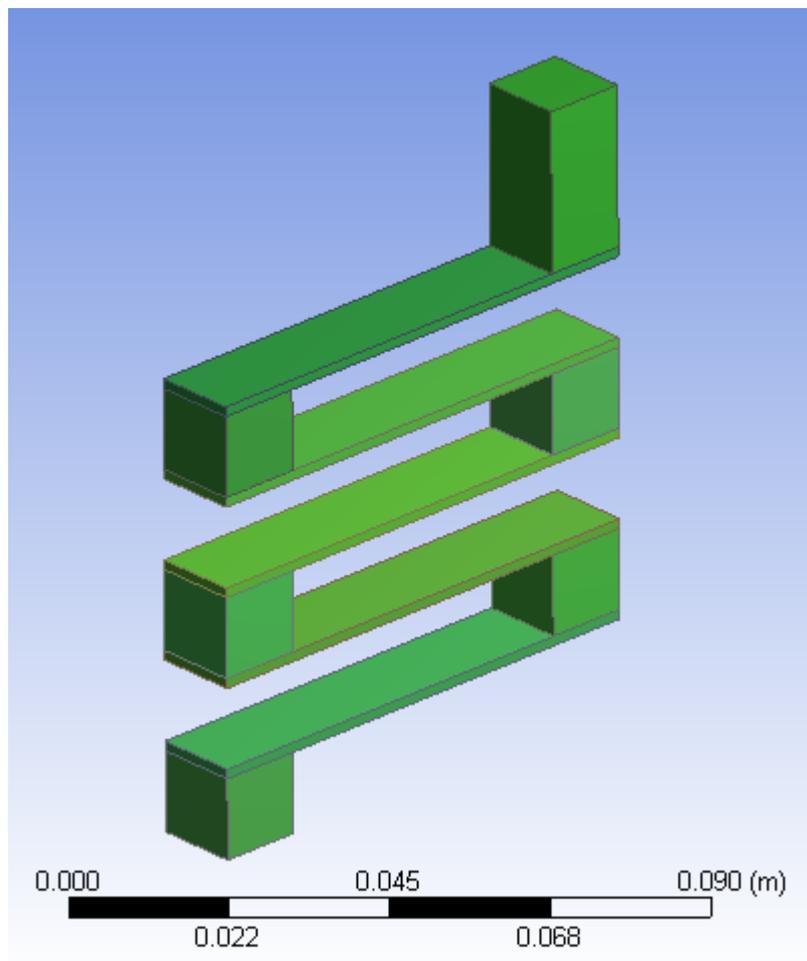


Figura 6: Estrutura *fan-folded* de 5 vigas. Fonte: Autor.

geométricas e de material dos materiais envolvidos (metal para o caso da subestrutura e cerâmica para o caso do material piezoelétrico), são determinadas as frequências naturais e os modos naturais de vibração dos modelos para coletores contendo um número variável de vigas. Frequências naturais e modos de vibrar do sistema conservativo constituem o chamado modelo modal (EWINS, 2000) do sistema em estudo. Estas características são obtidas a partir da aplicação das condições de contorno e de equilíbrio para o coletor

fan-folded. O segundo passo é a obtenção das funções de resposta em frequência (FRF) eletromecânicas para o coletor. Neste caso, agrega-se ao modelo no domínio do tempo as correspondentes equações do circuito elétrico externo resistivo adotado na modelagem. As FRF consideram como saída tanto a tensão da camada piezoelétrica quanto a aceleração da extremidade livre do coletor, onde se encontra a massa concentrada. Como entrada, é usada a aceleração vertical imposta à base do coletor. Estas FRF, comumente denominadas de FRF de transmissibilidade (MCCONNELL; VAROTO, 2008) constituem o chamado modelo de resposta (EWINS, 2000) do coletor, e são as grandezas a serem usadas nas simulações numéricas e posteriormente nas medições experimentais.

Os métodos usados para a modelagem das equações diferenciais são a teoria de *Euler-Bernoulli* e a de *Timoshenko* (RAO, 2007; LEISSA; QATU, 2011), o modelo *Euler-Bernoulli* não considera os efeitos da força cortante nem efeitos da inercia. No entanto, o modelo descrito por *Timoshenko* inclui tais considerações. Ambos modelos serão validados com elementos finitos, usando simulações com o programa ANSYS. Neste capítulo se apresentarão três partes, a primeira onde se desenvolve o modelo estrutural que esta focado a determinar las frequências e modos de vibração da estrutura *fan-folded* fazendo um análise desde a viga cantiléver até a generalização do protótipo da estrutura de desenho proposto *fan-folded*. Na segunda parte tem como objetivo adicionar os sistemas electro-mecânicos que tem vinculação com o material PZT e porém nessa parte será acoplada à equação diferencial obtida no modelo estrutural as propriedades e tipos de conexão do PZT. Finalmente para mostrar os resultados das simulações e da experimentação que será apresentado no capítulo seguinte, é preciso obter equações no domínio de frequência para apresentar os modos de vibração da estrutura e além disso para obter as funções de resposta em frequência (FRF).

3.1 Modelo Estrutural

3.1.1 Modelo de Viga Cantiléver

Para fazer um análise completo, primeiro é preciso obter o modelo para uma viga cantiléver, na qual se apresentara o modelo contínuo descrito pelas equações diferenciais parciais (ERTURK; INMAN, 2011b; RAO, 2010); Esta secção tem como objetivo obter uma equação para o modelo descrito na figura 7, se mostra a viga engastada numa extremidade que tem uma referencia fixa e também se tem uma massa rígida M_t concentrada em sua extremidade livre. Segundo a teoria de vibração livre proposto por *Timoshenko*, se considera os efeitos de deformação da força cortante e a inercia de rotação.

É importante notar que para incluir a deformação da força cortante é preciso ver a figura 8, onde daqui em diante será nomeado angulo de flexão a $\phi(x, t)$, e que pode-se ter a seguintes relações de deslocamento (RAO, 2010; LEISSA; QATU, 2011):

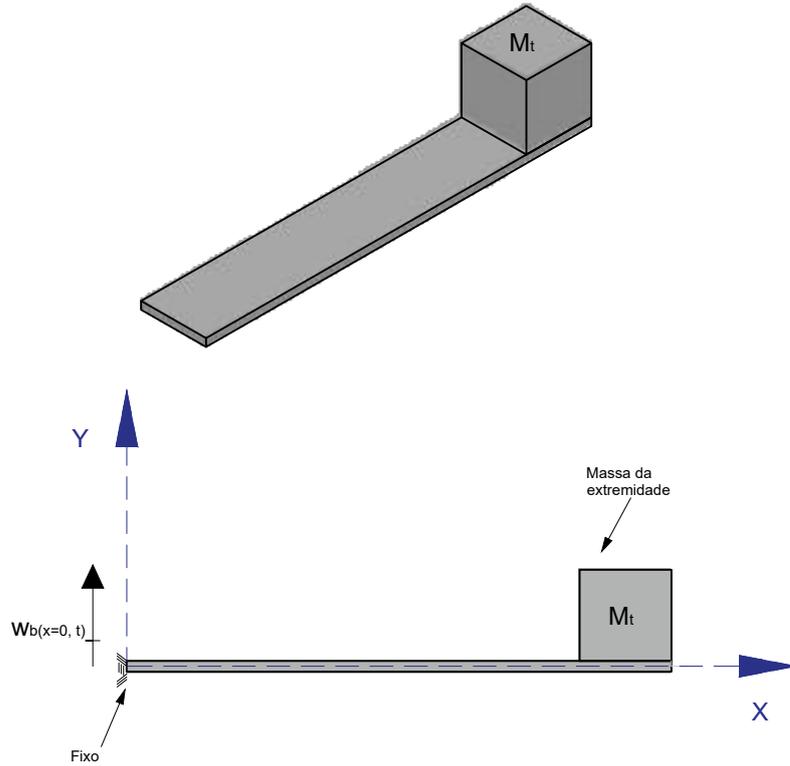


Figura 7: Modelo geométrico de viga cantiléver. Fonte: Autor.

$$u = -z \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial w_c(x, t)}{\partial x} \right) = -z\phi(x, t) \quad (3.1)$$

$$v = 0 \quad (3.2)$$

$$w = w(x, t) \quad (3.3)$$

Agora considera-se que $V(x, t)$ é a força de cisalhamento e $f(x, t)$ é uma força externa por unidade de longitude na viga. Então como a equação da força de inércia em direção z é (RAO, 2010; LEISSA; QATU, 2011):

$$-(V + dV) + f(x, t)dx + V = \rho A dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

ρ representa a densidade volumétrica e A é área da seção transversal da viga. Então simplificando a equação 3.4 pode-se obter a equação 3.5:

$$-\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

Pode-se representar a força de cisalhamento na sua forma integral com a seguinte

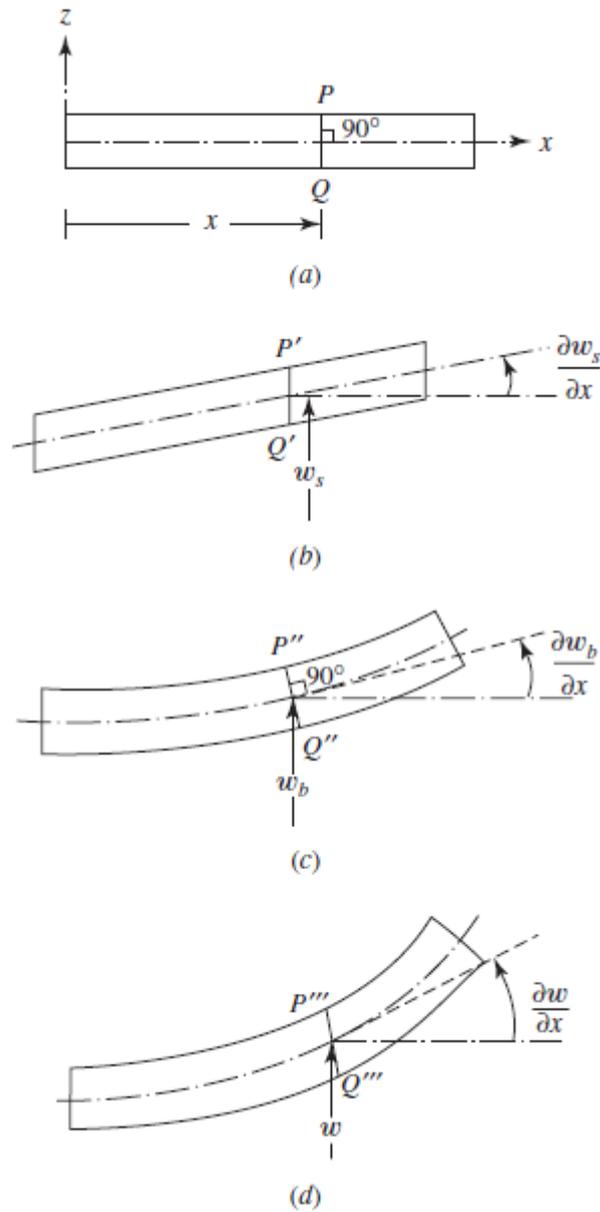


Figura 8: Deformações de flexão e cisalhamento: (a) elemento sem deformação; (b) Elemento com só deformação de cisalhamento; (c) elemento com só deformação de flexão; (d) elemento com deformação total. Fonte: Rao (2007)

equação 3.6(JR; TIMOSHENKO; YOUNG, 1990):

$$V = \int_A \tau dA = \tau_m A \quad (3.6)$$

Da equação 3.6 pode-se ter que a tensão de corte τ_m tem relação direta com o módulo e ângulo de cisalhamento, e que além tem um fator de correção geométrico k (STEPHEN, 1980), que depende da seção transversal da viga, como descreve a equação 3.8

$$\tau_m = -kG \left(\frac{\partial w_c(x, t)}{\partial x} \right) \quad (3.7)$$

$$\tau_m = -kG \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \phi(x, t) \right) \quad (3.8)$$

A equação da força de cisalhamento com a equação 3.6 pode ser simplificado com a relação da equação 3.9:

$$V = -kGA \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \phi(x, t) \right) \quad (3.9)$$

Tem-se da figura 9, a soma de momentos que pode-se representar com a equação 3.10

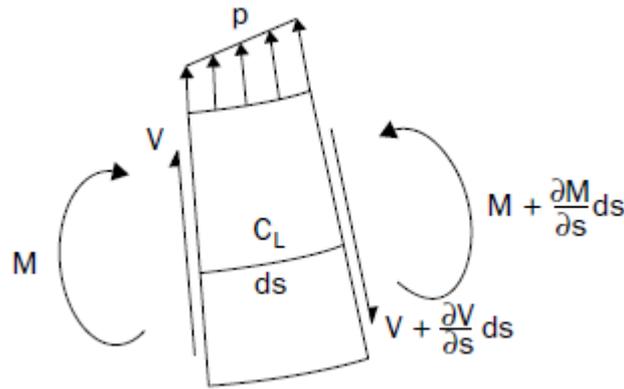


Figura 9: Diagrama de um elemento diferencial de viga. Fonte: (LEISSA; QATU, 2011)

$$-M + \left(M + \frac{\partial M}{\partial s} ds \right) - V ds = dJ_y \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.10)$$

J_y representa o momento de inércia de massa e $\phi(x, t)$ o ângulo de rotação, como neste caso a viga é homogênea em todo seu comprimento considera-se a densidade constante e pode-se usar a relação $dJ_y = \rho I_y ds$, I_y é o momento de inércia de área da seção transversal da viga, além o valor do diferencial ds representa um valor pequeno e de forma aproximada pode-se representar com o valor dx ; finalmente a equação anterior simplificada obtém-se a equação 3.11.

$$\frac{\partial M}{\partial x} - V = \rho I_y \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

Das equações obtidas até agora é possível já representar a modelagem do sistema para uma viga cantiléver, para isso usaremos uma simplificação das variáveis para o deslocamento transversal $w(x, t) = w$, $\phi(x, t) = \phi$ e para a força externa $f(x, t) = f$; A equação 3.12 é obtida de simplificação das equações 3.5 e 3.9.

$$kGA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + f = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.12)$$

o Momento fletor para o caso da viga, pode ser representado com a equação integral 3.13:

$$M(x, t) = - \int_{-h_s/2}^{h_s/2} \sigma b z dz = EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.13)$$

Nesta equação se apresenta o momento fletor na sua forma integral, σ é a tensão, E representa o módulo de elasticidade e I o módulo de inercia que pode ser apresentado por a equação 3.14.

$$I = - \int_{-h_s/2}^{h_s/2} b z^2 dz = \frac{b h_s^3}{12} \quad (3.14)$$

De igual forma a equação 3.11, 3.9 e 3.13 podem ser simplificadas e obter a equação 3.15:

$$EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (3.15)$$

A ultima equação obtida em conjunto com a equação 3.12, representam o movimento transversal da viga, onde tem incluso o deslocamento da força por flexão e o efeito da inercia e força de cisalhamento, mais ainda pode-se ter uma equação única reduzida (THOMSON, 2018; RAO, 2010):

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} - \left(\frac{EI \rho A}{kGA} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \left(\frac{\rho^2 IA}{kGA} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = \\ - \left(\frac{EI}{kGA} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{\rho I}{kGA} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + f \quad (3.16)$$

A equação 3.16 tem incluso os dois primeiros termos que identificam a teoria de *Euler-Bernoulli*, o terceiro termo tem efeito da inercia de rotação e finalmente os dois últimos termos estão relacionados com a força de cisalhamento (RAO, 2007). Então como neste análise também tem como objetivo fazer uma comparação nos resultados do modelo proposto por *Euler-Bernoulli* e o modelo que inclui força de cisalhamento e o efeito da inércia de rotação conhecido como modelo *Timoshenko*. A equação 3.17 é a forma simplificada do modelo *Euler-Bernoulli* para a viga cantiléver:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (3.17)$$

A solução do modelagem feito para o movimento transversal pode ser obtido com as condições de contorno, do lado esquerdo tem-se a viga engastada e do lado direito uma massa na extremidade livre da viga, para cada lado podemos ter duas restrições. (ERTURK; INMAN, 2011b; KELLY, 2012).

Para o modelo *Timoshenko*:

$$w(0, t) = 0 \quad (3.18)$$

$$\phi(0, t) = 0 \quad (3.19)$$

$$\left[kGA \left(\phi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + M_t \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w + x_{ct} \phi) \right]_{x=L} = 0 \quad (3.20)$$

$$\left[EI \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (I_t \phi + M_t x_{ct} w) \right]_{x=L} = 0 \quad (3.21)$$

Para o modelo *Euler-Bernoulli*:

$$w(0, t) = 0 \quad (3.22)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.23)$$

$$\left[EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} + M_t \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right]_{x=L} = 0 \quad (3.24)$$

$$\left[EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - I_t \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial t^2 \partial x} \right]_{x=L} = 0 \quad (3.25)$$

Sendo:

- E : Módulo de elasticidade
- I : Momento de Inércia da seção da viga
- M_t : Massa concentrada
- I_t : Momento de Inercia da carga concentrada
- x_{ct} : Distancia de massa concentrada ao eixo neutro

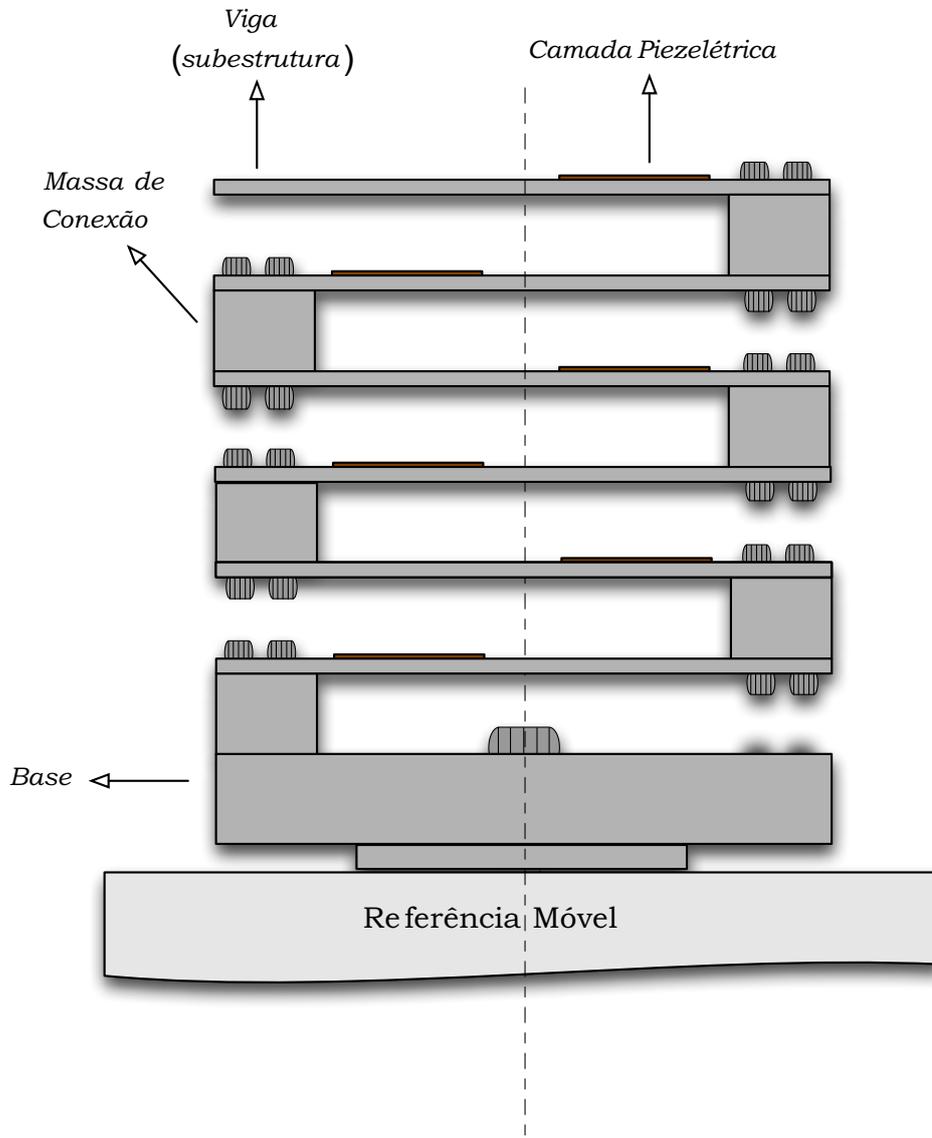
Finalmente com estas últimas equações a modelagem esta já determinado, tem-se 4 condições de contorno para cada modelo. Na seguinte seção se apresenta o desenvolvimento da estrutura *fan-folded*, que está composta por varias vigas unidas com masas de conexão, como foi apresentado no começo do capitulo na figura 6.

3.1.2 Modelo de Estrutura Fan-Folded usando teoria de Euler-Bernoulli

Nesta parte do trabalho se desenvolverão as equações do modelo analítico em estudo que foi ja apresentado na figura 6, de fato serão apresentadas nesta secção equações diferencias que descreverão o comportamento dinâmico no domínio de tempo. Para fazer a dedução das equações e preciso ter consideração do estudo prévio que se fez na viga cantiléver onde foi descrito o efeito da massa concentrada num extremo da viga, além disso é preciso encontrar os modos de vibração na modelagem do sistema. No presente estudo, o modelo estrutural analítico será dado por uma equação diferencial parcial linear, visto que este modelo será obtido a partir da modelagem do gerador piezoelétrico através de parâmetros distribuídos, comumente denominado de modelo contínuo (ERTURK; INMAN, 2011b).

A figura 10 mostra uma vista lateral do gerador onde é possível visualizar detalhes da montagem. A estrutura formada a partir das vigas é montada na mesa vibratória de um excitador de vibrações para fins de medição das funções de resposta em frequência

Figura 10: Modelo geométrico do gerador piezoelétrico *fan-folded* a ser estudado.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

de transmissibilidade de movimento (TFRF) mecânica e eletromecânica da estrutura. A TFRF mecânica relaciona a velocidade ou aceleração da extremidade livre do gerador em relação à entrada harmônica de frequência variável aplicada à base pelo excitador de vibrações.

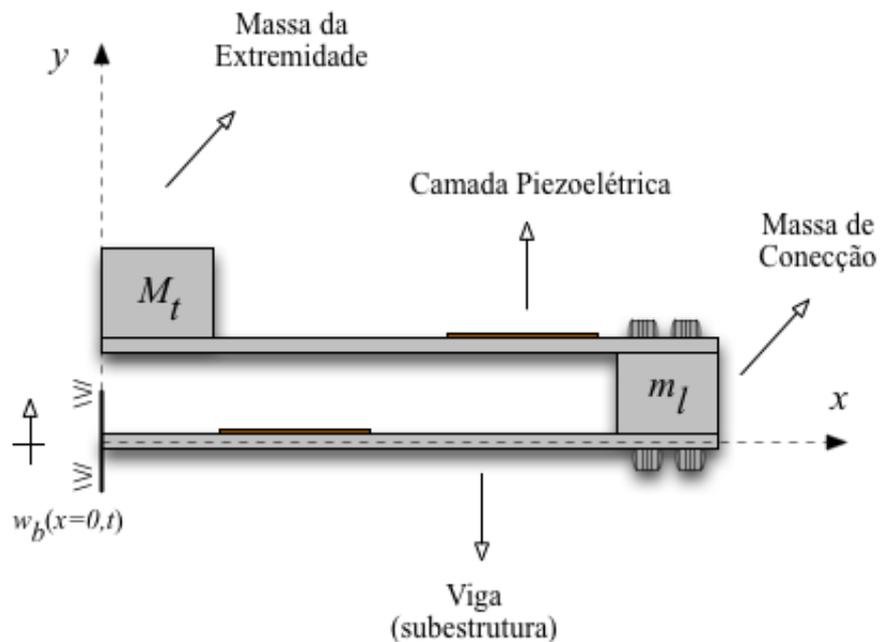
Para o análise a figura 11 mostra a estrutura *fan-folded* composta por duas vigas onde a primeira viga esta engastada numa referência fixa num extremo e no outro tem-se uma massa de conexão, e finalmente se-tem uma massa na ultima viga, o sistema estrutural mostrado tem no origem a referência de coordenadas. Seguindo o procedimento feito no

análise para a viga cantiléver na secção anterior, podemos considerar neste caso vibração livre não amortecida com as condições de *Euler-Bernoulli* (RAO, 2010), desprezando os efeitos de deformação da força cortante e a inércia de rotação (CLOUGH; PENZIEN, 2003):

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.26)$$

Neste caso já teremos que considerar a secção transversal do material piezoelétrico, é uma

Figura 11: Modelo geométrico de um sistema com duas vigas.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

das diferenças no modelo feito da viga cantiléver, além disso as condições de contorno serão modificadas para cada viga e em geral se terá um sistema com n vigas e cada uma com m modos de vibração. Considerando que as vigas terão camada piezoelétrica e serão recobertas ao longo do seu comprimento. Podemos apresentar uma relação da tensão versus a deformação linear para o material do sistema, e também uma relação entre a tensão e a deformação para o material do PZT (IEEE, 1988):

$$\sigma_1^s = E_s \epsilon_1^s \quad (3.27)$$

$$\sigma_1^p = E_p (\epsilon_1^p - d_{31} E_3) \quad (3.28)$$

Sendo:

- σ_1^s : Tensão mecânica do material da subestrutura.
- σ_1^p : Tensão mecânica do material do PZT.
- ϵ_1^s : Deformação para material da subestrutura.
- ϵ_1^p : Deformação para material do PZT.
- E_s : Modulo de Elasticidade do material da subestrutura.
- E_3 : Campo elétrico no PZT.

Na equação 3.28 tem incluso o termo d_{31} que é uma constante de deformação muito conhecida nos materiais PZT, e tem relação direta com e_{31} sendo esta a tensão piezoelétrica efetiva (LEO, 2007; ERTURK; INMAN, 2011b). Também se tem o momento flector que pode se representar na seguinte equação 3.30:

$$M(x, t) = - \int \int_A \sigma_1 z dA \quad (3.29)$$

$$M(x, t) = - \int_{h_a}^{h_b} \sigma_1^s b z dz - \int_{h_b}^{h_c} \sigma_1^p b z dz \quad (3.30)$$

Sendo:

- h_a : Posição vertical da superfície inferior da subestrutura.
- h_b : Posição vertical da superfície inferior do PZT.
- h_c : Posição vertical da superfície superior do PZT.
- b : Largura da Viga.

Onde por critério se faz uma igualdade das posições relativas da estrutura y do PZT, que podem-se ver na figura 12 estas relações são as seguintes:

$$h_a = -h_s + (z_n - h_p) \quad (3.31)$$

$$h_b = z_n - h_p \quad (3.32)$$

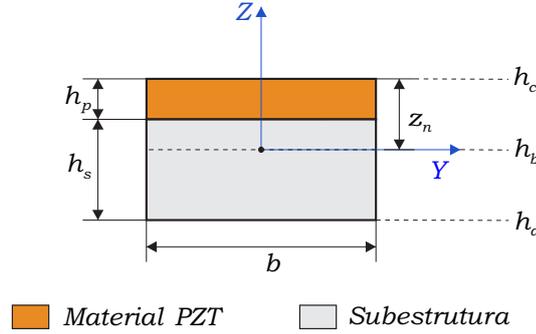
$$h_c = z_n \quad (3.33)$$

Para nosso estudo do sistema considera-se uma camada só, conhecida como secção *unimorph*, mas já também foram feitos outros trabalhos com dupla camada de PZT (inferior e superior), estas são chamadas de *bimorph* (FRANCO; VAROTO, 2017; ERTURK; INMAN, 2011b). Lembrando que neste caso a secção transversal mostrada na figura 12 é a secção composta da viga, o apêndice D descreve as equações e calculo feito (TIMOSHENKO; YOUNG, 1968; LUMENTUT; HOWARD, 2016); é assim que o eixo tem deslocamento pela influencia do material PZT, então pode-se obter a relação seguinte:

$$z_n = \frac{E_s h_s^2 + E_p h_p^2 + 2E_s h_s h_p}{2(E_s h_s + E_p h_p)} \quad (3.34)$$

A equação 3.34 é obtida usando o balanço de força resultante na secção transversal da estrutura *unimorph*. Uma diferença geométrica do analise feito na secção anterior é o

Figura 12: Características geométricas da seção transversal da viga composta.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

material PZT que será considerado para o desenvolvimento do modelo na estrutura. Então considerando a deformação uni-dimensional da viga, usando a equação 3.1 e desprezando o deslocamento da força de cisalhamento, temos a seguinte equação da curvatura:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.35)$$

Usando esta equação e já considerando o PZT com a equação 3.27 e 3.28, se obtém a equação 3.30 que pode ser escrita como:

$$M(x, t) = - \int_{h_a}^{h_b} \sigma_1^s b z dz - \int_{h_b}^{h_c} E_p (\epsilon_1^p - d_{31} E_3) b z dz \quad (3.36)$$

$$M(x, t) = \int_{h_a}^{h_b} E_s b \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} z^2 dz + \int_{h_b}^{h_c} E_p b \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} z^2 dz + \int_{h_b}^{h_c} v(t) E_p b E_3 z dz \quad (3.37)$$

Mas, nesta equação é preciso também obter uma relação para o campo elétrico no PZT, que pode-se obter seguindo a relação seguinte (LEO, 2007; LUMENTUT; HOWARD, 2014):

$$E_3 = - \nabla V(z, t) \quad (3.38)$$

$$E_3 = - \nabla (\psi(z) v(t)) \quad (3.39)$$

$$E_3 = - \frac{\partial \psi(z)}{\partial z} v(t) \quad (3.40)$$

$$E_3 = - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{(z - z_n + h_p)}{h_p} \right] v(t) \quad (3.41)$$

$$E_3 = - \frac{1}{h_p} v(t) \quad (3.42)$$

Nesta equação el campo elétrico é uma função do gradiente do potencial elétrico, que é apresentado como uma derivada direcional com função no intervalo $z_n - h_p \leq z \leq z_n$; Usando a equação 3.42 em conjunto com o momento fletor obtém-se finalmente uma simplificação da equação 3.37:

$$M(x, t) = \int_{h_a}^{h_b} E_s b \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} z^2 dz + \int_{h_b}^{h_c} E_p b \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} z^2 dz - \int_{h_b}^{h_c} v(t) E_p b \frac{d_{31}}{h_p} z dz \quad (3.43)$$

Onde os dois primeiros termos tem relação com a rigidez flexional equivalente da secção composta e o ultimo termo representa a relação da tensão elétrica gerada pelo PZT com a deformação da secção, finalmente esta ultima equação pode ser escrita de forma equivalente:

$$M(x, t) = \underbrace{\left[\frac{E_s b (h_b^3 - h_a^3) + E_p b (h_c^3 - h_b^3)}{3} \right]}_{EI_{eq}} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \underbrace{\left[\frac{E_p b d_{31} (h_c^2 - h_b^2)}{2h_p} \right]}_{\vartheta} v(t) \quad (3.44)$$

$$(EI)_{eq} = \left[\frac{E_s b (h_b^3 - h_a^3) + E_p b (h_c^3 - h_b^3)}{3} \right] \quad (3.45)$$

$$\vartheta = \left[-\frac{E_p b d_{31} (h_c^2 - h_b^2)}{2h_p} \right] = -E_p b d_{31} \left(z_n - \frac{h_p}{2} \right) \quad (3.46)$$

$$M(x, t) = EI_{eq} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \vartheta v(t) \quad (3.47)$$

A equação 3.44 o mesmo assim a equação 3.47 têm o segundo termo que é o acoplamento electromecânico da estrutura, e também descrevem o momento gerado pela uma camada do piezoelétrica continua, o mesmo dizer que não considera uma camada piezoelétrica segmentada, mas é possível incluir um ajuste nessas equações que permitam um modelo generalizado, da seguinte forma (ERTURK; INMAN, 2011b):

$$M(x, t) = EI_{eq} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \vartheta v(t) \left[H(x - x_0^p) - H(x - x_f^p) \right] \quad (3.48)$$

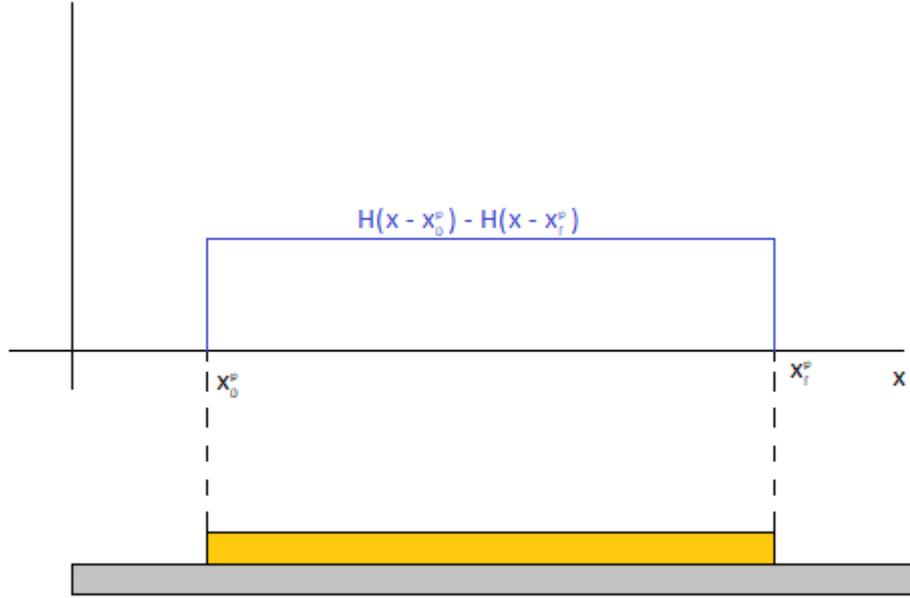
Na equação anterior as variáveis x_0^p e x_f^p representam a posição inicial e final da camada piezoelétrica que recobre a estrutura e esta definida com a função degrau unitário $H(x)$, e define no intervalo $x_0^p \leq x \leq x_f^p$ a camada para sua geração da tensão elétrica, esta função composta é descrita também na figura 13.

Com esta ultima equação já é possível substituir na equação 3.26, obtém-se:

$$EI_{eq} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \vartheta v(t) \left[\frac{d\delta(x - x_0^p)}{dx} - \frac{d\delta(x - x_f^p)}{dx} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.49)$$

Esta equação descreve o movimento livre e não amortecido em função do deslocamento transversal $w = w(x, t)$; Mas para ajustar o modelo deve-se ter umas considerações

Figura 13: Segmento da camada piezoelétrica descrita pela função degrau.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

importantes: (i) A equação de movimento deve ser expansível para um número variável de vigas; (ii) A equação deve contemplar a entrada via fronteira, neste caso será aplicada um deslocamento harmônico de amplitude constante em $x=0$; (iii) Deve-se levar em consideração as massas de conexão m_l entre as vigas consecutivas; (iv) Deve-se considerar que as vigas terão recoberta uma camada de material PZT; (v) A última viga da montagem da estrutura deve contemplar a massa na extremidade livre M_t .

Tem-se que lembrar que será aplicado uma excitação harmônica w_b na extremidade fixa da primeira viga (viga engastada do lado esquerdo). Então pode-se representar o deslocamento relativo do sistema:

$$w_r = w_r(x, t) = w(x, t) - w_b(x, t) \quad (3.50)$$

Onde $w_b(x, t)$ representa a aceleração da base que pode se representar de forma simplificada como $w_b(0, t) = w_b(t)$. Com a relação da equação 3.50 é possível escrever a equação 3.49 em função da variável do deslocamento relativo, tendo o resultado seguinte:

$$EI_{eq} \frac{\partial^4 w_r}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} + \vartheta v(t) \left[\frac{d\delta(x - x_0^p)}{dx} - \frac{d\delta(x - x_f^p)}{dx} \right] = - [\rho A + m_l \delta(x - \bar{x}, i - k) + M_t \delta(x - x_t, i - n)] \frac{d^2 w_b}{dt^2} \quad (3.51)$$

Onde m_l representa a massa de conexão entre duas vigas consecutivas, porém esta relacionado diretamente com \bar{x} , que neste caso pode assumir dois valores: (i) $\bar{x} = 0$ quando

i fora ímpar e; (ii) $\bar{x} = L$ quando i fora par. Além o índice k varia de 2 a n sendo n o número total de vigas que fazem parte da estrutura. Também esta-se considerando a massa concentrada na extremidade livre da última viga e portanto a equação 3.51 corresponde ao modelo de um gerador PZT de energia como foi mostrado na figura 6. Um modelo mais geral pode ser obtido, incluindo-se os termos de dissipação de energia na equação 3.51, que neste caso podem ser definidos adotando uma combinação de amortecimento viscoso e estrutural de acordo com (ERTURK; INMAN, 2011b; VAROTO, 2017).

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} + c_s I \frac{\partial^5 w_r}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w_r}{\partial t} \\ & + EI_{eq} \frac{\partial^4 w_r}{\partial x^4} + \vartheta v(t) \left[\frac{d\delta(x - x_0^p)}{dx} - \frac{d\delta(x - x_f^p)}{dx} \right] \\ & \cong - [\rho A + m_l \delta(x - \bar{x}, i - k) + M_t \delta(x - x_t, i - n)] \frac{d^2 w_b}{dt^2} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Onde $c_s I$ representa o coeficiente de amortecimento estrutural equivalente da seção transversal composta, sendo I o momento de inércia equivalente da seção e c_s o coeficiente de amortecimento estrutural, além c_a é o coeficiente de amortecimento viscoso equivalente. Portanto, pode-se em princípio considerar duas formas de dissipação de energia no modelo apresentado pela equação 3.52, uma devido à efeitos estruturais e internos ao processo de deformação da estrutura e o segundo devido a efeitos viscosos (amortecimento do fluido ao redor da estrutura, por exemplo)(ERTURK; INMAN, 2011b).

Até agora se descreveu o modelo estrutural espacial com a equação 3.52, mas tem-se que descrever o modelo modal, que corresponde a determinação das *frequências naturais não amortecidas* e os *modos normais de vibração* da estrutura (EWINS, 2000). Para os sistemas discretos, o modelo modal é determinado por duas matrizes, onde a primeira diagonal contém os autovalores ou as frequências naturais na diagonal principal e a segunda, é uma matriz retangular que contém os autovetores (modos de vibração). Mas para um caso do modelo contínuo, ainda é possível organizar os as frequências naturais em uma matriz diagonal, mas para o caso dos modos de vibração esta organização matricial não é possível pois a solução do auto-problema contínuo culmina com a obtenção das chamadas auto-funções, sendo estas as formas modais correspondentes aos infinitos modos de vibrar de um sistema contínuo (RAO, 2007). A determinação do modelo modal para o problema em questão requer a solução da equação diferencial parcial conservativa e homogênea do sistema, que corresponde, de forma simplificada à equação 3.52, onde são desprezados os termos dissipativos, de acoplamento elétrico e da excitação, obtendo-se assim:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.53)$$

Para o movimento livre exige-se que $w_b(x, t) = 0$ e portanto tem-se que $w_r(x, t) = w(x, t)$. Além disso para a determinação das frequências modais deve-se ter em conta os efeitos da massa e rigidez tanto das vigas que formam a subestrutura quando o material PZT. Assim

também na equação 3.53 o termo relativo ao acoplamento eletromecânico que corresponde ao último termo do lado esquerdo da igualdade da equação 3.52 deve também ser excluído para fins de obtenção do modelo modal conservativo do sistema. Mas a rigidez e a massa do material PZT sim influenciam os valores das frequências naturais não amortecidas bem como as auto-funções do sistema. Então é necessário que tais características sejam definidas, é assim que para o caso da massa equivalente, a mesma pode ser obtida a partir da seguinte relação, que pode ser encontrada no apêndice A:

$$(\rho A)_{eq} = b \left(\rho_s h_s + \rho_p h_p \frac{L_p}{L_s} \right) \quad (3.54)$$

Onde os subíndices s e p , representam las propriedades da subestrutura e PZT respectivamente; De modo similar é determinado o valor de $(EI)_{eq}$ com a seguinte equação:

$$(EI)_{eq} = (EI) \frac{(L_s - L_p)}{L_s} + (EI)_c \frac{L_p}{L_s} \quad (3.55)$$

Onde (EI) e $(EI)_c$ correspondem às rigidezes flexionais da subestrutura e da secção composta respectivamente, como é sabido que as vigas da estrutura são consideradas de igual comprimento, a formulação descrita na equação 3.54 e 3.55 estão desenvolvidas no apêndice A.

Para obter a solução do problema de vibração livre, pode-se considerar uma função de variáveis separáveis, que inclui todos os modos de vibração (RAO, 2007; FRANCO, 2013):

$$w_i(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} W_{ji}(x) \eta_j(t) \quad (3.56)$$

A equação 3.56 é aplicável para todas as vigas, mesmo assim que $W_{ji}(x)$ representa j -ésima auto-função pertencendo à i -ésima viga e $\eta_j(t)$ a coordenada generalizada do j -ésimo modo de vibrar. Usando a equação 3.56 para resolver a equação 3.53 obtém-se duas equações diferenciais ordinárias homogêneas, uma na variável x e a outra na t (LEISSA; QATU, 2011; RAO, 2007).

$$\frac{d^4 W_{ji}(x)}{dx^4} - \lambda_j^4 W_{ji}(x) = 0 \quad (3.57)$$

$$\frac{d^2 \eta_j(t)}{dt^2} + \omega_{nj}^2 \eta_j(t) = 0 \quad (3.58)$$

Onde λ_j e ω_{nj} representam o autovalor frequência natural correspondendo ao j -ésimo modo de vibrar, e estão relacionados com as seguintes expressões:

$$\omega_{nj} = \beta_j^2 c \quad (3.59)$$

$$c = \sqrt{\frac{(EI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}}} \quad (3.60)$$

E sendo as soluções da equação 3.57 e 3.58 dadas respectivamente por:

$$\eta_j(t) = a_j \text{sen}(\omega_{nj}t) + b_j \text{cos}(\omega_{nj}t) \quad (3.61)$$

$$W_{ji}(x) = A_{ji} \text{sen}(\lambda_j x) + B_{ji} \text{cos}(\lambda_j x) + C_{ji} \text{senh}(\lambda_j x) + D_{ji} \text{cosh}(\lambda_j x) \quad (3.62)$$

A equação 3.61 representa a solução no função do tempo, onde as constantes a_j e b_j dependem das *condições iniciais* do problema livre e não amortecido enquanto que as constantes de integração A_{ji} , B_{ij} , C_{ij} e D_{ji} na equação 3.62 estão relacionadas às *condições de contorno* do problema, além estas quatro constantes para cada auto-função requerem quatro condições de contorno para cada viga da montagem mostrada na figura 6. Assim, uma estrutura *fanfolded* composta por duas vigas, como o caso da figura 11, exigirá a determinação de 8 constantes de integração, e portanto sendo necessárias 8 relações de compatibilidade, sendo destas 4 aplicadas aos contornos da primeira e última vigas, e as demais aplicadas às massas de conexão entre as vigas que consecutivas. As condições de contorno, que foram aplicadas no análise da viga cantiléver podem ser usadas nesta estrutura, de acordo com a figura 11. Usando as relações das equações 3.22 até 3.25, e considerando a separação de variáveis obtém-se:

$$W_{j1}(0) = 0 \quad (3.63)$$

$$W'_{j1}(0) = 0 \quad (3.64)$$

As condições de contorno expressas nestas equações são resultados clássicos da dinâmica estrutural, implicando deslocamento e giros nulos para o ponto de conexão da primeira viga à referência fixa, conforme é mostrado na figura 11. Para a última viga da estrutura tem-se 2 equações de contorno que descrevem relações de equilíbrio dinâmico da força cortante e momento fletor que incluem a massa concentrada, nas seguintes expressões:

$$(EI)_{eq} W''_{jn}(x) + (-1)^n I_t W'_{jn}(x) \omega_{nj}^2 = 0 \quad (3.65)$$

$$(EI)_{eq} W'''_{jn}(x) - (-1)^n M_t W_{jn}(x) \omega_{nj}^2 = 0 \quad (3.66)$$

Estas equações representam: a primeira, o equilíbrio dinâmico para o momento fletor e momento de inércia da massa concentrada na extremidade da última viga, e a segunda, representa o equilíbrio entre a força cortante na extremidade da viga e a componente inercial de translação para a massa concentrada M_t . Ambas estão relacionadas mediante o signo $(-1)^n$ já que para um numero n de vigas a massa na extremidade da última viga pode ter 2 posições, quando $x = 0$ se considera um numero de vigas par e quando $x = L_s$ um numero de vigas impar. Salienta-se aqui que o momento de inércia I_t para a massa concentrada refere-se ao eixo principal de rotação y , perpendicular ao plano da figura 11 e tem-se que considerar que o momento de inercia deve ser com relação ao ponto final do eixo neutro da viga composta (subestrutura com camada PZT), o calculo feito e as características consideradas estão detalhadas no apêndice B.

As 4 equações anteriores se aplicam aos contornos da estrutura *fan-folded*, ou seja à primeira e à última viga. Conforme já foi indicado acima, estas relações são suficientes para a determinação das constantes de integração das auto-funções quando $n = 1$, ou seja, apenas uma única viga é usada na montagem. Para $n \geq 2$, torna-se necessária a definição de relações de compatibilidade nos locais de conexão entre vigas consecutivas. Conceitualmente, estas relações de compatibilidade resumem-se ao atendimento das seguintes condições nas conexões: (i) compatibilidade de deslocamentos de translação; (ii) Compatibilidade de deslocamentos angulares; (iii) Equilíbrio dinâmico entre momentos fletores e angulares e; (iv) Equilíbrio dinâmico entre as forças cortantes e as componentes inerciais. Assim, seguindo um procedimento análogo ao anteriormente descrito para as condições de contorno, as condições de compatibilidade para a conexão entre duas vigas quaisquer da montagem podem ser escritas da seguinte forma:

$$W_{ji}(x) = W_{j(i+1)}(x) \quad (3.67)$$

$$W'_{ji}(x) = W'_{j(i+1)}(x) \quad (3.68)$$

$$(EI)_{eq} W''_{ji}(x) = -(EI)_{eq} W''_{j(i+1)}(x) + (-1)^n I_l \omega_{nj}^2 W'_{j(i+1)}(x) \quad (3.69)$$

$$(EI)_{eq} W'''_{ji}(x) = -(EI)_{eq} W'''_{j(i+1)}(x) - (-1)^n M_l \omega_{nj}^2 W_{j(i+1)}(x) \quad (3.70)$$

As duas primeiras equações anteriores estabelecem a igualdade de deslocamentos linear vertical e angular no ponto de conexão. Já as duas últimas definem o equilíbrio de momentos e forças para a conexão, respectivamente. Similarmente ao caso da massa M_t , assumindo que as massas de conexão sejam todas iguais e possuam a geometria de um bloco prismático, o momento de inércia I_l é calculado no apêndice C. Salienta-se que o presente modelo leva em consideração o efeito do momento de inércia da massa de conexão, de acordo com a equação 3.69. Tal efeito foi desprezado na formulação desenvolvida em (ANSARI; KARAMI, 2016).

Quando as condições de contorno expressas pelas equações 3.63 até 3.66 são aplicadas à equação 3.62, obtém-se duas equações matriciais de ordem 4, ambas homogêneas, expressas para a primeira e última viga da montagem, respectivamente, que podem ser expressas por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_{j1}^{11} & V_{j1}^{12} & V_{j1}^{13} & V_{j1}^{14} \\ V_{j1}^{21} & V_{j1}^{22} & V_{j1}^{23} & V_{j1}^{24} \end{bmatrix}}_{[V_{j1}]} \begin{Bmatrix} A_{j1} \\ B_{j1} \\ C_{j1} \\ D_{j1} \end{Bmatrix} = 0 \quad \underbrace{\begin{bmatrix} T_{jn}^{11} & T_{jn}^{12} & T_{jn}^{13} & T_{jn}^{14} \\ T_{jn}^{21} & T_{jn}^{22} & T_{jn}^{23} & T_{jn}^{24} \end{bmatrix}}_{[T_{jn}]} \begin{Bmatrix} A_{jn} \\ B_{jn} \\ C_{jn} \\ D_{jn} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.71)$$

Considerando que as matrizes dos coeficientes $[V_{j1}]$ e $[T_{jn}]$ são retangulares de ordem 2

por 4, e definem-se da seguinte forma:

$$\begin{cases} V_{j1}^{11} = \text{sen}(\lambda_j x) & V_{j1}^{21} = \lambda_j \text{cos}(\lambda_j x) \\ V_{j1}^{12} = \text{cos}(\lambda_j x) & V_{j1}^{22} = -\lambda_j \text{sen}(\lambda_j x) \\ V_{j1}^{13} = \text{senh}(\lambda_j x) & V_{j1}^{23} = \lambda_j \text{cosh}(\lambda_j x) \\ V_{j1}^{14} = \text{cosh}(\lambda_j x) & V_{j1}^{24} = \lambda_j \text{senh}(\lambda_j x) \end{cases} \quad (3.72)$$

$$\begin{cases} T_{jn}^{11} = -(EI)_{eq} \lambda_j^2 \text{sen}(\lambda_j \bar{x}) + (-1)^n I_t \lambda_j^5 c^2 \text{cos}(\lambda_j \bar{x}) \\ T_{jn}^{12} = -(EI)_{eq} \lambda_j^2 \text{cos}(\lambda_j \bar{x}) - (-1)^n I_t \lambda_j^5 c^2 \text{sen}(\lambda_j \bar{x}) \\ T_{jn}^{13} = (EI)_{eq} \lambda_j^2 \text{senh}(\lambda_j \bar{x}) + (-1)^n I_t \lambda_j^5 c^2 \text{cosh}(\lambda_j \bar{x}) \\ T_{jn}^{14} = (EI)_{eq} \lambda_j^2 \text{cosh}(\lambda_j \bar{x}) + (-1)^n I_t \lambda_j^5 c^2 \text{senh}(\lambda_j \bar{x}) \\ T_{jn}^{21} = -(EI)_{eq} \lambda_j^3 \text{cos}(\lambda_j \bar{x}) - (-1)^n M_t \lambda_j^4 c^2 \text{sen}(\lambda_j \bar{x}) \\ T_{jn}^{22} = (EI)_{eq} \lambda_j^3 \text{sen}(\lambda_j \bar{x}) - (-1)^n M_t \lambda_j^4 c^2 \text{cos}(\lambda_j \bar{x}) \\ T_{jn}^{23} = (EI)_{eq} \lambda_j^3 \text{cosh}(\lambda_j \bar{x}) - (-1)^n M_t \lambda_j^4 c^2 \text{senh}(\lambda_j \bar{x}) \\ T_{jn}^{24} = (EI)_{eq} \lambda_j^3 \text{senh}(\lambda_j \bar{x}) - (-1)^n M_t \lambda_j^4 c^2 \text{cosh}(\lambda_j \bar{x}) \end{cases} \quad (3.73)$$

A variável x nas equações 3.72 recebe o valor $x = 0$ pois, para esse estudo considera-se que a posição onde a primeira viga está engastada será sempre a origem do sistema de referência (figura 11). Desta forma, a matriz $[V_{j1}]_{x=0}$ será escrita como:

$$[V_{j1}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda_j & 0 & \lambda_j & 0 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

De igual jeito, em relação às equações 3.73, pode-se assumir valores iguais a 0 ou L_s , dependendo de onde se encontra a massa na extremidade da última viga, é assim que para $\bar{x} = 0$ tem-se um número par de vigas e para $\bar{x} = L_s$ um número ímpar de vigas. Mas estas equações são válidas para a primeira e última vigas somente. É necessário aplicar agora as condições de equilíbrio nas massas de conexão com as equações 3.67 a 3.70 na equação 3.62, tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_{ji}^{11} & L_{ji}^{12} & L_{ji}^{13} & L_{ji}^{14} \\ L_{ji}^{21} & L_{ji}^{22} & L_{ji}^{23} & L_{ji}^{24} \\ L_{ji}^{31} & L_{ji}^{32} & L_{ji}^{33} & L_{ji}^{34} \\ L_{ji}^{41} & L_{ji}^{42} & L_{ji}^{43} & L_{ji}^{44} \end{bmatrix}}_{[L_{ji}]} \begin{Bmatrix} A_{ji} \\ B_{ji} \\ C_{ji} \\ D_{ji} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{j(i+1)}^{11} & R_{j(i+1)}^{12} & R_{j(i+1)}^{13} & R_{j(i+1)}^{14} \\ R_{j(i+1)}^{21} & R_{j(i+1)}^{22} & R_{j(i+1)}^{23} & R_{j(i+1)}^{24} \\ R_{j(i+1)}^{31} & R_{j(i+1)}^{32} & R_{j(i+1)}^{33} & R_{j(i+1)}^{34} \\ R_{j(i+1)}^{41} & R_{j(i+1)}^{42} & R_{j(i+1)}^{43} & R_{j(i+1)}^{44} \end{bmatrix}}_{[R_{j(i+1)}]} \begin{Bmatrix} A_{j(i+1)} \\ B_{j(i+1)} \\ C_{j(i+1)} \\ D_{j(i+1)} \end{Bmatrix} \quad (3.75)$$

Onde estas matrizes estão definidas com os seguintes coeficientes:

$$[L_{ij}] = \begin{bmatrix} \text{sen}(\lambda_j \bar{x}) & \text{cos}(\lambda_j \bar{x}) & \text{senh}(\lambda_j \bar{x}) & \text{cosh}(\lambda_j \bar{x}) \\ \text{cos}(\lambda_j \bar{x}) & -\text{sen}(\lambda_j \bar{x}) & \text{cosh}(\lambda_j \bar{x}) & \text{senh}(\lambda_j \bar{x}) \\ -EI \lambda_j^2 \text{sen}(\lambda_j \bar{x}) & -EI \lambda_j^2 \text{cos}(\lambda_j \bar{x}) & EI \lambda_j^2 \text{senh}(\lambda_j \bar{x}) & EI \lambda_j^2 \text{cosh}(\lambda_j \bar{x}) \\ -EI \lambda_j^3 \text{cos}(\lambda_j \bar{x}) & EI \lambda_j^3 \text{sen}(\lambda_j \bar{x}) & EI \lambda_j^3 \text{cosh}(\lambda_j \bar{x}) & EI \lambda_j^3 \text{senh}(\lambda_j \bar{x}) \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$[R_{(i+1)j}] = \begin{bmatrix} \text{sen}(\lambda_j \bar{x}) & \cos(\lambda_j \bar{x}) & & \\ \cos(\lambda_j \bar{x}) & -\text{sen}(\lambda_j \bar{x}) & & \\ EI\lambda_j^2 \text{sen}(\lambda_j \bar{x}) \pm (-I_l \lambda_j^5 c^5 \cos(\lambda_j \bar{x})) & EI\lambda_j^2 \cos(\lambda_j \bar{x}) \pm (-I_l \lambda_j^5 c^2 (-\text{sen}(\lambda_j \bar{x}))) & EI\lambda_j^2 \text{sen}(\lambda_j \bar{x}) & \\ \text{senh}(\lambda_j \bar{x}) & \cosh(\lambda_j \bar{x}) & & \\ \cosh(\lambda_j \bar{x}) & \text{senh}(\lambda_j \bar{x}) & & \\ -EI\lambda_j^2 \text{senh}(\lambda_j \bar{x}) \pm (-I_l \lambda_j^5 c^5 \cos(\lambda_j \bar{x})) & -EI\lambda_j^2 \cosh(\lambda_j \bar{x}) \pm (-I_l \lambda_j^5 c^2 \cosh(\lambda_j \bar{x})) & -EI\lambda_j^2 \text{senh}(\lambda_j \bar{x}) & \end{bmatrix}$$

Pode-se obter uma relação recursiva com as matrizes L_{ji} e $R_{j(i+1)}$ para ter uma equação simplificada com os coeficientes da primeira e a última viga da montagem, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} A_{jn} \\ B_{jn} \\ C_{jn} \\ D_{jn} \end{Bmatrix} = [R_{jn}]^{-1} [L_{j(n-1)}] [R_{j(n-1)}]^{-1} [L_{j(n-2)}] \dots [R_{j2}]^{-1} [L_{j1}] \begin{Bmatrix} A_{j1} \\ B_{j1} \\ C_{j1} \\ D_{j1} \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

Com esta última relação de equações unido às matrizes $[V_{j1}]$ e T_{jn} que foram obtidas na equação 3.71 pode-se escrever uma equação completa para a montagem da estrutura, dada por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_{j1}^{11} & N_{j1}^{12} & N_{j1}^{13} & N_{j1}^{14} \\ N_{j1}^{21} & N_{j1}^{22} & N_{j1}^{23} & N_{j1}^{24} \\ N_{j1}^{31} & N_{j1}^{32} & N_{j1}^{33} & N_{j1}^{34} \\ N_{j1}^{41} & N_{j1}^{42} & N_{j1}^{43} & N_{j1}^{44} \end{bmatrix}}_{[N_{j1}]} \begin{Bmatrix} A_{j1} \\ B_{j1} \\ C_{j1} \\ D_{j1} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.79)$$

Junto com a relação seguinte:

$$[N] = \begin{bmatrix} & [V_{j1}]_{2 \times 4} \\ [T_{jn}]_{2 \times 4} & [[R_{jn}]^{-1} [L_{j(n-1)}] [R_{j(n-1)}]^{-1} [L_{j(n-2)}] \dots [R_{j2}]^{-1} [L_{j1}]]_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Desta forma, a equação 3.79 com a matriz de coeficientes dada pela equação 3.80 permitem ter a solução dos coeficientes das auto-funções referentes à primeira viga. Mas, os coeficientes das auto-funções das demais vigas podem ser obtidos usando a relação da equação 3.78. Algumas observações importantes, é preciso levar em conta: (i) A equação 3.79 é homogênea, que admite infinitas soluções e portanto, tem-se que considerar que a determinação das constantes de integração das auto-funções representam na verdade fatores de escala, pois o mais importante é a forma do modo de vibrar, e não necessariamente os valores de sua amplitude. Salvo em casos onde se pretende comparar os resultados para os modos calculados com dados correspondentes provenientes de experimentos, qualquer solução não trivial da equação 3.79 é útil no estudo da dinâmica do gerador *fan-folded*; (ii) A matriz $[N_{j1}]$ dos coeficientes da equação 3.79, generalizada para i -ésima viga e para o j -ésimo modo de vibrar $[N_{ji}]$, é função não apenas das propriedades geométricas e material do gerador *fan-folded*, mas, mais importante, dos autovalores λ_j do sistema, ou

seja $[N_{ji}] = [N_{ji}(\lambda_j)]$. Desta forma, a obtenção de uma solução não trivial da Equação equação 3.80 requer necessariamente que $[[N_{ji}(\lambda_j)]] = 0$, então, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser nulo. Ao impor tal condição, obtém-se como resultado a chamada *equação característica* do sistema, que é uma equação polinomial do tipo $\sum_{p=0}^N a_p \lambda^p = 0$, cuja solução fornece os auto-valores λ_j do sistema em estudo. Por se tratar de um sistema de parâmetros distribuídos, a equação característica possui um número infinito de raízes, e cada uma delas correspondendo à uma auto-função $W_{ji}(\lambda_j, x)$, para a i -ésima viga, para o j -ésimo modo de vibrar. Então, precisa se limitar a busca das soluções para as raízes da equação característica a um numero finito, que depende também de quantos modos de vibração pretende-se incluir na análise do sistema. Para a determinação das constantes de integração A_{ji} , B_{ji} , C_{ji} e D_{ji} , que é a solução de um sistema homogêneo de equações, aborda-se a técnica descrita em (CLOUGH; PENZIEN, 2003). Portanto, da equação 3.79 pode-se considerar $A_{ji} = 1$, o que facilita a determinação dos outros coeficientes para o sistema:

$$\begin{bmatrix} N_{j1}^{11} & N_{j1}^{12} & N_{j1}^{13} & N_{j1}^{14} \\ N_{j1}^{21} & N_{j1}^{22} & N_{j1}^{23} & N_{j1}^{24} \\ N_{j1}^{31} & N_{j1}^{32} & N_{j1}^{33} & N_{j1}^{34} \\ N_{j1}^{41} & N_{j1}^{42} & N_{j1}^{43} & N_{j1}^{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ B_{j1} \\ C_{j1} \\ D_{j1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.81)$$

Desta equação pode-se determinar já a solução do sistema que pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} B_{j1} \\ C_{j1} \\ D_{j1} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} N_{j1}^{22} & N_{j1}^{23} & N_{j1}^{24} \\ N_{j1}^{32} & N_{j1}^{33} & N_{j1}^{34} \\ N_{j1}^{42} & N_{j1}^{43} & N_{j1}^{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{j1}^{21} \\ N_{j1}^{31} \\ N_{j1}^{41} \end{Bmatrix} \quad (3.82)$$

Finalmente, a equação 3.82 permite determinar os coeficientes de integração da primeira viga, e como foi dito anteriormente, os coeficientes das demais vigas serão encontradas com a relação recursiva da equação 3.78. No entanto é importante mencionar que cada conjunto de coeficientes tem correspondência com cada autovalor λ_j . A obtenção deste Modelo Modal é muito importante para encontrar as funções de resposta em frequência eletromecânicas, que será objeto de estudo nos capítulos seguintes.

3.1.3 Modelo de Estrutura Fan-Folded usando teoria de Timoshenko

Na seção anterior foi desenvolvido o modelo analítico considerando a teoria de *Euler-Bernoulli*, onde foram desprezados os efeitos da força cortante e da inercia de rotação, mas agora se desenvolverá o modelo analítico para a estrutura da figura 6 tendo tais condições. Algumas considerações da modelagem feito para a viga cantiléver e *Euler-Bernoulli* serão inclusas nesta secção tais como (i) A primeira viga está fixa na sua extremidade esquerda, (ii) A massa da ultima viga terá de igual jeito duas posições relativas possíveis, sendo $x = 0$ para um numero de vigas par e $x = L_s$ para um numero impar de vigas, (iii) De

igual forma todas as vigas são consideradas de igual comprimento para o desenvolvimento do modelo da estrutura. Na primeira parte desta secção se descreverá o modelo espacial que inclui a modelagem estrutural do sistema considerando também o material PZT, já na última parte será descrito o modelo modal do igual forma como foi feito na secção anterior. De acordo com a equação 3.5 que foi descrito na viga cantiléver, conjuntamente com a força cortante, mas para fins de simplificação nas equações pode-se minimizar as dependências das variáveis $V(x, t) = V$, $w(x, t) = w$, $\phi(x, t) = \phi$ e $f(x, t) = f$, então pode se ter a relação seguinte:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} + f = (\rho A)_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.83)$$

$$V = -(kGA)_{eq} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \quad (3.84)$$

Nesta equação é importante ressaltar que a diferencia do modelo proposto por *Euler-Bernoulli*, se considera a variável $\phi(x, t) = \phi$ que representa o angulo de flexão da viga e esta relacionado com o angulo de corte como foi apresentado na equação 3.3 e mostrado também na figura 8. É importante levar em conta que neste caso o valor de $(kGA)_{eq}$ e $(\rho A)_{eq}$ representam dois valores da viga composta (subestrutura e material PZT) (DIETL; WICKENHEISER; GARCIA, 2010), então é preciso estabelecer um calculo equivalente para ser usado nesta modelagem; Todas estas equivalências da formulação de propriedades equivalentes podem ser encontradas no Apêndice A.

Da equação 3.11, é preciso fazer uma dedução do momento fletor, que inclua o material PZT, seguindo uma metodologia como foi feito na equação 3.36. Assim pode-se ter a relação seguinte:

$$M(x, t) = - \int_{h_a}^{h_b} \sigma_1^s b z dz - \int_{h_b}^{h_c} \sigma_1^p b z dz \quad (3.85)$$

Considerando a equação 3.1 e 3.42, pode-se obter uma relação para a tensão axial, então a equação 3.85 do momento fletor pode ser escrita como:

$$M(x, t) = \int_{h_a}^{h_b} E_s b \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} z^2 dz + \int_{h_b}^{h_c} E_p b \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} z^2 dz - \int_{h_b}^{h_c} v(t) E_p b \frac{d_{31}}{h_p} z dz \quad (3.86)$$

Onde os limites de integração h_a , h_b e h_c já foram definidos na equação 3.30 e representam os limites das posições verticais da secção transversal. De esta última equação pode ser já simplificada para ter o valor $(EI)_{eq}$ do igual jeito que foi feito na modelagem do *Euler-Bernoulli*, então tem-se:

$$M(x, t) = \underbrace{\left[\frac{E_s b (h_b^3 - h_a^3) + E_p b (h_c^3 - h_b^3)}{3} \right]}_{(EI)_{eq}} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} - \underbrace{\left[\frac{E_p b d_{31} (h_c^2 - h_b^2)}{2h_p} \right]}_{\vartheta} v(t) \quad (3.87)$$

Ate agora foi descrito o *Modelo Espacial* que é preciso obter para o *Modelo electromecânico*, mas de aqui em diante se desenvolverá o chamado *Modelo Modal*, que permite mostrar o processo para determinar as frequências naturais e os modos de vibração do sistema proposto (EWINS, 2000). A solução para o problema da vibração livre é obtida assumindo-se que o deslocamento transversal da i -ésima viga composta da montagem mostrada na figura 11 esta dado por (LEISSA; QATU, 2011; ROSSI; LAURA, 1990):

$$\begin{cases} w(x, t) = W(x)\eta(t) \\ \phi(x, t) = \Phi(x)\eta(t) \end{cases} \quad (3.102)$$

Mais ainda é possível escrever o sistema de solução proposto que considera todos os modos de vibração do sistema (ANSARI; KARAMI, 2015; DIETL; WICKENHEISER; GARCIA, 2010):

$$\begin{cases} w_i(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} W_{ji}(x)\eta_j(t) = \sum_{j=1}^{\infty} W_{ji}(x)\text{sen}(\omega_{nj}) \\ \phi_i(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{ji}(x)\eta_j(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{ji}(x)\text{sen}(\omega_{nj}) \end{cases} \quad (3.103)$$

O sistema da equação 3.103 é aplicável para todas as vigas, onde $W_{ji}(x)$ representa j -ésima auto-função da i -ésima viga e $\eta_j(t)$ a coordenada generalizada do j -ésimo modo de vibrar. A determinação do modelo modal, como já foi considerado no modelo da secção anterior, requer a solução da equação diferencial mas de forma simplificada e desprezando os termos de acoplamento elétrico e de excitação ($w(x, t) = w_r(x, t)$). Usa-se a variável $\xi = x/L_s$, assim também $\partial x = L_s \partial \xi$ (ROSSI; LAURA, 1990; RAO, 2007); por tanto o sistema da equação 3.95:

$$\begin{cases} (EI)_{eq} \Phi_{ji}'' + (kGA)_{eq} L_s (W_{ji}' - L_s \Phi_{ji}) + (\rho I_y)_{eq} \omega_{nj}^2 L_s^2 \Phi_{ji} = 0 \\ (kGA)_{eq} (W_{ji}'' - L_s \Phi_{ji}') + (\rho A)_{eq} \omega_{nj}^2 L_s^2 \Phi_{ji} = 0 \end{cases} \quad (3.104)$$

Assim, nesta equação 3.104, é importante ressaltar-se que as variáveis W y Φ são dependentes somente de x (indiretamente também de ξ), além ω_{nj} representa a frequência natural correspondendo ao j -ésimo modo de vibrar, e para obter a solução deste sistema de equações consideramos (LEISSA; QATU, 2011; RAO, 2007):

$$\begin{cases} W_{ji}(x) = Ae^{\frac{ax}{L_s}} \\ \Phi_{ji}(x) = Be^{\frac{ax}{L_s}} \end{cases} \quad (3.105)$$

Onde a , A e B são constantes; Esta solução pode ser usada no sistema de equações 3.104:

$$\begin{bmatrix} a^2(kGA)_{eq} + (\rho A)_{eq} \omega_{nj}^2 L_s^2 & -a(kGA)_{eq} L_s \\ a(kGA)_{eq} L_s & a^2(EI)_{eq} - L_s^2(kGA)_{eq} + (\rho I_y)_{eq} \omega_{nj}^2 L_s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

Tendo a equação característica seguinte:

$$K_1 a^4 + K_2 a^2 - K_3 = 0 \quad (3.107)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} K_1 &= (EI)_{eq}(kGA)_{eq} \\ K_2 &= L_s^2 \omega_{nj}^2 (kGA)_{eq} (\rho I_y)_{eq} + L_s^2 \omega_{nj}^2 (\rho A)_{eq} (EI)_{eq} \\ K_3 &= L_s^2 \omega_{nj}^2 (kGA)_{eq} (\rho A)_{eq} - L_s^4 \omega_{nj}^4 (\rho A)_{eq} (\rho I_y)_{eq} \end{aligned}$$

Para obter a solução desta equação, deve se levar em conta que $K_2^2 + 4K_1K_3 > 0$ (LEISSA; QATU, 2011). Sendo assim, as primeiras soluções da equação característica, a_1^2 e a_2^2 , são números reais, mas a_2^2 tem 3 possíveis valores o que gera desenvolver três casos (SALARIEH; GHORASHI, 2006):

- Case I. Quando $a_2^2 > 0$

$$W_{ji}(x) = A_1 \text{sen}(\lambda_{1j}\xi) + A_2 \text{cos}(\lambda_{1j}\xi) + A_3 \text{senh}(\lambda_{2j}\xi) + A_4 \text{cosh}(\lambda_{2j}\xi) \quad (3.108)$$

$$\Phi_{ji}(x) = -\frac{B_1}{L_s} \text{cos}(\lambda_{1j}\xi) + \frac{B_2}{L_s} \text{sen}(\lambda_{1j}\xi) + \frac{B_3}{L_s} \text{cosh}(\lambda_{2j}\xi) + \frac{B_4}{L_s} \text{senh}(\lambda_{2j}\xi) \quad (3.109)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L_s} \\ \lambda_{1j}^2 &= \frac{K_2 + \sqrt{K_2^2 + 4K_1K_3}}{2K_1} \\ \lambda_{2j}^2 &= \frac{-K_2 + \sqrt{K_2^2 + 4K_1K_3}}{2K_1} \end{aligned}$$

Mesmo que as equações 3.108 e 3.109 representam a solução do sistema proposto, tem-se notar que são 8 constantes e a equação 3.104 é de 4th ordem, portanto se incluem 4 relações adicionais que permitem a solução completa (LEISSA; QATU, 2011):

$$A_1 \left(\frac{L_s^2 \omega_{nj}^2 (\rho A)_{eq}}{\lambda_{1j} (kGA)_{eq}} - \lambda_{1j} \right) - B_1 = 0 \quad (3.110)$$

$$A_2 \left(\frac{L_s^2 \omega_{nj}^2 (\rho A)_{eq}}{\lambda_{1j} (kGA)_{eq}} - \lambda_{1j} \right) - B_2 = 0 \quad (3.111)$$

$$A_3 \left(\frac{L_s^2 \omega_{nj}^2 (\rho A)_{eq}}{\lambda_{2j} (kGA)_{eq}} - \lambda_{2j} \right) - B_3 = 0 \quad (3.112)$$

$$A_4 \left(\frac{L_s^2 \omega_{nj}^2 (\rho A)_{eq}}{\lambda_{2j} (kGA)_{eq}} - \lambda_{2j} \right) - B_4 = 0 \quad (3.113)$$

- Case II. Quando $a_2^2 < 0$

$$W_{ji}(x) = A_1 \text{sen}(\lambda_{1j}\xi) + A_2 \text{cos}(\lambda_{1j}\xi) + A_3 \text{sen}(\lambda_{3j}\xi) + A_4 \text{cos}(\lambda_{3j}\xi) \quad (3.114)$$

$$\Phi_{ji}(x) = -\frac{B_1}{L_s} \cos(\lambda_{1j}\xi) + \frac{B_2}{L_s} \text{sen}(\lambda_{1j}\xi) - \frac{B_3}{L_s} \cos(\lambda_{3j}\xi) + \frac{B_4}{L_s} \text{sen}(\lambda_{3j}\xi) \quad (3.115)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L_s} \\ \lambda_{1j}^2 &= \frac{K_2 + \sqrt{K_2^2 + 4K_1K_3}}{2K_1} \\ \lambda_{3j}^2 &= \frac{K_2 - \sqrt{K_2^2 + 4K_1K_3}}{2K_1} \end{aligned}$$

Adicionado das condições:

$$A_1 \left(\frac{L_s^2 \omega_{nj}^2 (\rho A)_{eq}}{\lambda_{1j} (kGA)_{eq}} - \lambda_{1j} \right) - B_1 = 0 \quad (3.116)$$

$$A_2 \left(\frac{L_s^2 \omega_{nj}^2 (\rho A)_{eq}}{\lambda_{1j} (kGA)_{eq}} - \lambda_{1j} \right) - B_2 = 0 \quad (3.117)$$

$$A_3 \left(\frac{L_s^2 \omega_{nj}^2 (\rho A)_{eq}}{\lambda_{3j} (kGA)_{eq}} - \lambda_{3j} \right) - B_3 = 0 \quad (3.118)$$

$$A_4 \left(\frac{L_s^2 \omega_{nj}^2 (\rho A)_{eq}}{\lambda_{3j} (kGA)_{eq}} - \lambda_{3j} \right) - B_4 = 0 \quad (3.119)$$

- Case III. Quando $a_2^2 = 0$

$$W_{ji}(x) = A_1 \text{sen}(\lambda_{1j}\xi) + A_2 \cos(\lambda_{1j}\xi) + A_3 \xi + A_4 \quad (3.120)$$

$$\Phi_{ji}(x) = -\frac{B_1}{L_s} \cos(\lambda_{1j}\xi) + \frac{B_2}{L_s} \text{sen}(\lambda_{1j}\xi) + \frac{B_3}{L_s} \xi + \frac{B_4}{L_s} \quad (3.121)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L_s} \\ \lambda_{1j}^2 &= \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \end{aligned}$$

Com as condições seguintes:

$$A_1 \left(\frac{L_s^2 \omega_{nj}^2 (\rho A)_{eq}}{\lambda_{1j} (kGA)_{eq}} - \lambda_{1j} \right) - B_1 = 0 \quad (3.122)$$

$$A_2 \left(\frac{L_s^2 \omega_{nj}^2 (\rho A)_{eq}}{\lambda_{1j} (kGA)_{eq}} - \lambda_{1j} \right) - B_2 = 0 \quad (3.123)$$

$$A_3 = 0 \quad (3.124)$$

$$A_4 \left(\frac{L_s^2 \omega_{nj}^2 (\rho A)_{eq}}{(kGA)_{eq}} \right) - B_4 = 0 \quad (3.125)$$

Logo de apresentar os casos possíveis da solução, temos que levar em conta que além das relações anteriores, para poder encontrar as 8 contantes do problema, precisa ser adicionado 4 equações que são as *condições de contorno*. Assim, uma estrutura composta por duas vigas exigira ter 16 constantes de integração, destas 8 são vinculadas as relações entre W_{ji} e Φ_{ji} (4 para cada viga), das 8 restantes, 4 são aplicadas aos contornos da primeira e última vigas, as demais aplicadas às massas de ligação entre as vigas que compartilham da montagem. As *condições de contorno* para a primeira e última viga podem ser descritas na figura 11 e das equações 3.18 e 3.20:

$$W_{j1}(0) = 0 \quad (3.126)$$

$$\Phi_{j1}(0) = 0 \quad (3.127)$$

As condições de contorno expressas pelas equações 3.126 e 3.127 implicam deslocamento e giros nulos para o ponto de conexão da primeira viga à referência fixa, conjuntamente com as relações da última viga (ROSSI; LAURA, 1990):

$$(EI)_{eq} \Phi'_{jn}(x) + (-1)^n \omega_{nj}^2 (I_{ts} \Phi_{jn}(x) + x_{ct} M_{ts} W_{jn}(x)) = 0 \quad (3.128)$$

$$(kGA)_{eq} (\Phi_{jn}(x) - W'_{jn}(x)) + (-1)^n \omega_{nj}^2 M_{ts} (W_{jn}(x) + x_{ct} \Phi_{jn}(x)) = 0 \quad (3.129)$$

Onde representam o equilíbrio dinâmico para o momento fletor e de inércia da massa concentrada na extremidade da última viga, no entanto, x_{ct} representa a distancia do centro de massa M_t , sendo assim inclusa nos cálculos do apêndice B. Como já foi mencionado na secção anterior, o valor $(-1)^n$, é um ajuste para a posição da massa, onde n representa o numero de vigas na montagem da estrutura. De fato o modelo generalizado na última viga pode-se ter duas opções enquanto a sua posição, quando $x = 0$ se considera um numero de vigas par e quando $x = L_s$ um numero de vigas impar. Além destas equações, as relações de ligação nas vigas consecutivas com a masa m_l precisam ser determinadas, mesmo assim, usando um procedimento análogo ao anteriormente descrito:

$$W_{ji}(x) = W_{j(i+1)}(x) \quad (3.130)$$

$$\Phi_{ji}(x) = \Phi_{j(i+1)}(x) \quad (3.131)$$

$$(EI)_{eq} \Phi'_{ji}(x) = -(EI)_{eq} \Phi'_{j(i+1)}(x) + (-1)^n \omega_{nj}^2 (I_{ls} \Phi_{j(i+1)}(x) + x_{cl} M_{ls} W_{j(i+1)}(x)) \quad (3.132)$$

$$(kGA)_{eq} (W'_{ji}(x) - \Phi_{ji}(x)) = -(kGA)_{eq} (W'_{j(i+1)}(x) - \Phi_{j(i+1)}(x)) + (-1)^n \omega_{nj}^2 M_{ls} (W_{j(i+1)}(x) + x_{cl} \Phi_{j(i+1)}(x)) \quad (3.133)$$

Até agora se apresentaram as equações requeridas para determinar o modelo modal junto com as frequências modais, mas tem-se 3 casos possíveis a desenvolver, no entanto que o

processo pode ser simplificado ao considerar o primeiro caso só, isso porque nesta opção é típico para baixas frequências (LEISSA; QATU, 2011). Então as equações 3.126 e 3.127 aplicadas às soluções das equações 3.108 e 3.109, obtém-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_{j1}^{11} & V_{j1}^{12} & V_{j1}^{13} & V_{j1}^{14} & V_{j1}^{15} & V_{j1}^{16} & V_{j1}^{17} & V_{j1}^{18} \\ V_{j1}^{21} & V_{j1}^{22} & V_{j1}^{23} & V_{j1}^{24} & V_{j1}^{25} & V_{j1}^{26} & V_{j1}^{27} & V_{j1}^{28} \end{bmatrix}}_{[V_{j1}]} \begin{Bmatrix} A_{1(j1)} \\ A_{2(j1)} \\ A_{3(j1)} \\ A_{4(j1)} \\ B_{1(j1)} \\ B_{2(j1)} \\ B_{3(j1)} \\ B_{4(j1)} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.134)$$

Tendo de forma explícita a matriz $[V_{j1}]$:

$$[V_{j1}] = \frac{1}{L_s} \begin{bmatrix} L_s \sin(\lambda_{1j} \xi_0) & L_s \cos(\lambda_{1j} \xi_0) & L_s \sinh(\lambda_{2j} \xi_0) & L_s \cosh(\lambda_{2j} \xi_0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\lambda_{1j} \xi_0) & \sin(\lambda_{1j} \xi_0) & \cosh(\lambda_{2j} \xi_0) & \sinh(\lambda_{2j} \xi_0) \end{bmatrix}_{2 \times 8} \quad (3.135)$$

Sendo:

$$\xi_0 = \frac{x_0}{L_s}$$

Sem embargo, a diferencia do modelo da secção anterior, é preciso adicionar nesta matriz as relações entre W_{j1} e Φ_{j1} , estas 4 relações foram escritas desde a equação 3.110 até 3.113. Assim mesmo, a equação 3.135 pode-se simplificar se o valor $x_0 = 0$ é substituído, pois a posição onde a primeira viga está engastada será sempre a origem do sistema. Então, sendo esclarecidas estas considerações, uma variação da equação 3.134 deve ser levada em conta e poderá ser expressada da seguinte forma:

$$[V_{j1}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_s} & 0 & \frac{1}{L_s} & 0 \\ \kappa_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{6 \times 8} \quad (3.136)$$

Onde:

$$\kappa_1 = \frac{L_s^2 \omega_{nj}^2 (\rho A)_{eq}}{\lambda_{1j} (kGA)_{eq}} - \lambda_{1j}$$

$$\kappa_2 = \frac{L_s^2 \omega_{nj}^2 (\rho A)_{eq}}{\lambda_{2j} (kGA)_{eq}} - \lambda_{2j}$$

De igual jeito podem ser formuladas as matrizes para a última viga:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_{j1}^{11} & T_{j1}^{12} & T_{j1}^{13} & T_{j1}^{14} & T_{j1}^{15} & T_{j1}^{16} & V_{j1}^{17} & V_{j1}^{18} \\ T_{j1}^{21} & T_{j1}^{22} & T_{j1}^{23} & T_{j1}^{24} & T_{j1}^{25} & T_{j1}^{26} & T_{j1}^{27} & T_{j1}^{28} \end{bmatrix}}_{[T_{jn}]} \begin{Bmatrix} A_{1(jn)} \\ A_{2(jn)} \\ A_{3(jn)} \\ A_{4(jn)} \\ B_{1(jn)} \\ B_{2(jn)} \\ B_{3(jn)} \\ B_{4(jn)} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.137)$$

Pode ser expresso do seguinte jeito:

$$[T_{jn}] = \frac{1}{L_s^2} \begin{bmatrix} (-1)^n \omega_{nj}^2 x_{ct} L_s^2 M_{ts} \text{sen}(\lambda_{1j} \xi^*) & (-1)^n \omega_{nj}^2 x_{ct} L_s^2 M_{ts} \text{cos}(\lambda_{1j} \xi^*) \\ (kGA)_{eq} \lambda_{1j} L_s \text{cos}(\lambda_{1j} \xi^*) + & -(kGA)_{eq} \lambda_{1j} L_s \text{sen}(\lambda_{1j} \xi^*) + \\ (-1)^n \omega_{nj}^2 L_s^2 M_{ts} \text{sen}(\lambda_{1j} \xi^*) & (-1)^n \omega_{nj}^2 L_s^2 M_{ts} \text{cos}(\lambda_{1j} \xi^*) \\ \\ (-1)^n \omega_{nj}^2 x_{ct} L_s^2 M_{ts} \text{senh}(\lambda_{1j} \xi^*) & (-1)^n \omega_{nj}^2 x_{ct} L_s^2 M_{ts} \text{cosh}(\lambda_{1j} \xi^*) \\ \\ (kGA)_{eq} \lambda_{1j} L_s \text{cosh}(\lambda_{1j} \xi^*) + & (kGA)_{eq} \lambda_{1j} L_s \text{senh}(\lambda_{1j} \xi^*) + \\ (-1)^n \omega_{nj}^2 L_s^2 M_{ts} \text{senh}(\lambda_{1j} \xi^*) & (-1)^n \omega_{nj}^2 L_s^2 M_{ts} \text{cosh}(\lambda_{1j} \xi^*) \\ \\ (EI)_{eq} \lambda_{1j} \text{sen}(\lambda_{1j} \xi^*) - & (EI)_{eq} \lambda_{1j} \text{cos}(\lambda_{1j} \xi^*) + \\ (-1)^n \omega_{nj}^2 L_s I_{ts} \text{cos}(\lambda_{1j} \xi^*) & (-1)^n \omega_{nj}^2 L_s I_{ts} \text{sen}(\lambda_{1j} \xi^*) \\ \\ (kGA)_{eq} \lambda_{1j} L_s \text{cos}(\lambda_{1j} \xi^*) - & -(kGA)_{eq} \lambda_{1j} L_s \text{sen}(\lambda_{1j} \xi^*) + \\ (-1)^n \omega_{nj}^2 x_{ct} L_s M_{ts} \text{cos}(\lambda_{1j} \xi^*) & (-1)^n \omega_{nj}^2 x_{ct} L_s M_{ts} \text{sen}(\lambda_{1j} \xi^*) \\ \\ (EI)_{eq} \lambda_{1j} \text{senh}(\lambda_{1j} \xi^*) + & (EI)_{eq} \lambda_{1j} \text{cosh}(\lambda_{1j} \xi^*) + \\ (-1)^n \omega_{nj}^2 L_s I_{ts} \text{cosh}(\lambda_{1j} \xi^*) & (-1)^n \omega_{nj}^2 L_s I_{ts} \text{senh}(\lambda_{1j} \xi^*) \\ \\ -(kGA)_{eq} \lambda_{1j} L_s \text{cosh}(\lambda_{1j} \xi^*) + & -(kGA)_{eq} \lambda_{1j} L_s \text{senh}(\lambda_{1j} \xi^*) + \\ (-1)^n \omega_{nj}^2 x_{ct} L_s M_{ts} \text{cosh}(\lambda_{1j} \xi^*) & (-1)^n \omega_{nj}^2 x_{ct} L_s M_{ts} \text{senh}(\lambda_{1j} \xi^*) \end{bmatrix}_{2 \times 8} \quad (3.138)$$

Sendo:

$$\xi^* = \frac{x^*}{L_s}$$

É importante que o valor x^* tem duas opções, a primeira opção para um numero n : *par* de vigas $x^* = 0$ e a outra para um numero n : *impar* de vigas $x^* = L_s$. Aplicando agora as condições de equilíbrio de conexão dadas pelas equações 3.130 a 3.133 nas equações

3.108 e 3.109:

$$[L_{ji}] \begin{Bmatrix} A_{1(ji)} \\ A_{2(ji)} \\ A_{3(ji)} \\ A_{4(ji)} \\ B_{1(ji)} \\ B_{2(ji)} \\ B_{3(ji)} \\ B_{4(ji)} \end{Bmatrix} = [R_{j(i+1)}] \begin{Bmatrix} A_{1(j(i+1))} \\ A_{2(j(i+1))} \\ A_{3(j(i+1))} \\ A_{4(j(i+1))} \\ B_{1(j(i+1))} \\ B_{2(j(i+1))} \\ B_{3(j(i+1))} \\ B_{4(j(i+1))} \end{Bmatrix} \quad (3.139)$$

Onde $[L_{ji}]$ e $[R_{j(i+1)}]$ são matrizes de coeficientes dadas por:

$$[L_{ji}] = \frac{1}{L_s^2} \begin{bmatrix} L_s^2 \text{sen}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) & L_s^2 \text{cos}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) & L_s^2 \text{senh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) \\ 0 & 0 & 0 \\ L_s^2 \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_s^2 \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & L_s^2 \kappa_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (kGA)_{eq} \lambda_{1j} L_s \text{cos}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) & -(kGA)_{eq} \lambda_{1j} L_s \text{sen}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) & (kGA)_{eq} \lambda_{2j} L_s \text{cosh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) \\ \\ L_s^2 \text{cosh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) & 0 & 0 \\ 0 & -L_s \text{cos}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) & L_s \text{sen}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ L_s^2 \kappa_2 & 0 & 0 \\ 0 & (EI)_{eq} \lambda_{1j} \text{sen}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) & (EI)_{eq} \lambda_{1j} \text{cos}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) \\ (kGA)_{eq} \lambda_{2j} L_s \text{senh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) & (kGA)_{eq} L_s \text{cos}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) & -(kGA)_{eq} L_s \text{sen}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) \\ \\ 0 & 0 & \\ L_s \text{cosh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) & L_s \text{senh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ -1 & 0 & \\ 0 & -1 & \\ (EI)_{eq} \lambda_{2j} \text{senh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) & (EI)_{eq} \lambda_{2j} \text{cosh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) & \\ -(kGA)_{eq} L_s \text{cosh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) & -(kGA)_{eq} L_s \text{senh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) & \end{bmatrix}_{8 \times 8} \quad (3.140)$$

$$\begin{aligned}
[R_{j(i+1)}] &= \frac{1}{L_s^2} \left[\begin{array}{ccc}
L_s^2 \text{sen}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) & L_s^2 \text{cos}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) & L_s^2 \text{senh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) \\
0 & 0 & 0 \\
L_s^2 \kappa_1 & 0 & 0 \\
0 & L_s^2 \kappa_1 & 0 \\
0 & 0 & L_s^2 \kappa_2 \\
0 & 0 & 0 \\
(-1)^{i+1} \omega_{nj}^2 x_{cl} L_s^2 M_{ls} \text{sen}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) & (-1)^{i+1} \omega_{nj}^2 x_{cl} L_s^2 M_{ls} \text{cos}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) & (-1)^{i+1} \omega_{nj}^2 x_{cl} L_s^2 M_{ls} \text{senh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) \\
-(kGA)_{eq} \lambda_{1j} L_s \text{cos}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) + & (kGA)_{eq} \lambda_{1j} L_s \text{sen}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) + & -(kGA)_{eq} \lambda_{2j} L_s \text{cosh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) + \\
(-1)^{i+1} \omega_{nj}^2 L_s^2 M_{ls} \text{sen}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) & (-1)^{i+1} \omega_{nj}^2 L_s^2 M_{ls} \text{cos}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) & (-1)^{i+1} \omega_{nj}^2 L_s^2 M_{ls} \text{senh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) \\
L_s^2 \text{cosh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) & 0 & 0 \\
0 & -L_s \text{cos}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) & L_s \text{sen}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) \\
0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 \\
L_s^2 \kappa_2 & 0 & 0 \\
(-1)^{i+1} \omega_{nj}^2 x_{cl} L_s^2 M_{ls} \text{cosh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) & -(EI)_{eq} \lambda_{1j} \text{sen}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) - & -(EI)_{eq} \lambda_{1j} \text{cos}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) + \\
& (-1)^{i+1} \omega_{nj}^2 L_s I_{ls} \text{cos}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) & (-1)^{i+1} \omega_{nj}^2 L_s I_{ls} \text{sen}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) \\
-(kGA)_{eq} \lambda_{2j} L_s \text{senh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) + & -(kGA)_{eq} L_s \text{cos}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) - & (kGA)_{eq} L_s \text{sen}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) + \\
(-1)^{i+1} \omega_{nj}^2 L_s^2 M_{ls} \text{cosh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) & (-1)^{i+1} \omega_{nj}^2 x_{ls} L_s M_{ls} \text{cos}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) & (-1)^{i+1} \omega_{nj}^2 x_{ls} L_s M_{ls} \text{sen}(\lambda_{1j} \bar{\xi}) \\
0 & 0 & \\
L_s \text{cosh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) & L_s \text{senh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) & \\
0 & 0 & \\
0 & 0 & \\
-1 & 0 & \\
0 & -1 & \\
-(EI)_{eq} \lambda_{2j} \text{senh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) + & -(EI)_{eq} \lambda_{2j} \text{cosh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) + & \\
(-1)^{i+1} \omega_{nj}^2 L_s I_{ls} \text{cosh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) & (-1)^{i+1} \omega_{nj}^2 L_s I_{ls} \text{senh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) & \\
(kGA)_{eq} L_s \text{cosh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) + & (kGA)_{eq} L_s \text{cosh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) + & \\
(-1)^{i+1} \omega_{nj}^2 x_{ls} L_s M_{ls} \text{senh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) & (-1)^{i+1} \omega_{nj}^2 x_{ls} L_s M_{ls} \text{senh}(\lambda_{2j} \bar{\xi}) &
\end{array} \right]_{8 \times 8} \quad (3.141)
\end{aligned}$$

Sendo:

$$\bar{\xi} = \frac{\bar{x}}{L_s}$$

Nas equações 3.140 e 3.141 se inclui a variável \bar{x} , que representa a posição da massa de conexão, sendo assim, $\bar{x} = 0$ para $i : \text{par}$ e $\bar{x} = L_s$ para $i : \text{impar}$. As equações apresentadas tem incluso o fator $(-1)^{i+1}$ que permite levar em conta a influencia positiva ou negativa da massa de conexão na flexão da viga. Uma relação recursiva das equações

anterior apresentadas pode-se obter:

$$\begin{pmatrix} A_{1(jn)} \\ A_{2(jn)} \\ A_{3(jn)} \\ A_{4(jn)} \\ B_{1(jn)} \\ B_{2(jn)} \\ B_{3(jn)} \\ B_{4(jn)} \end{pmatrix} = [R_{jn}]^{-1}[L_{j(n-1)}][R_{j(n-1)}]^{-1}[L_{j(n-2)}] \cdots [R_{j2}]^{-1}[L_{j1}] \begin{pmatrix} A_{1(j1)} \\ A_{2(j1)} \\ A_{3(j1)} \\ A_{4(j1)} \\ B_{1(j1)} \\ B_{2(j1)} \\ B_{3(j1)} \\ B_{4(j1)} \end{pmatrix} \quad (3.142)$$

Então seguindo um processo similar ao feito na secção anterior, e considerando a equação 3.142 é possível obter um sistema de equações referidas a primeira viga e que pode ser além mostrado numa matriz só:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_{j1}^{11} & N_{j1}^{12} & N_{j1}^{13} & N_{j1}^{14} & N_{j1}^{15} & N_{j1}^{16} & N_{j1}^{17} & N_{j1}^{18} \\ N_{j1}^{21} & N_{j1}^{22} & N_{j1}^{23} & N_{j1}^{24} & N_{j1}^{25} & N_{j1}^{26} & N_{j1}^{27} & N_{j1}^{28} \\ N_{j1}^{31} & N_{j1}^{32} & N_{j1}^{33} & N_{j1}^{34} & N_{j1}^{35} & N_{j1}^{36} & N_{j1}^{37} & N_{j1}^{38} \\ N_{j1}^{41} & N_{j1}^{42} & N_{j1}^{43} & N_{j1}^{44} & N_{j1}^{45} & N_{j1}^{46} & N_{j1}^{47} & N_{j1}^{48} \\ N_{j1}^{51} & N_{j1}^{52} & N_{j1}^{53} & N_{j1}^{54} & N_{j1}^{55} & N_{j1}^{56} & N_{j1}^{57} & N_{j1}^{58} \\ N_{j1}^{61} & N_{j1}^{62} & N_{j1}^{63} & N_{j1}^{64} & N_{j1}^{65} & N_{j1}^{66} & N_{j1}^{67} & N_{j1}^{68} \\ N_{j1}^{71} & N_{j1}^{72} & N_{j1}^{73} & N_{j1}^{74} & N_{j1}^{75} & N_{j1}^{76} & N_{j1}^{77} & N_{j1}^{78} \\ N_{j1}^{81} & N_{j1}^{82} & N_{j1}^{83} & N_{j1}^{84} & N_{j1}^{85} & N_{j1}^{86} & N_{j1}^{87} & N_{j1}^{88} \end{bmatrix}}_{[N_{j1}]} \begin{pmatrix} A_{1(j1)} \\ A_{2(j1)} \\ A_{3(j1)} \\ A_{4(j1)} \\ B_{1(j1)} \\ B_{2(j1)} \\ B_{3(j1)} \\ B_{4(j1)} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.143)$$

Com a relação seguinte:

$$[N_{j1}] = \begin{bmatrix} [V_{j1}]_{6 \times 8} \\ [T_{jn}]_{2 \times 8} [R_{jn}]^{-1} [L_{j(n-1)}] [R_{j(n-1)}]^{-1} [L_{j(n-2)}] \cdots [R_{j2}]^{-1} [L_{j1}] \end{bmatrix}_{8 \times 8} \quad (3.144)$$

Deste jeito, as equações 3.143 e 3.144, apresentam um sistema com coeficientes que dependem das propriedades geométricas da estrutura e além das variáveis λ_{1j} e λ_{2j} , mas e ainda mais importante saber que estas a sua vez são função da frequência ω_{nj} . Por tanto com a solução deste sistema é possível determinar já as frequências modais e os modos de vibrar da primeira viga, e a equação 3.142 pode ser usada para determinar os modos de vibrar para todas as vigas da modelagem. Sem embargo, um procedimento adotado tem que se assumir, o fato que este sistema tem infinitas possíveis soluções, então o procedimento a seguir limita a determinação de um único valor para as constantes de

integração $A_{1(j_1)}, A_{2(j_1)}, \dots, B_{3(j_1)}, B_{4(j_1)}$:

$$\begin{bmatrix} N_{j_1}^{11} & N_{j_1}^{12} & N_{j_1}^{13} & N_{j_1}^{14} & N_{j_1}^{15} & N_{j_1}^{16} & N_{j_1}^{17} & N_{j_1}^{18} \\ N_{j_1}^{21} & N_{j_1}^{22} & N_{j_1}^{23} & N_{j_1}^{24} & N_{j_1}^{25} & N_{j_1}^{26} & N_{j_1}^{27} & N_{j_1}^{28} \\ N_{j_1}^{31} & N_{j_1}^{32} & N_{j_1}^{33} & N_{j_1}^{34} & N_{j_1}^{35} & N_{j_1}^{36} & N_{j_1}^{37} & N_{j_1}^{38} \\ N_{j_1}^{41} & N_{j_1}^{42} & N_{j_1}^{43} & N_{j_1}^{44} & N_{j_1}^{45} & N_{j_1}^{46} & N_{j_1}^{47} & N_{j_1}^{48} \\ N_{j_1}^{51} & N_{j_1}^{52} & N_{j_1}^{53} & N_{j_1}^{54} & N_{j_1}^{55} & N_{j_1}^{56} & N_{j_1}^{57} & N_{j_1}^{58} \\ N_{j_1}^{61} & N_{j_1}^{62} & N_{j_1}^{63} & N_{j_1}^{64} & N_{j_1}^{65} & N_{j_1}^{66} & N_{j_1}^{67} & N_{j_1}^{68} \\ N_{j_1}^{71} & N_{j_1}^{72} & N_{j_1}^{73} & N_{j_1}^{74} & N_{j_1}^{75} & N_{j_1}^{76} & N_{j_1}^{77} & N_{j_1}^{78} \\ N_{j_1}^{81} & N_{j_1}^{82} & N_{j_1}^{83} & N_{j_1}^{84} & N_{j_1}^{85} & N_{j_1}^{86} & N_{j_1}^{87} & N_{j_1}^{88} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ A_{2(j_1)} \\ A_{3(j_1)} \\ A_{4(j_1)} \\ B_{1(j_1)} \\ B_{2(j_1)} \\ B_{3(j_1)} \\ B_{4(j_1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.145)$$

Finalmente, já com o valor de $A_{1(j_1)} = 1$, os coeficientes podem ser determinados com a equação seguinte:

$$\begin{pmatrix} A_{2(j_1)} \\ A_{3(j_1)} \\ A_{4(j_1)} \\ B_{1(j_1)} \\ B_{2(j_1)} \\ B_{3(j_1)} \\ B_{4(j_1)} \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} N_{j_1}^{22} & N_{j_1}^{23} & N_{j_1}^{24} & N_{j_1}^{25} & N_{j_1}^{26} & N_{j_1}^{27} & N_{j_1}^{28} \\ N_{j_1}^{32} & N_{j_1}^{33} & N_{j_1}^{34} & N_{j_1}^{35} & N_{j_1}^{36} & N_{j_1}^{37} & N_{j_1}^{38} \\ N_{j_1}^{42} & N_{j_1}^{43} & N_{j_1}^{44} & N_{j_1}^{45} & N_{j_1}^{46} & N_{j_1}^{47} & N_{j_1}^{48} \\ N_{j_1}^{52} & N_{j_1}^{53} & N_{j_1}^{54} & N_{j_1}^{55} & N_{j_1}^{56} & N_{j_1}^{57} & N_{j_1}^{58} \\ N_{j_1}^{62} & N_{j_1}^{63} & N_{j_1}^{64} & N_{j_1}^{65} & N_{j_1}^{66} & N_{j_1}^{67} & N_{j_1}^{68} \\ N_{j_1}^{72} & N_{j_1}^{73} & N_{j_1}^{74} & N_{j_1}^{75} & N_{j_1}^{76} & N_{j_1}^{77} & N_{j_1}^{78} \\ N_{j_1}^{82} & N_{j_1}^{83} & N_{j_1}^{84} & N_{j_1}^{85} & N_{j_1}^{86} & N_{j_1}^{87} & N_{j_1}^{88} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N_{j_1}^{21} \\ N_{j_1}^{31} \\ N_{j_1}^{41} \\ N_{j_1}^{51} \\ N_{j_1}^{61} \\ N_{j_1}^{71} \\ N_{j_1}^{81} \end{pmatrix} \quad (3.146)$$

3.2 Modelo Eletromecânico

O *Modelo Eletromecânico* consiste em desenvolver uma junção entre o *Modelo Espacial* e as equações do material PZT que permitirão obter as equações de FRF e as TFRF, os modelos e as equações apresentadas nas secções anteriores são usados nesta parte do trabalho. Considerando que na elaboração da pesquisa esta baseada em duas teorias, que sem embargo, tem equações similares e por tanto primeiro se apresentará as equações usadas em ambos modelos. Já depois, serão aplicadas as expressões obtidas em cada modelo.

Uma variável importante a ser medida é a tensão elétrica gerada pelo PZT, mas para isso é preciso ter umas considerações. Assim, sabe-se que será aplicada uma excitação harmônica de deslocamento absoluto possuindo amplitude constante e frequência variável $w_b(x=0, t) = w_b(t)$, na base do gerador como foi mostrado na figura 11, mas que pode-se representar como:

$$w_b(0, t) = W_0 e^{i\omega t} \quad (3.147)$$

Onde W_0 e ω são a amplitude e frequência do sinal de excitação, respectivamente. Busca-se agora uma relação para aceleração da excitação já que as equações 3.52 e 3.100 requerem

da derivada temporal de segunda até da quarta ordem na entrada:

$$\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} = -\omega^2 W_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 w_b \quad (3.148)$$

$$\frac{\partial^4 w_b}{\partial t^4} = \omega^4 W_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} = \omega^4 w_b \quad (3.149)$$

No entanto, é importante levar em conta o domínio elétrico do sistema. Então uma equação inerente do material PZT e a seguinte (COOK-CHENNAULT; THAMBI; SASTRY, 2008; IEEE, 1988):

$$D_3(x, t) = d_{31}\sigma_1^p + \varepsilon_{33}^\sigma E_3 \quad (3.150)$$

Onde $D_3(x, t)$ é o chamado *deslocamento elétrico*, ε_{33}^σ é a permissividade à tensão mecânica constante e E_3 o campo elétrico. Combinando-se as equações 3.28, 3.42 e 3.150, e também considerando que $\varepsilon_{33}^\epsilon = \varepsilon_{33}^\sigma - d_{31}^2 E_p$ (ERTURK; INMAN, 2008a; MATEU; MOLL, 2005); chega-se à seguinte expressão para o deslocamento elétrico:

$$D_3(x, t) = d_{31} E_p \epsilon_1^p - \varepsilon_{33}^\epsilon \frac{v(t)}{h_p} \quad (3.151)$$

A carga elétrica $q(t)$ gerada na camada piezoelétrica pode ser obtida pela integração do deslocamento elétrico sobre a área do eletrodo (IEEE, 1988):

$$q(t) = \int_A \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (3.152)$$

Uma equação matemática adicional deve ser levada em conta que será importante para a determinação das equações que serão descritas nas secções seguintes, esta é mostrada a continuação:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^{(n)} \delta(x - x_k)}{dx^{(n)}} \right) f(x) dx = (-1)^n \frac{df^{(n)}(x_k)}{dx^{(n)}} \quad (3.153)$$

Até agora estas equações apresentadas serão importantes para a determinação das relações eletromecânicas entre a estrutura e o material PZT. Os seguintes procedimentos descreverão já critérios para cada teoria em estudo, em tal situação é preciso dividir-a em duas partes que a continuação se apresentam.

3.2.1 Modelo Eletromecânico usando teoria de Euler-Bernoulli

Como foi descrito nas secções anteriores, já tem-se a equação 3.52 que descreve a modelagem da estrutura *fan-folded* seguindo a teoria de *Euler-Bernoulli*, que é convenientemente repetida abaixo, já considerando a excitação dada pela Equação:

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} + c_s I \frac{\partial^5 w_r}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w_r}{\partial t} \\ & + (EI)_{eq} \frac{\partial^4 w_r}{\partial x^4} + \vartheta v(t) \left[\frac{d\delta(x - x_0^p)}{dx} - \frac{d\delta(x - x_f^p)}{dx} \right] \\ & \cong - [\rho A + m_l \delta(x - \bar{x}, i - k) + M_t \delta(x - x_t, i - n)] \frac{d^2 w_b}{dt^2} \end{aligned} \quad (3.154)$$

Salienta-se que se busca aqui a determinação da resposta harmônica de regime permanente oriunda da solução da equação 3.154, sendo portanto consideradas nulas todas as condições iniciais do problema em questão. O processo para a obtenção da solução de regime permanente da Equação diferencial parcial eletromecânica 3.154 segue um procedimento similar ao usado em sistemas discretos possuindo múltiplos graus de liberdade, onde as equações no domínio espacial são submetidas a um processo de desacoplamento modal usando o conceito da superposição modal (CLOUGH; PENZIEN, 2003):

$$w_{ri}(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} W_{ji}(x)\eta_j(t) \quad (3.155)$$

Neste caso pode-se usar a relação já definida pela equação 3.155, e substituindo-a na equação 3.154 obtém-se:

$$\begin{aligned} & \rho A \sum_{j=1}^{\infty} W_{ji} \ddot{\eta}_j + c_s I \sum_{j=1}^{\infty} W_{ji}^{iv} \dot{\eta}_j + c_a \sum_{j=1}^{\infty} W_{ji} \dot{\eta}_j \\ & + (EI)_{eq} \sum_{j=1}^{\infty} W_{ji}^{iv} \eta_j + \vartheta P_i v(t) \left[\frac{d\delta(x - x_0^p)}{dx} - \frac{d\delta(x - x_f^p)}{dx} \right] \\ & \cong - [\rho A + M_l \delta(x - \bar{x}, i - k) + M_t \delta(x - x_t, i - n)] \frac{d^2 w_b}{dt^2} \end{aligned} \quad (3.156)$$

Nesta equação se usa o modo abreviado de $\eta(t) = \eta$, junto com suas derivadas associadas. Sem embargo, um *fator de correção de sinal eletromecânico* é adicionado (ANSARI; KARAMI, 2016); o qual é definido como:

$$P_i = \text{sgn} \left(W'_{ji}(x_f^p) - W'_{ji}(x_0^p) \right) \quad (3.157)$$

Onde *sgn* é a função sinal, podendo assumir valores de 1 ou -1, também tem-se que x_0^p e x_f^p representam a posição inicial e final do material PZT, respetivamente. Portanto, o fator de correção de sinal eletromecânico não provoca alterações na amplitude do termo relacionado à tensão de saída da camada piezoelétrica, apenas em seu sinal. O fato de incluir este fator de correção deve-se à razão de eliminar o denominado *cancelamento eletromecânico*, que para os vários modos de vibração do gerador *fan-folded* as vigas da montagem podem apresentar diferentes curvaturas, tanto em amplitude quanto principalmente em relação ao ângulo de fase entre as mesmas. Conforme foi demonstrado por Erturk, estruturas flexíveis instrumentadas com camadas piezoelétricas segmentadas (tanto em cada uma das vigas quanto entre elas) podem apresentar o denominado *cancelamento eletromecânico* considerando que, em função da polaridade das camadas piezoelétricas depender da deformação produzida nas mesmas, então os sinais de duas camadas piezoelétricas podem se subtrair, o que da origem ao cancelamento naquela frequência de operação (ERTURK et al., 2009b). Por tanto, este fator de correção do sinal elétrico da camada piezoelétrica busca corrigir tensões que tentem-se subtrair ao invés de somar-se, procurando assim obter a máxima energia elétrica que possa ser gerada pela estrutura para um determinado modo de vibrar

que atua numa faixa de frequências de operação.

No entanto, é preciso obter as equações desacopladas, mas para que isso seja possível requer-se multiplicar um determinado modo de vibrar $W_{ji}(x) = W_{ji}$ a ambos lados da equação 3.156, e integra-se a equação resultante para a i -ésima viga da montagem em $0-L_s$, obtendo-se assim a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \left(\rho A \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{\eta}_j \int_0^{L_s} W_{ji} W_{ji} dx \right) + \left(c_s I \sum_{j=1}^{\infty} \dot{\eta}_j \int_0^{L_s} W_{ji}^{iv} W_{ji} dx \right) + \\ & \left(c_a \sum_{j=1}^{\infty} \dot{\eta}_j \int_0^{L_s} W_{ji} W_{ji} dx \right) + \left((EI)_{eq} \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \int_0^{L_s} W_{ji}^{iv} W_{ji} \right) = \\ & \quad - \left(\vartheta P_i \int_0^{L_s} W_{ji} \left[\frac{d\delta(x - x_0^p)}{dx} - \frac{d\delta(x - x_f^p)}{dx} \right] dx \right) v(t) \\ & - \left(\int_0^{L_s} W_{ji} [\rho A + M_l \delta(x - \bar{x}, i - k) + M_t \delta(x - x_t, i - n)] \right) \ddot{u}_b \end{aligned} \quad (3.158)$$

Esta equação descreve o efeito de todos os modos de vibração, mas numa viga só, porém é preciso generalizar o modelo para todas as vigas para o caso da tensão elétrica, esta inconsistência deve-se ao fato que parte desta equação utiliza propriedades da estrutura completa e a outra parte apenas de uma das vigas. Adicionalmente com a intenção de obter uma equação no domínio modal para qualquer um dos infinitos modos de vibração da estrutura completa, usando a equação 3.153 e as relações de ortogonalidade (RAO, 2007); a equação 3.158 é re-escrita como:

$$\begin{aligned} M_j \ddot{\eta}_j(t) + C_j \dot{\eta}_j(t) + K_j \eta_j(t) = & - \left(\vartheta \sum_{i=1}^n P_i (W'_{ji}(x_f^p) - W'_{ji}(x_0^p)) \right) v(t) \\ & - \left(\rho A \sum_{i=1}^n \int_0^{L_s} W_{ji}(x) dx + M_l \sum_{k=2}^n W_{jk}(\bar{x}) + M_t W_{jn}(x^*) \right) a_b(t) \end{aligned} \quad (3.159)$$

Uma forma alternativa para a equação 3.159 é obtida se as autofunções forem normalizadas pela massa do sistema (EWINS, 2000). Então tem-se:

$$\ddot{\eta}_j(t) + 2\zeta_j \omega_{n_j} \dot{\eta}_j(t) + \omega_{n_j}^2 \eta_j(t) = -\chi_j v(t) - \gamma_j a_b(t) \quad (3.160)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \chi_j &= \vartheta \sum_{i=1}^n P_i (W'_{ji}(x_f^p) - W'_{ji}(x_0^p)) \\ \gamma_j &= \rho A \sum_{i=1}^n \int_0^{L_s} W_{ji}(x) dx + M_l \sum_{k=2}^n W_{jk}(\bar{x}) + M_t W_{jn}(x^*) \\ \zeta_j &= \frac{c_s I \omega_{n_j}}{2(EI)_{eq}} + \frac{c_a}{2\rho A \omega_{n_j}} \end{aligned}$$

Deve se lembrar que as constantes de amortecimento não influem na determinação dos modos de vibrar, mas é conveniente incluí-los na solução de análise modal. Este amortecimento é uma combinação dos efeitos estrutural e viscoso (c_a é coeficiente de amortecimento do ar viscoso e c_s é da taxa de deformação) (ERTURK; INMAN, 2011b).

Levando-se em conta agora o domínio elétrico do sistema, para obter outra equação de relacionamento para o material PZT, pode-se considerar a deformação unidirecional $\epsilon_1(x, t)$ em função do deslocamento relativo:

$$\epsilon_1(x, t) = -h_{pc} \frac{\partial^2 w_r(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.161)$$

Onde, h_{pc} representa a distancia do eixo neutro ao centro do material PZT na direção z (ERTURK; INMAN, 2008a); para o analise desenvolvido ao longo desta pesquisa tem o valor:

$$h_{pc} = z_n - \frac{h_p}{2} \quad (3.162)$$

A carga elétrica $q(t)$ gerada na camada piezoelétrica pode ser obtida pela integração usando as equações 3.151, 3.161 em 3.152:

$$q(t) = - \int_{x_0^p}^{x_f^p} \left(E_p b d_{31} \left(z_n - \frac{h_p}{2} \right) \frac{\partial^2 w_r(x, t)}{\partial x^2} + \epsilon_{33}^\epsilon b \frac{v(t)}{h_p} \right) dx \quad (3.163)$$

Da equação 3.163 pode ser simplificada usando a equação 3.46. Então a corrente elétrica gerada pelo material PZT pode ser escrita como:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = - \int_{x_0^p}^{x_f^p} \vartheta \left(\frac{\partial^3 w_r(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) dx - \left(\frac{\epsilon_{33}^\epsilon b L_p}{h_p} \right) \frac{dv(t)}{dt} \quad (3.164)$$

Nesta equação mostra-se que a corrente elétrica gerada na camada piezoelétrica é função de dois componentes. O primeiro componente é função do movimento vibratório da viga e o segundo componente inclui a tensão gerada na camada piezoelétrica. De acordo com a literatura (ERTURK; INMAN, 2011b; IEEE, 1988) o segundo termo que aparece na equação 3.164 deve-se ao efeito capacitivo elétrico equivalente da camada piezoelétrica, seguindo isso, se pode definir a capacitância interna equivalente:

$$C_p = \frac{\epsilon_{33}^\epsilon b L_p}{h_p} \quad (3.165)$$

Segundo a *Lei de Ohm*, por linearidade da tensão elétrica com o resistor $v(t) = Ri(t)$, e usando a equação 3.155, pode-se ter uma relação equivalente:

$$C_p P_i \frac{dv(t)}{dt} + P_i \frac{v(t)}{R} = -\vartheta \sum_{j=1}^{\infty} \left(W'_{ji}(x_f^p) - W'_{ji}(x_0^p) \right) \dot{\eta}_j(t) \quad (3.166)$$

Mas, deve-se generalizar para usar conjuntamente com a equação 3.160 no domínio modal para qualquer que for o modo de vibração. Além é preciso incluir nesta equação a tensão

elétrica de todas as vigas, então usando a equação 3.157 e as relações da equação 3.160, ontem-se:

$$C_p P_i \frac{dv(t)}{dt} + P_i \frac{v(t)}{R} = - \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j \dot{\eta}_j(t) \quad (3.167)$$

3.2.2 Modelo Eletromecânico usando teoria de Timoshenko

Um procedimento equivalente ao processo feito usando a teoria de *Euler-Bernoulli* será desenvolvido nesta secção. Para isso é importante ter em conta a equação 3.100, e usando a equação 3.155 de superposição modal, temos:

$$\begin{aligned} (\rho A)_{eq} \sum_{j=1}^{\infty} W_{ji} \ddot{\eta}_j + (EI)_{eq} \sum_{j=1}^{\infty} W_{ji}^{iv} \eta_j - \left(\frac{(EI)_{eq} (\rho A)_{eq}}{(kGA)_{eq}} + (\rho I_y)_{eq} \right) \sum_{j=1}^{\infty} W_{ji}'' \ddot{\eta}_j \\ + \frac{(\rho I_y)_{eq} (\rho A)_{eq}}{(kGA)_{eq}} \sum_{j=1}^{\infty} W_{ji} \frac{\partial^4 \eta_j}{\partial t^4} + \vartheta v(t) \left[\frac{\delta(x - x_0^p)}{dx} - \frac{\delta(x - x_f^p)}{dx} \right] \\ = -\Upsilon \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - \frac{(\rho I_y)_{eq}}{(kGA)_{eq}} \Upsilon \frac{\partial^4 w_b}{\partial t^4} + \frac{(EI)_{eq}}{(KGA)_{eq}} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.168)$$

Então, é possível agora incluir o *fator de correção de sinal eletromecânico* da equação 3.157; além disso, multiplicar-se por o modo de vibrar W_{ji} e integra-se a equação resultante para a i -ésima viga da montagem em $0-L_s$, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{(\rho I_y)_{eq} (\rho A)_{eq}}{(kGA)_{eq}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^4 \eta_j}{\partial t^4} \int_0^{L_s} W_{ji} W_{ji} dx \right) + \left((\rho A)_{eq} \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{\eta}_j \int_0^{L_s} W_{ji} W_{ji} dx \right) \\ - \left(\left(\frac{(EI)_{eq} (\rho A)_{eq}}{(kGA)_{eq}} + (\rho I_y)_{eq} \right) \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{\eta}_j \int_0^{L_s} W_{ji} W_{ji}'' dx \right) + \\ \left((EI)_{eq} \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \int_0^{L_s} W_{ji} W_{ji}^{iv} dx \right) + \left(\vartheta P_i \int_0^{L_s} W_{ji} \left[\frac{d\delta(x - x_0^p)}{dx} - \frac{d\delta(x - x_f^p)}{dx} \right] dx \right) v(t) \\ = -\Upsilon \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - \frac{(\rho I_y)_{eq}}{(kGA)_{eq}} \Upsilon \frac{\partial^4 w_b}{\partial t^4} + \frac{(EI)_{eq}}{(KGA)_{eq}} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.169)$$

Sendo:

$$\Upsilon = \left(\int_0^{L_s} W_{ji} [(\rho A)_{eq} + M_l \delta(x - \bar{x}, i - k) + M_t \delta(x - x_t, i - n)] dx \right) \quad (3.170)$$

A fim de sanar uma correção, e obter uma equação no domínio modal para qualquer um dos infinitos modos de vibração da estrutura completa, a equação 3.169 é re-escrita como:

$$\Omega_j^{(1)} \frac{\partial^4 \eta_j}{\partial t^4} + \left(\Omega_j^{(2)} - \Omega_j^{(3)} \right) \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial t^2} + \Omega_j^{(4)} \eta_j = -\chi_j v(t) - \gamma_j a_b(t) \quad (3.171)$$

Onde:

$$\Omega_j^{(1)} = \frac{(\rho I_y)_{eq} (\rho A)_{eq}}{(kGA)_{eq}} \int_0^{L_s} W_{ji} W_{ji} dx$$

$$\begin{aligned}
\Omega_j^{(2)} &= (\rho A)_{eq} \int_0^{L_s} W_{ji} W_{ji} dx \\
\Omega_j^{(3)} &= \left(\frac{(EI)_{eq} (\rho A)_{eq}}{(kGA)_{eq}} + (\rho I_y)_{eq} \right) \int_0^{L_s} W_{ji} W_{ji}'' dx \\
\Omega_j^{(4)} &= (EI)_{eq} \int_0^{L_s} W_{ji} W_{ji}^{iv} dx \\
\chi_j &= \vartheta \sum_{i=1}^n P_i \left(W_{ji}'(x_f^p) - W_{ji}'(x_0^p) \right) \\
\gamma_j &= \Upsilon_1 + \frac{(\rho I_y)_{eq}}{(kGA)_{eq}} (j\omega)^2 \Upsilon_1 - \frac{(EI)_{eq}}{(KGA)_{eq}} \Upsilon_2 \\
\Upsilon_1 &= (\rho A)_{eq} \sum_{i=1}^n \int_0^{L_s} W_{ji}(x) dx + M_l \sum_{k=2}^n W_{jk}(\bar{x}) + M_t W_{jn}(x^*) \\
\Upsilon_2 &= (\rho A)_{eq} \sum_{i=1}^n \int_0^{L_s} W_{ji}''(x) dx + 2M_l \sum_{k=2}^n W_{jk}''(\bar{x}) + 2M_t W_{jn}''(x^*)
\end{aligned}$$

A equação 3.171 inclui acoplamento elétrico em função da presença do material piezoelétrico. Portanto, para a obtenção da solução desta equação tanto para o deslocamento vertical do gerador *fan-folded* quanto para sua tensão de saída, deve-se ter outra equação, levando-se em conta agora o domínio elétrico do sistema. A relação da deformação unidirecional pode ser reescrita como:

$$\epsilon_1(x, t) = -h_{pc} \frac{\partial \phi_r(x, t)}{\partial x} \quad (3.172)$$

A carga elétrica $q(t)$ gerada na camada piezoelétrica é obtida com as equações 3.162, 3.151 e 3.152:

$$q(t) = - \int_{x_0^p}^{x_f^p} \left(E_p b d_{31} \left(z_n - \frac{h_p}{2} \right) \frac{\partial \phi_r(x, t)}{\partial x} + \epsilon_{33}^e b \frac{v(t)}{h_p} \right) dx \quad (3.173)$$

Assim, uma relação para a corrente elétrica pode ser encontrada, usando a equação 3.46:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = - \int_{x_0^p}^{x_f^p} \vartheta \left(\frac{\partial^2 \phi_r(x, t)}{\partial x \partial t} \right) dx - \left(\frac{\epsilon_{33}^e b L_p}{h_p} \right) \frac{dv(t)}{dt} \quad (3.174)$$

A *Lei de Ohm* pode ser usada, e usando também a equação 3.165, então a relação da equação 3.174, pode-se reescrever como:

$$C_p P_i \frac{dv(t)}{dt} + P_i \frac{v(t)}{R} = -\vartheta \sum_{j=1}^{\infty} \left(\Phi_{ji}(x_f^p) - \Phi_{ji}(x_0^p) \right) \dot{\eta}_j(t) \quad (3.175)$$

3.3 Funções no Domínio de Frequência

O chamado *Modelo de Resposta* (EWINS, 2000) está relacionada às FRF que são determinadas mediante uma aplicação de um carregamento harmônico de amplitude

constante e frequência variável. Em procedimentos de análise modal simples, o carregamento é pontual, ou seja, a força de excitação é aplicada a um único ponto da estrutura, permitindo calcular ou medir em vários outros pontos sua resposta. Desta forma, as FRF são definidas pela razão entre a transformadas de Fourier dos deslocamentos de saída e da sinal de entrada. No presente estudo, conforme é mostrado na figura 11, o gerador piezoelétrico *fan-folded* é excitado a partir da aplicação de um deslocamento harmônico via base de fixação, comumente denominado de excitação via fronteira ou excitação via suporte (CLOUGH; PENZIEN, 2003). Em estudos experimentais, esta excitação é aplicada à estrutura sob estudo fixando-a sobre a mesa vibratória de um excitador eletromagnético de vibrações (MCCONNELL; VAROTO, 2008). Como resultado, tem-se uma distribuição do carregamento da força distribuída, o mesmo dizer que, todos os pontos do gerador de energia recebem o sinal de excitação, e então não é possível proceder-se à determinação das FRF do sistema pois não se conhece a força aplicada a cada um dos infinitos graus de liberdade do mesmo. O procedimento neste caso é usar as TFRF, que são determinadas como a razão entre as transformadas de Fourier dos sinais de saída e da entrada respetivamente. Nas seguintes seções se apresentam as TFRF para cada modelagem feito neste estudo. Sem embargo, as variações harmônicas para a coordenada generalizada $\eta_j(t)$ e tensão elétrica $v(t)$ são assumidas segundo as relações seguintes:

$$\eta_j(t) = N_j(\omega)e^{j\omega t} \quad (3.176)$$

$$v(t) = V(\omega)e^{j\omega t} \quad (3.177)$$

3.3.1 Funções de resposta usando teoria de Euler-Bernoulli

Usando as relações das equações 3.176 e 3.177, e substituindo-as nas equações 3.167 e 3.160, obtém-se o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} ((j\omega)^2 + 2\zeta_j\omega_{n_j}(j\omega) + \omega_{n_j}^2) N(\omega) = -\chi_j V(\omega) - \gamma_j a_b(\omega) \\ \left((j\omega)C_p + \frac{1}{R} \right) V(\omega) = -(j\omega) \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j N(\omega) \end{array} \right. \quad (3.178)$$

O sistema anterior pode-se simplificar e determinar a amplitude da tensão de saída $V(\omega)$:

$$\frac{V(\omega)}{a_b(\omega)} = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(j\omega)\chi_j\gamma_j}{\omega_{n_j}^2 + 2\zeta_j\omega_{n_j}(j\omega) - \omega^2} \right)}{(j\omega)C_p + \frac{1}{R} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(j\omega)\chi_j\chi_j}{\omega_{n_j}^2 + 2\zeta_j\omega_{n_j}(j\omega) - \omega^2} \right)} \quad (3.179)$$

Desta última é possível determinar-se a TFRF relacionando o deslocamento na extremidade da massa concentrada na última viga em relação à aceleração de entrada:

$$\frac{w_t(\omega)}{a_b(\omega)} = \left(\frac{(\chi_j) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(j\omega)\chi_j\gamma_j}{\omega_{n_j}^2 + 2\zeta_j\omega_{n_j}(j\omega) - \omega^2} \right)}{(j\omega)C_p + \frac{1}{R} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(j\omega)\chi_j\chi_j}{\omega_{n_j}^2 + 2\zeta_j\omega_{n_j}(j\omega) - \omega^2} \right)} + \gamma_j \right) \times \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{-1}{\omega_{n_j}^2 + 2\zeta_j\omega_{n_j}(j\omega) - \omega^2} \right) \times (W_{n_j}(x^*)) \quad (3.180)$$

Na equação anterior importante lembrar que x^* representa a posição da massa na extremidade da última viga, sendo $x^* = 0$ para um número de vigas par e $x^* = L_s$ para um número ímpar. De igual jeito é possível obter uma equação para aceleração da massa na extremidade da última viga em relação à aceleração de entrada:

$$\frac{a_t(\omega)}{a_b(\omega)} = \left(\frac{(\chi_j) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(j\omega)\chi_j\gamma_j}{\omega_{n_j}^2 + 2\zeta_j\omega_{n_j}(j\omega) - \omega^2} \right)}{(j\omega)C_p + \frac{1}{R} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(j\omega)\chi_j\chi_j}{\omega_{n_j}^2 + 2\zeta_j\omega_{n_j}(j\omega) - \omega^2} \right)} + \gamma_j \right) \times \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{-1}{\omega_{n_j}^2 + 2\zeta_j\omega_{n_j}(j\omega) - \omega^2} \right) \times (W_{n_j}(x^*)) \times (-\omega^2) \quad (3.181)$$

As equações 3.179, 3.180 e 3.181 constituem o modelo de resposta em frequência do gerador *fan-folded* estudado no presente trabalho. Portanto, estas equações serão utilizadas em simulações numéricas nos capítulos seguintes.

3.3.2 Funções de resposta usando teoria de Timoshenko

Seguindo uma metodologia usada na seção anterior, pode-se obter um sistema de relações com as equações 3.176, 3.177, e substituindo-as nas equações 3.171 e 3.175, obtém-se o seguinte:

$$\begin{cases} \left(\Omega_j^{(1)}(j\omega)^4 + (\Omega_j^{(2)} - \Omega_j^{(3)}) (j\omega)^2 + \Omega_j^{(4)} \right) N(\omega) = -\chi_j V(\omega) - \gamma_j a_b(\omega) \\ \left((j\omega)C_p + \frac{1}{R} \right) V(\omega) = -(j\omega) \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j N(\omega) \end{cases} \quad (3.182)$$

Simplificando os sistema de equações apresentado anteriormente, tem-se:

$$\frac{V(\omega)}{a_b(\omega)} = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(j\omega)\chi_j\gamma_j}{\Omega_j^{(1)}\omega^4 - (\Omega_j^{(2)} - \Omega_j^{(3)})\omega^2 + \Omega_j^{(4)}} \right)}{(j\omega)C_p + \frac{1}{R} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(j\omega)\chi_j\chi_j}{\Omega_j^{(1)}\omega^4 - (\Omega_j^{(2)} - \Omega_j^{(3)})\omega^2 + \Omega_j^{(4)}} \right)} \quad (3.183)$$

A equação 3.183 representa a amplitude da tensão de saída $V(\omega)$ com relação à aceleração da base. É importante distinguir que as variáveis χ_j e γ_j estão definidas na equação 3.171, sendo que tem igual notação no modelo descrito na seção anterior na teoria de *Euler-Bernoulli* mas, possuem valores distintos em cada caso. A partir desta ultima equação é possível determinar a TFRF do deslocamento na extremidade da massa concentrada na ultima viga em relação á aceleração da base:

$$\frac{w_t(\omega)}{a_b(\omega)} = \left(\frac{(\chi_j) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(j\omega)\chi_j\gamma_j}{\Omega_j^{(1)}\omega^4 - (\Omega_j^{(2)} - \Omega_j^{(3)})\omega^2 + \Omega_j^{(4)}} \right)}{(j\omega)C_p + \frac{1}{R} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(j\omega)\chi_j\chi_j}{\Omega_j^{(1)}\omega^4 - (\Omega_j^{(2)} - \Omega_j^{(3)})\omega^2 + \Omega_j^{(4)}} \right)} + \gamma_j \right) \times \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{-1}{\Omega_j^{(1)}\omega^4 - (\Omega_j^{(2)} - \Omega_j^{(3)})\omega^2 + \Omega_j^{(4)}} \right) \times (W_{nj}(x^*)) \quad (3.184)$$

De igual forma obtém-se uma equação para aceleração da massa na extremidade da ultima viga em relação à aceleração de entrada:

$$\frac{a_t(\omega)}{a_b(\omega)} = \left(\frac{(\chi_j) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(j\omega)\chi_j\gamma_j}{\Omega_j^{(1)}\omega^4 - (\Omega_j^{(2)} - \Omega_j^{(3)})\omega^2 + \Omega_j^{(4)}} \right)}{(j\omega)C_p + \frac{1}{R} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(j\omega)\chi_j\chi_j}{\Omega_j^{(1)}\omega^4 - (\Omega_j^{(2)} - \Omega_j^{(3)})\omega^2 + \Omega_j^{(4)}} \right)} + \gamma_j \right) \times \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{-1}{\Omega_j^{(1)}\omega^4 - (\Omega_j^{(2)} - \Omega_j^{(3)})\omega^2 + \Omega_j^{(4)}} \right) \times (W_{nj}(x^*)) \times (-\omega^2) \quad (3.185)$$

Estas equações, além de representarem grandezas mensuráveis através de técnicas de análise modal experimental (MCCONNELL; VAROTO, 2008; EWINS, 2000), serão exploradas mais adiante, e assim apresentar as principais diferenças entre os modelos desenvolvidos ao longo deste estudo, conforme será discutido no próximo capítulo.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A presente secção tem como objetivo desenvolver simulações numéricas e teste de experimentação que permitam validar o modelo analítico desenvolvido. A metodologia usada para as simulações incluem uso de programa ANSYS e MATLAB.

Esta fase de procedimentos está dividida em duas etapas. A primeira, é fazer a validação do modelo estrutural com simulações, onde além de fazer uma comparação dos resultados, também se apresenta uma análise de sensibilidade de parâmetros que podem variar o comportamento dinâmico do sistema estrutural. Na segunda parte desenvolve-se um estudo dos dados experimentais obtidos, além disso se apresentarão as diferenças dos modelos desenvolvidos na presente pesquisa.

4.1 Simulação Numérica

Nessa seção serão apresentados os resultados das simulações numéricas dos modelos cuja estrutura é do tipo *fan-folded*. Os modelos em estudo variam de acordo com o número de vigas conectadas que vão de 2 vigas até 4 vigas, como pode ser observado na figura 6. Como mostrado no Capítulo 3, foi empregada a teoria de *Euler-Bernoulli* e *Timoshenko* para o desenvolvimento do desenho estrutural proposto, e como respostas temos as funções transferências no domínio da frequência e também os modos de vibrar da estrutura em baixas frequências naturais. Os resultados seguintes permitirão obter uma ampla compreensão não só dos fenômenos físicos mas também, do comportamento dinâmico do sistema ao variar parâmetros como o número de vigas da estrutura *fan-folded*, entre outros.

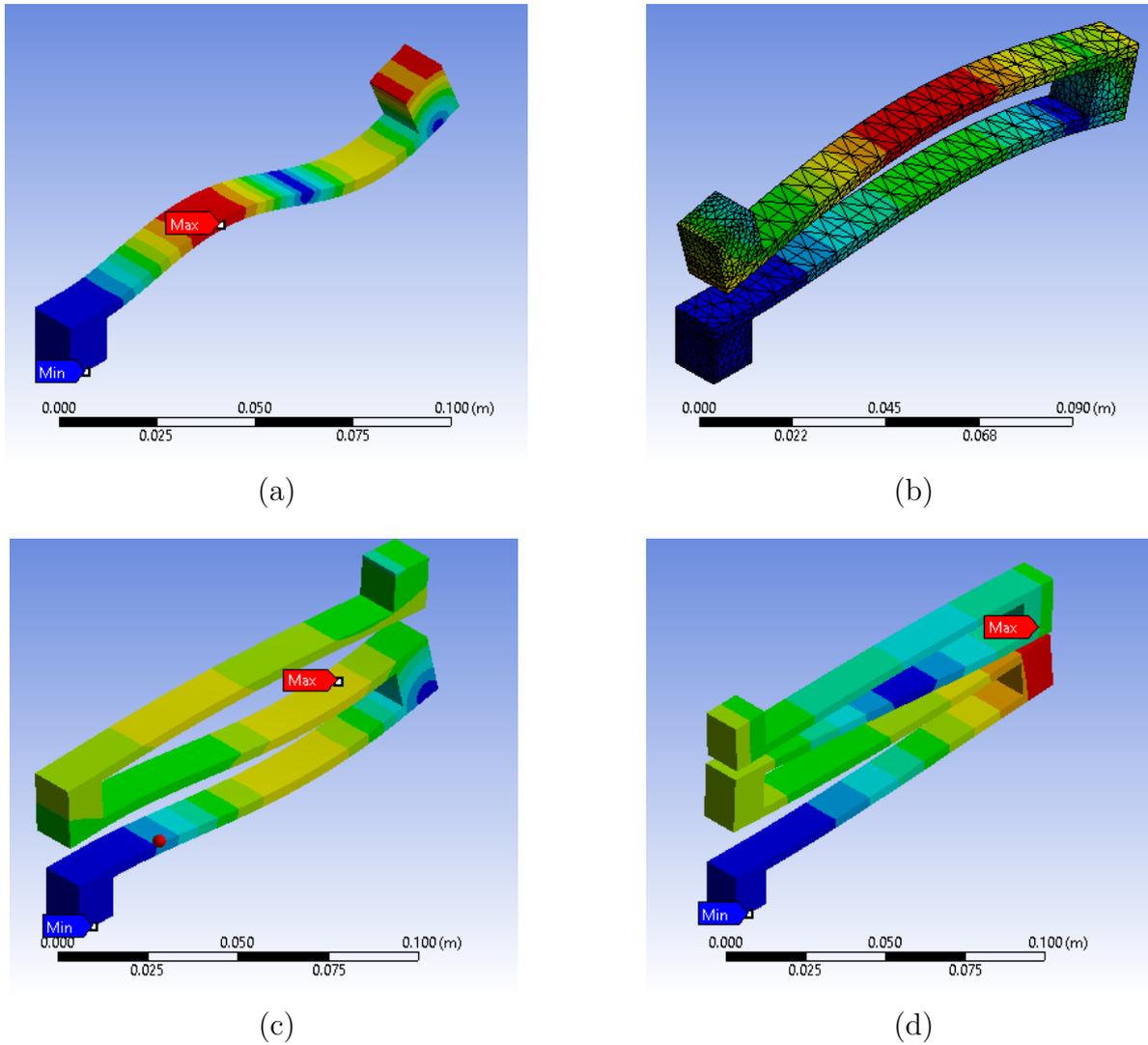
4.1.1 Funções de Resposta em Frequência

A grande importância das funções de resposta em frequência se deve ao fato que permitem seja possível realizar a medição dos resultados experimentais e compará-los com os teóricos. Nessa etapa, serão apresentados os resultados teóricos cujas saídas serão a tensão e a aceleração da massa da extremidade livre da última viga em função da aceleração da base do *fan-folded*.

Os resultados são obtidos das rotinas do MATLAB e serão usadas 1, 2, 3 e 4 vigas. O único parâmetro alterado foi o número de vigas, mantendo todas com o mesmo comprimento, largura e espessura, mesma massa de conexão e considerando a mesma massa na extremidade livre. São feitos dois conjuntos de simulações mesmo que será também feito dois conjuntos de experimentações para fazer uma comparação completa. Os parâmetros usados para as simulações são apresentados nas tabelas 1 e 2.

Além disso, é preciso incluir as propriedades dos materiais usados para as simulações, estas

Figura 14: Modos de vibrar da estrutura *fan-folded* usando ANSYS para (a) 1 viga (b) 2 vigas (c) 3 vigas e (d) 4 vigas.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

são apresentadas na tabela 3. Como o objetivo consiste em encontrar as baixas frequências naturais da estrutura, os resultados desta seção consistirão em até quatro frequências naturais para 1, 2, 3 e 4 vigas e, portanto quatro modos de vibrar.

Tabela 1: Parâmetros geométricos de experimento 1

Parâmetro	Viga	Massa conexão	Massa extremidade	PZT
Comprimento(mm)	140	12.73	12.73	50
Largura(mm)	13	12.73	12.73	13
Espessura(mm)	3.4	12.73	12.73	0.5

Tabela 2: Parâmetros geométricos de experimento 2

Parâmetro	Viga	Massa conexão	Massa extremidade	PZT
Comprimento(mm)	100	12.73	12.73	72
Largura(mm)	12.8	12.73	12.73	12.8
Espessura(mm)	1.56	12.73	12.73	0.13

As figuras 15 e 16 ilustram a resposta em frequência até o 1000 Hz , mostrando os modos de vibrar identificados pelos picos, que correspondem ao momento em que a base do modelo foi excitada com uma frequência externa de oscilação semelhante a sua frequência natural de ressonância. Estas respostas foram usando a teoria de *Euler-Bernoulli* e *Timoshenko*, para 1, 2, 3 e 4 vigas. Os modos de vibração apresentados foram obtidos do modelo estrutural só, sem camada piezoelétrica.

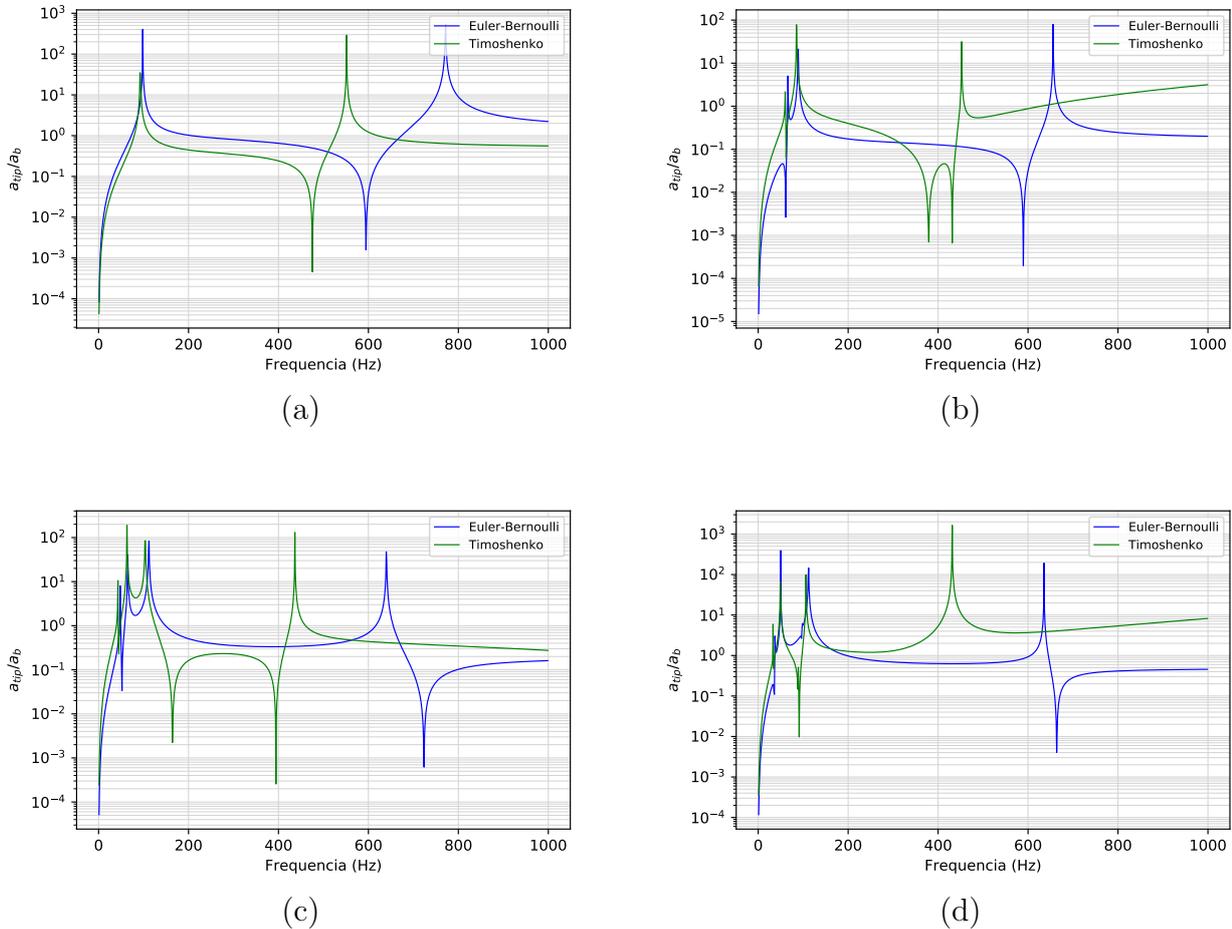
Tabela 3: Propriedades estruturais e eletromecânicas

Propriedade	Viga	Massa conexão	Massa extremidade	PZT
Módulo de Young(GPa)	69	69	69	66
Densidade(kg/m^3)	2700	2700	2700	7800
Permissividade, $\epsilon(nF/m)$	-	-	-	13.3
Resistência ($k\Omega$)	-	-	-	100
Capacitância (nC)	-	-	-	0.48911

Deve-se lembrar que o modelo analítico *Euler-Bernoulli*, não considera o momento de inércia e a força cortante. Este fato já é considerado no modelo *Timoshenko*, que nas figuras 15 e 16 apresentam os modos de vibração para os parâmetros de experimento 1 e 2 respectivamente. Estes modos de vibração mostrados foram obtidos do modelo estrutural sem camada piezoelétrica. Pretende-se mostrar primeiro com estes resultados que com um numero maior de vigas na estrutura, tem-se que o numero de modos de vibrar e as frequências modais na faixa de 0 – 100 Hz aumenta. Inclusive, para o experimento 2 a faixa é ainda menor, isso é possível olhar na figura 16 para o modelo *Euler-Bernoulli* e *Timoshenko* respectivamente. Um fato importante é preciso considerar nestes dois experimentos, que na mudança das faixas de frequências obtidas do experimento 1 ao experimento 2 devem-se às variações de comprimento e espessura das vigas, já que foram usados massas de conexão e da extremidade iguais em ambos experimentos.

Estos resultados são validados usando o programa ANSYS, na qual é possível visualizar e determinar os modos de vibração para 1, 2, 3 e 4 vigas, como é mostrado na figura 14. Os modos de vibração obtidos da simulação com o programa ANSYS pode se comparar com os modelos desenvolvidos, usando resposta em frequência, neste caso foi comparada a TFRF na aceleração da massa na extremidade em função da aceleração da base. As figuras 17 à 20 mostram as respostas em frequência com os dados do experimento 1 para 1, 2, 3 e

Figura 15: Resposta em frequência da estrutura *fan-folded* com parâmetros de experimento 1 para (a) 1 viga (b) 2 vigas (c) 3 vigas e (d) 4 vigas.

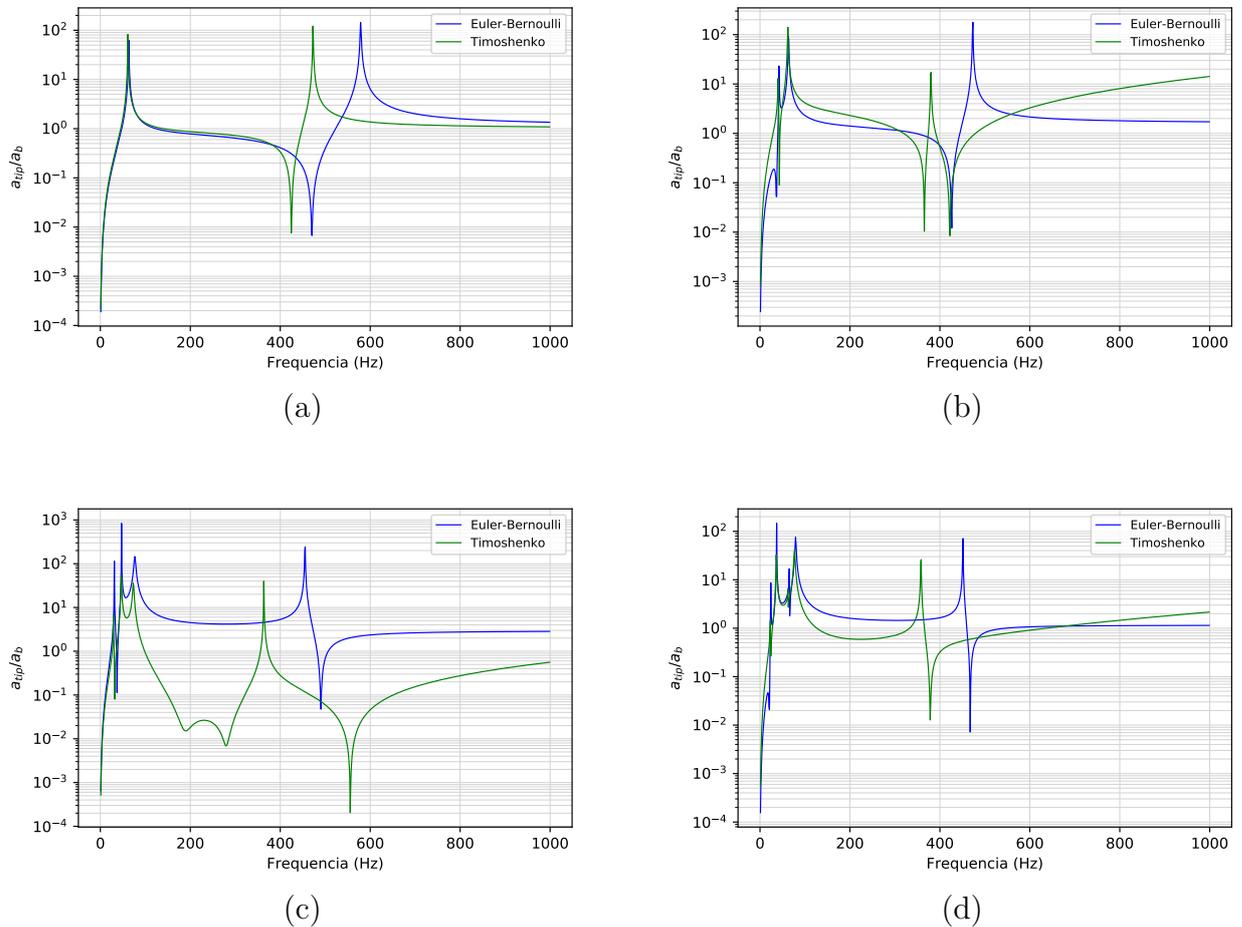


Fonte: Elaborada pelo Autor.

4 vigas respectivamente. No entanto, não é preciso fazer a validação usando os dados do experimento 2, porque as figuras mostram que os modos coincidem com os resultados das simulações feitas no programa ANSYS. Nas tabelas 4 e 5 indicam as frequências até os primeiros 4 modos de vibrar, e para os quatro casos com 1, 2, 3 e 4 vigas.

Comparando as frequências em ambos experimentos temos que os valores do caso 2 são muito menores que as frequências do experimento 1, porque a espessura é pouco menos da metade, este fato faz vibrar as vigas a frequências menores. Em ambos casos a faixa de frequências esta em 0-100 Hz. Uma diferença dos valores das frequências tanto para os modelos analíticos desenvolvidos e as simulações no ANSYS se deve ao fato que na modelagem tem-se variações de massa e inercia dos parafusos nas massinhas de conexão e na extremidade da ultima viga. No entanto, as simulações com ANSYS, tem erros também devido a aproximações numéricas.

Figura 16: Resposta em frequência da estrutura *fan-folded* com parâmetros de experimento 2 para (a) 1 viga (b) 2 vigas (c) 3 vigas e (d) 4 vigas.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

4.2 Avaliação Experimental

Nesta seção se desenvolve a validação do modelo eletro-mecânico, mas fazendo agora uma comparação da resposta em frequência com os ensaios experimentais feitos. O processo de experimentação consiste em aplicar um sinal periódico na base da estrutura *fan-folded*, e obtemos um valor de aceleração da massa na extremidade da ultima viga e outra de tensão elétrica gerada pelo material PZT. Assim, as figuras 21 à 24 apresentam a resposta em frequência da aceleração da massa na extremidade da ultima viga por aceleração da base, para 1, 2, 3 e 4 vigas. As frequências batem muito bem até para as 4 vigas e além disso, até os primeiros quatro modos de vibração.

As figuras 25 à 28 apresentam a resposta em frequência da Tensão elétrica gerada por aceleração da base, para 1, 2, 3 e 4 vigas. É possível olhar que quanto maior número de vigas, menor são as frequências naturais da estrutura, o que permite diversidade de

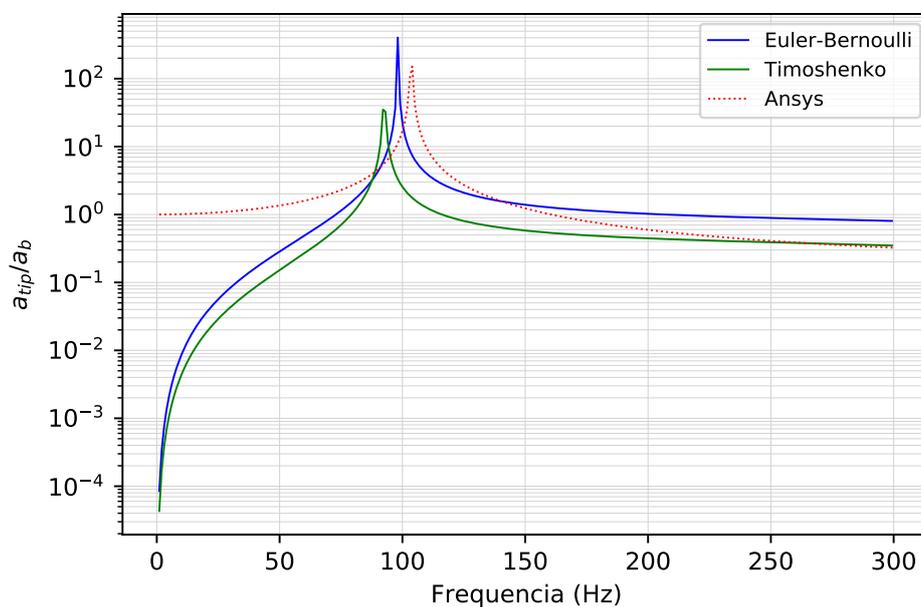
Tabela 4: Frequências sem camada de PZT, para os dados do experimento 1

Nro de vigas	Método	Freq. 1 (Hz)	Freq. 2 (Hz)	Freq. 3 (Hz)	Freq. 4 (Hz)
1	<i>Euler-Bernoulli</i>	98.15	-	-	-
	<i>Timoshenko</i>	92.57	-	-	-
	<i>Ansys</i>	103.40	-	-	-
2	<i>Euler-Bernoulli</i>	66.23	88.75	-	-
	<i>Timoshenko</i>	60.44	85.30	-	-
	<i>Ansys</i>	67.38	95.96	-	-
3	<i>Euler-Bernoulli</i>	48.22	64.80	111.74	-
	<i>Timoshenko</i>	42.91	63.24	103.61	-
	<i>Ansys</i>	46.23	71.22	114.31	-
4	<i>Euler-Bernoulli</i>	37.25	50.08	97.28	111.74
	<i>Timoshenko</i>	33.08	49.31	88.89	106.26
	<i>Ansys</i>	33.74	55.67	94.50	119.82

Tabela 5: Frequências sem camada de PZT, para os dados do experimento 2

Nro de vigas	Método	Freq. 1 (Hz)	Freq. 2 (Hz)	Freq. 3 (Hz)	Freq. 4 (Hz)
1	<i>Euler-Bernoulli</i>	63.03	-	-	-
	<i>Timoshenko</i>	61.12	-	-	-
	<i>Ansys</i>	69.19	-	-	-
2	<i>Euler-Bernoulli</i>	42.26	63.51	-	-
	<i>Timoshenko</i>	40.53	61.85	-	-
	<i>Ansys</i>	44.56	73.89	-	-
3	<i>Euler-Bernoulli</i>	31.05	47.07	76.53	-
	<i>Timoshenko</i>	29.32	46.43	73.39	-
	<i>Ansys</i>	30.37	56.41	81.74	-
4	<i>Euler-Bernoulli</i>	24.14	36.99	65.43	79.17
	<i>Timoshenko</i>	22.84	36.39	62.39	76.72
	<i>Ansys</i>	21.72	44.30	64.72	88.84

aplicações em baixas frequências e que além disso, pode-se desenhar estruturas de menor tamanho como foi descrito no trabalho de (ANSARI; KARAMI, 2016). A tabela 6 apresenta uma comparação das frequências naturais dos modelos analíticos desenvolvidos com os ensaios experimentais. Nesta tabela, conforme se tem um numero maior de vigas o erro das frequências naturais diminui. Para o caso de 4 vigas, o erro da primeira frequência natural da modelagem por *Euler-Bernoulli* e *Timoshenko* é 5.25 Hz e 3.31 Hz respectivamente, em função das frequências dos ensaios experimentais. Para a segunda frequência os erros são 0.20 Hz e 0.35 Hz respectivamente. Para a terceira frequência os erros são 8.55 Hz e 4.45 Hz respectivamente, e para a quarta frequência os erros são 0.25 Hz e 3.03 Hz respectivamente. Com estes valores pode se dizer que a modelagem seguindo a teoria

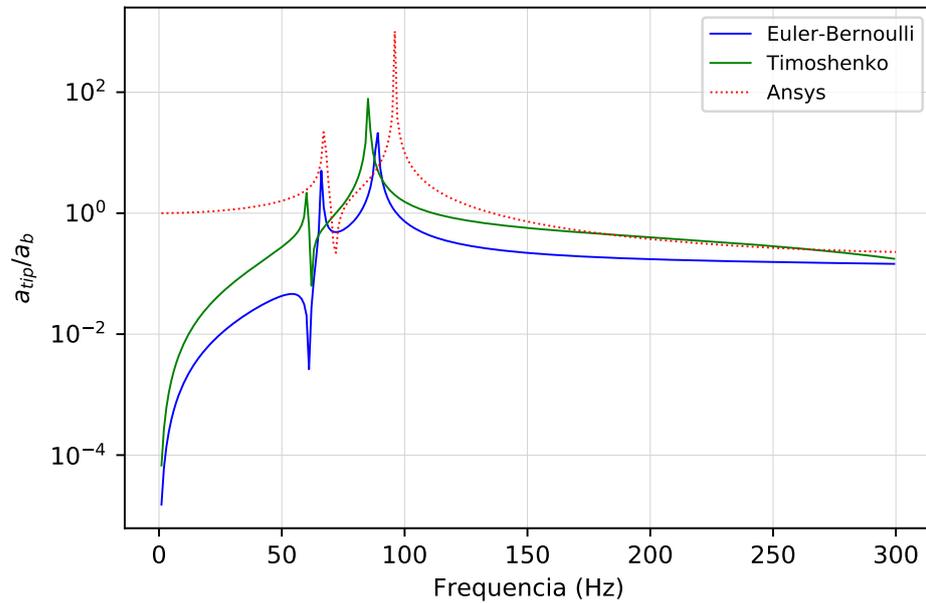
Figura 17: Validação estrutural *fan-folded* de 1 vigas.

Fonte: Elaborada pelo Autor.

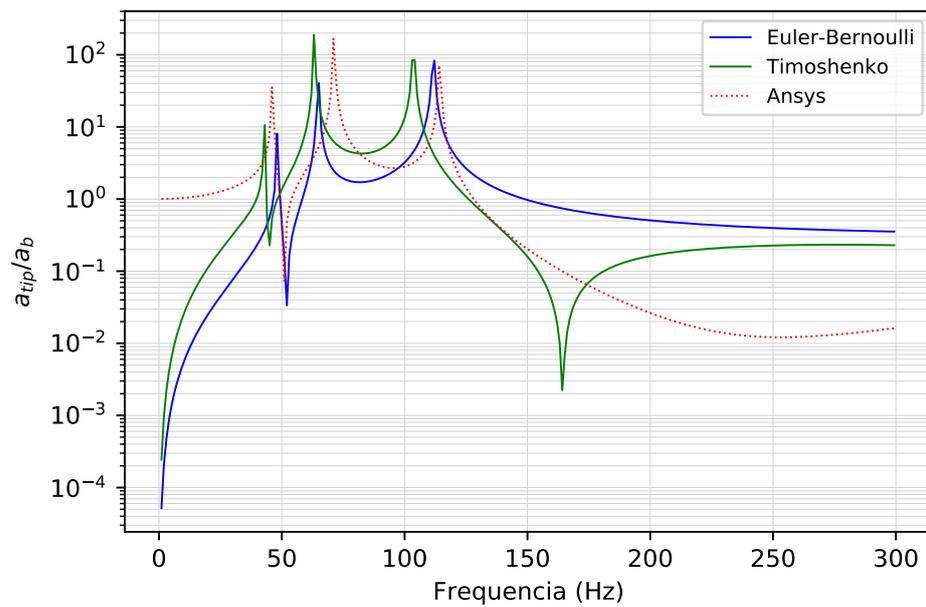
de *Timoshenko* é mais preciso que a modelagem com *Euler – Bernoulli*. Mas, ambos modelos descrevem uma boa performance da realidade e do ensaio experimental. Tais efeitos de precisão deve-se ao fato de incluir o momento de inercia e força cortante na viga.

Tabela 6: Frequências com camada de PZT, para os dados do experimento 2

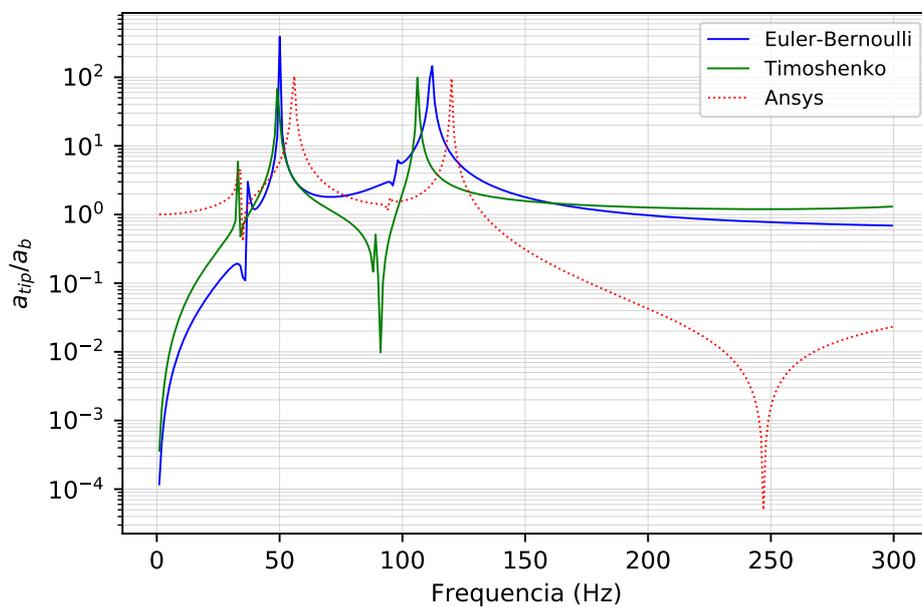
Nro de vigas	Método	Freq. 1 (Hz)	Freq. 2 (Hz)	Freq. 3 (Hz)	Freq. 4 (Hz)
1	<i>Euler-Bernoulli</i>	68.53	-	-	-
	<i>Timoshenko</i>	66.15	-	-	-
	<i>Experimental</i>	71.88	-	-	-
2	<i>Euler-Bernoulli</i>	46.29	68.04	-	-
	<i>Timoshenko</i>	43.72	66.21	-	-
	<i>Experimental</i>	43.28	69.38	-	-
3	<i>Euler-Bernoulli</i>	33.76	50.47	82.65	-
	<i>Timoshenko</i>	31.52	49.62	78.63	-
	<i>Experimental</i>	29.22	49.84	79.38	-
4	<i>Euler-Bernoulli</i>	26.50	39.59	71.05	85.41
	<i>Timoshenko</i>	24.56	39.03	66.95	82.13
	<i>Experimental</i>	21.25	39.38	62.50	85.16

Figura 18: Validação estrutural *fan-folded* de 2 vigas.

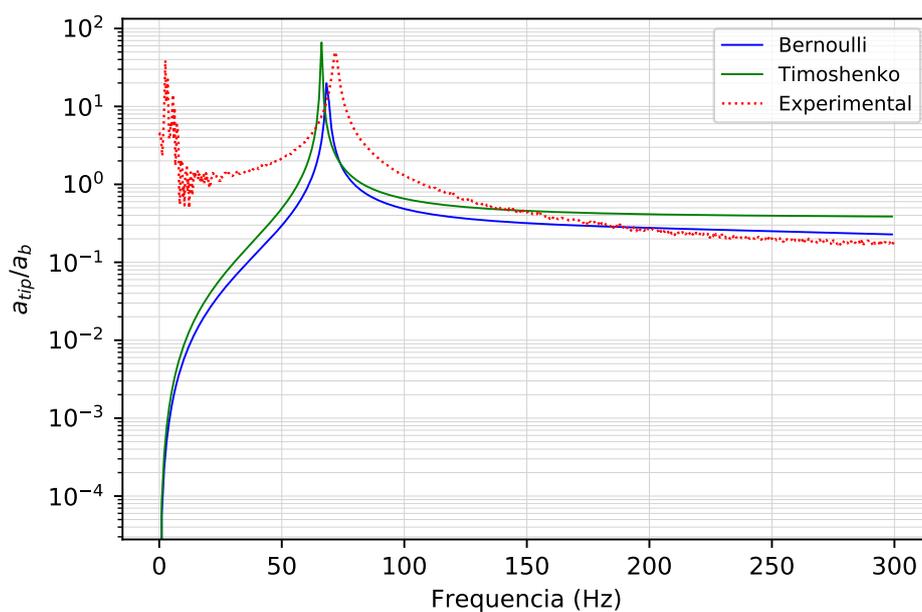
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 19: Validação estrutural *fan-folded* de 3 vigas.

Fonte: Elaborada pelo Autor.

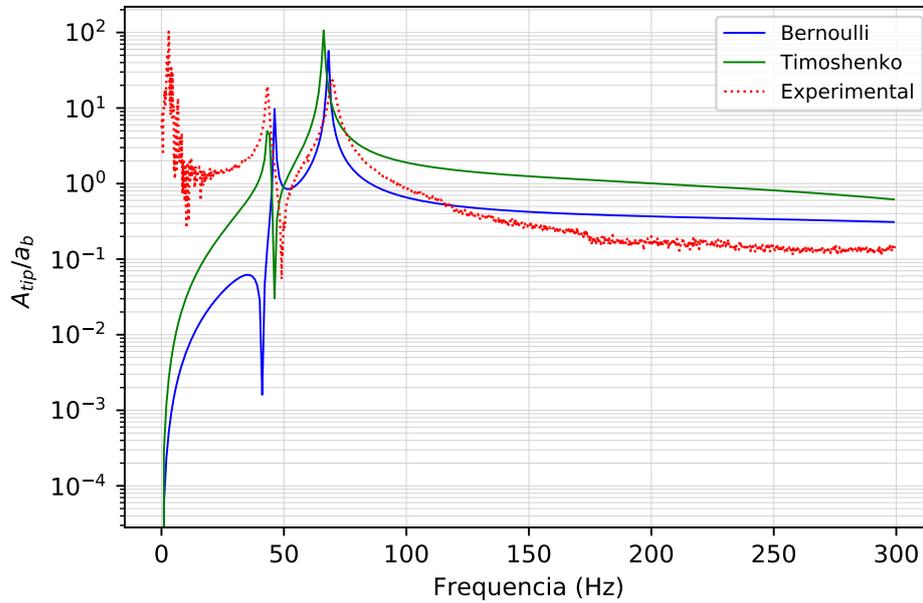
Figura 20: Validação estrutural *fan-folded* de 4 vigas.

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 21: Aceleração da massa na extremidade por aceleração da base. Validação do experimento 2 *fan-folded* de 1 viga.

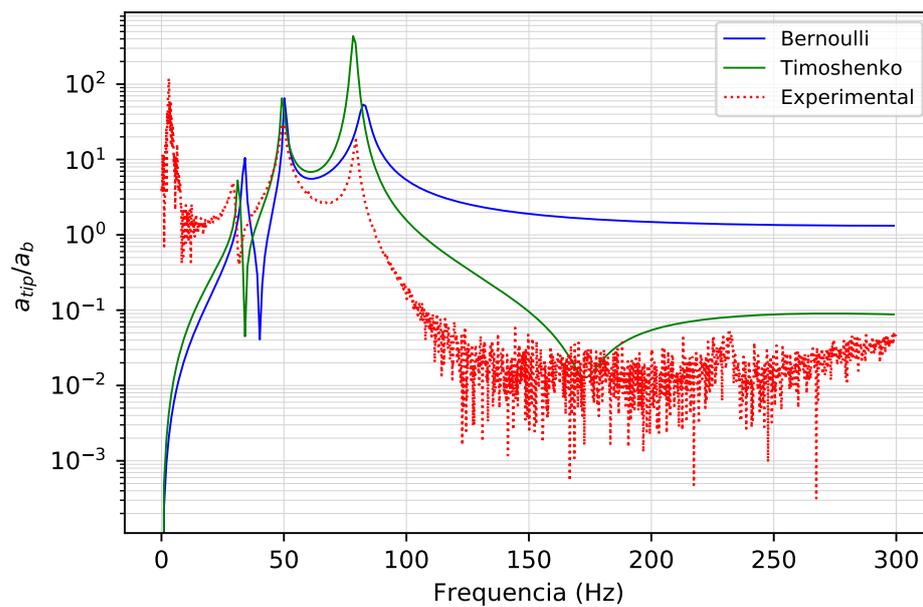
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 22: Aceleração da massa na extremidade por aceleração da base. Validação do experimento 2 *fan-folded* de 2 vigas.



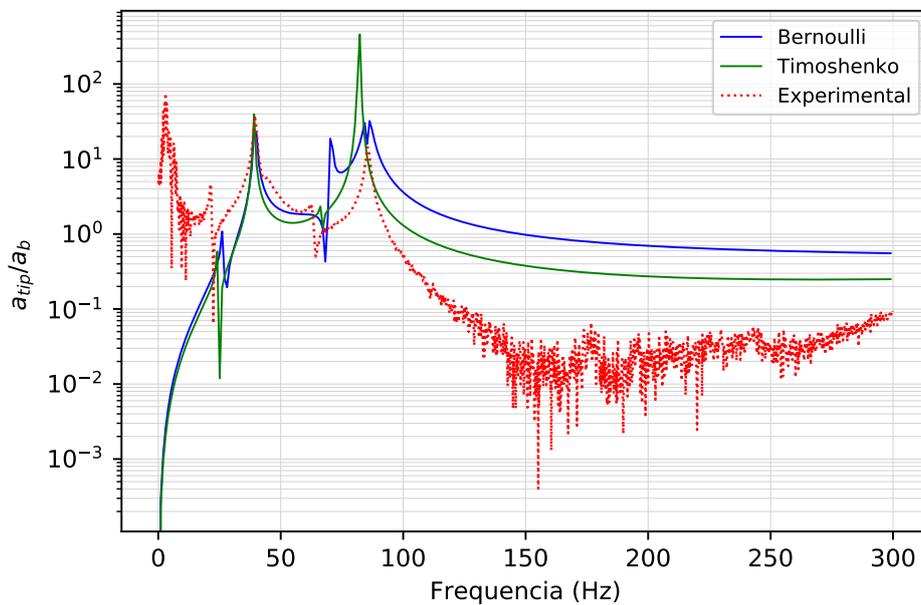
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 23: Aceleração da massa na extremidade por aceleração da base. Validação do experimento 2 *fan-folded* de 3 vigas.



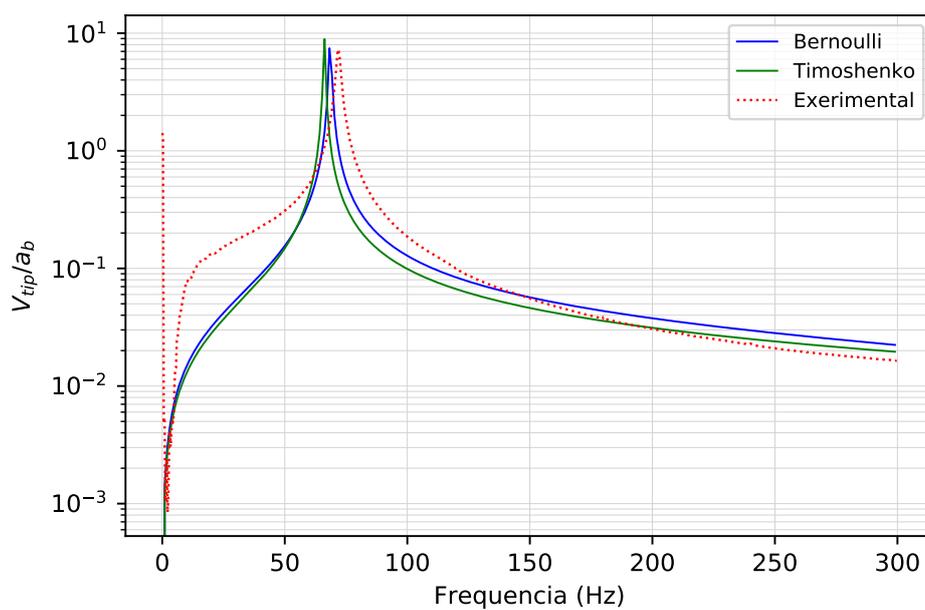
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 24: Aceleração da massa na extremidade por aceleração da base. Validação do experimento 2 *fan-folded* de 4 vigas.



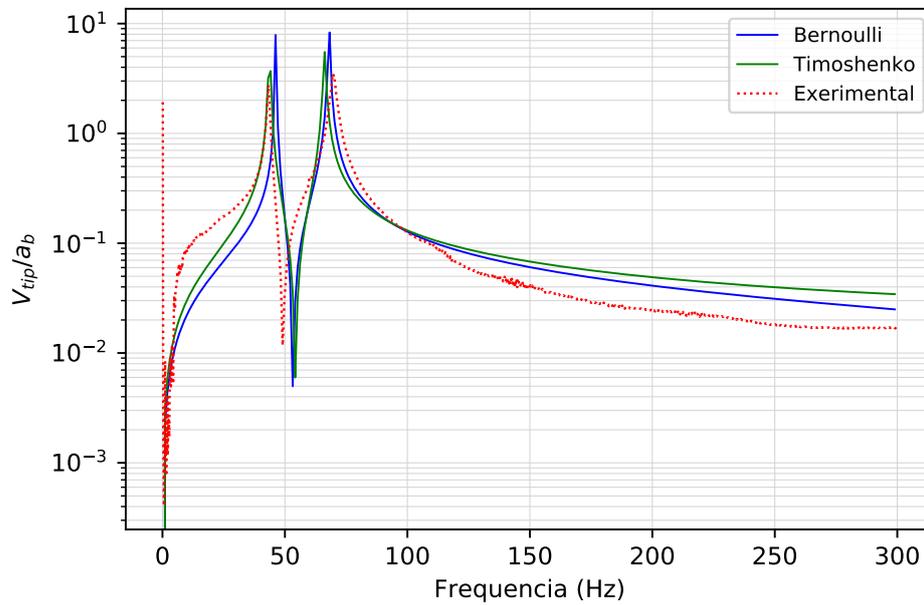
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 25: Tensão elétrica por aceleração da base. Validação do experimento 2 *fan-folded* de 1 viga.



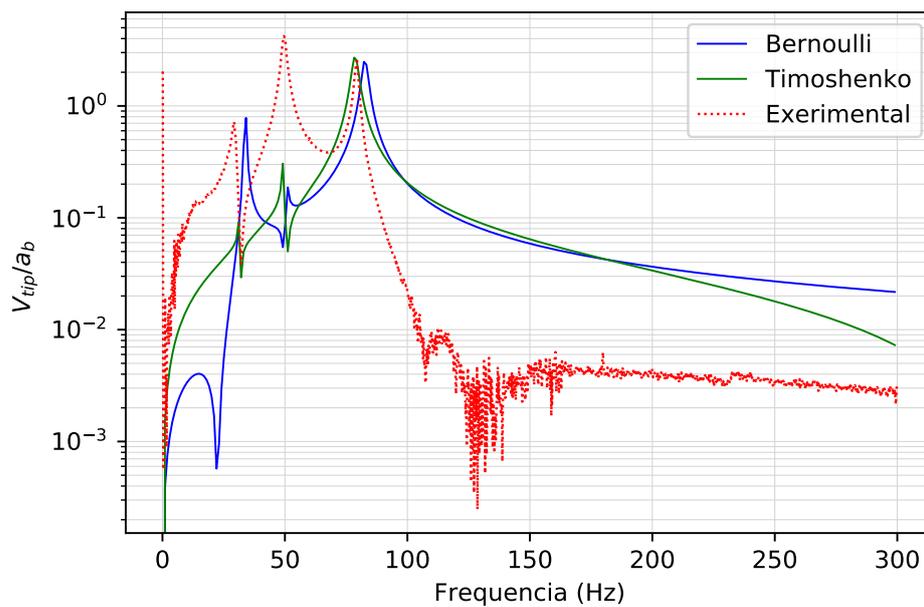
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 26: Tensão elétrica por aceleração da base. Validação do experimento 2 *fan-folded* de 2 vigas.



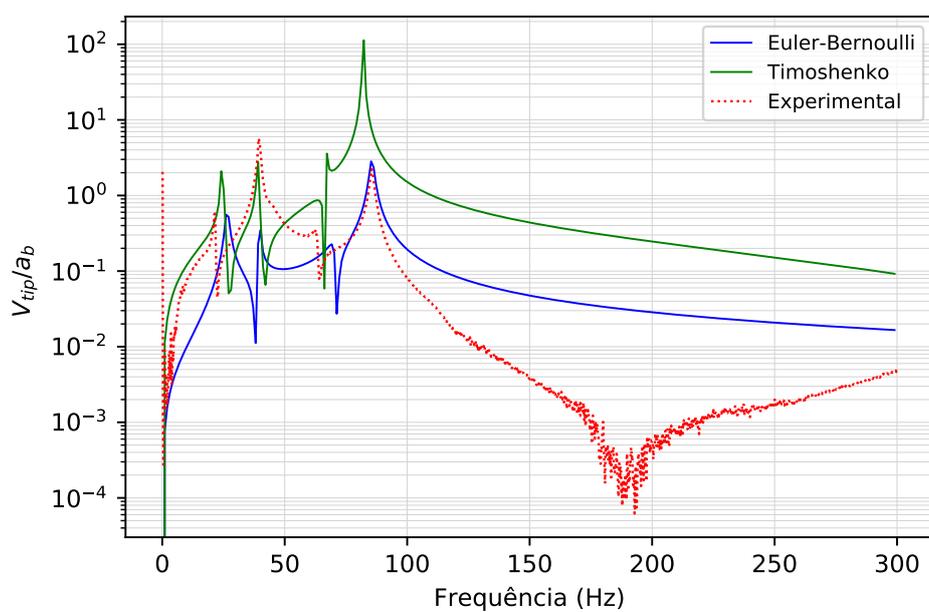
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 27: Tensão elétrica por aceleração da base. Validação do experimento 2 *fan-folded* de 3 vigas.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 28: Tensão elétrica por aceleração da base. Validação do experimento 2 *fan-folded* de 4 vigas.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

5 CONCLUSÕES

No presente trabalho foram desenvolvidas duas metodologias para a descrição do modelo estrutural *fan-folded* proposto. A longo do desenvolvimento desta pesquisa, se validaram as teorias de *Euler-Bernoulli* e *Timoshenko*, aplicadas ao desenho estrutural. No entanto, um grande avanço que não foi considerado ainda por outros autores e que salienta continuar esta pesquisa é o fato de usar a modelagem proposto pelo método de *Timoshenko* para melhorar os resultados dos modelos geradores de energia em menor escala. Assim, tem-se as seguintes conclusões:

1. No Capítulo 3, foram desenvolvidos dos modelos, seguindo as teorias de *Euler-Bernoulli* e *Timoshenko*. Ambos modelos obtêm uma boa resposta enquanto às frequências naturais de ressonância da estrutura *fan-folded*. Foi preciso considerar um cálculo descrito nos apêndices para a obtenção da influência da massa na extremidade e das massa de conexão. As massas na extremidade e as massas de conexão são importantes para sintonizar a faixa de frequências e precisão destas. Para uma faixa de frequências baixas (0-100 Hz), como neste estudo, o erro diminui usando um maior número de vigas.
2. O modelo desenvolvido por *Timoshenko* inclui os efeitos de inércia e força cortante, o que não tem considerado na modelagem feita com *Euler-Bernoulli*. Este fato, faz uma diferença nas TFRF obtidas nos resultados, especificamente na obtenção das frequências naturais do desenho estrutural. No Capítulo 4 foi feita uma comparação das frequências modais, obtendo um erro menor na modelagem seguindo a metodologia de *Timoshenko*, o que permite concluir que se foram usadas um número maior de vigas, para uma faixa de frequências ainda menor, o erro usando este último modelo teria uma precisão melhor.
3. No presente trabalho foi desenvolvido o modelo estrutural no programa ANSYS, que foi importante para fazer a validação do modelo estrutural. Mesmo assim, foram apresentados os resultados das TFRF desta modelagem, e que além de ter erro pelas aproximações numéricas, este modelo descreve muito bem as frequências modais da estrutura *fan-folded*.
4. Os modelos teóricos foram verificados com os ensaios experimentais. Para fazer esta verificação, se desenharam dois ensaios experimentais, como foi descrito no Capítulo 4. Ambos modelos descrevem uma boa performance dos resultados tanto na tensão de saída como na aceleração da massa da extremidade da última viga. Sem embargo, o modelo teórico desenvolvido pela metodologia de *Timoshenko*, apresenta

uma melhoria. Isto abranja a possibilidade de construir um modelo a menor escala, usando tecnologia de impressão 3D.

5.1 Trabalhos Futuros

Durante o desenvolvimento do presente trabalho pode-se verificar uma série de outras pesquisas que podem ser conduzidas a partir dos resultados aqui obtidos. Algumas dessas estão listadas abaixo

1. Embora os resultados obtidos através das simulações tanto em ambiente MATLAB quanto em elementos finitos apresentem uma concordância razoável com os dados experimentais, os modelos podem ser ajustados a fim de melhorar a correlação com os dados experimentais. Desta forma, futuras ações no sentido de aprimorar os modelos contínuos podem ser tomadas como por exemplo um estudo mais aprofundado das condições de equilíbrio entre vigas consecutivas na montagem.
2. Tendo em vista que as vigas, embora nominalmente tenham as mesmas dimensões, sabe-se que na prática pequenas diferenças dimensionais podem ocorrer. Desta forma, um estudo detalhado sobre caracterização e propagação de incertezas no modelo deve ser futuramente conduzido a fim de se estudar como tais incertezas afetam o modelo. Aliado a este estudo, pode também ser feito um estudo de sensibilidade nos modelos com o objetivo de se avaliar os parâmetros mais sensíveis à mudanças e que mais afetam o desempenho do coletor piezoelétrico sanfonado.
3. Os ensaios experimentais podem ser melhorados com o objetivo de obter dados mais precisos. Para tanto, pode-se melhorar as condições de fixação do coletor à mesa vibratória do excitador, dentre outras.
4. Pode-se também conduzir um estudo teórico e experimental com um coletor possuindo vigas de espessuras diferentes e verificar como esta variação afeta a tensão de saída do coletor.

REFERÊNCIAS

- ANSARI, M.; KARAMI, M. A. A sub-cc nonlinear piezoelectric energy harvester for powering leadless pacemakers. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, SAGE, v. 1, n. 1, p. 1–8, 2017.
- ANSARI, M. H.; KARAMI, M. . A. Piezoelectric energy harvesting from heartbeat vibrations for leadless pacemakers. **Journal of Physics: Conference Series**, IOP, v. 660, n. 1, p. 1–5, 2015.
- ANSARI, M. H.; KARAMI, M. A. Modeling and experimental verification of a fan-folded vibration energy harvester for leadless pacemakers. **Journal of Applied Physics**, AIP, v. 119, n. 9, p. 1–10, 2016.
- ANTON, S. R.; SODANO, H. A. A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003-2006). **Smart materials and Structures**, IOP, v. 16, n. 3, p. 1–21, 2007.
- ASHRAF, K. et al. Improved energy harvesting from low frequency vibrations by resonance amplification at multiple frequencies. **Sensors and Actuators A: Physical**, Elsevier, n. 195, p. 123–132, 2013.
- BEEBY, S. P.; TUDOR, M. J.; WHITE, N. M. Energy harvesting vibration sources for microsystems applications. **Measurement Science & Technology**, IOP, v. 17, n. 12, p. 175–195, 2006.
- BEER, J.; MAZUREK, C. **Vector Mechanics for Engineers**. [S.l.]: McGraw Hill, 2010.
- BRENNAN, M. J.; GATTI, G. Harvesting energy from time-limited harmonic vibrations: Mechanical considerations. **Journal of Vibration and Acoustics**, ASME, v. 139, n. 5, p. 47–51, 2017.
- BRENNAN, M. J. et al. An investigation into the simultaneous use of a resonator as an energy harvester and a vibration absorber. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 333, n. 5, p. 1331–1343, 2017.
- CHEN, L.; JIANG, W. Internal resonance energy harvesting. **Journal of Applied Mechanics**, ASME, v. 82, n. 3, p. 1–11, 2015.
- CLEANTE, V. G. et al. On the ency for harvesting energy from track vibrations due to passing trains. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 114, p. 212–223, 2019.
- CLOUGH, R.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. Third. [S.l.]: Computers and Structures, 2003.
- COOK-CHENNAULT, K. A.; THAMBI, N.; SASTRY, A. M. Powering mems portable devices-a review of non-regenerative and regenerative power supply systems with special emphasis on piezoelectric energy harvesting systems. **Smart Materials and Structures**, IOP, v. 17, p. 1–33, 2008.

COTTONE, F.; VOCCA, H.; GAMMAITONI, L. Nonlinear energy harvesting. **Physical Review Letters**, APS, v. 102, n. 8, p. 1–4, 2009.

DAGDEVIREN, C. et al. Conformal piezoelectric energy harvesting and storage from motions of the heart, lung, and diaphragm. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Academy of Sciences, v. 111, n. 5, p. 1927–1932, 2014.

DAQAQ, M. et al. On the role of nonlinearities in vibratory energy harvesting: A critical review and discussion. **Applied Mechanics Reviews**, ASME, v. 66, p. 1–23, 2014.

DE MARQUI JR, C.; ERTURK, A. Electroaeroelastic analysis of airfoil-based wind energy harvesting using piezoelectric transduction and electromagnetic transduction. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, SAGE, v. 24, n. 7, p. 846–854, 2012.

DE MARQUI JR, C.; ERTURK, A.; INMAN, D. J. An electromechanical finite element model for piezoelectric energy harvester plates. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 327, n. 1, p. 9–25, 2009.

_____. Piezoaeroelastic modeling and analysis of a generator wing with continuous and segmented electrodes. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, Elsevier, v. 21, p. 983–993, 2010.

DE MARQUI JR, C.; VIEIRA, W. G. R. Modeling and analysis of piezoelectric energy harvesting from aeroelastic vibrations using the double-lattice method. **Journal of Vibration and Acoustics**, ASME, v. 133, p. 1–9, 2011.

DETERRE, M. et al. Energy harvesting system for cardiac implant applications. In: IEEE. **Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS (DTIP), 2011 Symposium on**. [S.l.], 2011. p. 387–391.

_____. Micro blood pressure energy harvester for intracardiac pacemaker. **Journal of Microelectromechanical Systems**, IEEE, v. 23, n. 3, p. 651–660, 2014.

DIETL, J. M.; WICKENHEISER, A. M.; GARCIA, E. A timoshenko beam model for cantilevered piezoelectric energy harvesters. **Smart Materials and Structures**, IOP, v. 19, n. 5, p. 1–12, 2010.

ERTURK, A.; HOFFMAN, J.; INMAN, D. J. A piezomagnetoelastic structure for broadband vibration energy harvesting. **Applied Physics Letter**, AIP, v. 94, p. 1–3, 2009.

ERTURK, A.; INMAN, D. J. A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters. **Journal of Vibration and Acoustics**, ASME, v. 130, p. 1–15, 2008.

_____. Issues in mathematical modeling of piezoelectric energy harvesters. **Smart Materials and Structures**, IOP, v. 17, p. 1–14, 2008.

_____. On mechanical modeling of cantilevered piezoelectric vibration energy harvesters. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, SAGE, v. 18, n. 10, p. 1311–1325, 2008.

- _____. An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. **Smart Materials and Structures**, IOP, v. 19, p. 1–18, 2009.
- _____. Broadband piezoelectric power generation on high-energy orbits of the bistable duffing oscillator with electromechanical coupling. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 330, n. 10, p. 2339–2353, 2011.
- _____. **Piezoelectric Energy Harvesting**. 1. ed. [S.l.]: Wiley, 2011.
- ERTURK, A. et al. Effect of strain nodes and electrode configuration on piezoelectric energy harvesting from cantilevered beams. **Journal of Vibration and Acoustics**, ASME, v. 130, p. 1–10, 2009.
- _____. Effect of strain nodes and electrode configuration on piezoelectric energy harvesting from cantilevered beams. **Journal of Vibration and Acoustics**, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 131, n. 1, 2009.
- EWINS, D. J. **Modal Testing: Theory, Practice and Applications**. 1st. ed. [S.l.]: RSP, 2000.
- FRANCO, V. R. **Optimization Techniques Applied to Piezoelectric Vibration Energy Harvesting Systems**. 2013. Tese (Doutorado) — Sao Carlos School of Engineering, University of Sao Paulo, Brazil, 2013.
- FRANCO, V. R.; VAROTO, P. S. Parameter uncertainties in the design and optimization of cantilever piezoelectric energy harvesters. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 93, p. 593–609, 2017.
- GALBIER, A.; KARAMI, M. A. Using an elastic magnifier to increase power output and performance of heart-beat harvesters. **Smart Materials and Structures**, IOP, v. 26, p. 1–16, 2017.
- GODOY, T. C.; TRINDADE, M. A. Effect of parametric uncertainties on the performance of a piezoelectric energy harvesting device. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, ABCM, XXXIV, p. 552–560, 2012.
- GOLDFARB, M.; JONES, L. D. On the efficiency of electric power generation with piezoelectric ceramic. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, ASME, v. 121, n. 3, p. 566–571, 1999.
- HANASIRO, A.; VAROTO, P. S. Dynamic characterization and efficiency analysis of multi degree of freedom piezoelectric energy harvesters from structural vibrations. In: FLEURY, A. T.; RADE, D. A.; KURKA, P. R. G. (Ed.). **Proceedings of the XVII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics**. [S.l.]: ABCM, 2017. v. 1, p. 1–10.
- HANNAN, M. A. et al. Energy harvesting for implantable biomedical devices: issues and challenges. **Biomedical Engineering Online**, Biomedical Eng. Online, v. 13, n. 79, p. 1–23, 2014.
- HARROP, P.; DAS, R. **Energy harvesting and storage for electronic devices 2009-2019**. 1. ed. [S.l.]: IDTechEx, 1988.

HONGJIN, W.; QINGFENG, M.; WUWEI, F. Discussion of the improved methods for analysing a cantilever beam carrying a tip-mass under base excitation. **Shock and Vibration**, Hindawi, n. 4, p. 1–15, 2014.

IEEE. Ieee standard on piezoelectricity. **ANSI/IEEE Std 176-1987**, IEEE, p. 1–74, 1988.

ILIUK, I. et al. On non-ideal and chaotic energy harvester behavior. **Differential Equations and Dynamical Systems**, Springer, v. 21, n. 1, p. 93–104, 2013.

_____. Potential application in energy harvesting of intermodal energy exchange in a frame: Fem analysis. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, WSC, v. 14, n. 8, p. 1–10, 2014.

JR, W. W.; TIMOSHENKO, S. P.; YOUNG, D. H. **Vibration problems in engineering**. [S.l.]: Wiley, 1990.

KELLY. **Mechanical Vibrations: Theory and Applications, SI Edition**. Cengage Learning, 2012. ISBN 9781439062142. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Y6Ai9hidEjEC>>.

KIM, M. et al. Modeling and experimental verification of proof mass effects on vibration energy harvester performance. **Smart Materials and Structures**, IOP, v. 19, n. 045023, p. 1–21, 2010.

LEADENHAM, S.; ERTURK, A. Unified nonlinear electroelastic dynamics of a bimorph piezoelectric cantilever for energy harvesting, sensing and actuation. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 79, n. 3, p. 1727–1743, 2015.

LEISSA, A. W.; QATU, M. S. **Vibrations of Continuous Systems**. [S.l.]: McGraw-Hill, 2011.

LEO, D. J. **Engineering analysis of smart material systems**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.

LI, H.; TIAN, C.; DENG, Z. Energy harvesting from low frequency applications using piezoelectric materials. **Applied Physics Letters**, AIP, v. 1, n. 1, p. 1–20, 2014.

LIEN, I. C.; SHU, Y. C. Array of piezoelectric energy harvesting by the equivalent impedance approach. **Smart Materials and Structures**, IOP, v. 21, n. 8, p. 1–10, 2012.

LUMENTUT, M.; HOWARD, I. M. Parametric design-based modal damped vibrational piezoelectric energy harvesters with arbitrary proof mass offset: numerical and analytical validations. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 68, p. 562–586, 2016.

LUMENTUT, M. F.; HOWARD, I. M. Electromechanical finite element modelling for dynamic analysis of a cantilevered piezoelectric energy harvester with tip mass offset under base excitations. In: . [S.l.: s.n.], 2014.

MATEU, L.; MOLL, F. Optimum piezoelectric bending beam structures for energy harvesting using shoe inserts. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, SAGE, v. 16, n. 10, p. 835–845, 2005.

- MCCONNELL, K. G.; VAROTO, P. S. **Vibration Testing: Theory and Practice**. 2. ed. [S.l.]: Wiley, 2008.
- MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecánica para ingenieros. Dinámica. II**. [S.l.]: Reverté, 1998. v. 2.
- MITCHESON, P. D. Energy harvesting for human wearable and implantable bio-sensors. In: **IEEE. 32nd Annual International Conference of the IEEE EMBS**. [S.l.], 2010. p. 3432–3436.
- MOTTER, D. et al. Vibration energy harvesting using piezoelectric transducer and non-controlled rectifiers circuits. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, ABCM, XXXIV, p. 378–385, 2012.
- PAREDES, M. S. V.; MAKI, L. H.; VAROTO, P. S. Dynamic performance and uncertainty analysis of a piezometaelastic structure for vibration control and energy harvesting. In: **Proceedings of the XXXVIII IMAC - A Conference and Exposition on Structural Dynamics**. [S.l.]: SEM, 2020. v. 1, p. 1–17.
- PAULA, A. S. D.; INMAN, D. J.; SAVI, M. A. Energy harvesting in a nonlinear piezomagnetoelastic beam subjected to random excitation. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 54-55, n. 8, p. 405–416, 2015.
- PETERSON, J. V. L. L.; LOPES, V. G.; JR., A. B. C. Dynamic analysis and characterization of a nonlinear bi-stable piezo-magneto-elastic energy harvester. **MATEC Web Conferences**, v. 241, p. 1–4, 2018.
- PILLATSCH, P. et al. Degradation of bimorph piezoelectric bending beams in energy harvesting applications. **Smart Materials and Structures**, IOP, v. 26, n. 3, p. 1–10, 2017.
- PRIYA, S. et al. A review on piezoelectric energy harvesting: Materials, methods, and circuits. **Energy Harvesting and Systems**, De Gruyter, v. 4, n. 1, p. 3–39, 2019.
- QUINN, D. D. et al. Comparing linear and essentially nonlinear vibration-based energy harvesting. **Journal of Vibration and Acoustics**, SAGE, v. 133, n. 1, p. 1–8, 2011.
- R., M. C.; GORMAN, D. G.; CARTMELL, M. P. Enhanced vibrational energy harvesting using nonlinear stochastic resonance. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 318, n. 4-5, p. 655–662, 2008.
- RAO, S. **Vibrations of Continuous Systems**. 1. ed. [S.l.]: Wiley, 2007.
- RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. [S.l.]: Prentice Hall, 2010.
- REZAEISARAY, M. et al. Low frequency piezoelectric energy harvesting at multi vibration mode shapes. **Sensors and Actuators A: Physical**, Elsevier, v. 228, p. 104–111, 2015.
- RILEY, W. F. **Ingeniería mecánica estática/por William F. Riley y Leroy D. Sturges**. [S.l.], 1996.
- ROCHA, R. T. et al. Nonlinear piezoelectric vibration energy harvesting from a portal frame with two-to-one internal resonance. **Meccanica**, Springer, v. 52, p. 2583–2602, 2017.

_____. Using passive control by a pendulum in a portal frame platform with piezoelectric energy harvesting. **Journal of Vibration and Control**, SAGE, v. 24, n. 16, p. 3684–3697, 2018.

ROSSI, R. E.; LAURA, P. A. A. Vibrations of a timoshenko beam clamped at one end and carrying a finite mass at the other. **Applied Acoustics**, Elsevier, v. 30, n. 4, p. 293–301, 1990.

SALARIEH, H.; GHORASHI, M. Free vibration of timoshenko beam with finite mass rigid tip load and flexural–torsional coupling. **International Journal of Mechanical Sciences - INT J MECH SCI**, v. 48, p. 763–779, 07 2006.

SHAHRUZ, S. M. Design of mechanical band-pass filters for energy scavenging: Multi-degree-of-freedom models. **Journal of Vibration and Control**, SAGE, v. 14, n. 5, p. 753–768, 2008.

STANTON, S. C.; MCGEHEE, C. C.; MANN, B. P. Reversible hysteresis for broadband magnetopiezoelectric energy harvesting. **Applied Physics Letter**, APL, v. 95, p. 1–3, 2009.

STEPHEN, N. G. Timoshenko’s shear coefficient from a beam subjected to gravity loading. **Journal of Applied Mechanics**, ASME, v. 47, p. 121–127, 1980.

TANG, L.; YANG, Y. A multiple-degree-of-freedom piezoelectric energy harvesting model. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, SAGE, v. 23, n. 14, p. 1631–1647, 2015.

TANG, L.; YANG, Y.; WU, H. Modeling and experiment of a multiple-dof piezoelectric energy harvester. In: **Proceedings of SPIE-Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems**. [S.l.]: SPIE, 2012. (8341), p. 1–13.

THOMSON, W. **Theory of vibration with applications**. [S.l.]: CRC, 2018.

TIMOSHENKO, S.; YOUNG, D. H. **Elements of Strength of Materials**. [S.l.]: Van Nostrand Reinhold, 1968.

TRIPLETT, A.; QUINN, D. D. The effect of nonlinear piezoelectric coupling on vibration-based energy harvesting. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, SAGE, v. 20, p. 1959–1967, 2009.

UMEDA, M.; NAKAMURA, K.; UEHA, S. Analysis of the transformation of mechanical impact energy to electrical energy using a piezoelectric vibrator. **Japanese Journal of Applied Physics**, v. 35, n. 5B, p. 3267–3273, 1996.

_____. Energy storage characteristics of a piezo-generator using impact induced vibration. **Japanese Journal of Applied Physics**, v. 36, n. 5B, p. 3146–3151, 1997.

VAROTO, P. S. Experimental analysis of a piezoelectric energy harvester with internal resonances. In: KERSCHEN, G. (Ed.). **Nonlinear Dynamics, Vol. 1. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series**. [S.l.]: Springer, 2017. p. 87–97.

- _____. Dynamic behavior and performance analysis of piezoelectric energy harvesters under model and parameter uncertainties", booktitle="sensors and instrumentation, aircraft/aerospace and energy harvesting. In: WEE, E. et al. (Ed.). [S.l.]: Springer, 2019. v. 8, p. 57–66.
- VAROTO, P. S.; BONISOLI, E.; LISITANO, D. Parametric analysis and voltage generation performance of a multi-directional mdof piezoelectric vibration energy harvester. In: **Proceedings of the XXXVIII IMAC - A Conference and Exposition on Structural Dynamics**. [S.l.]: SEM, 2020. v. 1, p. 1–12.
- WALKER, P. L. The history of the accelerometer: 1920s-1996-prologue and epilogue, 2006. **Sound and Vibration**, SANDV, v. 40, p. 84–92, 2007.
- WANG, B.; WANG, Z.; ZUO, X. Frequency equation of flexural vibrating cantilever beam considering the rotary inertial moment of an attached mass. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi, n. 2, p. 1–5, 2017.
- WEI, C.; JING, X. A comprehensive review on vibration energy harvesting: Modelling and realization. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, Elsevier, v. 74, n. 1, p. 1–18, 2017.
- WILLIAMS, C. B.; YATES, R. B. Analysis of a micro-electric generator for microsystems. **Sensors and Actuators A**, Elsevier, v. 52, n. 1-3, p. 8–11, 1996.
- YANG, W.; TOWFIGHIAN, S. Internal resonance and low frequency vibration energy harvesting. **Smart Materials and Structures**, IOP, v. 26, p. 1–11, 2017.

Apêndices

APÊNDICE A – FORMULAÇÃO DE PROPRIEDADES EQUIVALENTES DE MASSA E RIGIDEZ

Nesta seção serão apresentadas propriedades equivalentes da viga composta que são precisos conhecer para as formulações das equações apresentadas no presente trabalho. Devemos ter em conta que as relações estudadas serão mesmo para ambos modelos. Primeiro serão apresentadas as relações equivalentes para o modelo *Euler-Bernoulli*.

Uma relação importante é a massa equivalente da viga, per unidade de comprimento, denotado como $(\rho A)_{eq}$. Nesta relação foi considerada também a massa de PZT. Então, a massa total da viga composta:

$$m_{total} = m_{viga} + m_{PZT} \quad (A.1)$$

$$m_{total} = \rho_s b h_s L_s + \rho_p b h_p L_p \quad (A.2)$$

A relação de massa equivalente é apresentada na equação seguinte:

$$(\rho A)_{eq} = \frac{m_{total}}{L_s} \quad (A.3)$$

$$(\rho A)_{eq} = b \left(\rho_s h_s + \rho_p h_p \frac{L_p}{L_s} \right) \quad (A.4)$$

Outra propriedade a ter em conta é a rigidez flexional; El momento interno de la viga é descrita na seguinte equação:

$$M(x, t) = - \int \int_A \sigma_1 z dz \quad (A.5)$$

$$M(x, t) = -b \left(\int_{h_a}^{h_b} \sigma_1^s z dz + \int_{h_b}^{h_c} \sigma_1^p z dz \right) \quad (A.6)$$

$$M(x, t) = b \left(\int_{h_a}^{h_b} E_s \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} z^2 dz + \int_{h_b}^{h_c} E_p \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} z^2 dz - \int_{h_b}^{h_c} v(t) E_p \frac{d_{31}}{h_p} z dz \right) \quad (A.7)$$

$$M(x, t) = b \underbrace{\left[\frac{E_s(h_b^3 - h_a^3) + E_p(h_c^3 - h_b^3)}{3} \right]}_{(EI)_c} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} - b \underbrace{\left[\frac{E_p d_{31} (h_c^2 - h_b^2)}{2h_p} \right]}_{\vartheta} v(t) \quad (A.8)$$

Onde os limites de integração h_a , h_b e h_c foram definidas na figura 12. A equação que representa a rigidez flexional da viga composta (subestrutura e PZT) é a seguinte:

$$(EI)_c = b \left[\frac{E_s(h_b^3 - h_a^3) + E_p(h_c^3 - h_b^3)}{3} \right] \quad (A.9)$$

A equação anterior descreve a rigidez flexional, mas nela considera-se que a viga é recoberta com PZT ao longo do seu comprimento. Então, uma variação desta equação, que descreve

uma equação generalizada para um comprimento de PZT menor que o da viga, é a seguinte:

$$(EI)_{eq} = (EI) \frac{(L_s - L_p)}{L_s} + (EI)_c \frac{(L_p)}{L_s} \quad (\text{A.10})$$

Esta equação, considera um comprimento menor de PZT, mas usa um promédio de rigidez. Onde $(EI)_{eq} = (EI)_c$, quando $L_s = L_p$.

Além das equações apresentadas, usadas para a modelagem da teoria *Euler-Bernoulli*, é preciso adicionar dois propriedades requeridas para a modelagem da teoria *Timoshenko*. O momento de inercia esta ligado a cada material, neste caso ao ter uma viga composta, precisa-se determinar uma equação para $(\rho I)_{eq}$. Seguindo a metodologia da equação integral na secção transversal da viga (DIETL; WICKENHEISER; GARCIA, 2010):

$$(\rho I_y)_{eq} = \frac{1}{\delta x} \iiint_{A\delta x} \rho z^2 dA dx \quad (\text{A.11})$$

$$(\rho I_y)_{eq} = b \left(\rho_s \int_{h_a}^{h_b} z^2 dz + \rho_p \int_{h_b}^{h_c} z^2 dz \right) \quad (\text{A.12})$$

$$(\rho I_y)_{eq} = b \rho_s \frac{(h_b^3 - h_a^3)}{3} + b \rho_p \frac{(h_c^3 - h_b^3)}{3} \quad (\text{A.13})$$

Considerando as relações da equação 3.31, e a posição do eixo neutro descrito na figura 31, obtém-se o seguinte:

$$(\rho I_y)_{eq} = b \left[\frac{\rho_s h_s (2z_n - h_s - 2h_p)}{3} + \frac{\rho_p h_p (2z_n - h_p)}{3} \right] \quad (\text{A.14})$$

A propriedade com relação a força cortante $(kGA)_{eq}$, esta também vinculada aos dois materiais da viga composta (subestrutura e PZT).

$$V(x, t) = \iint_A \tau dA \quad (\text{A.15})$$

$$V(x, t) = -kb \left[\int_{h_a}^{h_b} G_s \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \phi(x, t) \right) dz + \int_{h_b}^{h_c} G_p \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \phi(x, t) \right) \right] \quad (\text{A.16})$$

$$V(x, t) = -kb [G_s(h_a - h_b) + G_p(h_b - h_c)] \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \phi(x, t) \right) \quad (\text{A.17})$$

$$V(x, t) = -kb (G_s h_s + G_p h_p) \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \phi(x, t) \right) \quad (\text{A.18})$$

Desta equação, é possível obter a relação seguinte para a viga composta:

$$(kGA)_{eq} = kb (G_s h_s + G_p h_p) \quad (\text{A.19})$$

APÊNDICE B – DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DA MASSA NA EXTREMIDADE

O presente estudo está relacionado com a determinação de parâmetros geométricos da massa na extremidade da última viga, que nesta secção serão descritos. Na modelagem desenvolvida tem-se que a massa exerce efeito no ponto c na viga, como é mostrado na figura 29. O ponto c representará o ponto final da viga no eixo neutro, então nas seguintes equações que serão apresentadas se terá em conta que o parâmetro z_n já é conhecido. No apêndice D descreve-se o cálculo da determinação do eixo neutro para a secção transversal composta (viga e material PZT).

Na figura 29(b), se pode mostrar uma geometria equivalente para a massa na extremidade, que tem incluso parte final da viga. Seguindo esta metodologia temos a massa equivalente seguinte:

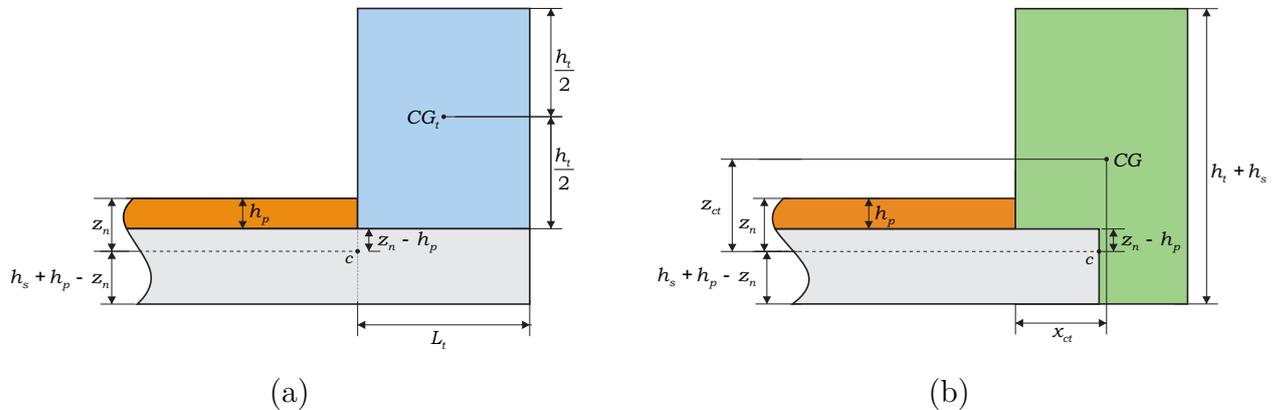
$$M_{ts} = M_t + M_s \quad (\text{B.1})$$

Na equação anterior pode-se mostrar que M_{ts} é a nova massa da extremidade, e que pode-se representar como função das propriedades de ambos materiais:

$$M_{ts} = \rho_t b L_t h_t + \frac{\rho_s b L_t h_s}{2} = b L_t \left(\rho_t h_t + \frac{\rho_s h_s}{2} \right) \quad (\text{B.2})$$

Para determinar o momento de inercia I_{ts} é preciso conhecer o centroide de massa, que

Figura 29: Características geométricas (a) com massa e subestrutura na extremidade e (b) com massa equivalente.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

é possível calcular-o usando momentos de inercia básicos (MERIAM; KRAIGE, 1998).

Então, temos os seguintes relações:

$$\begin{cases} x_{ct} = \frac{\rho_s h_s L_t}{8 \left(\rho_t h_t + \frac{\rho_s h_s}{2} \right)} \\ z_{ct} = \frac{\rho_t h_t \left(\frac{h_t}{2} + z_n - h_p \right) + \rho_s h_s \left(\frac{z_n}{2} - \frac{h_p}{2} - \frac{h_s}{4} \right)}{\left(\rho_t h_t + \frac{\rho_s h_s}{2} \right)} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Com as equações B.3, pode-se calcular usando o *teorema de Steiner* ou conhecido também por *teorema de eixos paralelos* (BEER; MAZUREK, 2010; RILEY, 1996). Tem-se:

$$\begin{aligned} I_{ts} &= I_{CG} + M_{ts} (x_{ct}^2 + z_{ct}^2) \\ I_{ts} &= \rho_t b L_t h_t \left(\left(\frac{L_t^2 + h_t^2}{12} \right) + \left(\frac{h_t}{2} - h_p - z_{ct} + z_n \right)^2 \right) + \\ &\quad \frac{\rho_s b L_t h_s}{2} \left(\left(\frac{L_t^2 + 4h_s^2}{48} \right) + \left(\frac{h_s}{2} + h_p - z_n + z_{ct} \right)^2 + \left(\frac{L_t}{4} - x_{ct} \right)^2 \right) + \\ &\quad M_{ts} (x_{ct}^2 + z_{ct}^2) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

APÊNDICE C – DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DAS MASSAS NA CONEXÃO

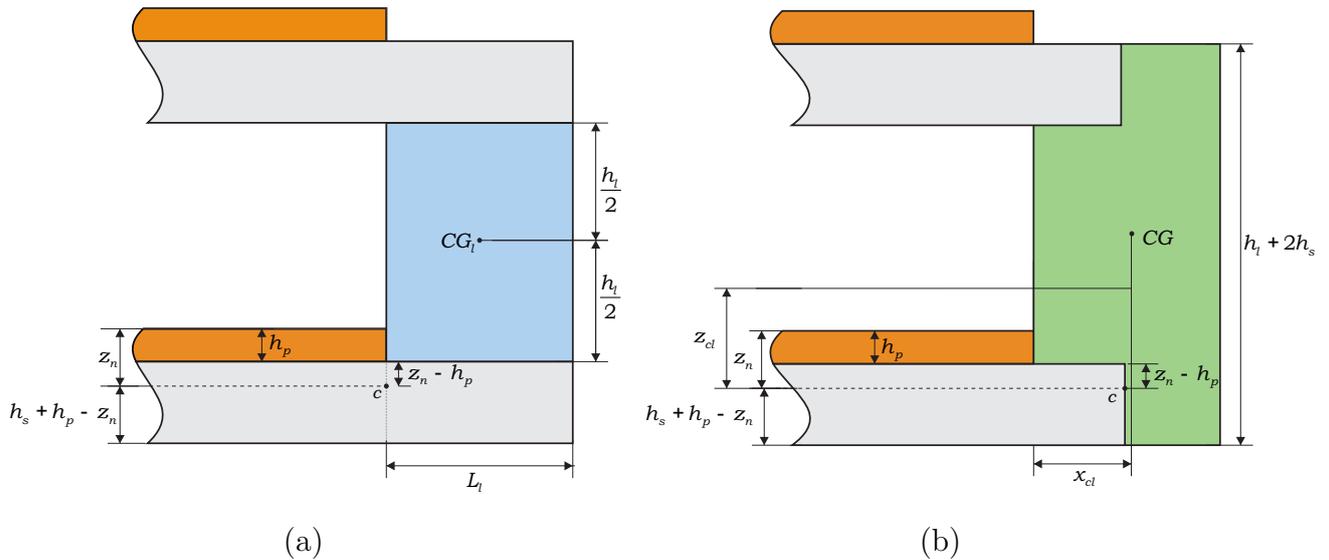
Nesta secção se apresenta um processo de equivalência da massa de conexão entre duas vigas consecutivas. Na figura 30 pode-se ver que a massa equivalente tem uma altura $h_l + 2h_s$, e a equação da massa equivalente seguindo esta metodologia, tem-se:

$$M_{ls} = M_l + M_s \quad (C.1)$$

A nova massa de conexão pode-se representar com a seguinte equação:

$$M_{ls} = \rho_l b L_l h_l + 2\rho_s b L_l h_s = b L_l (\rho_l h_l + 2\rho_s h_s) \quad (C.2)$$

Figura 30: Características geométricas (a) com massa e subestrutura na conexão e (b) com massa equivalente.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Para determinar o momento de inercia I_{ls} é preciso conhecer o centroide de massa, que pode-se determinar seguindo a metodologia do apêndice B (MERIAM; KRAIGE, 1998)

$$\begin{cases} x_{cl} = \frac{\rho_s h_s L_l}{4 \left(\rho_l h_l + \frac{\rho_s h_s}{2} \right)} \\ z_{cl} = \frac{\rho_l h_l \left(\frac{h_l}{2} + z_n - h_p \right) + \rho_s h_s \left(z_n - h_p - \frac{h_l}{2} \right)}{(\rho_l h_l + \rho_s h_s)} \end{cases} \quad (C.3)$$

Usando o teorema de Steiner (BEER; MAZUREK, 2010; RILEY, 1996). Tem-se:

$$\begin{aligned}
 I_{ls} &= I_{CG} + M_{ls} (x_{cl}^2 + z_{cl}^2) \\
 I_{ls} &= \rho_l b L_t h_l \left(\left(\frac{L_l^2 + h_l^2}{12} \right) + \left(\frac{h_l}{2} - h_p - z_{cl} + z_n \right)^2 \right) + \\
 &\quad \frac{\rho_s b L_t h_s}{2} \left(\left(\frac{L_l^2 + 4h_s^2}{48} \right) + \left(\frac{h_s}{2} + h_p - z_n + z_{cl} \right)^2 + \left(\frac{L_l}{4} - x_{cl} \right)^2 \right) + \\
 &\quad \frac{\rho_s b L_t h_s}{2} \left(\left(\frac{L_l^2 + 4h_s^2}{48} \right) + \left(\frac{h_s}{2} - h_p + z_n + h_l \right)^2 + \left(\frac{L_l}{4} - x_{cl} \right)^2 \right) + \\
 &\quad M_{ls} (x_{cl}^2 + z_{cl}^2) \tag{C.4}
 \end{aligned}$$

APÊNDICE D – DETERMINAÇÃO DO EIXO NEUTRO DA SECÇÃO TRANSVERSAL DA VIGA

Na figura 31 pode-se ver a secção composta da viga com material PZT. Além disso, o eixo neutro é o lugar onde a tensão de flexão é nula. O procedimento para determinar a posição do eixo neutro é considerar z_n como a distancia do este eixo ao limite da superfície superior na viga composta e pode-se calcular lembrando que as tensões na secção transversal devem estar em equilíbrio. Então somando as forças na direção X tem-se:

$$\sum F = \int \sigma^s dA + \int \sigma^p dA \quad (D.1)$$

$$0 = \int_{-h_s+(z_n-h_p)-\frac{b}{2}}^{z_n-h_p} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E_s z dy dz + \int_{z_n-h_p-\frac{b}{2}}^{z_n} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E_p z dy dz \quad (D.2)$$

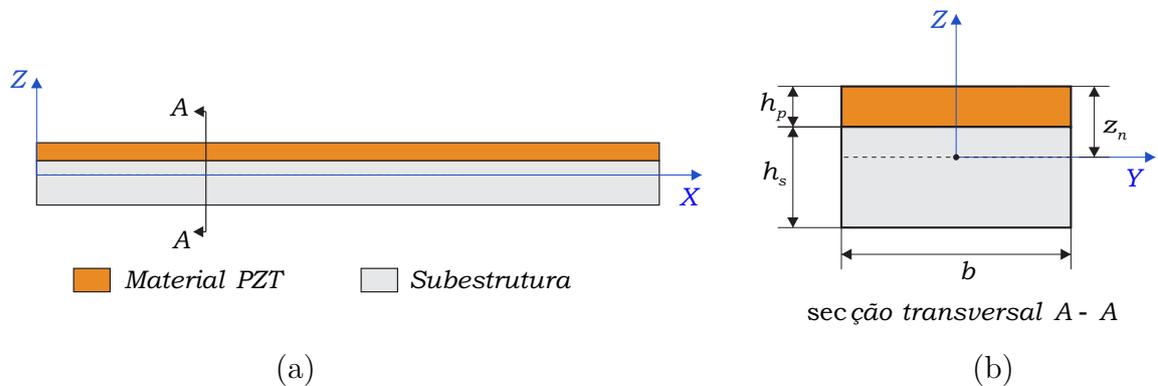
$$0 = E_s b \left[\frac{z^2}{2} \right]_{-h_s+(z_n-h_p)}^{z_n-h_p} + E_p b \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z_n-h_p}^{z_n} \quad (D.3)$$

$$0 = E_s (h_s) (2z_n - 2h_p - h_s) + E_p (h_p) (2z_n - h_p) \quad (D.4)$$

$$z_n = \frac{E_s h_s^2 + 2E_s h_s h_p + E_p h_p^2}{2(E_s h_s + E_p h_p)} \quad (D.5)$$

A equação D.5 mostra a distancia do eixo neutro ao limite superior da viga. Esta equação é usada no estudo para determinar o deslocamento da viga.

Figura 31: Características geométricas (a) da viga composta (b) da secção transversal da viga composta.



Fonte: Elaborada pelo Autor.