



UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

NÚCLEO "RAFAEL RANGEL"

DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICA

TRUJILLO - ESTADO TRUJILLO

ENFOQUE VECTORIAL DEL TEOREMA DE LAS PROPORCIONES DE TALES

Autor:

Olmer Parra.

Tutor:

Wilfredo Zuleta.

Pampanito, noviembre 2016

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
NÚCLEO “RAFAEL RANGEL”
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICA
TRUJILLO - ESTADO TRUJILLO

ENFOQUE VECTORIAL DEL TEOREMA DE LAS PROPORCIONES DE TALES

(Trabajo de Grado como requisito para optar al Título de Licenciado en Educación
Mención Física y Matemática)

Autor:

Olmer Parra.

Tutor:

Wilfredo Zuleta.

Pampanito, noviembre 2016

ÍNDICE DE CONTENIDOS

	Página
Resumen.	4
Introducción.	5
CAPÍTULO I. EL PROBLEMA.	6
1.1 Planteamiento del problema.	6
1.2 Formulación del problema.	7
1.3 Objetivos.	7
1.4 Justificación e importancia.	7
CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO.	9
2.1 Breve historia de Tales de Mileto.	9
2.2 Antecedentes de la investigación.	10
2.3 Bases teóricas.	11
2.4 Bases matemáticas.	12
CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO.	15
3.1 Tipo de investigación.	15
3.2 Diseño de investigación.	15
CAPITULO IV. MARCO ANALÍTICO.	16
Demostración del Teorema de las Proporciones de Tales.	16
CAPITULO V. CONCLUSIONES.	24
REFERENCIAS.	25

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
NÚCLEO “RAFAEL RANGEL”
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICA
TRUJILLO - ESTADO TRUJILLO

ENFOQUE VECTORIAL DEL TEOREMA DE LAS PROPORCIONES DE TALES

Autor:

Olmer Parra.

Tutor:

Wilfredo Zuleta.

RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo presentar una nueva demostración del teorema de las proporciones de Tales, aplicando sólo argumentos vectoriales, como son algunos: suma y resta de vectores, módulo de un vector, ángulo entre vectores, producto punto y vectores ortogonales. Se muestran las definiciones y proposiciones usadas en la demostración. Para el desarrollo del trabajo se emplea la investigación de tipo documental, con diseño de desarrollo teórico.

Palabras Claves: Teorema, vectores, demostración, Tales de Mileto.

INTRODUCCIÓN

Se cuenta de Newton una anécdota clásica. Cuando era un joven estudiante comenzó el estudio de la geometría, como era costumbre en su tiempo, por la lectura de los Elementos de Euclides. Leyó los teoremas, constató su exactitud y omitió las demostraciones, preguntándose por qué se tomaban tantas molestias en demostrar verdades tan evidentes. Años más tarde, sin embargo, cambió de parecer y fue un admirador de Euclides. Auténtica o no, esta anécdota nos lleva a la pregunta siguiente: ¿por qué aprender o enseñar las demostraciones?

Podría decirse que el objetivo de los matemáticos es descubrir y comunicar ciertas verdades, sean evidentes o no, y que una demostración es un recurso eficaz para cumplir con este propósito. En la siguiente investigación se desea comunicar una verdad que ha sido conocida y también demostrada por muchos, desde un enfoque distinto al que se presenta en la mayoría de los programas de ingeniería y matemática.

El teorema de las Proporciones de Tales ha sido objeto de estudio durante mucho tiempo y sus aplicaciones son diversas en distintas áreas de las matemáticas, como son la geometría clásica, el cálculo diferencial e integral, el análisis matemático, entre otros. Es por ello que se desea presentar una demostración alternativa de este teorema junto con las definiciones y proposiciones empleadas en dicho razonamiento.

CAPÍTULO I

El Problema

1.1 Planteamiento del problema

Muchos son los historiadores que coinciden en que Tales de Mileto fue el fundador de la geometría como sistema deductivo, introduciendo la noción de demostración y transformando la matemática en una ciencia abstracta. Tales inició la geometría demostrativa unos seis siglos antes de Cristo y, según Proclo, estableció y demostró cuatro teoremas de geometría que, más que el rigor, buscaban el convencimiento.

Dentro de esta misma perspectiva, Euclides es considerado otro gran matemático griego, quien hace una selección ordenada y sistematizada de conocimientos de geometría. Euclides usa un razonamiento fundado en conceptos básicos no demostrables que permiten probar ciertas proposiciones y, a su vez, estas sirven para demostrar ciertos teoremas, creando así nuevos conocimientos a partir de otros ya existentes, y todo mediante cadenas deductivas de razones lógicas.

En vista de lo anterior, las demostraciones permiten verificar la veracidad de una proposición, no necesariamente de una manera, sino que también desde varios enfoques. Por ejemplo, el teorema de Pitágoras es uno de los más conocidos y cuenta con un gran número de demostraciones diferentes, utilizando métodos muy diversos. Una de las causas de esto es que en la Edad Media se exigía una nueva demostración del teorema para alcanzar el grado de "Magíster matheseos".

Ahora bien, el teorema de Pitágoras no es el único que cuenta con un compendio de demostraciones que avalan su veracidad sino que existen otros teoremas que poseen esta propiedad, aunque tal vez no en la misma proporción. Sin embargo, abordar una nueva demostración no es tarea sencilla y representa un desafío a todo aquel que estudia matemática.

Cabría preguntarse qué teorema puede ser verificado utilizando criterios distintos a los ya empleados y cuáles serían los argumentos a utilizar en el desarrollo del razonamiento.

1.2 Formulación del Problema

En virtud de las razones presentadas anteriormente, esta investigación está orientada en presentar una demostración alternativa del Teorema de las Proporciones de Tales desde un enfoque netamente vectorial, cuya finalidad es ampliar los conocimientos sobre el estudio de la matemática, de donde surge la siguiente interrogante ¿Posee una demostración vectorial el Teorema de las Proporciones de Tales?

1.3 Objetivos

Objetivo General

Demostrar el Teorema de las Proporciones de Tales utilizando sólo argumentos vectoriales.

Objetivos Específicos

- Enunciar algunas nociones básicas sobre vectores.
- Presentar las proposiciones utilizadas en la demostración.

1.4 Justificación e Importancia

Al estudiar y aprender matemática adquirimos habilidades para la resolución de problemas, podemos pensar de una manera lógica y somos capaces de tener mayor claridad de ideas a la hora de tomar decisiones, lo cual, es necesario en nuestras vidas a la hora de efectuar alguna actividad. Es por eso, que es difícil pensar en algún área que no tenga que ver con la matemática.

Sin embargo, dentro del campo de la matemática como ciencia surge un reto a todo aquel que desee resolver un problema ya que la desconfianza es una actitud

habitual, en el buen sentido del término, debido a que los matemáticos no aceptan la veracidad de una proposición, a menos que se demuestre de una forma irrefutable. Por esto, el rol que han desempeñado las demostraciones ha sido relevante y de suma importancia ya que son parte del rigor que caracteriza a esta área del conocimiento.

De esta manera, las demostraciones son importantes para garantizar la validez de los teoremas de las matemáticas. Al quedar demostrado, este se convierte en una herramienta confiable y aplicable en otras ciencias. Según Sánchez (2014) “Dominar una demostración de una proposición matemática ayuda a la comprensión del resultado, facilita su posterior utilización práctica y contribuye a la consolidación del lenguaje matemático”.

Aunque existen diferentes teoremas y sus respectivas demostraciones en la geometría clásica, muchos de ellos no han sido probados mediante otros métodos. Tal es el caso de uno de los teoremas de Tales de Mileto, y es precisamente ese el objeto de estudio de la presente investigación.

Es por ello que se justifica la investigación al presentar una nueva demostración del teorema de las proporciones de Tales aplicando sólo reglas vectoriales, permitiendo expandir el conocimiento matemático existente, con el fin de ofrecer una herramienta alternativa para la comprensión y aplicación práctica de dicho teorema.

CAPITULO II

Marco Teórico

2.1 Breve Historia de Tales de Mileto

Acerca de la vida y obra de Tales de Mileto no se sabe nada con seguridad ya que sus datos biográficos son una compilación de opiniones, hechos atribuidos a su persona, y citas con mayor o menor grado de verosimilitud, recogidas de diversos autores de épocas bastante posteriores.

Tales fue un filósofo y matemático griego que nació en el año 624 a.C., aproximadamente, en una antigua ciudad en la costa occidental de Asia Menor llamada Mileto; viajó en muchas oportunidades y durante algún tiempo vivió en Egipto, donde desarrollo actividades comerciales y, al parecer, aprendió significativamente acerca de la matemática egipcia. También aprendió geometría de los sacerdotes de Menfis, y astronomía, que posteriormente enseñaría con el nombre de astrosofía. De los babilonios pudo también haber obtenido conocimientos científicos debido a que en la época se comerciaba frecuentemente con Babilonia.

Se le considera el creador de la escuela Jónica donde “no se sabe con exactitud si Tales mismo enseñó a muchos otros, pero sí se sabe que los filósofos Anaximandro y Anaxímenes fueron discípulos suyos. Anaxágoras también perteneció a esta escuela, y se supone que Pitágoras mismo pudo haber aprendido matemáticas de Tales” (Kline, 1992, pag. 51). También se le ha atribuido el cálculo de las alturas de las pirámides, comparando sus sombras con la de un bastón de altura conocida; en el mismo instante, y mediante el mismo uso de los triángulos semejantes, se supone que calculó la distancia de un buque a la playa. También se le adjudican varios descubrimientos matemáticos registrados en los Elementos de Euclides los cuales son la definición I. 17 y las proposiciones I. 5, I. 15, I. 26 y III. 31.

Sosícrates afirma que Tales murió a la edad de noventa años. Apolodoro, en su Cronología, afirma que murió a la edad de setenta y ocho años. Actualmente se acepta que murió cerca del año 546 a.C. en Mileto.

2.2 Antecedentes de la Investigación

Muchas son las investigaciones que se han realizado en relación a demostraciones matemáticas y, a pesar de que puedan diferir en cuanto a métodos de demostración o proposiciones a probar, el eje de estos trabajos coincide con el hecho de presentar argumentos deductivos que aseguran la veracidad de una proposición matemática. De acuerdo a esto, se mencionan algunas investigaciones relacionadas con el tema referido a este trabajo.

Montilla (2007) realizó una investigación titulada *Dilataciones Unitarias de Semigrupos Biparamétricos de Contracciones* donde expresa que una técnica muy usada para estudiar operadores en espacios de Hilbert es la de representarlos como parte de un operador más simple, cuyo dominio es un espacio de Hilbert más grande. Esta técnica, esencialmente geométrica, es conocida como dilatación.

El propósito de este trabajo es presentar una nueva demostración del teorema de Słocinski. Para ello se utiliza el teorema de Ando, el teorema de extensión de Arveson y el teorema de representación de Stinespring, con los cuales se prueba que todo semigrupo de contracciones, no necesariamente fuertemente continuo, con parámetros en $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ posee una dilatación unitaria. A partir de este resultado se obtiene una nueva demostración del teorema de Słocinski, que establece que todo semigrupo de contracciones fuertemente continuo, con parámetro en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ posee una dilatación unitaria.

Goncalves (2009) realizó una investigación titulada *Representación de Funciones Definidas Positivas en Grupos Ordenados* donde considera núcleos definidos positivos, en especial los núcleos de Toeplitz en grupos y los núcleos de Toeplitz generalizados en grupos ordenados.

El principal aporte de este trabajo es proporcionar nuevas demostraciones de dos teoremas. El primero es el teorema de Herglotz para los núcleos de Toeplitz generalizados, para el cual se presenta un caso particular de la demostración del teorema de Herglotz en el grupo de los enteros. El segundo es el teorema de Weil para los núcleos de Toeplitz generalizados que son definidos en grupos ordenados, basándose en la demostración de Rudin del teorema de Weil para núcleos de Toeplitz en grupos.

2.3 Bases Teóricas

Podría definirse la matemática, de forma simple, como la ciencia que estudia las propiedades y relaciones entre entidades abstractas como números, figuras geométricas o símbolos, sin embargo, existen distintas opiniones en cuanto al propósito que desempeña. Por ejemplo, Halmos, P. (1988 p. 400) opina de la siguiente manera: “¿En qué consiste realmente la matemática? ¿Los axiomas? ¿Los teoremas? ¿Las demostraciones? ¿Las definiciones? ¿Las teorías? ¿Las formulas? ¿Los métodos? Las Matemáticas no existirían sin todos estos ingredientes, todos ellos esenciales. Es, sin embargo, sustentable que ninguno de ellos es el meollo de la disciplina, que la razón principal para la existencia del matemático es la resolución de problemas, y que por consiguiente, las Matemáticas realmente consisten en solucionar problemas”.

Dentro de este marco, el esfuerzo y el tiempo del matemático deben estar orientados a resolver problemas y a descubrir soluciones, sin subestimar la importancia del problema, la aplicabilidad del resultado o la capacidad intelectual. Desde un punto de vista psicológico, sólo nos planteamos aquello que somos capaces, o al menos creemos que somos capaces, de resolver. Polya, G. (1965, p. 7) sostiene que “un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo”.

Es por ello que el trabajo con demostraciones ha sido determinante en el quehacer matemático ya que implica un desafío a la capacidad intelectual de todo aquel que desea probar una proposición, no obstante, es sumamente gratificante cuando la solución tiene su origen, no sólo por el resultado, sino por la comprensión y el desarrollo de las potencialidades adquiridas. Bravo, Arteaga y Sol (2001) mencionan que el trabajo con demostraciones ayuda a desarrollar procesos como la abstracción, el análisis, la síntesis, la clasificación, la particularización, la comparación o la generalización. También destacan como ayuda a desarrollar formas de pensamiento extralógico

(pensamiento creativo, heurístico, especulativo, etc.) que se complementan con el pensamiento lógico deductivo en la resolución de problemas.

2.4 Bases Matemáticas

Vector en \mathbb{R}^2 .

Definición 1. Un vector en el plano es un par ordenado de números reales $\langle a, b \rangle$. Los números a y b son las componentes del vector $\langle a, b \rangle$.

Un par de puntos A y B se llama vector geométrico si uno de los puntos, por ejemplo A , es el punto inicial y el otro, B , es el punto extremo. Representamos un vector geométrico con una flecha de A hasta B , como se ve en la figura 1, y empleamos la notación \overrightarrow{AB} .

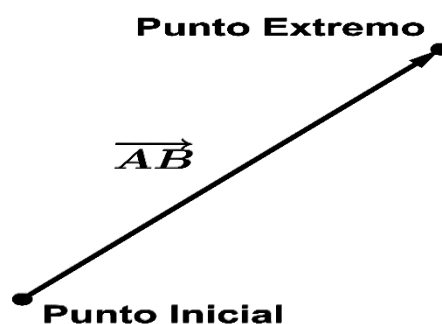


Figura 1

Módulo de un vector.

Definición 2. El módulo de un vector \vec{A} , denotado por $\|\vec{A}\|$, es la longitud de cualquiera de sus representaciones.

Vectores equipolentes.

Definición 3. Cuando dos vectores, \vec{A} y \vec{B} , son paralelos con el mismo sentido e igual módulo, se llaman equipolentes, es decir, son geoméricamente iguales.

Note que los vectores \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} y \vec{D} son equipolentes, como se observa en la figura 2.

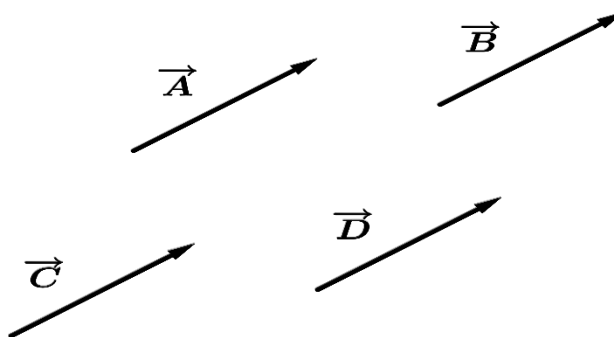


Figura 2

Suma de vectores.

Proposición 1. Si $\vec{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$, entonces

$$\vec{A} + \vec{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle.$$

Geoméricamente, para hallar la suma de dos vectores se usa el método del triángulo. Según esta regla, se construye el vector \vec{A} y sobre el extremo de \vec{A} se sitúa el vector \vec{B} para que sean consecutivos. Trazando un vector desde el origen de \vec{A} hasta el extremo de \vec{B} se obtiene $\vec{A} + \vec{B}$.

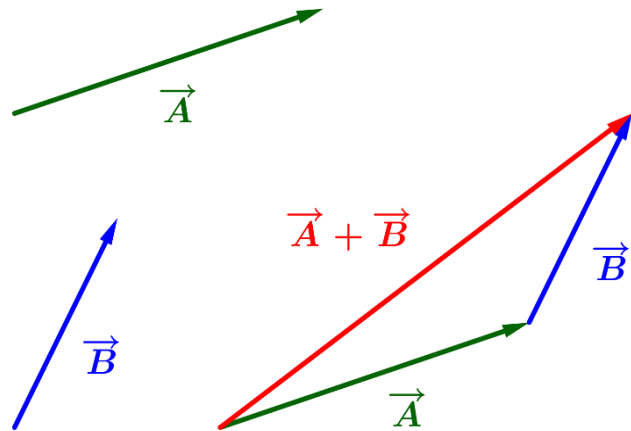


Figura 3

Resta de vectores.

Proposición 2. Si \vec{A} y \vec{B} son vectores en \mathbb{R}^2 , entonces

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}).$$

Geoméricamente, para hallar la sustracción de vectores se usa el método del triángulo. Para ello, se trasladan los vectores hasta que coincidan sus puntos de origen. Luego, el vector diferencia se obtiene uniendo el extremo del vector sustraendo con el extremo del vector minuendo.

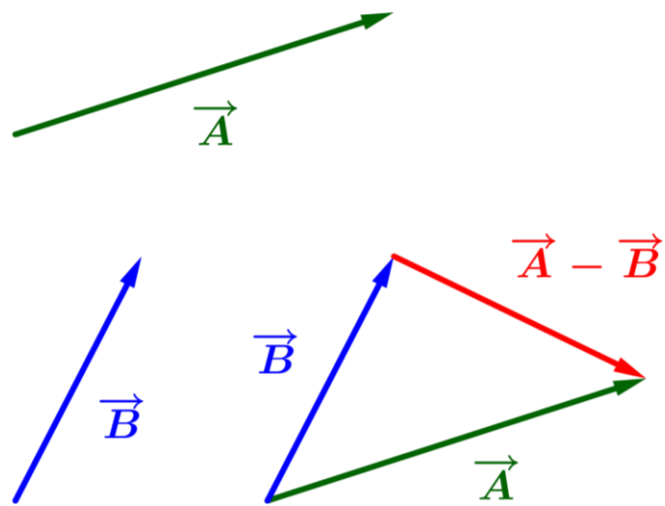


Figura 4

Producto punto.

Definición 4. Sean $\vec{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$ dos vectores de \mathbb{R}^2 , se llama producto punto, producto interno o producto escalar de \vec{A} y \vec{B} al número real

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Proposición 3. Si \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} son vectores en \mathbb{R}^2 , con $r \in \mathbb{R}$, entonces se cumple lo siguiente:

$$\text{i) } \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

$$\text{ii) } r(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (r\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (r\vec{B})$$

$$\text{iii) } \vec{A} \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\|^2$$

Angulo entre vectores.

El producto punto nos permite calcular el ángulo entre dos vectores.

Proposición 4. Sean \vec{A} y \vec{B} dos vectores en \mathbb{R}^2 y sea α , $0 \leq \alpha \leq \pi$, el ángulo que forman. Entonces

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \alpha$$

Vectores ortogonales o perpendiculares.

Definición 5. Dos vectores no nulos \vec{A} y \vec{B} son perpendiculares u ortogonales si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

Proposición 5. Si \vec{A} y \vec{B} son vectores de \mathbb{R}^2 , entonces se cumple lo siguiente:

i) El vector 0 es ortogonal a todo vector.

ii) \vec{A} y \vec{B} son perpendiculares si y sólo si $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$.

CAPITULO III

Marco Metodológico

3.1 Tipo de Investigación

El presente estudio está basado en una investigación de modalidad documental, establecido según el *Manual de Trabajos de Grado de Especialización de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador* (2006) como “el estudio de problemas con el propósito de ampliar y profundizar el conocimiento de su naturaleza, con apoyo, principalmente, en trabajos previos, información y datos divulgados por medios impresos, audiovisuales o electrónicos. La originalidad del estudio se refleja en el enfoque, criterios, conceptualizaciones, reflexiones, conclusiones, recomendaciones y, en general, en el pensamiento del autor”.

3.2 Diseño de la Investigación

Con respecto a lo anterior, el diseño de la investigación es de desarrollo teórico, establecido según el *Manual de Trabajos de Grado de Especialización de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador* (2006) como “la presentación de nuevas teorías, conceptualizaciones o modelos interpretativos originales del autor, a partir del análisis crítico de la información empírica y teorías existentes”.

Para llevar a cabo una investigación es necesario elaborar un plan, con la finalidad de cumplir con los objetivos trazados. Según Hurtado (2007, pag.143), el diseño de la investigación “se refiere a dónde y cuándo se recopila la información, así como la amplitud de la información a recopilar, de modo que se pueda dar respuesta a la pregunta de investigación de la forma más idónea posible”. De acuerdo a esto, se presentan las actividades que permiten el desarrollo de la investigación:

- Recolección de información y datos bibliográficos mediante visitas a distintas bibliotecas y mediante la consulta de textos procedentes de otras índoles.
- Desarrollo de la demostración del Teorema de Tales.

CAPITULO IV

Marco Analítico

Demostración del Teorema de las Proporciones de Tales

Sean L y L' dos rectas concurrentes en el punto A , y M , N y P tres rectas paralelas y B, B', C, C', D y D' los cortes entre todas estas rectas, entonces se tienen las siguientes proporciones:

$$i) \frac{\|\overrightarrow{BD}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\|\overrightarrow{B'D'}\|}{\|\overrightarrow{B'C'}\|}$$

$$ii) \frac{\|\overrightarrow{BC}\|}{\|\overrightarrow{CD}\|} = \frac{\|\overrightarrow{B'C'}\|}{\|\overrightarrow{C'D'}\|}$$

$$iii) \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{CC'}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{BB'}\|}$$

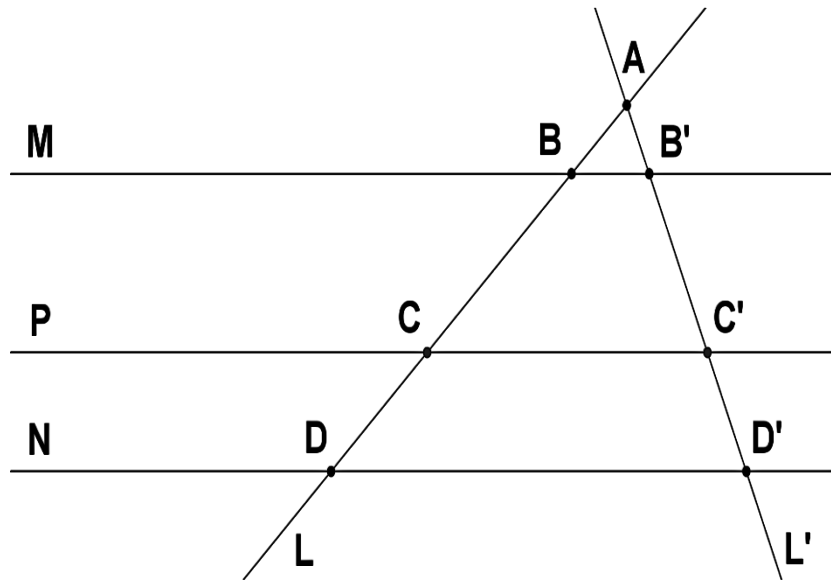


Figura 5

Demostración:

i) Sea \vec{w} un vector cuyo origen es el punto B y cuyo extremo se encuentra sobre la recta N , donde \vec{w} es ortogonal al vector \vec{u} .

Note que $\overrightarrow{BC} = \vec{w} + \vec{u}$ y α es el ángulo entre \overrightarrow{BC} y \vec{w} . (Ver figura 6)

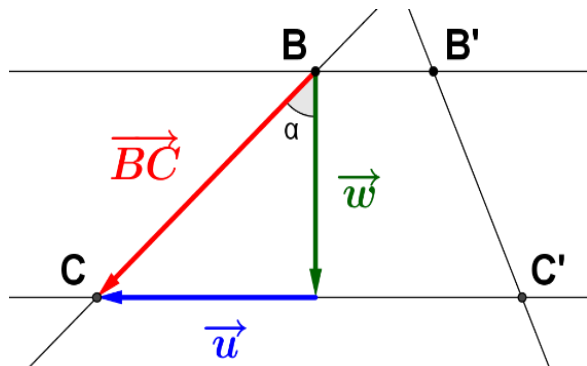


Figura 6

Sea $r\vec{w}$ un vector, con $r \in \mathbb{R}$, cuyo origen es el punto B y cuyo extremo se encuentra sobre la recta P, donde $r\vec{w}$ es ortogonal al vector \vec{v} .

Note que $\vec{BD} = r\vec{w} + \vec{v}$ y α es el ángulo entre \vec{BD} y \vec{w} . (Ver figura 7)

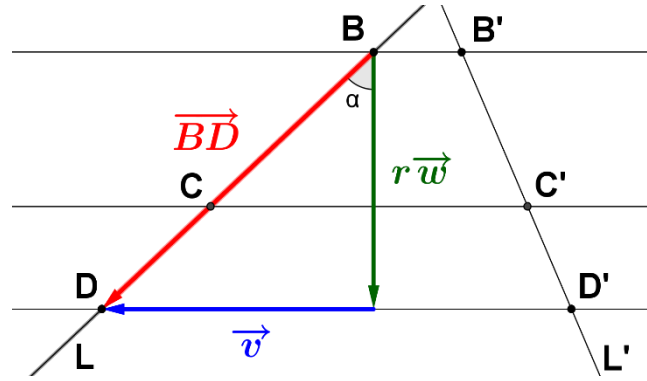


Figura 7

Luego, aplicando el producto punto se tiene lo siguiente:

$$\vec{BC} \cdot \vec{w} = \|\vec{BC}\| \|\vec{w}\| \cos \alpha$$

$$\|\vec{w}\| \cos \alpha = \frac{\vec{BC} \cdot \vec{w}}{\|\vec{BC}\|} \dots (1)$$

$$\vec{BD} \cdot \vec{w} = \|\vec{BD}\| \|\vec{w}\| \cos \alpha$$

$$\|\vec{w}\| \cos \alpha = \frac{\vec{BD} \cdot \vec{w}}{\|\vec{BD}\|} \dots (2)$$

Igualando (1) y (2) se obtiene:

$$\frac{\vec{BC} \cdot \vec{w}}{\|\vec{BC}\|} = \frac{\vec{BD} \cdot \vec{w}}{\|\vec{BD}\|}$$

$$\frac{(\vec{w} + \vec{u}) \cdot \vec{w}}{\|\vec{BC}\|} = \frac{(r\vec{w} + \vec{v}) \cdot \vec{w}}{\|\vec{BD}\|}$$

$$\frac{\vec{w} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{BC}\|} = \frac{r(\vec{w} \cdot \vec{w}) + \vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{BD}\|}$$

$$\frac{\|\vec{w}\|^2 + 0}{\|\vec{BC}\|} = \frac{r\|\vec{w}\|^2 + 0}{\|\vec{BD}\|}$$

$$r = \frac{\|\vec{BD}\|}{\|\vec{BC}\|} \dots (3)$$

Ahora, considere el vector \vec{w} con origen en el punto B' y extremo sobre la recta N , donde \vec{w} es ortogonal al vector \vec{u}' .

Note que $\overrightarrow{B'C'} = \vec{w} + \vec{u}'$ y β es el ángulo entre $\overrightarrow{B'C'}$ y \vec{w} . (Ver figura 8)

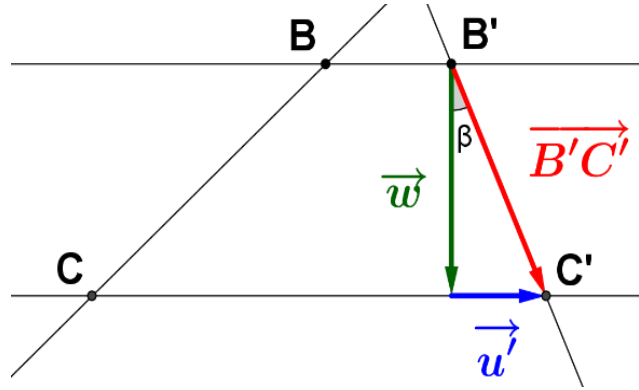


Figura 8

También, considere el vector $r\vec{w}$, con $r \in \mathbb{R}$, con origen en el punto B' y extremo sobre la recta P , donde $r\vec{w}$ es ortogonal al vector \vec{v}' .

Note que $\overrightarrow{B'D'} = r\vec{w} + \vec{v}'$ y β es el ángulo entre $\overrightarrow{B'D'}$ y $r\vec{w}$. (Ver figura 9)

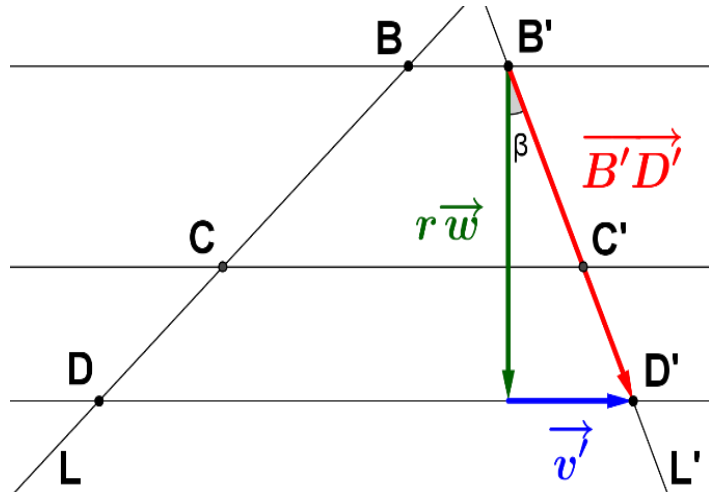


Figura 9

Luego, aplicando el producto punto se tiene lo siguiente:

$$\overrightarrow{B'C'} \cdot \vec{w} = \|\overrightarrow{B'C'}\| \|\vec{w}\| \cos \beta$$

$$\|\vec{w}\| \cos \beta = \frac{\overrightarrow{B'C'} \cdot \vec{w}}{\|\overrightarrow{B'C'}\|} \dots (4)$$

$$\overrightarrow{B'D'} \cdot \vec{w} = \|\overrightarrow{B'D'}\| \|\vec{w}\| \cos \beta$$

$$\|\vec{w}\| \cos \beta = \frac{\overrightarrow{B'D'} \cdot \vec{w}}{\|\overrightarrow{B'D'}\|} \dots (5)$$

Igualando (4) y (5) se obtiene:

$$\frac{\overrightarrow{B'C'} \cdot \vec{w}}{\|\overrightarrow{B'C'}\|} = \frac{\overrightarrow{B'D'} \cdot \vec{w}}{\|\overrightarrow{B'D'}\|}$$

$$\frac{(\vec{w} + \vec{u}') \cdot \vec{w}}{\|\overrightarrow{B'C'}\|} = \frac{(r\vec{w} + \vec{v}') \cdot \vec{w}}{\|\overrightarrow{B'D'}\|}$$

$$\frac{\vec{w} \cdot \vec{w} + \vec{u}' \cdot \vec{w}}{\|\overrightarrow{B'C'}\|} = \frac{r(\vec{w} \cdot \vec{w}) + \vec{v}' \cdot \vec{w}}{\|\overrightarrow{B'D'}\|}$$

$$\frac{\|\vec{w}\|^2 + 0}{\|\overrightarrow{B'C'}\|} = \frac{r\|\vec{w}\|^2 + 0}{\|\overrightarrow{B'D'}\|}$$

$$r = \frac{\|\overrightarrow{B'D'}\|}{\|\overrightarrow{B'C'}\|} \quad \dots \quad (6)$$

Igualando (3) y (6) se tiene:

$$\frac{\|\overrightarrow{BD}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\|\overrightarrow{B'D'}\|}{\|\overrightarrow{B'C'}\|}$$

ii) Sea $\vec{u} = \overrightarrow{BC} - \vec{w}$. (Ver figura 6)

Aplicando el producto punto se tiene lo siguiente:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$$

$$(\overrightarrow{BC} - \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \vec{w} - \|\vec{w}\|^2 = 0$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| \|\vec{w}\| \cos \alpha = \|\vec{w}\|^2$$

$$\cos \alpha = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} \quad \dots \quad (7)$$

Sea $s\vec{w}$ un vector, con $s \in \mathbb{R}$, cuyo origen es el punto C y cuyo extremo se encuentra sobre la recta P, donde $s\vec{w}$ es ortogonal al vector \vec{q} .

Note que $\vec{q} = \overrightarrow{CD} - s\vec{w}$ y α es el ángulo entre \overrightarrow{CD} y \vec{w} .
(Ver figura 10)

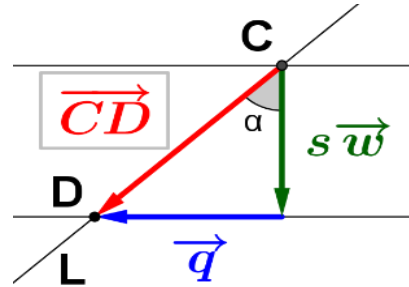


Figura 10

Aplicando el producto punto se tiene lo siguiente:

$$\vec{q} \cdot \vec{w} = 0$$

$$(\overrightarrow{CD} - s\vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \vec{w} - s\|\vec{w}\|^2 = 0$$

$$\|\overrightarrow{CD}\| \|\vec{w}\| \cos \alpha = s\|\vec{w}\|^2$$

$$\cos \alpha = \frac{s\|\vec{w}\|}{\|\overrightarrow{CD}\|} \quad \dots \quad (8)$$

Igualando (7) y (8) se obtiene:

$$\frac{\|\vec{w}\|}{\|\overrightarrow{BC'}\|} = \frac{s\|\vec{w}\|}{\|\overrightarrow{CD}\|}$$

$$s = \frac{\|\overrightarrow{CD}\|}{\|\overrightarrow{BC'}\|} \quad \dots \quad (9)$$

Sea $\vec{u}' = \overrightarrow{B'C'} - \vec{w}$. (Ver figura 8)

Aplicando el producto punto se tiene lo siguiente:

$$\vec{u}' \cdot \vec{w} = 0$$

$$(\overrightarrow{B'C'} - \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$$

$$\overrightarrow{B'C'} \cdot \vec{w} - \|\vec{w}\|^2 = 0$$

$$\|\overrightarrow{B'C'}\| \|\vec{w}\| \cos \beta = \|\vec{w}\|^2$$

$$\cos \beta = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\overrightarrow{B'C'}\|} \dots (10)$$

Considere el vector $s\vec{w}$, donde $s \in \mathbb{R}$, con origen en el punto C' y extremo sobre la recta P , donde $s\vec{w}$ es ortogonal al vector \vec{q}' .

Note que $\vec{q}' = \overrightarrow{C'D'} - s\vec{w}$ y β es el ángulo entre $\overrightarrow{C'D'}$ y \vec{w} . (Ver figura 11)

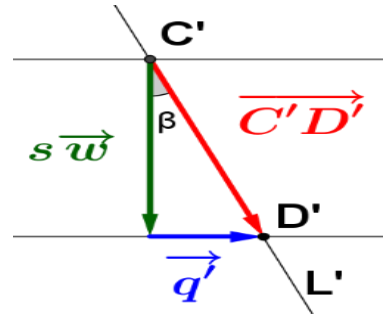


Figura 11

Aplicando el producto punto se tiene lo siguiente:

$$\vec{q}' \cdot \vec{w} = 0$$

$$(\overrightarrow{C'D'} - s\vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$$

$$\overrightarrow{C'D'} \cdot \vec{w} - s\|\vec{w}\|^2 = 0$$

$$\|\overrightarrow{C'D'}\| \|\vec{w}\| \cos \beta = s\|\vec{w}\|^2$$

$$\cos \beta = \frac{s\|\vec{w}\|}{\|\overrightarrow{C'D'}\|} \dots (11)$$

Igualando (10) y (11) se obtiene:

$$\frac{\|\vec{w}\|}{\|\overrightarrow{B'C'}\|} = \frac{s\|\vec{w}\|}{\|\overrightarrow{C'D'}\|}$$

$$s = \frac{\|\overrightarrow{C'D'}\|}{\|\overrightarrow{B'C'}\|} \dots (12)$$

Igualando (9) y (12) se tiene:

$$\frac{\|\overrightarrow{CD}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\|\overrightarrow{C'D'}\|}{\|\overrightarrow{B'C'}\|}$$

$$\frac{\|\overrightarrow{BC}\|}{\|\overrightarrow{CD}\|} = \frac{\|\overrightarrow{B'C'}\|}{\|\overrightarrow{C'D'}\|}$$

iii) Aplicando el producto punto se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BB'} &= \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{BB'}\| \cos \gamma \\ \|\overrightarrow{BB'}\| \cos \gamma &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BB'}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BB'} &= \|\overrightarrow{AC}\| \|\overrightarrow{BB'}\| \cos \gamma \\ \|\overrightarrow{BB'}\| \cos \gamma &= \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BB'}}{\|\overrightarrow{AC}\|} \dots (14) \end{aligned}$$

Igualando (13) y (14) se obtiene:

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BB'}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BB'}}{\|\overrightarrow{AC}\|} \dots (15)$$

Sea $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}$ y $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}$. (Ver figuras 12 y 13 respectivamente)

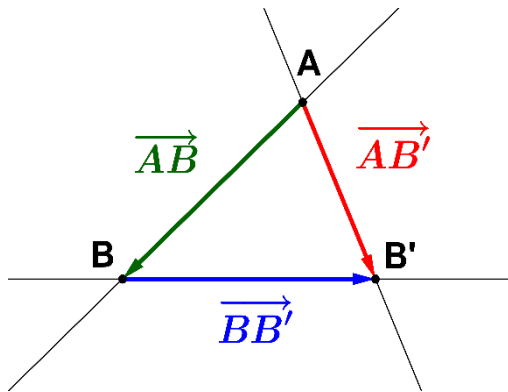


Figura 12

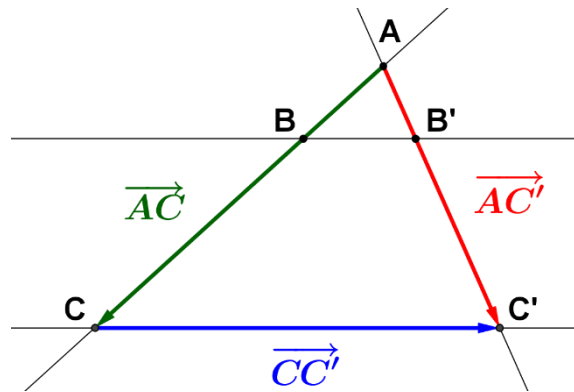


Figura 13

Aplicando el producto punto se tiene lo siguiente:

$$\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BB'} = \|\overrightarrow{AB'}\| \|\overrightarrow{BB'}\| \cos \theta$$

$$\|\overrightarrow{BB'}\| \cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BB'}}{\|\overrightarrow{AB'}\|} \dots (16)$$

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BB'} = \|\overrightarrow{AC'}\| \|\overrightarrow{BB'}\| \cos \theta$$

$$\|\overrightarrow{BB'}\| \cos \theta = \frac{\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BB'}}{\|\overrightarrow{AC'}\|} \dots (17)$$

Igualando (16) y (17) se obtiene:

$$\frac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BB'}}{\|\overrightarrow{AB'}\|} = \frac{\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BB'}}{\|\overrightarrow{AC'}\|}$$

$$\frac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BB'}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BB'}}{\|\overrightarrow{AC}\|} \dots (\text{Por } i)$$

$$\frac{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) \cdot \overrightarrow{BB'}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}) \cdot \overrightarrow{BB'}}{\|\overrightarrow{AC}\|}$$

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BB'} + \|\overrightarrow{BB'}\|^2}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BB'} + \|\overrightarrow{CC'}\| \|\overrightarrow{BB'}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}$$

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BB'}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{\|\overrightarrow{BB'}\|^2}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BB'}}{\|\overrightarrow{AC}\|} + \frac{\|\overrightarrow{CC'}\| \|\overrightarrow{BB'}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}$$

$$\frac{\|\overrightarrow{BB'}\|^2}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{CC'}\| \|\overrightarrow{BB'}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} \dots (\text{Por } 15)$$

$$\frac{\|\overrightarrow{BB'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{CC'}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}$$

$$\frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{BB'}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{CC'}\|}$$

■

CAPITULO V

Conclusiones

Como conclusión global, se puede señalar que el objetivo propuesto en la investigación fue alcanzado.

Esta investigación ha pretendido poner algo de luz en el estudio de las demostraciones matemáticas. A pesar de la importancia que se le da a la demostración, se debe ser consciente en que puede suponer un obstáculo difícil de superar a todo aquel que estudia matemáticas, sobre todo si no se ha tratado con la progresividad que amerita.

Un ejemplo notable es el último teorema de Fermat que dice que si tomamos un número natural $n > 2$, no existen tres enteros X , Y y Z , no nulos que verifiquen que $X^n + Y^n = Z^n$. Desde 1637, en que Fermat conjeturó este teorema (aunque él asegura que también encontró una demostración) hasta 1995 que fue cuando Andrew Wiles lo demostró, este resultado fue considerado como uno de los retos matemáticos con mayor importancia y durante parte del siglo XX fue considerado, además, como aquel ejemplo de resultado que se escapa del razonamiento lógico.

Es por ello, que al introducir la demostración y sus métodos en la rutina de estudio, lo ideal sería buscar una situación similar a la que tuvieron los griegos en donde se despierte una necesidad interna o inquietud por conocer una verdad. Pero, ¿qué situación podría ser adecuada para tal objetivo? Las situaciones para iniciar las demostraciones con cierto rigor podrían ser varias, incluso la misma que utilizaron los griegos con respecto a la demostración de la irracionalidad (desde el punto de vista aritmético) de $\sqrt{2}$.

De esta manera, tanto los retos que han supuesto la realización de diferentes demostraciones o la resolución de algunos problemas han sido y, de hecho, siguen siendo la mayor fuente de inspiración para la obtención de nuevos conocimientos y técnicas matemáticas.

REFERENCIAS

Apostol, T. (1984). Calculus, I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Editorial Reverté, S.A. España.

Bravo, M., Arteaga, E., Sol, J. (2001). El valor formativo de las demostraciones. En Xixím, revista electrónica de didáctica de las matemáticas, 3.

Goncalves, B. (2009). Representación de funciones definidas positivas en grupos ordenados. Trabajo de Maestría. Universidad Central de Venezuela. Caracas.

Halmos, P. (1988). I want to be a Mathematician. An Automathography in Three Parts. Mathematical Association of America. Washington.

Kline, M. (1992). El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I. Alianza Editorial. Madrid.

Montilla, M. (2007). Dilataciones unitarias de semigrupos biparamétricos de contracciones. Trabajo de Maestría. Universidad Central de Venezuela. Caracas.

Navarro, E. (1987). Matemática para cuarto año. Libro de teoría. Distribuidora Zacarías. Venezuela.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas. México.

Sáenz, J. (2013). Cálculo vectorial. Editorial Hipotenusa. Venezuela.

Sánchez, E. (2014). Iniciación a la demostración matemática en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria y su incidencia en la resolución de problemas. Un ejemplo de aplicación en la Comunidad de Madrid. Tesis de Doctorado. Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid.

Solow, D. (1993). Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas. Editorial Limusa, S.A. México.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador. (2006). Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales. Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Venezuela.