

El Problema de Albert en Dimensiones Bajas

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magister en Ciencias con mención en Matemáticas.
Facultad de Ciencias

por

Pedro Pablo Julca Cordova
Noviembre del 2003

Director de Tesis: Dr. Ivan Correa Sierra

A mi madre Luisa Marina

y hermanos

Jose Santos, Jhony, Luis Alberto y Bertila.

Resumen

En esta tesis estudiamos el problema de Albert sobre la solubilidad de nilálgebras conmutativas y asociativas en las potencias de dimensión finita. Específicamente, estudiamos el problema en dimensión siete, dimensión ocho y nilíndice cuatro y algunos casos de dimensión nueve y nilíndice cuatro. Para la demostración de estos resultados obtuvimos previamente algunos resultados sobre operadores nilpotentes sobre espacios vectoriales de dimensión ≤ 2 y con esto obtuvimos algunas condiciones suficientes para la solubilidad de las álgebra en algunos casos.

Abstract

In this thesis we study the Albert's Problem on solvability of commutative finite dimensional power associative nilalgebras. Specifically, we study the problem in dimension seven, dimension eighth and nilindex four and some cases of dimension nine and nilindex four. For the prove of our results we obtain previously some results on nilpotent operators on linear space of dimension ≤ 2 . With this, we obtain some sufficient conditions for the solvability of these algeras in some cases.

Indice

Resumen	44
Abstract	34
Introduccion	33
Notacion	90
Capitulo 1	33
Resultados Preliminares y Definiciones	33
Teoremas y Resultados Conocidos	33
Primeros Resultados de la Tesis	33
Capitulo 2	33
Problema de Albert en Dimension Siete	33
Nilindice 4	33
Capitulo 3	33
Problema de Albert en Dimension Ocho	33
Capitulo 4	33
Avances en Dimension Nueve	33
Conclusiones Finales	33
Bibliografia	33

Introduccion

En 1843 Hamilton consiguio construir una estructura algebraica que satisfacía todos los axiomas de cuerpo excepto la conmutatividad. Este sistema de numeros llamados Cuaterniones fue el primer ejemplo de cuerpo no conmutativo”. Es así que en 1847, se estaba forjando una teoria matematica que merecia ser estudiada con mas atencion, el de las os o algebras no conmutativas. Dos meses despues de descubierto los Cuaterniones, Graves presento los Octonios, definiendo una multiplicacion en R^8 . Este sistema de numeros fue descubierto en forma independiente por Cayley en 1845. Por esta razon son llamados tambien los *numeros de Cayley*. Esta estructura tambien es no conmutativa pero ademas no satisface la asociatividad. Así comienza una nueva teoria, la de las *algebras no asociativas*.

A partir de allí muchas contribuciones en esta area de la matematica fueron dadas, por ejemplo, Grassmann en 1844, Clifford en 1878, Sylvester en 1884, Wedderburn en 1907, Artin en 1927, Jacobson en 1945 entre otros. Hacemos notar que la historia de la teoria de las algebras asociativas y no asociativas estan entrelazadas, pues hay una influencia reciproca. A partir de 1930, la investigacion de las algebras no asociativas avanza velozmente en muchas direcciones, existen muchos problemas que fueron estudiados en forma exitosa en la teoria de las algebras no asociativas por varios investigadores. Por ejemplo, estas aparecen de manera natural en algunos modelos sobre el comportamiento reproductivo de algunas poblaciones, lo que fue ampliamente estudiado por Lyubich en su libro *Mathematical Structures in Population Genetics*[], y tambien en el estudio del modelamiento del comportamiento de los llamados observables en mecanica cuantica. Esta interpretacion llevo

a la construcción de las llamadas álgebras de Jordan, en el trabajo de Jordan, von Neumann y Wigner en 1934]. A pesar (y afortunadamente!) de los esfuerzos de los hombres de ciencia, existen muchos problemas abiertos en álgebras no asociativas. Por ejemplo en 1948, Albert [1] conjeturó que cualquier nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión finita es nilpotente. Suttles [2] construye en 1972 un siguiente contraejemplo. Sin embargo, esta álgebra construida por Suttles, si bien no es nilpotente, satisface una condición un poco más débil, a saber la solubilidad. A raíz de esto, se formuló el siguiente problema, el cual aún está abierto, conocido como el *Problema de Albert*:

Es toda nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión finita soluble?

Este problema se conoce como el problema de Albert. Los estudios acerca del problema han sido satisfactorios solo para algunos tipos especiales de álgebras, pero la respuesta global aún representa un problema abierto para los matemáticos. En el intento de solucionar el problema de Albert, se tienen como consecuencia muchos resultados interesantes que aportan de manera particular la solución de dicho problema. En esta dirección tenemos el resultado de Gerstenhaber y Myung [3], donde probaron que toda nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión 4 sobre un cuerpo de característica distinta de 2 es nilpotente y de aquí soluble. Ellos además determinaron las clases de isomorfismos de tales álgebras. Correa y Suazo [4] obtuvieron una generalización del resultado de Gerstenhaber y Myung, es decir, probaron que toda nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de nilíndice n con dimensión n son nilpotentes de índice n . De aquí tenemos que estas álgebras son también solubles. Estos resultados requieren que la característica del cuerpo sea distinta de 2,3. El caso no conmutativo fue considerado por Correa y Hentzel [5]. Ellos probaron que si A es una nilálgebra no conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión n con nilíndice n sobre un cuerpo de característica distinta de 2,3 son solubles y A^2 es nilpotente. Correa y Peresi [6] probaron que toda nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión 5 son solubles de índice menor o igual que 3. Además probaron que

una nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de nilíndice 3 con dimensión 5 es nilpotente de índice menor o igual que 4. Estos resultados requieren que la característica del cuerpo sea distinta de 2,3. Correa, Hentzel y Labra [1] y Correa, Hentzel y Peresi [2] trabajaron en el caso que el álgebra conmutativa no asociativa sin asociatividad de las potencias y probaron que estas álgebras hasta la dimensión cuatro son nilpotentes. Recientemente J.C. Gutierrez en un trabajo aun no publicado [3], probó que toda nilálgebra conmutativa de dimensión menor o igual a seis es soluble, quitando la hipótesis de asociatividad en las potencias. Todos estos resultados requieren ciertas restricciones mínimas sobre la característica del cuerpo subyacente.

A través de los trabajos existentes, reacionados al problema de Albert, se puede inferir una fuerte e importante relación entre la nilpotencia o solubilidad de las álgebras y las nilpotencias de ciertos operadores lineales llamados operadores multiplicación. Un estudio de la nilpotencia de estos operadores fue hecho por M. Gerstenhaber en una serie de artículos llamados "On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices", I, II, III respectivamente entre los años 19XX y 19XX (ver también Correa-Hentzel-Labra [4]). Gerstenhaber en [5] prueba que bajo ciertas restricciones mínimas a la característica del cuerpo, toda álgebra conmutativa de dimensión finita que satisface una ecuación del tipo $((...((xx)x)...)x)x = 0$ satisface una ecuación de la forma $((...((yx)x)...)x)x = 0$.

El problema original de esta tesis consistió en estudiar el problema de Albert en dimensión siete. Hemos logrado resolver este problema y además solucionar parcialmente el caso de dimensión ocho. Aplicamos un método que consiste en estudiar las posibles bases de las álgebras usando representaciones matriciales canónicas de Jordan de los operadores multiplicación para ciertos elementos del álgebra. Este método se prueba que es extendible, lo que puede llevar eventualmente a dimensiones nueve, o un poco mayores.

En el Capítulo 1 enunciamos algunos resultados conocidos y que serán usados en los siguientes capítulos. Además probamos algunos resultados de álgebra lineal que serán fundamentales en las técnicas usadas en las demostraciones de los capítulos 2, 3, 4. Algunos de estos

resultados fueron obtenidos en colaboracion con los profesores Correa, Hentzel y Peresi y se encuentran en el articulo [1].

En el capitulo 2 resolvemos el problema de Albert para dimension 7. Resolvemos este caso para algebras sobre un cuerpo de caracteristica distinta de 2, 3, 5. Los metodos utilizados son una extension con importantes modificaciones de los utilizados en la solucion del problema de Albert para dimension seis en el articulo [1].

En el capitulo 3 resolvemos el problema de Albert para dimension ocho y nilindice cuatro.abe agregar que en este capitulo los metodos sufren una pequena modificacion al utilizar un reciente resultado sobre solubilidad obtenido por Correa y Hentzel en [1]. Como consecuencia de este resultado reducimos la cantidad de casos a estudiar. Estos resultados fueron anunciados en forma independiente y paralela por A. Suazo en Octubre del 2003 en el XXX Encuentro de Matematica de la SOMACHI (ver [1]). Sin embargo el metodo utilizado por A. Suazo no permite una extencion a casos de dimensiones mayores que ocho. Esto debido a que las identidades utilizadas en dimension menor que nueve no se cumplen para diemnsiones mayores, lo cual el autor prueba con un ejemplo. Sin embargo, usando nuestra tecnica es posible probar que aquellas algebras de dimension nueve para las cuales estas identidades no se cumplen, tambien son solubles. Esto forma parte de el capitulo cuatro de esta tesis, donde ademas mostramos algunos ideas sobre las que continuaremos trabajando.

Deseo agradecer al asesor de esta tesis, el profesor Dr. Ivan Correa por la valiosa guia que me dio, sin la cual no hubiera prosperado este trabajo. Tambien agradezco al director de Pos grado del Departamento de Matematicas de la Facultade de Ciencias, Profesor Dr. Rolando Pomareda, primeramente por la confianza que tuvo en mi persona al ayudarme en la aceptacion en a Escuela de Posgrado y, segundo, por su sugerencia de tomar en Enero del 2003 el curso "Algebras no asociativas; Nilpotencia y Solubilidad", dictado por el profesor Ivan Correa, en donde comence a estudiar las algebra no asociativas y me motivo a seguir en esta area de la matematica. Pretendo seguir en esta lineas para futuros proyectos matematicos. Agradezco tambien al Profesor Dr. Sergei Trofimchuck, por la solicitud que tuvo al facilitarme el uso

de su computador para redactar esta tesis, ya que sin su apoyo de este medio el trabajo se habria retardado mas de lo deseado. Agradezco tambien a mis amigos Anibal, Fernando y Esperanza por su edificante amistad.

Notacion y Simbologia

L_x

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ representa....

Dado un operador lineal nilpotente sobre un espacio vectorial V de dimension n sobre un cuerpo K , representaremos por $J(i_1, \dots, i_s)$ la matriz que representa a T en su forma canonica de Jordan, la cual se compone de s bloques de Jordan J_1, \dots, J_s donde cada matriz J_i es de orden i_i , $i_s \leq \dots \leq i_1$ y $\sum_{k=1}^s i_k = n$.

A^n

$A^{(n)}$

Capítulo 1

Definiciones y Resultados Preliminares

En este capítulo presentamos las definiciones básicas, resultados conocidos y los primeros resultados de la tesis que servirán como herramienta para solucionar nuestro problema principal.

1.1 Definiciones Básicas.

Una álgebra sobre un cuerpo K es espacio vectorial sobre K dotado de una operación multiplicación, es decir una aplicación $\cdot : A \times A \rightarrow A$, $(a, b) \mapsto ab$ que satisface las siguientes relaciones:

- a) $(a + b)c = ac + bc$, para todo $a, b, c \in A$.
- b) $a(b + c) = ab + ac$, para todo $a, b, c \in A$.
- c) $(\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b)$, para todo $a, b \in A$, para todo $\alpha \in K$.

Si el producto satisface $ab = ba$, para todo $a, b \in A$ diremos que A es *conmutativa*. Si el producto satisface $(ab)c = a(bc)$, para todo $a, b, c \in A$, entonces diremos que A es *asociativa*. En caso contrario diremos que A es *no asociativa*.

Ejemplos:

- 1) $K[x]$ el anillo de polinomios sobre un cuerpo K es una álgebra sobre

K con el producto usual.

2) Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K entonces el conjunto $End_K(V)$ es una álgebra asociativa y no conmutativa con el producto definido por la composición de funciones.

3) Un cuerpo K es una álgebra asociativa y conmutativa sobre K .

4) El espacio vectorial $M_n(K)$ de las matrices $n \times n$ con coeficientes en K es una álgebra sobre K con el producto usual de matrices.

Sean A y B álgebras sobre un cuerpo K . Una transformación lineal $\psi : A \rightarrow B$, se dice que es un *homomorfismo de álgebras* si $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$, para todo $x, y \in A$. El kernel de ψ es el conjunto

$$Ker(\psi) = \{a \in A \mid \psi(a) = 0\}.$$

Si ψ es una biyección, diremos que ψ es un *isomorfismo de álgebras*. Se dice que dos álgebras A y B son isomorfas si existe un isomorfismo de A en B . Si A es isomorfa a B escribiremos $A \cong B$. Un elemento $a \neq 0$ de una álgebra A es denominado divisor de cero, si existe un $b \in A$, $b \neq 0$ tal que $ab = 0$.

Un *ideal a la izquierda* (*a la derecha*) de una álgebra A es un subespacio I de A tal que: $aI \subseteq I$, ($Ia \subseteq I$), para todo $a \in A$. Cuando I es a la vez un ideal a la izquierda y derecha, diremos que I es un *ideal de* A .

Sea A una álgebra sobre un cuerpo K e I un ideal de A . Definimos en A la siguiente relación de equivalencia: $a \equiv b$ si $a - b \in I$. Una clase de equivalencia determinada por a es

$$\bar{a} = a + I = \{a + b \in A \mid a, b \in I\}.$$

El álgebra cociente de A por I es el conjunto

$$A/I = \{\bar{a} \mid a \in A\}$$

unido a las operaciones $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$, $\alpha \bar{a} = \overline{\alpha a}$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$, $\alpha \in K, a, b \in A$. La aplicación $\pi : A \rightarrow A/I$ definido por $\pi(a) = \bar{a}$ es un homomorfismo denominado homomorfismo canónico.

El álgebra se llama *asociativa en las potencias* si cada uno de sus elementos genera una subálgebra asociativa. Esta condición es equivalente a que $a^i \cdot a^j = a^{i+j}$, para todo $a \in A$. Sea A una álgebra asociativa en las potencias. Se dice que un elemento $a \in A$ es nilpotente si existe un entero positivo n tal que $a^n = 0$. Cuando todos los elementos de A (resp. de un ideal I de A) son nilpotentes se dice que A es una nilálgebra.

Sea A una álgebra arbitraria. Para cada elemento $a \in A$ podemos definir las funciones lineales $R_a, L_a : A \rightarrow A$ definidas por $R_a(x) = xa$, y $L_a(x) = ax$ respectivamente. Estas funciones son llamadas multiplicación a la derecha por a y a la izquierda por a respectivamente.

En el caso de que el álgebra sea conmutativa entonces $L_a = R_a$ usaremos L_a para escribir esta función.

We denote by $M(A)$ the algebra generated by $\{L_x \mid x \in A\}$. We call the associative algebra $M(A)$ the *multiplication algebra* of A .

Si S es un subconjunto no vacío de A entonces denotaremos por S^* la álgebra generada por el conjunto $\{L_s, R_s \in M(A) \mid s \in S\}$.

1.2 Identidades Polinomiales y Linealización.

Sea A una álgebra sobre un cuerpo K . Una *identidad polinomial* en A es un polinomio

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

tal que $p(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, para todo $a_i \in A$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Si A es una álgebra que satisface una o más identidades polinomiales diremos que A es una *PI-álgebra*.

Ejemplos

- 1) Una álgebra conmutativa es una PI-Álgebra que satisface la identidad polinomial $xy - yx = 0$.
- 2) Una álgebra asociativa es una PI-Álgebra que satisface la identidad polinomial $(xy)z - x(yz) = 0$.

3) Una algebra de Jordan es una algebra conmutativa que satisface la identidad $(x^2y)x = x^2(yx)$, llamada *identidad de Jordan*.

4) Una algebra de Lie es una algebra que satisface las identidades $x^2 = 0$ y $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$. Esta ultima identidad es llamada *identidad de Jacobi*.

5) Una algebra alternativa es una algebra que satisface las identidades $x^2y = x(xy)$ y $yx^2 = (yx)x$.

El proceso de linealizacion es una de las herramientas mas importantes en el estudio de las identidades en una álgebra. Sea $f(x_1, \dots, x_n)$ una identidad y sea y una indeterminada diferente de las x_i . Si sustituimos x_i por $x_i + y$, obtenemos que

$$f(x_1, \dots, x_i + y, \dots, x_n) = \sum_{k \geq 0} f_{ik}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y),$$

donde f_{ik} es la suma de todos los terminos que tengan grado k en la indeterminada y . Definimos el operador $\delta_i^k(y)$ asignando sobre la identidad f como

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \delta_i^k(y) = f_{ik}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y).$$

Observamos que $\delta_i^0 = I$. Si $k > 0$, el operador δ_i^k hace sustituir cada monomio por la suma de los monomios que pueden ser obtenidos de la sustitucion k de los x_i por y . Observamos, ademas de esto, que este operador satisface

$$(\alpha f + \beta g) \delta_i^k(y) = \alpha [f \delta_i^k(y)] + \beta [g \delta_i^k(y)],$$

para todo par de identidades f, g e $\alpha, \beta \in F$.

Si f es una identidad, y es una indeterminada diferente de x_1, x_2, \dots, x_n , $k \geq 1$, y el grado de $x_i \geq k$ en algun monomio de f , entonces $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \delta_i^k(y)$ se dice una *linealizacion simple de f* . Una identidad que puede ser obtenida de f como una secuencia de una o mas linealizaciones simples de f se dice una *linealizacion de f* . Una linealizacion en la cada monomio no aparecen variables con grado > 1 se dice una *linealizacion completa*.

Una propiedad mas importante del proceso de linealizacion es que dada una identidad, cada linealizacion es una nueva identidad.

Cuando hablemos de linealizaciones estamos siempre asumiendo que el cuerpo tiene un número suficiente de elementos.

Si en el polinomio $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ existe x_i con grado mayor que 1, en algún monomio de $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, entonces si intercambiamos x_i por y en cada monomio de $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, se dice que es una linealización simple de $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con respecto a x_i . Si seguimos con este proceso con todos los x_i hasta que cada x_i tenga grado no mayor que 1, se dice que es una linealización completa de $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Cada una de las linealizaciones de una identidad polinomial es también una identidad polinomial.

Ejemplos:

1) Sea el polinomio $p(x, y) = ((x^2)y)x$, su proceso de linealización sería:
 $((xz)y)x + ((zx)y)x + ((x^2)y)z$. (Primera linealización)
 $((xz)y)t + ((tz)y)x + ((zt)y)x + ((zx)y)t + ((xt)y)z + ((tx)y)z$. (Segunda linealización)

2) Linealizemos completamente la identidad polinomial $p(x) = x^3$, en una álgebra conmutativa A . Luego tenemos que $a^3 = 0$, para todo $a \in A$. La primera linealización de x^3 es:

$$a^2b + 2(ab)a = 0,$$

para todo $a, b \in A$. La segunda linealización de x^3 es:

$$2(ac)b + 2(cb)a + 2(ab)c = 0,$$

para todo $a, b, c \in A$. Como el grado en cada a, b, c no es mayor que 1, luego la segunda linealización de x^3 es una linealización completa.

1.3 Solubilidad y Nilpotencia de Algebras

Sea A una algebra no asociativa. Definimos inductivamente las siguientes potencias de A : $A^1 = A$, $A^n = \sum_{k=1}^{n-1} A^k A^{n-k}$ para $n > 1$. $A^{(0)} = A$, $A^{(n)} = (A^{(n-1)})^2$ para $n > 1$. Diremos que A es nilpotente si existe un entero positivo k tal que $A^k = 0$. Cuando A es nilpotente, el menor entero positivo k tal que $A^k = 0$ se llama el indice de nilpotencia de A .

Diremos que A es soluble si existe un entero positivo k tal que $A^{(k)} = 0$. Cuando A es soluble, el menor entero positivo k tal que $A^{(k)} = 0$ se llama el indice de solubilidad de A .

Es claro que si A es nilpotente entonces A es soluble. Ademas, si una algebra es soluble no necesariamente es nilpotente, independientemente de la dimension del álgebra

Ejemplos

1) (Suttles[25]) Sea A una nilalgebra conmutativa con base e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 y productos no nulos definidos por:

$$e_1e_2 = e_2e_4 = -e_1e_5 = e_3, e_1e_3 = e_4, e_2e_3 = e_5.$$

Esta algebra A es una nilalgebra de nilindice 4 asociativa en las potencias que es soluble, pero no es nilpotente, puesto que $A^3 = A^2$ y $A^2A^2 = 0$.

2) (Zhevlakov[26]) Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m, \dots\}$ un conjunto numerable de simbolos x_i . Una palabra $u = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_s}$ es llamada *regular* si $s \geq 1$ y $i_1 < i_2 < \dots < i_s$. Sea P el conjunto de las palabras regulares y $N = \langle P \rangle_K$ el espacio lineal generado por P sobre un cuerpo K con $\text{char}(K) \neq 2, 3$. Sea $x_i, x_j \in X$ y $u, v \in P$. La multiplicacion es definida en N por:

1. $x_i * x_j = x_i x_j$ for $i < j$.
2. $u * v = 0$ si u y v tiene al menos dos letras.
3. $u * x_i = 0$ si $s \geq 2$ y $i < i_1$ o x_i aparece en u .

4. $u * x_i = (-1)^\sigma x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_s}$ si $s \geq 2$ y $i > i_1$,
donde σ es la permutacion tal que $u * x_i$ es una palabra regular.

El algebra N satisface la identidad de Jacobi $(u * v) * w + (v * w) * u + (w * u) * v = 0$ y $N^2 N^2 = 0$. N no es nilpotente, puesto que $\forall n \geq 1$ tenemos

$$(\dots((x_1 * x_2) * x_3) * \dots) * x_n = x_1 x_2 \dots x_n \neq 0.$$

Sea A una álgebra asociativa en las potencias. Un elemento x de A se dice nilpotente si existe un entero positivo n tal que $x^n = 0$. El indice de nilpotencia para un elemento nilpotente x de A , es el entero positivo m mas pequeno tal que $x^m = 0$. Una algebra asociativa en las potencias es llamada una nilalgebra, si todo elemento es nilpotente. Si el conjunto de los indices de nilpotencias de los elementos de A esta limitado por un cierto numero entero positivo t , entonces el menor numero entero positivo s tal que $x^s = 0$, para todo x en A , se denomina el nilindice de A . Si A es una nilalgebra asociativa en las potencias de dimension n , entonces el nilindice de A es menor o igual a $n + 1$.

A continuacion encunciamos algunos resultados generales sobre solubilidad y nilpotencia sobre algebras que se pueden encontrar en las referencias.

Proposicion 1.1 (Schafer [24], Proposicion 2.2, p. 18) *Si una algebra A contiene un ideal soluble S , y si A/S es soluble, entonces A es soluble.*

Proposicion 1.2 (Schafer [24], Teorema 2.4 p. 18) *Un ideal B de una álgebra A es nilpotente si y solo si la subalgebra asociativa B^* de $M(A)$ es nilpotente.*

Proposicion 1.3 (Correa [2]) *Sea N una algebra conmutativa no asociativa finitamente generado sobre un cuerpo de caracteristica $\neq 2$ satisfaciendo la identidad $x^3 = 0$. Entonces N es nilpotente.*

1.4 Problema de Albert

Albert conjeturo que toda nilálgebra asociativa en las potencias conmutativa de dimensión finita es nilpotente. Esta conjetura quedó varios años sin respuesta, hasta que Suttles presentó en [] el siguiente contraejemplo en 1972.

El siguiente problema es un problema abierto. ¿Es toda nilálgebra asociativa en las potencias conmutativa de dimensión finita soluble ?

1.5 Resultados Preliminares

Los siguientes son resultados conocidos sobre nilpotencia y solubilidad de álgebras asociativas en las potencias.

Teorema 1.4 (Albert, [1]) Toda nilálgebra de Jordan finito-dimensional sobre un cuerpo de característica $\neq 2$ es nilpotente.

Teorema 1.5 (Gerstenhaber - Myung[14]) Toda nilálgebra conmutativa asociativa en las potencias de dimensión 4 y nilíndice 4 sobre un cuerpo de característica $\neq 2$ es nilpotente.

En [3] Correa y Suazo generalizan el Teorema 1.5 a dimensión finita n . Más precisamente, se prueba el siguiente resultado:

Teorema 1.6 (Correa - Suazo[3]) Toda nilálgebra conmutativa asociativa en las potencias de nilíndice n y de dimensión n es nilpotente de índice n .

Además en [3] se determinan las condiciones necesarias y suficientes para que tal álgebra sea de Jordan. Cuando el álgebra es de Jordan, se encuentran las correspondientes clases de isomorfismos. Estos resultados requieren que el cuerpo tenga característica $\neq 2, 3$.

Correa y Hentzel extienden el resultado anterior al caso no conmutativo, probando el siguiente resultado:

Teorema 1.7 (Correa - Hentzel[4]) Sea A una nilálgebra no conmuta-

tiva asociativa en las potencias de dimension n y nilindice n sobre un cuerpo de caracteristica $\neq 2, 3$. Entonces A es soluble y A^2 es nilpotente.

Ademas, en [4] se presentan dos ejemplos de nilalgebras asociativas en las potencias no conmutativa de dimension n . En el primer ejemplo, el algebra tiene nilindice n y no es nilpotente; en el segundo ejemplo, el algebra tiene nilindice $n - 1$ y no es soluble.

Teorema 1.8 (Correa y Peresi[15]) Toda nilalgebra asociativa en las potencias, conmutativa de dimension 5 sobre un cuerpo de caracteristica $\neq 2, 3$ es soluble.

Teorema 1.9 (Correa, Hentzel, Peresi[6]) Si A es una nilalgebra asociativa en las potencias, conmutativa de dimension 6 sobre un cuerpo de caracteristica $\neq 2, 3, 5$. Entonces A es soluble.

Estudiando el Problema de Albert para nilindice fijo igual a cuatro, es posible probar que entonces el algebra etc. En [] Correa y Hentzel solucionan el problema cuando el algebra satisface la identidad $((yx)x)x = 0$. El resultado es el siguiente:

Theorem 1.10 *Sea A una algebra conmutativa finitamente generado sobre un cuerpo de caracteristica $\neq 2$ satisfaciendo la identidad $((yx)x)x = 0$. Entonces A es soluble.*

La nilpotencia de los operadores L_x juega un papel fundamental en la demostracion de la solubilidad o nilpotencia de algebras. Este problema fue trabajado por Gerstenhaber en una serie de papers (ver [x, x, x,] y []). Enunciamos ahora un resultado que es una de las bases de nuestro trabajo.

Teorema 1.11 (Gerstenhaber []) Si A es una algebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimension finita n sobre un cuerpo K de

característica 0 o $> n$ y a es un elemento nilpotente de A con índice de nilpotencia t entonces L_a es nilpotente de índice $\leq 2t - 3$.

Para alcanzar nuestro objetivo, a saber, probar que efectivamente las nialgebras conmutativas de dimension siete son solubles, obtuvimos una serie de resultados preliminares que serán la base de nuestros Teoremas de los siguientes capitulos.

Los siguientes resultados son fundamentales en la resolucion de nuestro problema de tesis.

Proposicion 1.12 *Sea A una nilalgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimension n y característica 0 o $> n$. Sea B una subalgebra $(n-1)$ -dimensional de A . Entonces B es un ideal de A .*

Demostracion. Debemos probar que $BA \subset B$. Sea $W = \{t \in A \mid tB \subset B\}$. Puesto que B es una subalgebra de A se sigue que $B \subset W$. El espacio vectorial cuociente A/B tiene dimension 1. Entonces, por Proposicion ??, $WA \subset B$. Por consiguiente $BA \subset B$ dado que $B \subset W$.

Lema 1.13 *Sea V un espacio vectorial de dimension 2 sobre un cuerpo K y Sea Ω un subespacio vectorial de $L(V)$. Asumamos que R es nilpotente para todo $R \in \Omega$. Entonces, si R y S son dos elementos arbitrarios en Ω , tenemos que $R \cdot S = 0$.*

Demostracion. Si R es un elemento no cero en Ω , podemos asumir que la matrix $[R]$ asociada con R es una forma canonica de Jordan. Sea S cualquier otro elemento de Ω . Tenemos:

$$[R] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad [S] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Puesto que $T = uR+S$ es nilpotente para toda eleccion del escalar u , ambas la traza y el determinante de $[T]$ deben ser ceros. Es decir, $a+d = 0$ y $-a^2 - bc - uc = 0$. Puesto que esta ultima ecuacion se tiene para todo u in K , nosotros tenemos que $c = 0$. En consecuencia, tenemos tambien que $a = 0$. Se sigue que $d = 0$. Asi $[S]$ Es estrictamente triangular superior. Esto significa que todo elemento de Ω esta representado por

una matrix triangular estrictamente superior 2×2 . El producto de cualquier dos matrices estrictamente triangular superior 2×2 es cero.

Proposicion 1.14 *Sea A una nilalgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimension n sobre un cuerpo de caracteristica 0 o $> n$. Si existe una subalgebra soluble de A de dimension $n - 2$, entonces A es soluble.*

Demostracion. Sea $W = \{a \in A \mid aB \subseteq B\}$ y $\Omega = \{L_a \mid a \in W\}$. Cada L_a in Ω induce un operador lineal $\overline{L}_a : A/B \rightarrow A/B$ defined by $(x + B)\overline{L}_a = xa + B$. Puesto que $\text{Dim}(A/B) = 2$, el conjunto de estos operadores satisfacen las hipotesis del lema 4. En consecuencia tenemos que $(AW)W \subseteq B$. Dado que $B \subseteq W$, se sigue que $AW \subseteq W$. Esto implica que W es un ideal de A y B es un ideal de W . Por consiguiente los espacios cuocientes A/W y W/B son nilalgebras conmutativas y asociativas en las potencias de dimensiones ≤ 2 , y de aqui que, son solubles. Puesto que B es soluble, de la Proposicion 5 se sigue que W es soluble y que A es soluble.

Teorema 1.15(Correa-Hentzel-Julca-Peresi[10]) *Sea A una algebra conmutativa asociativa en las potencias de dimension finita n y nilindice $n - 1$ sobre un cuerpo de caracteristica 0 o $> n$. Entonces A es soluble.*

Teorema 1.16(Correa-Hentzel-Julca-Peresi[10]) *Sea A una algebra conmutativa asociativa en las potencias de dimension finita n y nilindice $n - 2$ sobre un cuerpo de caracteristica 0 o $> n$. Entonces A es soluble.*

Es facil probar que si A es una nilalgebra de dimension N y nilindice $n + 1$ entonces A es nilpotente, luego es soluble. Si A tiene nilindice 2, entonces satisface la identidad $xy = etc$ luego es nilpotente y asi es soluble.

Ademas, si el nilindice es 3, por la Proposicion X.1 es soluble. Luego podemos resumir todos los resultados anteriores en el siguiente Teorema

Teorema 1.17 *Sea A una nilalgebra asociativa en las potencias y con-*

mutativa de dimension n con nilindice k . Si $k = 1, 2, 3, n - 2, n - 1, n$ o $n + 1$, entonces A es soluble.

Capítulo 2

Problema de Albert en Dimension Siete

En este capítulo estudiamos el problema de Albert en dimension siete cuando el nilíndice es cuatro. Nuestro principal resultado es el siguiente:

Teorema 2.1 Sea A una nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión 7 sobre un cuerpo de característica 0 o > 7 . Entonces A es soluble.

En todo este capítulo A denotará una álgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión siete sobre un cuerpo F de característica $\neq 2, 3, 5$. Por Teorema 1.17, A es soluble cuando su nilíndice es 2, 3, 5, 6 y 7. De aquí, solo necesitamos probar el Teorema 2.1 para el caso cuando A tiene nilíndice cuatro.

Lema 2.2 Toda nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de nilíndice cuatro sobre un cuerpo de característica $\neq 2$ satisface las siguientes identidades:

$$2((yx)x)x + (x^2y)x + x^3y = 0, \quad (2,1)$$

$$(yx)x^2 = 0, \quad (2,2)$$

$$2(yx)(zx) + (yz)x^2 = 0, \quad (2,3)$$

$$2(((yx)x)x)x + x^3(yx) = 0, \quad (2,4)$$

$$(yx^2)x^3 = 0, \quad (2,5)$$

$$(yx^3)x^2 = 0. \quad (2,6)$$

Demostración: Linealizando $x^4 = 0$ se obtiene (2.1). Linealizando $x^2x^2 = 0$, se obtiene (2.2) y (2.3). Reemplazando y por yx en (2.1) y usando (2.2) se obtiene (2.4). Reemplazando x por x^2 y z por x en (2.3) se obtiene (2.5). Reemplazando z por x^3 en (2.3) se obtiene (2.6).

Lema 2.3 Sea A una nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimension 7 con nilíndice 4 sobre un cuerpo de característica $\neq 2$. Entonces A satisface las siguientes identidades y contenciones:

$$(yx)x^3 = 0, \quad (2,7)$$

$$x^3(yz) = -(zx^2)(yx) - 2((zx)x)(yx), \quad (2,8)$$

$$(yx^2)x^2 = 0, \quad (2,9)$$

$$A^2x^2 = (Ax)^2, \quad (2,10)$$

$$A^3x^3 \subseteq ((A^2x)x)(Ax) + (Ax)^3. \quad (2,11)$$

Demostracion. La identidad (5) se tiene si $x^3 = 0$. Sea $x \in A$ con $x^3 \neq 0$ y $X = \langle x, x^2, x^3 \rangle$. Sea y un elemento arbitrario de A . Sea A/X el espacio vectorial cuociente de A por X . Puesto que $XL_x \subset X$ la funcion lineal $\overline{L_x} : A/X \rightarrow A/X$, definido por $(y + X)\overline{L_x} = yL_x + X$,

esta bien definido. Puesto que $L_x^5 = 0$ tenemos que $(\overline{L_x})^5 = 0$. Puesto que A/X tiene dimension 4 tenemos que $(\overline{L_x})^4 = 0$. Esto implica que $yL_x^4 \in X$. Asi $yL_x^4 = \alpha x + \beta x^2 + \delta x^3$ ($\alpha, \beta, \delta \in K$). Dado que $L_x^5 = 0$ obtenemos que $\alpha x^2 + \beta x^3 = yL_x^5 = 0$ y entonces $\alpha = 0$ y $\beta = 0$. Se sigue que $yL_x^4 = \delta x^3$. Por consiguiente por (4) $(yx)x^3 = -2yL_x^4$. Obtenemos entonces que $(yx)x^3 = \lambda x^3$ ($\lambda \in K$). Dado que $L_{yx}^5 = 0$ obtenemos que $\lambda^5 x^3 = x^3 L_{yx}^5 = 0$. Por consiguiente $\lambda = 0$ y luego obtenemos $(yx)x^3 = 0$. Por consiguiente es una identidad de A .

Linealizando (7) obtenemos (8). Reemplazando z por x^2 en (3) y usando (7) se obtiene (9). De (3) obtenemos (10). Haciendo $z \in A^2$ y $y \in A$ en (8) y usando (10) obtenemos (11).

Linealizando completamente la identidad (2.2) obtenemos

$$(xy)(zw) + (xz)(zy) + (xw)(yz) = 0.$$

Usando esta identidad, escribiendo $(yz)x^3 = (yz)(x^2x)$ obtenemos

$$-(yz)x^3 = (yx^2)(zx) + (yx)(x^2z). \quad (2.12)$$

Sumando (2.8) con (2.12) obtenemos

$$(yx^2)(zx) = 2(yx)((zx)x). \quad (2.13)$$

Intercambiando y con z en esta ultima ecuacion obtenemos

$$(zx^2)(yx) = 2(zx)((yx)x). \quad (2.14)$$

Sumando estas dos ultimas identidades y usando (12) obtenemos

$$-(yz)x^3 = 2(yx)((zx)x) + 2(zx)((yx)x). \quad (2.15)$$

De (15) se sigue que:

$$A^2x^3 \subseteq ((Ax)x)(Ax). \quad (2.16)$$

Para nuestra demostracion y las contenidas en los capitulos que siguen introducimos la siguiente notacion. Dado un operador lineal nilpotente sobre un espacio vectorial V de dimension n sobre un cuerpo

K , representaremos por $J(i_1, \dots, i_s)$ la matriz que representa a T en su forma canonica de Jordan, la cual se compone de s bloques de Jordan J_{i_1}, \dots, J_{i_s} donde cada bloque J_{i_k} es una matriz $i_k \times i_k$ de la forma

$$J_{i_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con $i_s \leq \dots \leq i_1$ y $\sum_{k=1}^s i_k = n$.

De ahora en adelante asumiremos que x es un elemento de A tal que $x^3 \neq 0$ y $X = \langle x, x^2, x^3 \rangle$. Asi $L_x \neq 0$ y $L_x^2 \neq 0$. Usando (7) y (4) obtenemos $L_x^4 = 0$. Por consiguiente el polinomio minimal de L_x es t^4 o t^3 . Sea J_l que denota la $l \times l$ matrix elemental de Jordan asociada al autovalor 0. Entonces las posibles formas canonicas de Jordan de L_x son:

- a) $J(4, 3)$,
- b) $J(4, 2, 1)$,
- c) $J(4, 1, 1, 1)$,
- d) $J(3, 3, 1)$,
- e) $J(3, , 2, 2)$,
- f) $J(3, 2, 1, 1)$,
- g) $J(3, 1, 1, 1, 1)$.

Las bases de A correspondientes a cada uno de estas matrices son:

- a) $\{y, yx, (yx)x, ((yx)x)x, a, ax, (ax)x\}$ con $((yx)x)x)x = ((ax)x)x = 0$.

- b) $\{y, yx, (yx)x, ((yx)x)x, a, ax, b\}$ con $((yx)x)x = (ax)x = bx = 0$.
- c) $\{y, yx, (yx)x, ((yx)x)x, a, b, c\}$ con $((yx)x)x = ax = bx = cx = 0$.
- d) $\{x, x^2, x^3, a, ax, (ax)x, b\}$ con $((ax)x)x = bx = 0$.
- e) $\{x, x^2, x^3, a, ax, b, bx\}$ con $(ax)x = (bx)x = 0$.
- f) $\{x, x^2, x^3, a, ax, b, c\}$ con $(ax)x = bx = cx = 0$.
- g) $\{x, x^2, x^3, a, b, c, d\}$ con $ax = bx = cx = dx = 0$.

Base c): Luego x se puede escribir en la forma

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4 ((yx)x)x + \alpha_5 a + \alpha_6 b + \alpha_7 c.$$

Multiplicando por x a esta ecuación, resulta

$$x^2 = \alpha_1 yx + \alpha_2 (yx)x + \alpha_3 ((yx)x)x.$$

Multiplicando por x , la última ecuación, queda

$$x^3 = \alpha_1 (yx)x + \alpha_2 ((yx)x)x.$$

Multiplicando otra vez por x , queda $0 = \alpha_1 ((yx)x)x$. De donde se deduce que $\alpha_1 = 0$. Luego $x^3 = \alpha_2 ((yx)x)x$. Como $x^3 \neq 0$, deduce que $\alpha_2 \neq 0$. Luego $((yx)x)x = \alpha_2^{-1} x^3$. Por consiguiente, podemos cambiar la base del álgebra por,

$$y, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad a, \quad b, \quad c.$$

Para ver solubilidad del álgebra A , es suficiente probar que $((Ax)x)(Ax) = 0$, en virtud de la identidad (2.16).

En efecto:

$$Ax = \langle yx, \quad x^2, \quad x^3 \rangle$$

y

$$(Ax)x = \langle (yx)x, \quad x^3 \rangle.$$

Por otro lado tenemos

$$x^2 = \alpha_2 (yx)x + \alpha_3 ((yx)x)x.$$

Como $\alpha_2 \neq 0$ y $((yx)x)x = \alpha_2^{-1}x^3$. Podemos escribir

$$(yx)x = \alpha_2^{-1}x^2 - \alpha_3\alpha_2^{-2}x^3.$$

De donde $(Ax)x = \langle x^2, x^3 \rangle$. En virtud de las identidades (2.2) y (2.7), tenemos que $((Ax)x)(Ax) = 0$. Luego por (2.16), se concluye que $A^2x^3 = 0$. De donde $X^3 = \langle x^3 \rangle$ es un ideal soluble de A^2 . Dado que A^2/X^3 es una nilálgebra de dimensión menor o igual que seis. Luego es soluble. En consecuencia por proposición (1.1) se deduce que A^2 es soluble. Por tanto A es soluble.

Base e): Aquí x se puede escribir en la forma

$$x = \alpha_1y + \alpha_2yx + \alpha_3(yx)x + \alpha_4a + \alpha_5ax + \alpha_6b + \alpha_7bx.$$

Multiplicando por x a esta ecuación, resulta

$$x^2 = \alpha_1yx + \alpha_2(yx)x + \alpha_4ax + \alpha_6bx.$$

Multiplicando por x , la última ecuación, queda $x^3 = \alpha_1(yx)x$. Como $x^3 \neq 0$, se deduce que $\alpha_1 \neq 0$. Luego $(yx)x = \alpha_1^{-1}x^3$. Por consiguiente, podemos cambiar de base en la siguiente base:

$$x, x^2, x^3, a, ax, b, bx,$$

$(ax)x = 0$, $(bx)x = 0$. Para ver solubilidad del álgebra A , es suficiente probar que $((Ax)x)(Ax) = 0$, en virtud de la identidad (2.16) En efecto:

$$Ax = \langle x^2, x^3, ax, bx \rangle$$

y $(Ax)x = \langle x^3 \rangle$. Usando la identidad (2.7), se tiene que $((Ax)x)(Ax) = 0$. Luego por (2.16), se concluye que $A^2x^3 = 0$. De donde $X^3 = \langle x^3 \rangle$ es un ideal soluble de A^2 . Dado que A^2/X^3 es una nilálgebra de dimensión menor o igual que seis. Luego es soluble. En consecuencia por proposición (1.1) se deduce que A^2 es soluble. Por tanto A es soluble.

Base g): Entonces x se escribe en la forma

$$x = \alpha_1y + \alpha_2yx + \alpha_3(yx)x + \alpha_4a + \alpha_5b + \alpha_6c + \alpha_7d.$$

Multiplicando por x a esta ecuación, resulta

$$x^2 = \alpha_1 yx + \alpha_2 (yx)x.$$

Multiplicando por x , la última ecuación, se tiene $x^3 = \alpha_1 (yx)x$. De aquí que $\alpha_1 \neq 0$ y $(yx)x = \alpha_1^{-1} x^3$. Por consiguiente, podemos cambiar de base en la siguiente base:

$$x, x^2, x^3, a, b, c, d,$$

$ax = bx = cx = dx = 0$. Para probar solubilidad del álgebra, basta ver que: $((Ax)x)(Ax) = 0$.

En efecto, $Ax = \langle x^2, x^3 \rangle$ y $(Ax)x = \langle x^3 \rangle$. Como $x^5 = 0, x^6 = 0$. Se sigue que $((Ax)x)(Ax) = 0$. Luego por (2.16), tenemos que $A^2 x^3 = 0$ y de aquí $X^3 = \langle x^3 \rangle$ es un ideal soluble de A^2 . Dado que A^2/X^3 es una nilálgebra de dimensión menor o igual que seis. Luego es soluble. En consecuencia por proposición (1.1) se deduce que A^2 es soluble. De donde A es soluble.

Base f): Aquí x se escribe en la forma

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4 a + \alpha_5 ax + \alpha_6 b + \alpha_7 d.$$

Multiplicando por x a la ecuación anterior, resulta

$$x^2 = \alpha_1 yx + \alpha_2 (yx)x + \alpha_4 ax.$$

Multiplicando otra vez por x a esta última ecuación, se tiene $x^3 = \alpha_1 (yx)x$. Como $x^3 \neq 0$ se deduce que $\alpha_1 \neq 0$ y de aquí $(yx)x = \alpha_1^{-1} x^3$. Luego tenemos que la base se puede cambiar en la siguiente base:

$$\{x, x^2, x^3, a, ax, b, d\}.$$

Con

$$(ax)x = 0, \quad bx = 0, \quad dx = 0.$$

En virtud de (2.16) es suficiente probar que, $((Ax)x)(Ax) = 0$.

En efecto, $Ax = \langle x^2, x^3, ax \rangle$ y $(Ax)x = \langle x^3 \rangle$. Por (2.7), se concluye que $((Ax)x)(Ax) = 0$. De aquí tenemos que $A^2 x^3 = 0$. Por

consiguiente $X^3 = \langle x^3 \rangle$ es un ideal soluble de A^2 . Dado que A^2/X^3 es una nilálgebra de dimensión menor o igual que seis. Luego es soluble. En consecuencia por proposición (1.1) se deduce que A^2 es soluble. Por lo tanto A es soluble.

Base a): Escribimos

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4 ((yx)x)x + \alpha_5 a + \alpha_6 ax + \alpha_7 (ax)x, \alpha_i \in K.$$

Aplicando L_x^3 obtenemos $\alpha_1 = 0$. De aqui que $\alpha_5 \neq 0$, pues si $\alpha_5 = 0$ se tiene que $x \in Ax$, la cual es una contradicción. Aplicando L_{x^2} a x y usando (2.2) obtenemos $x^3 = \alpha_5 ax^2$, de aqui que $ax^2 = \alpha_5^{-1}x^3$. Por consiguiente $(ax^2)x = 0$ y entonces por (2.1) tenemos

$$x^3a = -2((ax)x)x - (ax^2)x = 0.$$

De aqui que $a \in Ker(L_{x^3})$.

Si $yx^3 = 0$ entonces $Ax^3 = 0$ por (2.7). Por consiguiente $\langle x^3 \rangle$ es un ideal soluble de A . Dado que $A/\langle x^3 \rangle$ es una nilálgebra de dimensión ≤ 6 , es soluble. Por consiguiente A es soluble por Proposición (1.1)

Asumamos ahora que $yx^3 \neq 0$. Entonces

$$Ker(L_{x^3}) = \langle yx, (yx)x, ((yx)x)x, a, ax, (ax)x \rangle$$

by (2.7). Probaremos que $Ker(L_{x^3})$ es un ideal de A , por la Proposición (1.12) es suficiente probar que $Ker(L_{x^3})$ es una subálgebra de A .

Tenemos que probar que $tz \in Ker(L_{x^3})$ para todo $t, z \in Ker(L_{x^3})$. Reemplazando y por t en (2.8) obtenemos

$$(tz)x^3 = -(zx^2)(tx) - 2((zx)x)(tx)$$

. Para $z = (yx)x, ((yx)x)x, ax, (ax)x$ obtenemos que $(zx^2)(tx) = 0$ por (2.2). Para $z = (yx)x, ((yx)x)x$ obtenemos $((zx)x)(tx) = 0$, para todo $t \in A$, puesto que $((yx)x)x = 0$. Para $z = ax, (ax)x$ obtenemos $((zx)x)(tx) = 0$, para todo $t \in A$, dado que $((ax)x)x = 0$. Por consiguiente $(tz)x^3 = 0$ para $z = (yx)x, ((yx)x)x, ax, (ax)x$ y cualquier $t \in A$. En lo que sigue probaremos que

$$(yx)(yx), (yx)a, a^2 \in Ker(L_{x^3})$$

. tenemos

$$((yx)(yx))x^3 = -2((yx)x^2)((yx)x) = 0$$

by (2.12). Entonces $(yx)(yx) \in Ker(L_{x^3})$. Usando (2.12), se tiene que

$$((yx)a)x^3 = -(ax^2)((yx)x) - (ax)((yx)x^2)$$

Como $ax^2 = \alpha_5^{-1}x^3$, reemplazando en la ultima ecuacion se tiene que

$$((yx)a)x^3 = -(\alpha_5^{-1}x^3)((yx)x) - (ax)((yx)x^2)$$

De aqui que por (2.2) y (2.7), se tiene que $((yx)a)x^3 = 0$, es decir $(yx)a \in Ker(L_{x^3})$. Para probar que $a^2 \in Ker(L_{x^3})$, usamos (2.12) con $y = a, z = a$, luego tenemos que

$$a^2x^3 = -2(ax^2)(ax) = -2(\alpha_5^{-1}x^3)(ax) = 0$$

por (2.7).

Por consiguiente $Ker(L_{x^3})$ es una subalgebra de A . Puesto que $Ker(L_{x^3})$ y $A/Ker(L_{x^3})$ son nilalgebras de dimension ≤ 6 , luego son solubles. Por consiguiente A es soluble por Proposicion 1.1

Base b): Luego x se puede escribir en la forma

$$x = \alpha_1y + \alpha_2yx + \alpha_3(yx)x + \alpha_4((yx)x)x + \alpha_5a + \alpha_6ax + \alpha_7b.$$

Multiplicando por x a esta ecuación, resulta

$$x^2 = \alpha_1yx + \alpha_2(yx)x + \alpha_3((yx)x)x + \alpha_5ax.$$

Multiplicando por x , la última ecuación, queda

$$x^3 = \alpha_1(yx)x + \alpha_2((yx)x)x.$$

Multiplicando otra vez por x , queda $0 = \alpha_1((yx)x)x$. De donde se deduce que $\alpha_1 = 0$. Luego $x^3 = \alpha_2((yx)x)x$. Como $x^3 \neq 0$, se deduce que $\alpha_2 \neq 0$. Luego $((yx)x)x = \alpha_2^{-1}x^3$. Tenemos dos posibilidades de α_5 , a saber, $\alpha_5 = 0$ o $\alpha_5 \neq 0$. En cada uno de los dos casos probaremos, que el álgebra es soluble. En efecto:

Supongamos que $\alpha_5 = 0$. luego tenemos que,

$$x^2 = \alpha_2(yx)x + \alpha_3((yx)x)x$$

y de aquí que

$$(yx)x = \alpha_2^{-1}x^2 - \alpha_3\alpha_2^{-2}x^3.$$

Luego para probar solubilidad del álgebra A , es suficiente probar que $((Ax)x)(Ax) = 0$, en virtud de la identidad (2.16). Como $\alpha_2 \neq 0$, podemos hacer el siguiente cambio de base del álgebra,

$$\{y, x, x^2, x^3, a, ax, b\}.$$

Entonces

$$Ax = \langle yx, x^2, x^3, ax \rangle \quad \text{y} \quad (Ax)x = \langle (yx)x, x^3 \rangle.$$

Por otro lado tenemos

$$(yx)x = \alpha_2^{-1}x^2 - \alpha_3\alpha_2^{-2}x^3.$$

Luego podemos escribir $(Ax)x = \langle x^2, x^3 \rangle$. En virtud de las identidades (2.2) y (2.7), tenemos que $((Ax)x)(Ax) = 0$. Luego por (2.16), se concluye que $A^2x^3 = 0$. De donde $X^3 = \langle x^3 \rangle$ es un ideal soluble de A^2 . Dado que A^2/X^3 es una nilálgebra de dimensión menor o igual que seis. Luego es soluble. En consecuencia por proposición (1.1) se deduce que A^2 es soluble. Por tanto A es soluble.

Queda ver cuando $\alpha_5 \neq 0$. En virtud de esto, podemos escribir la base del álgebra A en la forma siguiente:

$$\{y, yx, (yx)x, x, x^2, x^3, b\}.$$

Entonces para probar solubilidad del álgebra A , es suficiente ver que $((Ax)x)(Ax) = 0$, en virtud de la identidad (2.16). En efecto:

$$Ax = \langle yx, (yx)x, x^2, x^3 \rangle \quad \text{y} \quad (Ax)x = \langle (yx)x, x^3 \rangle.$$

Como

$$((yx)x)((yx)x) = -\frac{1}{2}((yx)(yx))x^2 = \frac{1}{4}(y^2x^2)x^2 = 0,$$

por las identidades (2.3) y (2.9). Usando las identidades (2.2) y (2.7), se tiene que

$$((Ax)x)(Ax) = \langle (yx)((yx)x) \rangle.$$

Si $(yx)((yx)x) = 0$, luego tenemos que

$$((Ax)x)(Ax) = 0$$

y de aquí por (2.16), concluimos que $A^2x^3 = 0$. De donde $X^3 = \langle x^3 \rangle$ es un ideal soluble de A^2 . Dado que A^2/X^3 es una nilálgebra de dimensión menor o igual que seis. Luego es soluble. En consecuencia por proposición (1.1) se deduce que A^2 es soluble. Por tanto A es soluble.

Si $(yx)((yx)x) \neq 0$, entonces para ver solubilidad en este caso, consideramos el siguiente operador compuesto por los operadores L_{x^2} y L_{yx} , es decir,

$$L_{x^2}L_{yx} : A \longrightarrow A,$$

definido por $z(L_{x^2}L_{yx}) = (zx^2)(yx)$, para todo z que pertenece a A . Usando la identidad (2.8) para $z = y$, tenemos que

$$y^2x^3 = -(yx^2)(yx) - 2((yx)x)(yx).$$

Por la identidad (2.12) con $z = y$, se tiene que $y^2x^3 = -2(yx^2)(yx)$. Igualando ambas ecuaciones tenemos $(yx^2)(yx) = 2((yx)x)(yx)$. Como $((yx)x)(yx) \neq 0$ y en virtud de las identidades (2.2), (2.7) y (2.13), se tiene que

$$\text{Ker}(L_{x^2}L_{yx}) = \langle yx, (yx)x, x, x^2, x^3, b \rangle.$$

Observamos que $\text{Ker}(L_{x^2}L_{yx})$ tiene dimensión seis. Usando las identidades (2.3), (2.9) y (2.7), se prueba fácilmente que $\text{Ker}(L_{x^2}L_{yx})$, es una subálgebra que tiene dimensión seis. En efecto,

$$(yx)^2x^2 = -\frac{1}{2}(y^2x^2)x^2 = 0,$$

por las identidades (2.3) y (2.9). Luego $((yx)^2x^2)(yx) = 0$. De forma análoga se ve en los demás productos restantes. Por consiguiente por Proposición (1.12), se tiene que $\text{Ker}(L_{x^2}L_{yx})$, es un ideal de A y como tiene dimensión 6 es soluble por Teorema (1.9). Luego se concluye que el álgebra A es soluble. por proposición (1.1)

Base d): Aquí x se puede escribir en la forma

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4 a + \alpha_5 ax + \alpha_6 (ax)x + \alpha_7 b.$$

Multiplicando por x a esta ecuación, resulta

$$x^2 = \alpha_1 yx + \alpha_2 (yx)x + \alpha_4 ax + \alpha_5 (ax)x.$$

Multiplicando por x , la última ecuación, queda

$$x^3 = \alpha_1 (yx)x + \alpha_4 (ax)x.$$

Como $x^3 \neq 0$, se deduce que $(\alpha_1, \alpha_4) \neq (0, 0)$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\alpha_1 \neq 0$. Por tanto podemos hacer el siguiente cambio de base:

$$\{x, x^2, x^3, a, ax, (ax)x, b\}.$$

Con

$$((ax)x)x = 0, \quad bx = 0.$$

Para ver solubilidad del álgebra A , es suficiente probar que $((Ax)x)(Ax) = 0$, en virtud de la identidad (2.16). En efecto:

$$Ax = \langle x^2, x^3, ax, (ax)x \rangle \text{ y } (Ax)x = \langle x^3, (ax)x \rangle.$$

Usando las identidades (2.2), (2.7), (2.3) y (2.9) se tiene que

$$((Ax)x)(Ax) = \langle (ax)(axx) \rangle.$$

Si $(ax)(axx) = 0$, tenemos que $((Ax)x)(Ax) = 0$. Luego por (2.16), se concluye que $A^2x^3 = 0$. De donde $X^3 = \langle x^3 \rangle$ es un ideal soluble de A^2 . Dado que A^2/X^3 es una nilálgebra de dimensión menor o igual que seis. Luego por proposición (1.1) se tiene que A^2 es soluble y de aquí que A es soluble. Queda ver cuando $(ax)((ax)x) \neq 0$. Para ver solubilidad en este caso, consideramos el siguiente operador compuesto por los operadores L_{x^2} y L_{ax} , es decir,

$$L_{x^2}L_{ax} : A \longrightarrow A,$$

definido por $y(L_{x^2}L_{ax}) = (yx^2)(ax)$, para todo y que pertenece a A .

En virtud de las identidades (2.13), (2.7), (2.2) y (2.14), se tiene que

$$\text{Ker}(L_{x^2}L_{ax}) = \langle x, x^2, x^3, ax, (ax)x, b \rangle .$$

Observamos que $\text{Ker}(L_{x^2}L_{ax})$ tiene dimensión seis. Usando las identidades (2.2), (2.7), (2.3) y (2.9), es fácil ver que $\text{Ker}(L_{x^2}L_{ax})$, es una subálgebra que tiene dimensión seis. Luego por el Proposición (1.12), se concluye que el $\text{Ker}(L_{x^2}L_{ax})$ es ideal que tiene dimension 6, entonces por Proposición (1.1) se tiene que el álgebra A es soluble.

Esto completa la demostracion del Teorema 2.1.

Capítulo 3

Problema de Albert en Dimension Ocho

En este capítulo estudiamos el Problema de Albert en dimension 8 cuando el nilíndice es 4. Nuestro principal resultado es el siguiente:

Teorema 3.1. *Sea A una nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimension 8 con nilíndice 4 sobre un cuerpo K de característica 0 o > 7 . Entonces A es Soluble.*

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Lema 3.2. *Sea A una nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimension 8 con nilíndice 4 sobre un cuerpo K de característica 0 o > 7 . Entonces $L_x^4 = 0$ para todo x en A .*

Demostración. Asumamos que existe un x en A con $L_x^4 \neq 0$. Entonces las posibles representaciones en matrices de Jordan de L_x son:

- a) $J(5, 1, 1, 1)$,
- b) $J(5, 3)$,
- c) $J(5, 2, 1)$.

Las bases correspondientes son:

$$\text{a) } \{y, yL_x, yL_x^2, yL_x^3, yL_x^4, a, b, c\},$$

$$\text{con } yL_x^5 = aL_x = bL_x = cL_x = 0,$$

$$\text{b) } \{y, yL_x, yL_x^2, yL_x^3, yL_x^4, w, wL_x, wL_x^2\},$$

$$\text{con } yL_x^5 = wL_x^3 = 0 \text{ y}$$

$$\text{c) } \{y, yL_x, yL_x^2, yL_x^3, yL_x^4, w, wL_x, b\},$$

$$\text{con } yL_x^5 = wL_x^2 = bL_x = 0 \text{ respectivamente.}$$

Asumamos que A tiene una base del tipo a) o c): Escribiendo x como combinacion lineal de la base y aplicando L_x^3 obtenemos que x^3 y yL_x^4 son linealmente dependientes. Usando (2.4) obtenemos que $x^3 \neq 0$ y que $x^3, (xy)x^3$ son linealmente dependientes. Se sigue, de la nilpotencia del operador L_{xy} , que $(xy)x^3 = 0$. Por consiguiente de (2.4) obtenemos que $yL_x^4 = 0$ la cual es una contradiccion.

Asumamos ahora que el algebra A tiene una base del tipo b). Escribiendo x como combinacion lineal de la base b) tenemos:

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4 ((yx)x)x + \alpha_5 (((yx)x)x)x + \alpha_6 w + \alpha_7 wx + \alpha_8 (wx)x.$$

Multiplicando la anterior ecuacion por x , se tiene:

$$x^2 = \alpha_1 yx + \alpha_2 (yx)x + \alpha_3 ((yx)x)x + \alpha_4 (((yx)x)x)x + \alpha_6 wx + \alpha_7 (wx)x.$$

Multiplicando otra vez por x , la ultima ecuacion:

$$x^3 = \alpha_1 (yx)x + \alpha_2 ((yx)x)x + \alpha_3 (((yx)x)x)x + \alpha_6 (wx)x.$$

Multiplicando por x a x^3 tenemos:

$$0 = \alpha_1 (((yx)x)x)x + \alpha_2 (((yx)x)x)x.$$

De aqui que, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Luego x tiene la forma:

$$x = \alpha_3(yx)x + \alpha_4((yx)x)x + \alpha_5(((yx)x)x)x + \alpha_6w + \alpha_7wx + \alpha_8(wx)x.$$

Se ve que x esta en el subespacio S generado por

$$yL_x^2, yL_x^3, yL_x^4, w, wL_x, wL_x^2.$$

Y De aqui que x^3 esta en el subespacio lineal generado por yL_x^4 y wL_x^2 .
Sea

$$x^3 = \alpha yL_x^3 + \beta wL_x^2.$$

Si $\beta = 0$ se sigue que x esta en Ax la cual es una contradiccion. Asumamos que $\beta \neq 0$. Entonces, aplicando L_{x^2} a x se obtiene que $x^3 = \beta wx^2$. Note que $(Sx^2)x^2 = 0$. Probaremos que $(Ax^2)x^2 = 0$. Para esto solamente necesitamos probar que $(yx^2)x^2 = 0$. Puesto que $\text{Dim}(A/S) = 1$, la nilpotencia de L_{x^2} implica que yx^2 esta en S . Escribiendo yx^2 como combinacion lineal de los generadores de S obtenemos que $(yx^2)x^2 = \gamma wx^2$ para algun γ en K . Usando (8) obtenemos que $-2\beta(yx)x^3 = \gamma x^3$. La nilpotencia de L_{yx} implica que $\gamma = 0$, de aqui que $(yx)x^3 = 0$. De (4) obtenemos que $yL_x^4 = 0$. Esto es una contradiccion. Por consiguiente, A no puede tener una base de este tipo.

Esto prueba el Lema.

Una consecuencia inmediata del Lema 2 y de la identidad (4) es la identidad

$$(yx)x^3 = 0. \tag{9}$$

Linealizando (9) obtenemos:

$$(yz)x^3 = -2(yx)((zx)x) - (yx)(x^2z). \tag{10}$$

De (7) se obtiene:

$$-(yz)x^3 = (yx^2)(zx) + (yx)(x^2z). \tag{11}$$

Sumando (10) y (11) se obtiene:

$$(yx^2)(zx) = 2(yx)((zx)x).$$

Intercambiando y con z en esta ultima ecuacion obtenemos $(zx^2)(yx) = 2(zx)((yx)x)$. Sumando estas dos ultimas identidades y usando (11) obtenemos

$$-(yz)x^3 = 2(yx)((zx)x) + 2(zx)((yx)x). \quad (12)$$

De (12) se sigue que:

$$A^2x^3 \subseteq ((Ax)x)(Ax). \quad (13)$$

Sea A una nilalgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimension 8 con nilindice 4 sobre un cuerpo de caracteristica 0 o > 8 . De la Proposicion 5, se deduce que para probar que A es soluble, es suficiente encontrar un ideal no trivial de A .

Si $L_x^3 = 0$ para todo x en A , entonces del Teorema 7 A es soluble. Asumamos que existe x en A con $L_x^3 \neq 0$. De Lema 2 el polinomio minimal de L_x es X^4 . Por consiguiente, las posibles formas matriciales canonicas de Jordan de L_x son:

- a) $J(4, 4)$,
- b) $J(4, 3, 1)$,
- c) $J(4, 2, 2)$,
- d) $J(4, 2, 1, 1)$,
- e) $J(4, 1, 1, 1, 1)$.

Las bases respectivas de A asociada a cada una de estas matrices son:

a) $\{y, yL_x, yL_x^2, yL_x^3, w, wL_x, wL_x^2, wL_x^3\}$,
con $yL_x^4 = wL_x^4 = 0$.

b) $\{y, yL_x, yL_x^2, yL_x^3, w, wL_x, wL_x^2, z\}$,
con $yL_x^4 = wL_x^3 = zL_x = 0$.

c) $\{y, yL_x, yL_x^2, yL_x^3, w, wL_x, z, zL_x\}$,
con $yL_x^4 = wL_x^2 = zL_x^2 = 0$.

d) $\{y, yL_x, yL_x^2, yL_x^3, w, wL_x, a, b\}$,
con $yL_x^4 = wL_x^2 = aL_x = bL_x = 0$.

e) $\{y, yL_x, yL_x^2, yL_x^3, a, b, c, d\}$,
con $yL_x^4 = aL_x = bL_x = cL_x = dL_x = 0$.

Observamos de (1), $L_x^3 \neq 0$ implica que $x^2 \neq 0$. Por consiguiente, para cada base necesitamos considerar ambos casos, $x^3 = 0$ y $x^3 \neq 0$.

Base a): Esta base es imposible. En efecto, si escribimos x como una combinacion lineal de esta base y aplicamos L_x^3 a esta combinacion lineal, obtenemos que x esta en Ax cual es una contradiccion.

Base b): Sea

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4 ((yx)x)x + \alpha_5 w + \alpha_6 wx + \alpha_7 (wx)x + \alpha_8 z.$$

Applying L_x^3 obtenemos que $\alpha_1 = 0$.

Asumamos primero $x^3 = 0$. Se sigue que $\alpha_2 = \alpha_5 = 0$ y entonces necesariamente $\alpha_8 \neq 0$. Aplicando L_{x^2} a x obtenemos que $zx^2 = 0$. De aqui que

$$\{yx, (yx)x, ((yx)x)x, wx, (wx)x, z\} \subseteq \text{Ker}(L_{x^2}).$$

Puesto que $((yx)x)x \neq 0$, de (1) obtenemos que $yx^2 \neq 0$. Si $wx^2 \neq 0$, entonces usando (1) y que $((wx)x)x = 0$ obtenemos que yx^2 y wx^2 son linealmente independientes. Por consiguiente $\text{Dim}(\text{Im}(L_{x^2})) = 2$ y

$$\text{Ker}(L_{x^2}) = \{yx, (yx)x, ((yx)x)x, wx, (wx)x, z\}.$$

Usando (3) es facil probar que $[\text{Ker}(L_{x^2})]^2 x^2 = 0$. De aqui que $\text{Ker}(L_{x^2})$ es una subalgebra de dimension 6 de A y asi A es soluble. Si $wx^2 = 0$ entonces

$$\text{Ker}(L_{x^2}) = \{yx, (yx)x, ((yx)x)x, w, wx, (wx)x, z\}.$$

Luego para probar que $\text{Ker}(L_{x^2})$ es una subalgebra we probaremos que los productos $(yx)w$ y w^2 estan en $\text{Ker}(L_{x^2})$. Si

$$(yx)w = \gamma_1 y + \gamma_2 yx + \gamma_3 (yx)x + \gamma_4 ((yx)x)x + \gamma_5 w + \gamma_6 wx + \gamma_7 (wx)x + \gamma_8 z$$

entonces

$$((yx)w)x^2 = \gamma_1 yx^2.$$

Usando (3) y entonces (10) obtenemos

$$((yx)w)x^2 = -2((yx)x)(wx) = (yx^2)(xw) = \gamma_1 yx^2.$$

De aqui que γ_1 es un valor propio de del operador nilpotente L_{xw} , de aqui que $\gamma_1 = 0$. Por consiguiente $(yx)w$ esta en $\text{Ker}(L_{x^2})$.

De la segunda linealizacion de (1) obtenemos que

$$2((yx)w)w + 2((yw)x)w + 2((yw)w)x + 2((wx)y)w + (w^2y)x + 2((wx)w)y + (w^2x)y = 0$$

Reemplazando y por x^2 y usando (2), (12) y que $wx^2 = 0$ obtenemos que

$$(w^2x^2)x = -2((wx)w)x^2 = 4((wx)x)(wx) = -2(w^2x^2)(wx) = 0.$$

Se sigue que $(w^2x^2)x = 0$. Sea

$$w^2 = \beta_1 y + \beta_2 yx + \beta_3 (yx)x + \beta_4 ((yx)x)x + \beta_5 w + \beta_6 wx + \beta_7 (wx)x + \beta_8 z.$$

Entonces, $w^2x^2 = \beta_1 yx^2$. De aqui que,

$$0 = (w^2x^2)x = \beta_1 (yx^2)x.$$

Se sigue que $\beta_1 = 0$ y entonces obtenemos que $w^2x^2 = 0$. De esto es facil probar que todos los otros productos de elementos del $\text{Ker}(L_{x^2})$ esta en el $\text{Ker}(L_{x^2})$. De aqui que el $\text{Ker}(L_{x^2})$ es una subalgebra de dimension 7 de A . Se sigue de la proposicion 6 que A es soluble.

Asumamos ahora que $x^3 \neq 0$. tenemos

$$x^3 = \alpha_2 ((yx)x)x + \alpha_5 (wx)x.$$

Si $\alpha_5 = 0$ entonces $\alpha_2 \neq 0$ y necesariamente $\alpha_8 \neq 0$. Ademas, el conjunto

$$\{y, x, x^2, x^3, w, wx, (wx)x, z\}$$

es una base de A . Multiplicando x por x^3 y por x^2 obtenemos que $zx^3 = 0$ y $zx^2 = \alpha_8^{-1}x^3$ respectivamente.

Probaremos que $((wx)x)(wx) = 0$ o A es soluble.

Si $(wx)w = 0$, entonces $((wx)x)(wx) = 0$. Asumamos $(wx)w \neq 0$.
Sea

$$(wx)w = \gamma_1 y + \gamma_2 x + \gamma_3 x^2 + \gamma_4 x^3 + \gamma_5 w + \gamma_6 wx + \gamma_7 (wx)x + \gamma_8 z.$$

Si $\gamma_1 \neq 0$, entonces el conjunto

$$\{(wx)w, x, x^2, x^3, w, wx, (wx)x, z\} \text{ es una base de } A$$

y

$$\{(wx)w, x, x^2, x^3, wx, (wx)x, z\} \subseteq \text{Ker}(L_{x^3}).$$

Si $wx^3 = 0$ entonces $Ax^3 = 0$ y así A es soluble. Si $wx^3 \neq 0$, entonces

$$\text{Ker}(L_{x^3}) = \{(wx)w, x, x^2, x^3, wx, (wx)x, z\}.$$

Es fácil probar que en este caso $\text{Ker}(L_{x^3})$ es una subálgebra de A . Luego por Teorema[] A soluble. Asumamos ahora $\gamma_1 = 0$. Entonces

$$(wx)w = \gamma_2 x + \gamma_3 x^2 + \gamma_4 x^3 + \gamma_5 w + \gamma_6 wx + \gamma_7 (wx)x + \gamma_8 z.$$

Si $\gamma_5 \neq 0$ entonces el conjunto

$$\{y, x, x^2, x^3, (wx)w, wx, (wx)x, z\}$$

es una base de A y

$$\{x, x^2, x^3, (wx)w, wx, (wx)x, z\} \subseteq \text{Ker}(L_{x^3}).$$

Si $yx^3 = 0$ entonces $Ax^3 = 0$ y así A es soluble. Si $yx^3 \neq 0$, entonces

$$\text{Ker}(L_{x^3}) = \{x, x^2, x^3, (wx)w, wx, (wx)x, z\}.$$

Como en el caso arriba $\text{Ker}(L_{x^3})$ es una subálgebra de A . Asumamos ahora $\gamma_5 = 0$. Entonces

$$(wx)w = \gamma_2 x + \gamma_3 x^2 + \gamma_4 x^3 + \gamma_6 wx + \gamma_7 (wx)x + \gamma_8 z.$$

Multiplicando $(wx)w$ by x^2 y usando (3) obtenemos

$$-2((wx)x)(wx) = \gamma_2 x^3 + \gamma_8 z x^2.$$

Puesto que $zx^2 = \alpha_8^{-1}x^3$, obtenemos que

$$-2((wx)x)(wx) = \gamma_2x^3 + \gamma_8\alpha_8^{-1}x^3.$$

Por otra parte, usando (12) tenemos $((wx)x)(wx) = -1/4w^2x^3$, se sigue que $((wx)x)(wx) = 0$. Por consiguiente obtenemos que A es soluble o $((wx)x)(wx) = 0$. Luego para probar que A es soluble cuando $((wx)x)(wx) = 0$, asumamos primero que $(wx^2)x = 0$. De (1) tenemos que $wx^3 = 0$. Por consiguiente

$$\{x, x^2, x^3, w, wx, (wx)x, z\} \subseteq \text{Ker}(L_{x^3}).$$

Si $yx^3 = 0$ entonces $Ax^3 = 0$ y así A es soluble. $yx^3 \neq 0$, entonces

$$\text{Ker}(L_{x^3}) = \{x, x^2, x^3, w, wx, (wx)x, z\}.$$

Puesto que $((wx)x)(wx) = 0$, es fácil probar que $\text{Ker}(L_{x^3})$ es una subálgebra de dimensión 7. Así A es soluble. Observamos de (1) y como $((yx)x)x = \alpha_2^{-1}x^3$ se sigue que $(yx^2)x \neq 0$. Si $(wx^2)x \neq 0$ entonces $(wx^2)x$ y $(yx^2)x$ son linealmente independientes. En efecto, sea

$$\alpha(wx^2)x + \beta(yx^2)x = 0.$$

Usando (1) tenemos que

$$\alpha wx^3 + \beta(2((yx)x)x + yx^3) = 0.$$

De aquí que

$$\alpha wx^3 + \beta(2\alpha_2^{-1}x^3 + yx^3) = 0$$

y

$$-(\alpha w + \beta y)x^3 = 2\beta\alpha_2^{-1}x^3.$$

Se sigue que $\beta = 0$ y entonces $\alpha = 0$. Por consiguiente $\text{Dim}(\text{Im}(L_{x^2}L_x)) = 2$ y

$$\text{Ker}(L_{x^2}L_x) = \{x, x^2, x^3, wx, (wx)x, z\}.$$

Es fácil probar que en este caso $\text{Ker}(L_{x^2}L_x)$ es una subálgebra de A . Se sigue que A es soluble.

Asumamos ahora $\alpha_5 \neq 0$. Entonces el conjunto

$$\{y, yx, (yx)x, ((yx)x)x, x, x^2, x^3, z\}$$

es una base de A . Además,

$$\text{Ker}(L_x^3) = \{yx, (yx)x, ((yx)x)x, x, x^2, x^3, z\}.$$

Usando que

$$\text{Ker}(L_x^3) = \text{Ker}(L_{x^2}L_x + L_{x^3})$$

es facil probar que $\text{Ker}(L_x^3)$ es una subalgebra de A . De aqui que A es soluble.

Base c): Sea

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4 ((yx)x)x + \alpha_5 w + \alpha_6 wx + \alpha_7 z + \alpha_8 zx.$$

Aplicandio L_x^3 a esta ecuacion obtenemos $\alpha_1 = 0$. Esto implica que necesariamente $(\alpha_5, \alpha_7) \neq (0, 0)$. Asumamos sin perdida de generalidad que $\alpha_5 \neq 0$.

Asumamos $x^3 = 0$. Entonces $\alpha_2 = 0$. En este caso el conjunto

$$\{y, yx, (yx)x, ((yx)x)x, x, x^2, z, zx\}$$

es una base de A . Tenemos que

$$\{yx, (yx)x, ((yx)x)x, x, x^2, zx\} \subseteq \text{Ker}(L_{x^2}).$$

Por consiguiente $\text{Dim}(\text{Ker}(L_{x^2})) \geq 6$. Consideremos dos casos: Si $zx^2 = 0$ entonces $\text{Dim}(\text{Ker}(L_{x^2})) = 7$. En la misma forma que en el caso b) es posible probar que $(z^2x^2)x = 0$. Se sigue facilmente que $\text{Ker}(L_{x^2})$ es una subalgebra de dimension 7, de aqui que A es soluble. Si $zx^2 \neq 0$, se sigue que yx^2 y zx^2 son linealmente independientes y estan en la $\text{Im}(L_{x^2})$. De aqui que,

$$\text{Ker}(L_{x^2}) = \{yx, (yx)x, ((yx)x)x, x, x^2, zx\}.$$

Se sigue que A es soluble.

Asumamos $x^3 \neq 0$. Entonces $((yx)x)x = \alpha_2^{-1}x^3$. Puesto que $\alpha_5 \neq 0$, podemos tomar la base de A dado por el conjunto

$$\{y, yx, (yx)x, x, x^2, x^3, z, zx\}.$$

Observamos que

$$\{yx, (yx)x, x, x^2, x^3, zx\} \subseteq \text{Ker}(L_{x^2}L_x).$$

Si $(zx^2)x \neq 0$ entonces $(yx^2)x$ y $(zx^2)x$ son linealmente independientes. En efecto, si

$$\alpha(yx^2)x + \beta(zx^2)x = 0,$$

entonces usando (1), obtenemos que

$$\alpha(2((yx)x)x + yx^3) + \beta zx^3 = 0.$$

De aqui que, obtenemos

$$\alpha(2\alpha_2^{-1}x^3 + yx^3) + \beta zx^3 = 0$$

de aqui

$$(\alpha y + \beta z)x^3 = -2\alpha\alpha_2^{-1}x^3.$$

Se sigue que $\alpha = 0$ y por consiguiente $\beta = 0$. De aqui que el

$$\text{Ker}(L_{x^2}L_x) = \{yx, (yx)x, x, x^2, x^3, zx\}.$$

Es facil probar que en este caso el $\text{Ker}(L_{x^2}L_x)$ es una subalgebra de A . Si $(zx^2)x = 0$ entonces de (1) tenemos que $zx^3 = 0$. Por consiguiente

$$\text{Ker}(L_{x^3}) = \{yx, (yx)x, x, x^2, x^3, z, zx\}.$$

De (12) tenemos que $z^2x^3 = -4((zx)x)(zx) = 0$

y

$$(z(yx))x^3 = -2((zx)x)((yx)x) - 2(zx)((yx)x)x = 0$$

dado que $((zx)x) = 0$ y $((yx)x)x = \alpha_2^{-1}x^3$. De aqui que, es facil probar que el $\text{Ker}(L_{x^3})$ es una subalgebra de A . Se sigue que A es soluble.

Base d): Sea

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4 ((yx)x)x + \alpha_5 w + \alpha_6 wx + \alpha_7 a + \alpha_8 b.$$

Aplicando L_x^3 a x obtenemos que $\alpha_1 = 0$ y

$$x^2 = \alpha_2 (yx)x + \alpha_3 ((yx)x)x + \alpha_5 wx.$$

Asumamos primero $x^3 = 0$. Entonces $\alpha_2 = 0$. Por consiguiente

$$x^2 = \alpha_3((yx)x)x + \alpha_5wx.$$

De aqui que

$$(x^2 - \alpha_3((yx)x)x)^2 = \alpha_5^2(wx)^2 = 0.$$

Hence $\alpha_5 = 0$ or $(wx)^2 = 0$. If $(wx)^2 = 0$, then from (3) we have that $w^2x^2 = 0$. Usando (12) obtenemos tambien que $((yx)w)x^2 = 0$. Es facil de aqui concluir A es soluble. Asumamos $\alpha_5 = 0$. Por consiguiente $\alpha_3 \neq 0$. De aqui que

$$((yx)x)x = \alpha_3^{-1}x^2.$$

Sea

$$w^2 = \beta_1y + \beta_2yx + \beta_3(yx)x + \beta_4((yx)x)x + \beta_5w + \beta_6wx + \beta_7a + \beta_8b.$$

Aplicando $L_{x^2}L_x$ a esta ecuacion obtenemos $(w^2x^2)x = \beta_1(yx^2)x$ de aqui que

$$((w^2x^2)x)w^2 = \beta_1((yx^2)x)w^2.$$

De (1) obtenemos que $(yx^2)x = -2((yx)x)x$ de aqui que

$$((yx^2)x)w^2 = -2(((yx)x)x)w^2 = -2\alpha_3^{-1}x^2w^2 = -2\alpha_3^{-1}x^2w^2 = 4\alpha_3^{-1}(xw)^2.$$

Hemos obtenido que

$$((w^2x^2)x)w^2 = 4\beta_1\alpha_3^{-1}(xw)^2.$$

Por otro lado, usando (3) y luego reemplazando y por x^2 y x por w en (1) obtenemos:

$$\begin{aligned} ((w^2x^2)x)w^2 &= -2((w^2x^2)w)(xw) = (4((x^2w)w)w + 2x^2w^3)(xw) \\ &= 4(((x^2w)w)w)(xw) + 2(x^2w^3)(xw). \end{aligned}$$

Usando (10) obtenemos:

$$(((x^2w)w)w)(xw) = -1/2(w^3((x^2w)x) - ((x^2w)w^2)(xw)) = 0,$$

puesto que de (3) $(x^2w)x = 0$ y de (2) $(x^2w)w^2 = 0$. Finalmente, usando (10) y entonces (12) tenemos que

$$(x^2w^3)(xw) = -2((w^3x)x)(xw) = 2(w^3x)((wx)x) = 0$$

dado que $(wx)x = 0$. Por consiguiente, $\beta_1\alpha_3^{-1}(wx)^2 = 0$. Se sigue que $\beta_1 = 0$ o $(wx)^2 = 0$. En cualquier caso obtenemos que w^2 esta en el $\text{Ker}(L_{x^2}L_x)$ y que

$$\text{Ker}(L_{x^2}L_x) = \{yx, (yx)x, ((yx)x)x, w, wx, a, b\}.$$

Es facil probar que $\text{Ker}(L_{x^2}L_x)$ es una subalgebra. De aqui que A es soluble. Asumamos ahora que $x^3 \neq 0$. En este caso $x^3 = \alpha_2((yx)x)x$ y de aqui que $\alpha_2 \neq 0$. Asumamos primero $\alpha_5 \neq 0$. Luego podemos tomar la base de A dado por el conjunto

$$\{y, yx, (yx)x, x, x^2, x^3, a, b\}.$$

Por consiguiente;

$$((Ax)x)(Ax) = \langle ((yx)x)(yx) \rangle .$$

Si $((yx)x)(yx) = 0$ entonces A es soluble. Si $((yx)x)(yx) \neq 0$, consideremos el operador $L_{x^2}L_{yx}$. Es facil ver que $yL_{x^2}L_{yx} \neq 0$ y que

$$\text{Ker}(L_{x^2}L_{yx}) = \{yx, (yx)x, x, x^2, x^3, a, b\}.$$

Ademas, $\text{Ker}(L_{x^2}L_{yx})$ es una subalgebra de A . De aqui que A es soluble. Asumamos ahora $\alpha_5 = 0$. Puesto que $\alpha_2 \neq 0$, obtenemos que

$$(yx)x = \alpha_2^{-1}x^2 - \alpha_2^{-1}\alpha_3x^3.$$

De aqui que, podemos tomar una nueva base de A dado por el conjunto

$$\{y, x, x^2, x^3, w, wx, a, b\}.$$

Entonces:

$$Ax = \langle yx, x^2, x^3, wx \rangle$$

y

$$(Ax)x = \langle x^2, x^3 \rangle .$$

De aqui que $((Ax)x)(Ax) = 0$ y A es soluble.

Base e): Sea

$$x = \alpha_1y + \alpha_2yx + \alpha_3(yx)x + \alpha_4((yx)x)x + \alpha_5a + \alpha_6b + \alpha_7c + \alpha_8d.$$

Aplicando L_x^3 a x obtenemos que $\alpha_1 = 0$. Se sigue que

$$x^2 = \alpha_2(yx)x + \alpha_3((yx)x)x$$

y $x^3 = \alpha_2((yx)x)x = 0$. Asumamos primero que $x^3 = 0$. Entonces $\alpha_2 = 0$ y $x^2 = \alpha_3((yx)x)x$, de aqui que $\alpha_3 = 0$. De (1) obtenemos que

$$(ax^2)x = (bx^2)x = (cx^2)x = (dx^2)x = 0.$$

Puesto que $(yx^2)x = -2((yx)x)x \neq 0$, se sigue que

$$\text{Ker}(L_{x^2}L_x) = \{yL_x, yL_x^2, yL_x^3, a, b, c, d\}.$$

Usando calculos directos de (3) provamos que el $\text{Ker}(L_{x^2}L_x)$ es una subalgebra de A . Se sigue que A es soluble.

Asumamos ahora $x^3 \neq 0$. De aqui que $\alpha_2 \neq 0$ y $((yx)x)x = \alpha_2^{-1}x^3$. De aqui que podemos tomar una nueva base de A dado por el conjunto

$$\{y, x, x^2, x^3, a, b, c, d\}.$$

De aqui que,

$$((Ax)x)(Ax) = \langle x^2, x^3 \rangle \langle yx, x^2, x^3 \rangle = 0.$$

Se sigue de (13) que A es soluble.

Capítulo 4

Avances en el Problema de Albert para Dimension Nueve

Es posible extender nuestros resultados al caso en que la dimension es nueve. En este caso no contamos con la identidad $(xy)x^3 = 0$, que ha cumplido un papel fundamental en la demostracion de solubilidad hasta dimension 8. De hecho podemos enunciar el siguiente resultado:

Lema 4.1 Si A es una nilalgebra conmutativa, asociativa en las potencias de nilindice cuatro, dimension ≤ 8 entonces $(xy)x^3 = 0$ es una identidad en A .

Teorema 4.2 Sea A una nilalgebra conmutativa, asociativa en las potencias de nilindice cuatro y dimension 9 sobre un cuerpo K de caracteristica 0 o > 7 . Entonces A es soluble o satisface la identidad $(xy)x^3 = 0$.

Demostracion. Si $L_x^3 = 0$ para todo x en A entonces por Teorema 1.X A es soluble. Si existe algun elemento x en A con $L_x^3 \neq 0$, entonces tenemos dos posibilidades: $L_x^4 = 0$ para todo x en A o, existe x en A con $L_x^4 \neq 0$. En el primer caso, por la identidad (2.4) A satisface $(xy)x^3 = 0$. Sea x en A tal que $L_x^4 \neq 0$. Sabemos por XXXXXXXXXXXX que $L_x^5 = 0$. Luego el polinomio minimal de L_x es X^5 . De esta forma las posibles representaciones canonicas de Jordan de L_x son:

- a) $J(5, 4)$,
- b) $J(5, 3, 1)$,
- c) $J(5, 2, 2)$,
- d) $J(5, 2, 1, 1)$,
- e) $J(5, 1, 1, 1, 1)$.

Base a): Escribiendo x como combinacion lineal de la base respectiva en a) se obtiene que x esta en Ax lo que contradice la nilpotencia del operadores multiplicacion. Luego esta base no es imposible de ocurrir.

Base b): En este caso A tiene una base de la forma

$$\{y, yx, (yx)x, ((yx)x)x, (((yx)x)x)x, z, zx, (zx)x\}.$$

Observamos que

$$\text{Ker}(L_x^4) = \{yx, (yx)x, ((yx)x)x, (((yx)x)x)x, z, zx, (zx)x\}.$$

Observemos que

$$\text{Ker}(L_x^4) = \text{Ker } L_x L_{x^3} = \text{Ker}(L_{x^2}^2).$$

Es facil comprobar, usando estas igualdades, que

$$[\text{Ker}(L_x^4)]^2 L_x^4 = 0.$$

Se concluye que $\text{Ker}(L_x^4)$ es una subalgebra de dimension ocho de A . De aqui, por Proposicion 1.9 $\text{Ker}(L_x^4)$ es un ideal A y ademas una nilalgebra asociativa en las potencias de dimension ocho y nilindice XX. Usando ahora Proposicion 1.1 concluimos que A es soluble.

Utilizando los mismos metodos que en el Ledma 3.2, en los casos c), d), e), escribimos x como combinacion lineal de la base respectiva y aplicamos L_x^3 para obtener que $x^3 = \alpha(((yx)x)x)x$ para cierto α en K . Por identidad (2.4) obtenemos que $x^3 = -1/2\alpha^{-1}(xy)x^3$. De aqui se deduce que necesariamente $\alpha = 0$. Esto implica que $x^3 = 0$. De aqui, desde la identidad (2.4) concluimos que $(((yx)x)x)x = 0$ lo que es una

contradiccion pues $((yx)x)x$ es parte de la base de A . Luego estos casos no ocurren. Esto prueba el Teorema.

A continuacion veremos algunos casos de dimension nueve en que se cumple la identidad $(xy)x^3$ y el álgebra es soluble.

Usando los mismos argumentos anteriores es posible demostrar el siguiente resultado:

Lema 4.3 Sea A una nilálgebra conmutativa asociativa en las potencias de dimension finita n sobre un cuerpo de caracteristica 0 o $> n$. Si existe x en A con $L_x^4 \neq 0$ y la representacion en su forma canonica de Jordan de L_x es $J(5, i_2, \dots, i_s)$ con $i_2 \leq 2$ entonces A satisface la identidad $(xy)x^3 = 0$.

A continuacion veremos algunos casos de dimension nueve en que se cumple la identidad $(xy)x^3$ y el álgebra es soluble.

Sea x en A con $L_x^3 \neq 0$ y $L_x^4 = 0$.

Las posibles formas matriciales de Jordan son:

- a) $J(4, 4, 1)$, b) $J(4, 3, 2)$, c) $J(4, 3, 1, 1)$, d) $J(4, 2, 2, 1)$, e) $J(4, 2, 1, 1, 1)$,
 f) $J(4, 1, 1, 1, 1, 1)$, g) $J(3, 3, 3)$, h) $J(3, 3, 2, 1)$, i) $J(3, 3, 1, 1, 1)$, j) $J(3, 2, 2, 2)$,
 k) $J(3, 2, 2, 1, 1)$, l) $J(3, 2, 1, 1, 1, 1)$, m) $J(3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Proposicion 4.X Si existe x en A con $x^3 \neq 0$ y tal que L_x tiene una representacion canonica de Jordan del tipo x), x) o x), entonces A es soluble.

Demostracion. En el caso x) A tiene una base de la forma

$$\{y, yx, (yx)x, ((yx)x)x, a, b, c, d, e\}$$

con $((yx)x)x = ax = bx = cx = dx = ex = 0$. Escribiendop x como combinacion lineal de la base concluimos que el conjunto

$$\{y, x, x^2, x^3, a, b, c, d, e\}$$

es base de A y que

$$\text{Ker}(L_{x^2}L_{xy}) = \{x, x^2, x^3, a, b, c, d, e\}.$$

Analogamente a los casos vistos en dimension ocho es facil probar que $\text{Ker}(L_{x^2}L_{xy})$ es una subalgebra de A . Como esta subalgebra tiene dimension ocho aplicamos y su nilindice es ≤ 4 , es soluble. Ademas por Proposicion XX es un ideal, luego usando Proposicion XX obtenemos que A es soluble.

En el caso X) A tiene una base de la forma

$$\{y, yx, (yx)x, ((yx)x)x, w, wx, a, b, c\}.$$

Sea

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4 ((yx)x)x + \alpha_5 w + \alpha_6 wx + \alpha_7 a + \alpha_8 b + \alpha_9 c.$$

Usando que $x^3 \neq 0$ concluimos que el conjunto

$$\{y, x, x^2, x^3, w, wx, a, b, c\}$$

es una base de A y que:

Si $\alpha_5 \neq 0$, entonces:

$$((Ax)x)(Ax) = \langle ((yx)x)(yx) \rangle .$$

Si $((yx)x)(yx) = 0$ entonces A es soluble.

Si $((yx)x)(yx) \neq 0$ entonces

$$\text{Ker}(L_x^2 L_{xy}) = \{x, x^2, x^3, w, wx, a, b, c\}.$$

Ademas se prueba facilmente $\text{Ker}(L_x^2 L_{xy})$ es una subalgebra de A de donde concluimos que A es soluble.

Si $\alpha_5 = 0$ entonces $((Ax)x)(Ax) = 0$. De aqui, A es soluble.

Usando el mismo tipo de argumentos se concluye finalmente que en el caso X) A tambien es soluble.

Conclusion final. Es posible continuar el estudio de nuestro problema en dimensiones bajas usando el metodo desarrollado hasta ahora por

nosotros. Lo interesante sería obtener un algoritmo que nos permitiera por ejemplo obtener resultados sobre las representaciones de Jordan al menos en el caso de nilíndice cuatro.

Nuestro trabajo inmediato será completar el estudio al menos hasta dimensión nueve.

Bibliografía

1. A. A. Albert, On power-associative rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **64** (1948), 552-593.
2. Correa, I.; Finitely generated Bernstein algebras, *Algebras Groups and Geometries* **1996**, 13, 380-383.
3. I. Correa, A. Suazo, On a class of Commutative power-associative nilalgebras, *Journal of Algebra* **215** (1999), 412-417.
4. I. Correa and I. R. Hentzel, On Solvability of Noncommutative Power-Associative Nilalgebras, *Journal of Algebra* **240** (2001), 98-102.
5. I. Correa, L. A. Peresi, On the solvability of the power-associative nilalgebras of dimension five, *Results in Mathematics* **39** (2001), 23-27.
6. I. Correa, I. R. Hentzel, L. A. Peresi, On the solvability of the commutative power-associative nilalgebras of dimension 6, *Linear Alg. Appl.* **369** (2003), 185-192.
7. I. Correa, I. R. Hentzel, A. Labra, On the Nilpotence of Right Multiplication Operator in Right NilAlgebras, *Communications in Algebra* **30** (7) (2002), 3473-3488.
8. I. Correa, I. R. Hentzel, L. A. Peresi, On the Nilpotence of the Commutative Right Nilalgebras of Maximum Right Nilindex, por aparecer en *International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra*.
9. I. Correa, I. R. Hentzel, A. Labra, On Solvability of Right Nilalgebras of Low Dimension, por aparecer en *International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra*.
10. I. Correa, I. R. Hentzel, P. P. Julca, L. A. Peresi, Nilpotent linear transformations and the Albert's problem, preprint.

11. I. Correa, I. R. Hentzel, Commutative algebras with $((yx)x)x=0$, preprint.
12. I. Correa, P. P. Julca, On the Albert's Problem in Dimension Eight, Preprint.
13. L. Elgueta, A. Suazo, Solubilidad de las Nilalgebras Conmutativas de Potencias Asociativas de Nilindice 4 y Dimension ≤ 8 , Actas LXXV Encuentro de la Sociedad de Matematica de Chile, Vicua, Octubre del 2003.
14. M. Gerstenhaber, H. C. Myung, On commutative power-associative nilalgebras of low dimension, *Proc. Amer. Math. Soc.* **48** (1975), 29-32.
15. M. Gerstenhaber, On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices I, *Amer. J. Math.* 80 (1958), 614-622.
16. M. Gerstenhaber, On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices II, *Duke Math. J.* 27 (1960), 21-31.
17. M. Gerstenhaber, On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices III, *Ann. Math.* 70 (1959), 167-205.
18. J. C. Gutiérrez Fernández, On commutative power-associative nilalgebras, preprint.
19. P. Jordan, J. von Neumann, E. Wigner, On an algebraic generalization of the Quantum Mechanical Formalism, *Ann. Math.*, II **35** (1934), 29-64.
20. P. P. Julca, Sobre Operadores Nilpotentes y el Problema de Albert, Actas LXXV Encuentro de la Sociedad de Matematica de Chile, Vicua, Octubre del 2003.
21. Y. I. Lyubich, *Mathematical Structures in Population Genetics, Biomathematics Volume 22*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1992.
22. J. M. Osborn, Varieties of Algebras, *Adv. Math.* **8** (1972), 163-369.

23. L. A. Peresi, "Algebras nao-associativas", Cursillo X Congreso de Matemáticas Capricornio COMCA, La Serena 2000.
24. R. D. Schafer, "An Introduction to Nonassociative Algebras", Academic Press, New York, London, 1966.
25. D. Suttles, A counterexample to a conjecture of Albert, *Notices Amer. Math. Soc.* **19** (1972), A-566.
26. Zhevlakov, K. A.; Slin'ko A. M.; Shestakov, I. P.; Shirshov, A. I.; Rings that are nearly associative, Academic Press, New York, 1982.