



UMA METODOLOGIA PARA COMPARAR OS RESULTADOS DA CINÉTICA  
PONTUAL DE REATORES SUBCRÍTICOS GUIADOS POR FONTE COM  
AQUELES DA CINÉTICA ESPACIAL

Luis Lionel Salas Ramón

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Nuclear.

Orientadores: Fernando Carvalho da Silva  
Alessandro da Cruz Gonçalves

Rio de Janeiro  
Novembro de 2017

UMA METODOLOGIA PARA COMPARAR OS RESULTADOS DA CINÉTICA  
PONTUAL DE REATORES SUBCRÍTICOS GUIADOS POR FONTE COM  
AQUELES DA CINÉTICA ESPACIAL

Luis Lionel Salas Ramón

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO  
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE  
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA  
NUCLEAR.

Examinada por:

---

Prof. Fernando Carvalho da Silva, D.Sc.

---

Prof. Alessandro da Cruz Gonçalves, D.Sc.

---

Dr. Zelmo Rodrigues de Lima, D.Sc.

---

Prof. Hermes Alves Filho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
NOVEMBRO DE 2017

Salas Ramón, Luis Lionel

Uma Metodologia para Comparar os Resultados da Cinética Pontual de Reatores Subcríticos Guiados por Fonte com aqueles da Cinética Espacial/Luis Lionel Salas Ramón. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XV, 66 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Fernando Carvalho da Silva

Alessandro da Cruz Gonçalves

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Nuclear, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 64 – 66.

1. Cinética Espacial. 2. Cinética Pontual. 3. Reatores Subcríticos. I. Silva, Fernando Carvalho da *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Nuclear. III. Título.

*Dedico esse trabalho ao meu  
Notebook, muito obrigado por  
fazer que essa dissertação vire de  
gênero científico a gênero  
melodramático.*

# <sup>1</sup>Agradecimentos

Tendo consciência que sozinho nada teria sido possível, dirijo um agradecimento especial à minha mãe, meu maior motivo para nunca desistir, por ser meu modelo de coragem, pelo apoio incondicional nas minhas loucuras, pela paciência e a liberdade que me deu. Ao meu pai muito obrigado por confiar em mim plenamente, pelo orgulho que sempre demonstrou em cada um de meus passos. A vocês pais dedico este trabalho e minha vida toda.

A realização desta dissertação só foi possível graças à colaboração direta de meus orientadores. Ao professor Fernando Carvalho da Silva, obrigado pelos conselhos, ensinamentos, paciência e por compartilhar todo o tempo seu conhecimento. Ao professor Alessandro da Cruz Gonçalves agradeço muito a orientação, o apoio e motivação para continuar o desenvolvimento do trabalho. Agradeço aos membros da banca por aceitarem participar da minha defesa e pelo tempo dedicado na leitura de meu trabalho, assim como as críticas e sugestões na elaboração da minha dissertação. Aos professores e colegas do Programa de Engenharia Nuclear que me ajudaram ativa ou passivamente neste projeto. Vocês também foram referências para mim. Aos funcionários do Programa de Engenharia Nuclear, em especial ao Reginaldo, Liliane, Josevalda e Washington, pela disponibilidade, simpatia e gentileza. Ao Cnpq pela bolsa de estudos.

Aos meus amigos pelo apoio e por que sempre estiveram disponíveis nos momentos difíceis apesar de minha falta de dedicação à eles nesses últimos meses; a Elaine pela complicidade e carinho; a Francisco pelas brincadeiras; a Miguel pela preocupação, aos meus amigos do curso Carlos, Felipe, Fernando, Izabella, Hidmer e Patricia obrigado pelo apoio. Enfim, agradeço a todas as pessoas que fizeram parte dessa etapa da minha vida, vocês tornaram mais leve meu trabalho.

Por certo, ao meu irmão que mesmo longe teve a maior das contribuições nesse trabalho, obrigado por me dar a paz de saber que você pode cuidar de meus pais, estou orgulhoso.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

UMA METODOLOGIA PARA COMPARAR OS RESULTADOS DA CINÉTICA  
PONTUAL DE REATORES SUBCRÍTICOS GUIADOS POR FONTE COM  
AQUELES DA CINÉTICA ESPACIAL

Luis Lionel Salas Ramón

Novembro/2017

Orientadores: Fernando Carvalho da Silva  
Alessandro da Cruz Gonçalves

Programa: Engenharia Nuclear

O principal objetivo do presente estudo é a análise dos resultados da equação de Cinética Pontual [1] para sistemas subcríticos, utilizando a Função Importância proposta por DULLA *et al* [2] para cálculo dos Parâmetros Cinéticos, e comparar estes resultados com aqueles oriundos da Cinética Espacial para uma configuração unidimensional a dois grupos de energia.

A metodologia proposta consiste em resolver primeiro o Problema de Autovalor, para verificar se a configuração adotada é de fato subcrítica, e em seguida resolver o Problema de Fonte Fixa, para esta configuração subcrítica, no estado estacionário. Uma vez que o sistema subcrítico é estabelecido, a Função Importância proposta por DULLA *et al* [2] é calculada e os Parâmetros Cinéticos, para este sistema, determinados.

Alguns transientes postulados para sistemas subcríticos guiados por fonte foram simulados com o programa de Cinética Pontual desenvolvido e os resultados comparados com as simulações, destes mesmos transientes, feitas com o programa de Cinética Espacial também desenvolvido nesta dissertação.

Os resultados, mostram que a Cinética Pontual [1] com a utilização da Função Importância de DULLA *et al* [2] para obtenção dos Parâmetros Cinéticos, reproduz adequadamente o comportamento mostrado pela Cinética Espacial, para os transientes considerados.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

A METHODOLOGY FOR COMPARING THE POINT KINETICS RESULTS  
OF SOURCE-GUIDED SUBCRITICAL REACTORS WITH THOSE OF  
SPATIAL KINETICS

Luis Lionel Salas Ramón

November/2017

Advisors: Fernando Carvalho da Silva  
Alessandro da Cruz Gonçalves

Department: Nuclear Engineering

The main objective of the present study is the analysis of the results of the equation of Point Kinetics [1] for subcritical systems, using the Importance Function proposed by DULLA *et al* [2] to calculate the Kinetic Parameters and comparing these results with those from Spatial Kinetics for a one-dimensional configuration for two energy groups.

The proposed methodology consists first in solving the EigenValue Problem, to verify if the adopted configuration is in fact subcritical and then in solving the Fixed Source Problem for this subcritical configuration, in steady state. Once the subcritical system is completed, the Importance Function proposed by DULLA *et al* [2] is calculated and the Kinetic Parameters for this system are determined.

Some transients postulated for subcritical systems and guided by source were simulated with the developed Point Kinetics program and the results were then compared with the simulations, of the same transients, made with the program of Spatial Kinetics also developed in this dissertation.

The results show that Point Kinetics [1], with the use of Importance Function proposed by DULLA *et al* [2] to obtain the Kinetic Parameters, adequately reproduces the behavior shown by the Spatial Kinetics for the considered transients.

# Sumário

<b>Lista de Tabelas</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	3
1.2 Preliminares . . . . .	3
<b>2 Problema de Autovalor</b>	<b>4</b>
2.1 Introdução . . . . .	4
2.2 Equação da Difusão de Nêutrons . . . . .	4
2.3 Discretização Espacial . . . . .	6
2.3.1 Método de Diferenças Finitas . . . . .	7
2.4 Equação de Diferenças . . . . .	13
2.5 Matrizes de Discretização e Método de Solução . . . . .	14
<b>3 Problema de Fonte Fixa</b>	<b>17</b>
3.1 Introdução . . . . .	17
3.2 Equação de Difusão de Nêutrons . . . . .	17
3.3 Equação de Diferenças e Método de Solução . . . . .	18
<b>4 Cinética Espacial</b>	<b>20</b>
4.1 Introdução . . . . .	20
4.2 Equações da Cinética Espacial . . . . .	20
4.3 Equação de Diferenças . . . . .	23
4.3.1 Equação <i>Semidiscretizada</i> da Cinética Espacial . . . . .	26
4.4 Discretização Temporal . . . . .	28
4.5 Cálculo do Fluxo de Nêutrons . . . . .	30

<b>5</b>	<b>Cinética Pontual</b>	<b>32</b>
5.1	Introdução . . . . .	32
5.2	Equações da Cinética Pontual . . . . .	32
5.3	Discretização Temporal . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Validação dos Programas Desenvolvidos</b>	<b>37</b>
6.1	Introdução . . . . .	37
6.1.1	Configuração do <i>Benchmark</i> ANL-BSS-6-A2 . . . . .	38
6.2	Cálculo de Problema de Autovalor . . . . .	39
6.3	Cálculo de Problema de Fonte Fixa . . . . .	40
6.4	Cálculo de Função Importância . . . . .	42
6.5	Cálculo da Cinética Espacial . . . . .	44
<b>7</b>	<b>Cinética Pontual para Reatores Subcríticos com Fonte</b>	<b>47</b>
7.1	Introdução . . . . .	47
7.2	Configuração do Núcleo Subcrítico . . . . .	47
7.2.1	Resultados do Problema de Fonte Fixa . . . . .	49
7.3	Parâmetros da Cinética Pontual . . . . .	51
7.4	Validação das Equações da Cinética Pontual . . . . .	53
7.4.1	Resultados do Transiente 1 . . . . .	54
7.4.2	Resultados do Transiente 2 . . . . .	56
7.4.3	Resultados do Transiente 3 . . . . .	59
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>62</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>64</b>

# Lista de Tabelas

6.1	Características do núcleo <i>benchmark</i> 1-D ANL-BSS-6-A2. . . . .	38
6.2	Frações de Potência. . . . .	40
7.1	Parâmetros Nucleares. . . . .	48
7.2	Parâmetros associados aos nêutrons retardados. . . . .	51
7.3	Parâmetros Cinéticos com a Função Importância de Dulla <i>et al.</i> . . .	53
7.4	Tempos de Cálculo(em segundos). . . . .	61

# Lista de Figuras

1.1	Diagrama geral de um reator "híbrido". . . . .	2
2.1	Núcleo de reator formado por M regiões. . . . .	6
2.2	Região $m$ dividida em malhas. . . . .	6
2.3	Representação dos pontos $x_n^-$ e $x_n^+$ . . . . .	8
4.1	Intervalos de discretização temporal. . . . .	28
6.1	Geometria 1-D do <i>benchmark</i> ANL-BSS-6-A2. . . . .	38
6.2	Distribuição do fluxo de nêutrons para o grupo rápido. . . . .	39
6.3	Distribuição do fluxo de nêutrons para o grupo térmico. . . . .	39
6.4	Distribuição de fluxo de nêutrons rápidos. . . . .	41
6.5	Distribuição de fluxo de nêutrons térmicos. . . . .	41
6.6	Fluxo Adjunto para o grupo rápido. . . . .	42
6.7	Fluxo Adjunto para o grupo térmico. . . . .	43
6.8	Função Importância para o grupo rápido. . . . .	44
6.9	Função Importância para o grupo térmico. . . . .	44
6.10	Distribuição de fluxo rápido do cálculo de Cinética Espacial. . . . .	45
6.11	Distribuição de fluxo térmico do cálculo de Cinética Espacial. . . . .	46
7.1	Configuração do núcleo subcrítico. . . . .	47
7.2	Distribuição do fluxo de nêutrons do Grupo 1 para o Problema de Autovalor. . . . .	48
7.3	Distribuição do fluxo de nêutrons do Grupo 2 para o Problema de Autovalor. . . . .	49
7.4	Distribuição do fluxo de nêutrons do Grupo 1 para o Problema de Fonte Fixa. . . . .	50
7.5	Distribuição do fluxo de nêutrons do Grupo 2 para o Problema de Fonte Fixa. . . . .	50
7.6	Função Importância para o Grupo 1. . . . .	52
7.7	Função Importância para o Grupo 2. . . . .	52
7.8	$\bar{P}(t)$ da Cinética Espacial para o Transiente 1. . . . .	55

7.9	$\bar{P}(t)$ da Cinética Pontual para o Transiente 1. . . . .	56
7.10	Comportamento no tempo da fonte externa para o Transiente 2. . . . .	57
7.11	$\bar{P}(t)$ da Cinética Espacial para o Transiente 2. . . . .	57
7.12	$\bar{P}(t)$ da Cinética Pontual para o Transiente 2. . . . .	58
7.13	Comportamento no tempo da fonte externa para o Transiente 3. . . . .	59
7.14	$\bar{P}(t)$ da Cinética Espacial para o Transiente 3. . . . .	60
7.15	$\bar{P}(t)$ da Cinética Pontual para Transiente 3. . . . .	61

# Lista de Símbolos

$\chi_g$	Espectro de fissão do grupo de energia $g$ , p. 5
$\chi_{i,g}$	Fracção de decaimentos da $i$ -ésima família de precursores cuja emissão de nêutrons retardados ocorre no grupo de energia $g$ , p. 21
$C_i$	Concentração do $i$ -ésimo grupo de precursores de nêutrons retardados., p. 35
$D_g$	Coefficiente de difusão nêutrons do grupo de energia $g$ , p. 5
$J_g$	Corrente líquida de nêutrons do grupo de energia $g$ , p. 5
$K_{eff}$	Fator de multiplicação efetivo, p. 5
$S_{ext,g}$	Fonte externa de nêutrons do grupo de energia $g$ , p. 18
$\Lambda$	Tempo médio de geração de nêutrons., p. 34
$\Sigma_{Rg}$	Seção de choque macroscópica de remoção do grupo de energia $g$ , p. 5
$\Sigma_{ag}$	Seção de choque macroscópica de absorção do grupo de energia $g$ , p. 5
$\Sigma_{fg'}$	Seção de choque macroscópica de fissão do grupo de energia $g'$ , p. 5
$\Sigma_{gg'}$	Seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons do grupo de energia $g'$ para o grupo de energia $g$ , p. 5
$\bar{\beta}$	Fracção efetiva de nêutrons retardados., p. 35
$\bar{\beta}_i$	Fracção efetiva do $i$ -ésimo grupo de precursores de nêutrons retardados., p. 35
$\beta$	Fracção total de nêutrons retardados., p. 22

$\beta_i$	Fracção da $i$ -ésimo grupo de precursores de nêutrons retardados., p. 22
$\Delta t$	Tamanho dos intervalos de tempo, p. 28
$\Delta x_m$	Tamanho de cada partição da região $m$ , p. 6
$\gamma$	Fator gamma., p. 35
$\hat{J}_g$	Corrente líquida de nêutrons do grupo de energia $g$ , do Problema de Fonte Fixa, p. 18
$\hat{\phi}_g$	Fluxo de nêutrons do grupo de energia $g$ , do Problema de Fonte Fixa, p. 18
$\lambda_i$	Período de desintegração da $i$ -ésima família de precursores de nêutrons retardados., p. 22
$\nu$	Numero médio de nêutrons produzido na fissão, p. 5
$\phi_g$	Fluxo de nêutrons do grupo de energia $g$ , do Problema de Autovalor, p. 5
$\rho$	Reatividade., p. 34
$v_g$	Velocidade dos nêutrons do grupo de energia $g$ , p. 21
$\varphi_g$	Fluxo de nêutrons do grupo de energia $g$ , da Cinética Espacial, p. 21
$q$	Fator fonte., p. 35

# Lista de Abreviaturas

ABI	Accelerator Beam Interruption, p. 46
ABO	Accelerator Beam Overpower, p. 46
ADS	Acceleration Driven System, p. 1

# Capítulo 1

## Introdução

Para satisfazer o aumento da demanda de energia mundial, a humanidade vem procurando novas formas de energia, com isto, as possibilidades de desenvolvimento da energia nuclear também vem aumentando. As pesquisas orientam-se na sofisticação dos reatores nucleares, para a melhora do uso dos combustíveis, não obstante, depois de finalizado o ciclo, a gestão dos resíduos provenientes do combustível nuclear das centrais nucleares convencionais, é atualmente, um dos desafios que enfrenta o uso deste tipo de energia, já que estes resíduos radiativos são de alta atividade. Por outro lado, existe o fato inegável de que o combustível é limitado, essa circunstância converte a energia nuclear em seu estado atual em energia estritamente não renovável [3, 4].

Neste contexto, o desenvolvimento de sistemas nucleares inovadores como os reatores rápidos e subcríticos desempenharão um papel importante devido às suas potencialidades e flexibilidade em diferentes cenários, tanto a redução de resíduos como a possibilidade de atuar como sistemas reprodutores são vantagens que estes dois tipos de reatores compartilham. Não obstante, devido as suas características inerentes, os sistemas subcríticos atingem esses objetivos com um nível de segurança superior. Portanto, os sistemas subcríticos apresentam-se como uma das melhores opções para dar sustentabilidade à energia nuclear[4].

Esses sistemas subcríticos, utilizam uma fonte externa de nêutrons que permite manter a reação em cadeia dentro do núcleo do reator. Os reatores subcríticos acionados por fonte externa, figura 1.1 [5], são sistemas que operam com corrente que varia de 10mA a 12,5mA para um acelerador de prótons de alta energia de 1 a 1,5GeV [6]. Este tipo de reator inovador que trabalha com uma fonte externa de nêutrons, são chamados de “híbridos” devido ao acoplamento de um acelerador de partículas para seu funcionamento [7].

Atualmente esses reatores se encontram em estudo, já que seriam uma boa alternativa para produzir a transmutação de elementos de longa meia-vida gerados durante a operação normal dos reatores nucleares de potência. E por sua versa-

tilidade, poderia ser utilizado como sistema reprodutor, o qual levaria à extensão das reservas existentes de combustível a vários milhares de anos. Esse tipo de reator, na área de pesquisa, denomina-se ADS(Acelerator Driven System), ou seja, sistema guiado por acelerador [8]. Existem países com uma maior contribuição em pesquisas sobre ADS, como Japão , Coreia do Sul, França, Itália e Estados Unidos [9]. Não obstante, estes reatores precisam ainda de um esforço maior em pesquisas, para novas técnicas de processamento e análise, porém, tais programas não foram totalmente desenvolvidos.

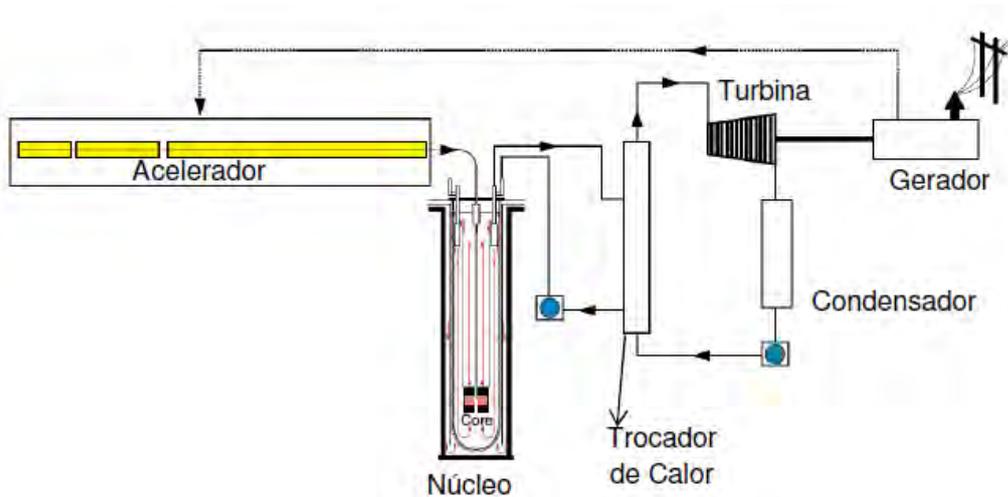


Figura 1.1: Diagrama geral de um reator “híbrido”.

Para poder descrever a cinética que governa os nêutrons de reatores do tipo ADS é necessário calcular alguns parâmetros integrais [10]. Esses parâmetros podem ser determinadas utilizando uma função peso (ou Função Importância), que tem como significado físico a importância dos nêutrons no sistema para o processo de fissão [11].

Existem algumas pesquisas na literatura recentemente: WEMERSON [1] que propôs uma nova Função Importância para a obtenção dos parâmetros da Cinética Pontual, usando a Teoria de Transporte de Nêutrons bidimensional em geometria cartesiana, na formulação de multigrupos de energia. Nesse mesmo trabalho, além de calcular os Parâmetros Cinéticos usando a Função Importância por ele proposta, também calculou estes parâmetros usando as Funções Importâncias propostas por GANDINI e SALVATORES [10] , DULLA *et al* [2] e NISHIHARA *et al* [12] e confrontou umas com outras, para dois problemas de transientes usando os diferentes parâmetros cinéticos obtidos. No entanto, não foi possível concluir, com maior precisão, qual das Funções Importâncias leva aos parâmetros mais bem representativos de um sistema subcrítico. A única exceção ficou por conta da Função Importância proposta por NISHIHARA *et al* [12] , cujos parâmetros diferiam muitíssimo dos demais [1].

## 1.1 Objetivos

Esta dissertação tem por objetivo principal testar, usando Teoria da Difusão de Nêutrons, os Parâmetros de Cinética Pontual de reatores tipo ADS usando a Função importância proposta no trabalho de DULLA *et al* [2], para o qual foram desenvolvidos programas de cálculo a fim de realizar comparações entre a Cinética Pontual e a Cinética Espacial para ADS. Com a finalidade de evidenciar as diferenças ou similitudes entre as duas teorias cinéticas foram utilizados dois tipos de transientes, que representam acidentes comuns, propostos na literatura, para os reatores subcríticos com fonte externa.

## 1.2 Preliminares

O presente trabalho encontra-se estruturado em 8 capítulos, e a seguir é dada uma visão geral do que consta em cada capítulo. No Capítulo 1, é tratado brevemente os conceitos iniciais que originaram o projeto de um reator tipo ADS, a importância dele na atualidade e pesquisas relacionadas ao desenvolvimento desse tipo de reator. No Capítulo 2, são apresentadas as equações para o Problema de Autovalor, é explicado o processo de discretização espacial utilizando o método de diferenças finitas centradas na malha e esse capítulo é importante já que será o padrão para as posteriores discretizações. No Capítulo 3, serão apresentadas as equações para o Problema de Fonte Fixa, e em seguida a discretização pelo método de diferenças finitas centrada na malha. No Capítulo 4, são apresentadas as equações de Cinética Espacial e também a discretização mediante o método de diferenças finitas. Além de isso, também é apresentada a discretização no tempo destas equações. No Capítulo 5, é mostrado o modo de obtenção dos parâmetros cinéticos e suas, respectivas, definições. Também neste mesmo Capítulo é apresentada a equação de Cinética Pontual e a sua discretização temporal. No Capítulo 6, são mostradas as validações para os programas de cálculo desenvolvidos nessa dissertação. No Capítulo 7, finalmente são apresentados os resultados com o objetivo de realizar as comparações. E no Capítulo 8, é exposto as conclusões e, de forma sucinta, sugestões para futuros trabalhos de pesquisa.

# Capítulo 2

## Problema de Autovalor

### 2.1 Introdução

A Teoria da Difusão de Nêutrons Multigrupo é usada em projetos de reatores nucleares onde são feitas simulações para o estudo da operação do reator ou para previsão de condição de criticalidade. A vantagem da formulação de multigrupos é que ela permite escrever a equação de difusão de nêutrons para cada grupo de energia, sabendo-se que, os nêutrons dentro dos reatores nucleares compreendem energias de 0,01eV - 10MeV [13]. Por isto uma forma simplificadora de escrever a equação da difusão de nêutrons é discretizando-a em intervalos de energia conhecidos.

Nesse trabalho divide-se os intervalos de energia em dois grupos, cujas constantes nucleares supõem-se conhecidas para cada um desses dois grupos. Esta equação é discretizada utilizando o método de Diferencias Finitas [14] e o sistema de equações resultante é escrito de forma matricial, para facilitar a sua implementação em um programa computacional.

### 2.2 Equação da Difusão de Nêutrons

A equação da continuidade de nêutrons para o Problema de Autovalor na formulação de multigrupos, e a equação conhecida como Lei de Fick [13], para o caso unidimensional à dois grupos de energia (1D-2G) em um sistema no estado estacionário, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx} J_g(x) + \Sigma_{Rg}(x) \phi_g(x) = \frac{1}{K_{eff}} \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}(x) \phi_{g'}(x) + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \Sigma_{gg'}(x) \phi_{g'}(x) ; \quad g = 1, 2 . \quad (2.1)$$

e

$$J_g(x) = -D_g(x) \frac{d\phi_g}{dx}(x) ; \quad g = 1, 2, \quad (2.2)$$

onde:

$\phi_g(x)$  é o fluxo de nêutrons do grupo de energia  $g$ ;

$J_g(x)$  é a corrente líquida de nêutrons do grupo de energia  $g$ ;

$D_g(x)$  é o coeficiente de difusão nêutrons do grupo de energia  $g$ ;

$K_{eff}$  é o fator de multiplicação efetivo;

$\chi_g$  é o espectro de fissão do grupo de energia  $g$ ;

$\nu \Sigma_{fg'}(x)$  é o produto do número médio de nêutrons emitidos na fissão pela seção de choque macroscópica de fissão do grupo de energia  $g'$ ;

$\Sigma_{gg'}(x)$  é a seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons do grupo de energia  $g'$  para o grupo de energia  $g$ , representada por:

$$\Sigma_{gg'}(x) \equiv \Sigma_s^{g' \rightarrow g}(x);$$

$\Sigma_{Rg}(x)$  é a seção de choque macroscópica de remoção do grupo de energia  $g$ , sendo representada por:

$$\Sigma_{Rg}(x) \equiv \Sigma_{ag}(x) + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \Sigma_{g'g}(x);$$

onde  $\Sigma_{ag}(x)$  é a seção de choque macroscópica de absorção do grupo de energia  $g$ .

## 2.3 Discretização Espacial

Na busca de soluções das equações de difusão de nêutrons, o núcleo do reator é dividido em um número finito de regiões espaciais, nas quais os parâmetros nucleares ( $\Sigma_{Rg}$ ,  $\nu\Sigma_{fg'}$ ,  $\Sigma_{gg'}$  e  $D_g$ ) são uniformes.

Na figura 2.1 pode-se ver uma representação da divisão espacial do núcleo do reator unidimensional em  $M$  regiões.

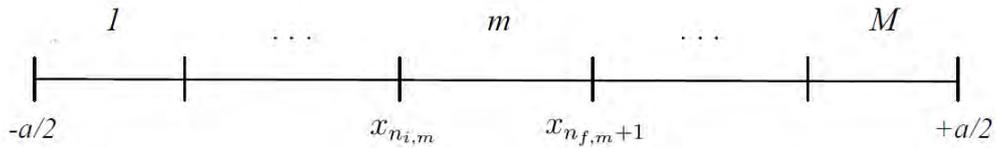


Figura 2.1: Núcleo de reator formado por  $M$  regiões.

Para que finalmente o núcleo do reator seja discretizado, subdivide-se uma região genérica  $m$  em pequenas partições arbitrárias (ou malhas), como mostra a figura 2.2.

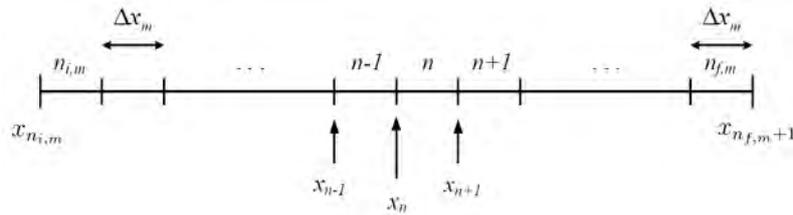


Figura 2.2: Região  $m$  dividida em malhas.

Seja um núcleo de reator unidimensional com  $M$  regiões e  $N$  malhas, representado pelas figuras 2.1 e 2.2, respectivamente, de forma que:

1. A malha  $n$  está associada ao ponto  $x_n$ .
2.  $n_{i,m}$  e  $n_{f,m}$  representam as malhas inicial e final da região  $m$ , respectivamente.
3. O tamanho de cada partição da região  $m$ , vem da divisão do tamanho da região pelo número de partições, assim

$$\Delta x_m = (x_{n_{f,m}+1} - x_{n_{i,m}}) / \text{número de partições na região } m.$$

A seguir é apresentado o método de discretização usado nesse trabalho para a solução numérica da equação de difusão de nêutrons.

### 2.3.1 Método de Diferenças Finitas

Uma das formas de encontrar soluções para as equações diferenciais é utilizar processos de aproximação numérica. O Método de Diferenças Finitas pode ser usado para calcular aproximadamente a derivada de uma dada função[14] e dois diferentes esquemas podem ser adotados para completar a discretização espacial, quais sejam,

i) **Esquema Centrado na Malha** Neste esquema tem-se que :

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi_g(x) dx \equiv \bar{\phi}_g^n \Delta x_m$$

ii) **Esquema Centrado na Interface** Neste esquema faz-se:

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \phi_g(x) dx \approx \bar{\phi}_g^n \{x_{n+1/2} - x_{n-1/2}\}$$

É importante observar que nesse trabalho é utilizado a discretização por Diferenças Finitas com esquema Centrado na Malha. Então, integrando a equação (2.1) em  $x_n \leq x \leq x_{n+1}$  obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{d}{dx} J_g(x) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Sigma_{Rg}(x) \phi_g(x) dx &= \frac{1}{k_{eff}} \chi_g \sum_{g'=1}^2 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \nu \Sigma_{fg'}(x) \phi_{g'}(x) dx + \\ &+ \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Sigma_{gg'}(x) \phi_{g'}(x) dx \quad (2.3) \end{aligned}$$

Considerando que para cada região genérica  $m$  , os parâmetros nucleares são uniformes, ou seja, que

$$\begin{cases} D_g(x) \equiv D_g^m; & \Sigma_{gg'}(x) \equiv \Sigma_{gg'}^m \\ \Sigma_{Rg}(x) \equiv \Sigma_{Rg}^m; & \nu \Sigma_{fg'}(x) \equiv \nu \Sigma_{fg'}^m \end{cases} ; \quad \text{para } x_{n_i,m} < x < x_{n_f,m+1} ;$$

e definindo o fluxo médio de nêutrons ( $\bar{\phi}_g^n$ ) para uma malha  $n$ , como

$$\bar{\phi}_g^n \equiv \frac{1}{\Delta x_m} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi_g(x) dx \quad , \quad (2.4)$$

a equação (2.3) torna-se:

$$J_g(x_{n+1}) - J_g(x_n) + \sum_{Rg}^m \bar{\phi}_g^n \Delta x_m = \frac{1}{K_{eff}} \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \sum_{fg'}^m \bar{\phi}_{g'}^n \Delta x_m + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \sum_{gg'}^m \bar{\phi}_g^n \Delta x_m, \quad (2.5)$$

onde:

$$J_g(x_n) = -D_g(x_n) \left. \frac{d}{dx} \phi_g(x) \right|_{x=x_n}.$$

Independentemente da situação a ser tratada, tanto a continuidade de fluxo quanto a continuidade de corrente líquida têm que ser consideradas para um ponto  $x_n$ , logo podemos escrever:

$$\phi(x_n^+) = \phi(x_n^-) = \phi(x_n) \quad (2.6)$$

e

$$J(x_n^+) = J(x_n^-) = J(x_n), \quad (2.7)$$

onde  $x_n^-$  e  $x_n^+$  são ilustradas na figura 2.3.

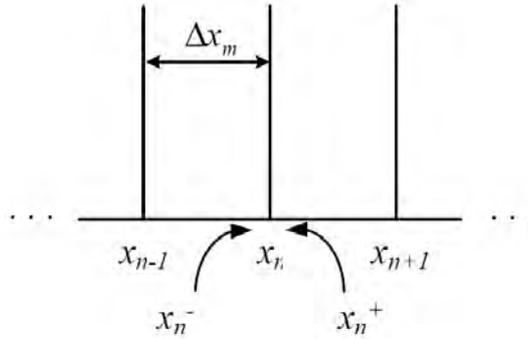


Figura 2.3: Representação dos pontos  $x_n^-$  e  $x_n^+$ .

O fato do fluxo de nêutrons e da corrente líquida serem funções contínuas, combinado com a aproximação de diferenças finitas para as derivadas do fluxo, a Lei de Fick, equação (2.2), nos leva às seguintes expressões para as correntes  $J_g(x_{n+1})$  e  $J_g(x_n)$  que aparecem na equação (2.5) [15] :

## 1) Ponto no interior de uma região

Para  $n_{i,m} < n < n_{f,m}$  ; com  $m = 1, \dots, M$ , tem-se que

$$J_g(x_n^+) = -D_g(x_n^+) \left. \frac{d}{dx} \phi_g(x) \right|_{x=x_n^+} \cong -2D_g^m \frac{\bar{\phi}_g^n - \phi_g(x_n)}{\Delta x_m} \quad (2.8)$$

e

$$J_g(x_n^-) = -D_g(x_n^-) \left. \frac{d}{dx} \phi_g(x) \right|_{x=x_n^-} \cong -2D_g^m \frac{\phi_g(x_n) - \bar{\phi}_g^{n-1}}{\Delta x_m} . \quad (2.9)$$

De acordo com as equações (2.6) e (2.7), tem-se que

$$-2D_g^m \frac{\bar{\phi}_g^n - \phi_g(x_n)}{\Delta x_m} = -2D_g^m \frac{\phi_g(x_n) - \bar{\phi}_g^{n-1}}{\Delta x_m} ,$$

de onde obtém-se que

$$\phi_g(x_n) = \frac{\bar{\phi}_g^n + \bar{\phi}_g^{n-1}}{2} . \quad (2.10)$$

E, conseqüentemente, substituindo a equação (2.10) na equação (2.8) (ou, na equação (2.9)), tem-se que

$$J_g(x_n) = -\frac{D_g^m}{\Delta x_m} (\bar{\phi}_g^n - \bar{\phi}_g^{n-1}) . \quad (2.11)$$

## 2) Ponto de interface a esquerda

Para a malha inicial da região  $m$ , ou seja,  $n = n_{i,m}$ ,  $m = 2, \dots, M$ , seguindo o processo semelhante desenvolvido anteriormente tem-se que

$$J_g(x_n^+) = -2D_g^m \frac{\bar{\phi}_g^n - \phi_g(x_n)}{\Delta x_m} \quad (2.12)$$

e

$$J_g(x_n^-) = -2D_g^{m-1} \frac{\phi_g(x_n) - \bar{\phi}_g^{n-1}}{\Delta x_{m-1}} . \quad (2.13)$$

De acordo com as equações (2.6) e (2.7), obtém-se :

$$\phi_g(x_n) = \frac{D_g^m \Delta x_{m-1} \bar{\phi}_g^n + D_g^{m-1} \Delta x_m \bar{\phi}_g^{n-1}}{D_g^m \Delta x_{m-1} + D_g^{m-1} \Delta x_m} . \quad (2.14)$$

E, conseqüentemente, substituindo a equação (2.14) na equação (2.12) (ou, na equação (2.13)), tem-se que

$$J_g(x_n) = -\frac{2D_g^m D_g^{m-1}}{D_g^m \Delta x_{m-1} + D_g^{m-1} \Delta x_m} (\bar{\phi}_g^n - \bar{\phi}_g^{n-1}) . \quad (2.15)$$

### 3) No ponto de interface a direita

Para a malha final da região  $m$ , ou seja,  $n = n_{f,m}$  ;  $m = 1, \dots, M - 1$  tem-se que

$$J_g(x_n^+) = -2D_g^{m+1} \frac{\bar{\phi}_g^n - \phi_g(x_n)}{\Delta x_{m+1}} \quad (2.16)$$

e

$$J_g(x_n^-) = -2D_g^m \frac{\phi_g(x_n) - \bar{\phi}_g^{n-1}}{\Delta x_m} \quad (2.17)$$

De acordo com as equações (2.6) e (2.7), obtém-se :

$$\phi_g(x_{n+1}) = \frac{D_g^{m+1} \Delta x_m \bar{\phi}_g^{n+1} + D_g^m \Delta x_{m+1} \bar{\phi}_g^n}{D_g^{m+1} \Delta x_m + D_g^m \Delta x_{m+1}} . \quad (2.18)$$

E, conseqüentemente, substituindo a equação (2.18) na equação (2.16) (ou, na equação (2.17)), tem-se que

$$J_g(x_{n+1}) = -\frac{2D_g^{m+1} D_g^m}{D_g^{m+1} \Delta x_m + D_g^m \Delta x_{m+1}} (\bar{\phi}_g^{n+1} - \bar{\phi}_g^n) . \quad (2.19)$$

Com a finalidade de encontrar uma expressão que descreva a corrente líquida nos pontos de contorno do sistema, quais sejam  $J_g(x_1)$  e  $J_g(x_{N+1})$ , correspondentes às malhas inicial e final do sistema, é requerido um tratamento específico que leve em consideração o fluxo e a corrente na superfície do reator. Para tanto, tem-se as seguintes opções de condições de contorno:

1. Fluxo nulo no contorno
2. Corrente líquida nula (Condição de simetria)
3. Corrente de entrada nula:  $J_g^+(x_1) = 0$  e  $J_g^-(x_{N+1}) = 0$

Essas três condições podem ser resumidas da seguinte forma:

$$\alpha \phi_g(x_s) + \beta \left. \frac{d}{dx} \phi_g(x) \right|_{x=x_s} = 0 , \quad (2.20)$$

onde  $x_s$  pode ser  $x_1$  ou  $x_{N+1}$ . Com isso, pode-se escrever:

#### 4) No contorno à esquerda

Para a primeira malha do sistema, ou seja,  $n = 1$ ;  $m = 1$ , tem-se que

$$\alpha\phi_g(x_1) + \beta \left. \frac{d}{dx}\phi_g(x) \right|_{x=x_1} = \alpha\phi_g(x_1) + \beta \frac{\bar{\phi}_g^1 - \phi_g(x_1)}{\Delta x_1/2} = 0 \quad ,$$

o que resulta em

$$\phi_g(x_1) = \frac{2\beta}{2\beta - \alpha \Delta x_1} \bar{\phi}_g^1 \quad (2.21)$$

e

$$J_g(x_1) = \frac{2\alpha D_g^1}{2\beta - \alpha \Delta x_1} \bar{\phi}_g^1 \quad (2.22)$$

#### 5) No contorno à direita

Para a última malha do sistema, ou seja,  $n = N$ ;  $m = M$ , tem-se que

$$\alpha\phi_g(x_{N+1}) + \beta \left. \frac{d}{dx}\phi_g(x) \right|_{x=x_{N+1}} = \alpha\phi_g(x_{N+1}) + \beta \frac{\phi_g(x_{N+1}) - \bar{\phi}_g^N}{\Delta x_M/2} = 0 \quad ,$$

o que resulta em

$$\phi_g(x_{N+1}) = \frac{2\beta}{2\beta + \alpha \Delta x_M} \bar{\phi}_g^N \quad (2.23)$$

e

$$J_g(x_{N+1}) = \frac{2\alpha D_g^M}{2\beta + \alpha \Delta x_M} \bar{\phi}_g^N \quad (2.24)$$

Pode-se observar que  $\alpha$  e  $\beta$  são valores determinantes na formulação das expressões, (2.22) e (2.24), por isso é preciso analisar estes parâmetros nas condições de contorno acima apresentadas, logo:

##### i) Fluxo Nulo no contorno

Nesta condição, faz-se  $\alpha=1$  e  $\beta=0$ , e, conseqüentemente, tem-se:

$$J_g(x_1) = -\frac{2D_g^1}{\Delta x_1} \bar{\phi}_g^1 \quad (2.25)$$

e

$$J_g(x_{N+1}) = -\frac{2D_g^M}{\Delta x_M} \bar{\phi}_g^N \quad (2.26)$$

## ii) Corrente Líquida Nula no contorno

Nesta condição, faz-se  $\alpha=0$  e  $\beta=1$ , e, conseqüentemente, tem-se:

$$J_g(x_1) = 0 \quad (2.27)$$

e

$$J_g(x_{N+1}) = 0 . \quad (2.28)$$

## iii) Corrente de Entrada Nula no contorno

E, por último, nesta condição utiliza-se a Aproximação da Difusão e a definição das correntes líquidas escritas em função das correntes parciais [16], ou seja,

$$\phi_g(x_s) = 2 (J_g^+(x_s) + J_g^-(x_s)) . \quad (2.29)$$

e

$$J_g(x_s) = J_g^+(x_s) - J_g^-(x_s) \quad (2.30)$$

Assim, partindo da condição de corrente de entrada nula, seja à esquerda ( $s = 1$ ) ou seja à direita ( $s = N + 1$ ), e realizando algumas simples operações com (2.30), (2.29) e a Lei de Fick, equação (2.2), obtém-se, no caso da corrente de entrada nula à esquerda ( $J^+(x_1) = 0$ ):

$$\phi_g(x_1) - 2D_g^1 \left. \frac{d}{dx} \phi_g(x) \right|_{x=x_1} = 0 . \quad (2.31)$$

Da equação (2.31) obtém-se que  $\alpha=1$  e  $\beta = -2D_g^1$ , neste caso.

Seguindo o mesmo procedimento, no caso de corrente entrada nula à direita, ( $J^-(x_{N+1}) = 0$ ):

$$\phi_g(x_{N+1}) + 2D_g^M \left. \frac{d}{dx} \phi_g(x) \right|_{x=x_{N+1}} = 0 . \quad (2.32)$$

E, da equação (2.32) obtém-se que  $\alpha=1$  e  $\beta = 2D_g^M$ , neste caso.

Antes de terminar esta seção, tem que ser dito que essas três condições de contorno, são consideradas no programa desenvolvido, permitindo ao usuário a escolha das mesmas.

## 2.4 Equação de Diferenças

Usando as expressões obtidas para  $J_g(x_{n+1})$  e  $J_g(x_n)$  na seção 2.3, após a discretização espacial, a equação (2.5) pode ser escrita de uma forma mais compacta:

$$a_g^n \bar{\phi}_g^{n-1} + b_g^n \bar{\phi}_g^n + c_g^n \bar{\phi}_g^{n+1} = \frac{1}{K_{eff}} \sum_{g'=1}^2 f_{gg'}^n \bar{\phi}_{g'}^n + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 e_{gg'}^n \bar{\phi}_{g'}^n \quad (2.33)$$

onde:

$$f_{gg'}^n = \chi_g \nu \Sigma_{fg'}^m \Delta x_m$$

$$e_{gg'}^n = \Sigma_{gg'}^n \Delta x_m$$

As constantes  $a_g^n$ ,  $b_g^n$  e  $c_g^n$ , para uma malha  $n$  e grupo de energia  $g$ , são definidas como segue:

1) Para  $n = 1$  e  $m = 1$ , tem-se que:

$$c_g^n \equiv \frac{-D_g^m}{\Delta x_m}$$

$$b_g^n \equiv \Sigma_{Rg}^m \Delta x_m - c_g^n - \frac{2\alpha D_g^m}{2\beta_g - \alpha \Delta x_m}$$

2) Para  $n = n_{i,m}$  ; com  $m = 2, \dots, M$ , tem-se que:

$$a_g^n \equiv \frac{-2D_g^{m-1} D_g^m}{D_g^{m-1} \Delta x_m + D_g^m \Delta x_{m-1}}$$

$$c_g^n \equiv \frac{-D_g^m}{\Delta x_m}$$

$$b_g^n \equiv \Sigma_{Rg}^m \Delta x_m - (c_g^n + a_g^n)$$

3) Para  $n_{i,m} < n < n_{f,m}$  ; com  $m = 1, \dots, M$ , tem-se que:

$$a_g^n \equiv \frac{-D_g^m}{\Delta x_m}$$

$$c_g^n \equiv a_g^n$$

$$b_g^n \equiv \Sigma_{Rg}^m \Delta x_m - 2a_g^n$$

4) Para  $n = n_{f,m}$  ; com  $m = 1, \dots, M - 1$ , tem-se que:

$$a_g^n \equiv \frac{-D_g^m}{\Delta x_m}$$

$$c_g^n \equiv \frac{-2D_g^m D_g^{m+1}}{D_g^m \Delta x_{m+1} + D_g^{m+1} \Delta x_m}$$

$$b_g^n \equiv \Sigma_{Rg}^m \Delta x_m - (c_g^n + a_g^n)$$

5) Para  $n = N$  ; com  $m = M$ , tem-se que:

$$a_g^n \equiv \frac{-D_g^m}{\Delta x_m}$$

$$b_g^n \equiv \Sigma_{Rg}^m \Delta x_m - a_g^n + \frac{2\alpha D_g^m}{2\beta_g + \alpha \Delta x_m}$$

Na próxima seção é apresentado o método de solução do sistema de equações, que resulta da equação (2.3) usado nesta dissertação.

## 2.5 Matrizes de Discretização e Método de Solução

O sistema de equações gerado para N malhas, equação (2.33), pode ser escrito matricialmente da seguinte forma:

$$A_0 \underset{\sim}{\phi} = \frac{1}{K_{eff}} F_0 \underset{\sim}{\phi} \quad (2.34)$$

sendo:



onde  $n$  representa a malha e  $N$  o número total de malhas.

O Problema de Autovalor dado pela equação (2.34) é resolvido pelo Método Iterativo das Potências [14], onde da equação (2.34) tem-se :

$$A_0 \underset{\sim}{\phi}^{(i+1)} = \underset{\sim}{S}^{(i)} \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots ; \quad (2.35)$$

onde  $i$  representada o índice de iteração externa e

$$\underset{\sim}{S}^{(i)} = \frac{1}{K_{eff}^{(i)}} F_0 \underset{\sim}{\phi}^{(i)} \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots ; \quad (2.36)$$

com  $K_{eff}^{(i)}$ , segundo o Método das Potências, dado por

$$K_{eff}^{(i)} = K_{eff}^{(i-1)} \frac{(\underset{\sim}{\mathbf{1}}^T F_0 \underset{\sim}{\phi}^{(i)})}{(\underset{\sim}{\mathbf{1}}^T F_0 \underset{\sim}{\phi}^{(i-1)})} \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots ; \quad (2.37)$$

sendo  $(\underset{\sim}{\mathbf{1}}^T F_0 \underset{\sim}{\phi}^{(i)})$  a representação de produto interno, enquanto que

$$K_{eff}^{(0)} = 1 \quad \quad \quad \text{e} \quad \quad \quad \underset{\sim}{\phi}^{(0)} = \underset{\sim}{\mathbf{1}}$$

onde:

$$\underset{\sim}{\mathbf{1}} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A solução da equação (2.37), adotada no programa computacional desenvolvido nesta dissertação, é obtida através de inversão direta da matriz  $A_0$  usando o Algoritmo de Thomas [17]. Na seção 6.2 do Capítulo 6 é apresentado um dos testes de validação do programa desenvolvido para resolver problemas de autovalor.

# Capítulo 3

## Problema de Fonte Fixa

### 3.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se a equação de difusão de nêutrons, na formulação multi-grupos de energia, para um sistema com fonte externa de nêutrons (neste caso tem-se um Problema de Fonte Fixa). No desenvolvimento apresentado neste capítulo utiliza-se definições e metodologia apresentadas no Capítulo 2, já que são equações semelhantes e com os mesmos parâmetros nucleares. Aqui também é utilizado o método de Diferenças Finitas, com esquema centrado na malha, para a discretização espacial e as equações resultantes também são escritas em forma matricial.

### 3.2 Equação de Difusão de Nêutrons

A equação da continuidade de nêutrons para o Problema de Fonte Fixa na formulação de multigrupos, e a Lei de Fick [13], para o caso unidimensional a dois grupos de energia (1D-2G), com uma fonte externa  $S_{ext,g}(x)$  conhecida, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx} \hat{J}_g(x) + \Sigma_{Rg}(x) \hat{\phi}_g(x) = \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}(x) \hat{\phi}_{g'}(x) + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \Sigma_{gg'}(x) \hat{\phi}_{g'}(x) + S_{ext,g}(x) \quad (3.1)$$

e

$$\hat{J}_g(x) = -D_g(x) \frac{d\hat{\phi}_g}{dx}(x) \quad ; \quad g = 1, 2 \quad , \quad (3.2)$$

onde:

$\hat{\phi}_g(x)$  é o fluxo de nêutrons do grupo de energia  $g$ ;

$\hat{J}_g(x)$  é a corrente líquida de nêutrons do grupo de energia  $g$ ;

$S_{ext,g}(x)$  é a fonte externa de nêutrons do grupo de energia  $g$ .

Todos os outros parâmetros nucleares nas equações (3.1) e (3.2) já foram definidos no Capítulo 2.

### 3.3 Equação de Diferenças e Método de Solução

A equação de diferenças, resultante da discretização espacial das equações (3.1) e (3.2), seguindo o processo idêntico àquele usado no Capítulo 2, é apresentada a seguir.

$$a_g^n \hat{\phi}_g^{n-1} + b_g^n \hat{\phi}_g^n + c_g^n \hat{\phi}_g^{n+1} = \sum_{g'=1}^2 f_{gg'}^n \hat{\phi}_{g'}^n + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 e_{gg'}^n \hat{\phi}_{g'}^n + S_{ext,g}^n \quad (3.3)$$

As constantes  $a_g^n$ ,  $b_g^n$  e  $c_g^n$ , para a malha  $n$  e grupo de energia  $g$ , são as mesmas apresentadas na seção 2.4 do Capítulo 2, enquanto que

$$S_{ext,g}^n \equiv \int_{x_n}^{x_{n+1}} S_{ext,g}(x) dx. \quad (3.4)$$

O sistema de equações gerado ao contabilizar o número de malhas  $N$ , na equação (3.3), pode ser escrito matricialmente da seguinte forma:

$$A_0 \hat{\phi} = F_0 \hat{\phi} + \mathbf{S}_{ext} \quad , \quad (3.5)$$

com as matrizes de discretização  $A_0$  e  $F_0$  sendo as mesmas mostradas na seção 2.5 do Capítulo 2, enquanto que

$$\mathbf{S}_{\approx ext} \equiv \begin{bmatrix} S_{ext,1}^1 \\ S_{ext,2}^1 \\ \vdots \\ S_{ext,1}^n \\ S_{ext,2}^n \\ \vdots \\ S_{ext,1}^N \\ S_{ext,2}^N \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\phi} \equiv \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1^1 \\ \hat{\phi}_2^1 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_1^n \\ \hat{\phi}_2^n \\ \vdots \\ \hat{\phi}_1^N \\ \hat{\phi}_2^N \end{bmatrix} .$$

O Problema de Fonte Fixa dado pela equação matricial (3.5) é resolvido por um método iterativo, onde desta equação matricial tem-se:

$$A_0 \hat{\phi}^{(i+1)} = \mathbf{S}^{(i)} \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad , \quad (3.6)$$

onde  $i$  representa o índice de iteração e

$$\mathbf{S}^{(i)} = F_0 \hat{\phi}^{(i)} + \mathbf{S}_{\approx ext} \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad , \quad (3.7)$$

com  $\hat{\phi}^{(0)} = \underline{\mathbf{1}}$  (definido na seção 2.5 do Capítulo 2).

A solução da equação (3.6), adotada no programa computacional desta dissertação, é obtida através da inversão direta da matriz  $A_0$  usando o Algoritmo de Thomas [17]. Na seção 6.3 é apresentado um teste de validação do programa desenvolvido para resolver Problemas de Fonte Fixa.

$$A_0 \hat{\phi}^{(i+1)} = \mathbf{S}^{(i)}$$

Podemos utilizar o Algoritmo de Thomas [17] para inverter a matriz  $A_0$ ,

$$\hat{\phi}^{(i+1)} = A_0^{-1} \mathbf{S}^{(i)} . \quad (3.8)$$

assim mediante um processo iterativo, inicializando em um valor arbitrário  $\hat{\phi}^{(0)}$ , é possível encontrar o valor do fluxo.

# Capítulo 4

## Cinética Espacial

### 4.1 Introdução

Neste Capítulo são apresentadas as equações de Cinética Espacial, usadas na análise de transientes em sistemas subcríticos com fonte, para efeitos de comparação com os resultados das equações de Cinética Pontual (também para sistemas subcríticos com fonte). Conforme feito nos Capítulos 2 e 3, aqui também é utilizado o método de Diferenças Finitas para a discretização espacial, enquanto que o Método Crank-Nicolson [17] é usado para a discretização no tempo. Por fim, mostram-se as equações discretizadas da Cinética Espacial em sua forma matricial.

### 4.2 Equações da Cinética Espacial

As equações da Cinética Espacial, para o caso unidimensional à dois grupos de energia, com 6 grupos de precursores de nêutrons retardados, na teoria da difusão de nêutrons [13, 18], são as seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_g(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} J_g(x, t) + \Sigma_{Rg}(x, t) \varphi_g(x, t) = & \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}(x, t) \varphi_{g'}(x, t) + \\ & + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \Sigma_{gg'}(x, t) \varphi_{g'}(x, t) - \sum_{i=1}^6 \beta_i \chi_{i,g} \left\{ \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}(x, t) \varphi_{g'}(x, t) \right\} + \\ & + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \chi_{i,g} C_i(x, t) + S_{ext,g}(x, t) \quad ; \quad g = 1, 2 \quad (4.1) \end{aligned}$$

com

$$J_g(x, t) = -D_g(x, t) \frac{\partial \varphi_g}{\partial x}(x, t) \quad ; \quad g = 1, 2. \quad (4.2)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(x, t) = \beta_i \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}(x, t) \varphi_{g'}(x, t) - \lambda_i C_i(x, t) \quad ; \quad i = 1, 6 \quad , \quad (4.3)$$

onde para o instante  $t$ :

$\varphi_g(x, t)$  é o fluxo de nêutrons do grupo de energia  $g$ ;

$J_g(x, t)$  é a corrente líquida de nêutrons do grupo de energia  $g$ ;

$D_g(x, t)$  é o coeficiente de difusão nêutrons do grupo de energia  $g$ ;

$S_{ext,g}(x, t)$  é a fonte externa de nêutrons do grupo de energia  $g$ ;

$\nu \Sigma_{fg'}(x, t)$  é o produto do número médio de nêutrons emitidos na fissão pela seção de choque macroscópica de fissão do grupo de energia  $g'$ ;

$\Sigma_{gg'}(x, t)$  é a seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo de energia  $g'$  para o grupo de energia  $g$ ;

$\Sigma_{Rg}(x, t)$  é a seção de choque macroscópica de remoção do grupo de energia  $g$ ;

$C_i(x, t)$  é a Concentração do  $i$ -ésimo grupo de precursores de nêutrons retardados.

Além disso,

$v_g$  é a velocidade dos nêutrons do grupo de energia  $g$ ;

$\chi_g$  é o espectro de fissão de nêutrons do grupo de energia  $g$ ;

$\chi_{i,g}$  é o espectro de fissão da  $i$ -ésimo grupo de precursores cuja emissão de nêutrons retardados do grupo de energia  $g$ ;



$$S_{ext,g}^n(t) \equiv \int_{x_n}^{x_{n+1}} S_g(x,t) dx \quad . \quad (4.8)$$

Então, lembrando que para cada região  $m$  os parâmetros nucleares são uniformes, ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_g(x,t) \equiv D_g^m(t); \quad \Sigma_{gg'}(x,t) \equiv \Sigma_{gg'}^m(t) \\ \Sigma_{Rg}(x,t) \equiv \Sigma_{Rg}^m(t); \quad \nu \Sigma_{fg'}(x,t) \equiv \nu \Sigma_{fg'}^m(t) \end{array} \right. ; \quad \text{para } x_{n_i,m} < x < x_{n_{f,m+1}} ;$$

das equações (4.4) até (4.8) tem-se que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\nu_g} \Delta x_m \frac{d}{dt} \bar{\varphi}_g^n(t) + J_g(x_{n+1},t) - J_g(x_n,t) + \Sigma_{Rg}^m(t) \Delta x_m \bar{\varphi}_g^n(t) = \\ & = \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^m(t) \Delta x_m \bar{\varphi}_{g'}^n(t) + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \Sigma_{gg'}^m(t) \Delta x_m \bar{\varphi}_{g'}^n(t) - \\ & - \sum_{i=1}^6 \beta_i \chi_{i,g} \left\{ \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^m(t) \Delta x_m \bar{\varphi}_{g'}^n(t) \right\} + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \chi_{i,g} \Delta x_m \bar{C}_i^m(t) + S_{ext,g}^n(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

e

$$\frac{d}{dt} \Delta x_m \bar{C}_i^n(t) = \beta_i \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^m(t) \Delta x_m \bar{\varphi}_{g'}^n(t) - \lambda_i \Delta x_m \bar{C}_i^n(t) \quad . \quad (4.10)$$

Neste ponto é suficiente dizer que tanto  $J_g(x_n,t)$  quanto  $J_g(x_{n+1},t)$  podem, usando a Lei de Fick (equação (4.2)), ser obtidas por Diferenças Finitas, como foi feito no Capítulo 2. Sendo assim, as equações de diferenças podem ser obtidas, conforme mostrado na próxima secção.

### 4.3 Equação de Diferenças

As equações (4.9) e (4.10), com  $J_g(x_n,t)$  e  $J_g(x_{n+1},t)$  obtidos por diferenças finitas, podem ser assim escritas:

$$\begin{aligned}
v_g^n \frac{d}{dt} \bar{\varphi}_g^n(t) + a_g^n(t) \bar{\varphi}_g^{n-1}(t) + b_g^n(t) \bar{\varphi}_g^n(t) + c_g^n(t) \bar{\varphi}_g^{n+1}(t) &= \chi_g \sum_{g'=1}^2 f_{g'}^n(t) \bar{\varphi}_{g'}^n(t) + \\
+ \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 e_{gg'}^m(t) \bar{\varphi}_{g'}^n(t) - \sum_{i=1}^6 \beta_i \chi_{i,g} \left\{ \sum_{g'=1}^2 f_{g'}^n(t) \bar{\varphi}_{g'}^n(t) \right\} &+ \\
+ \sum_{i=1}^6 \lambda_i \chi_{i,g} \Delta x_m \bar{C}_i^m(t) + S_{ext,g}^n(t) &\quad (4.11)
\end{aligned}$$

e

$$\frac{d}{dt} \bar{C}_i^m(t) = \beta_i \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^m(t) \bar{\varphi}_{g'}^n(t) - \lambda_i \bar{C}_i^m(t) . \quad (4.12)$$

Onde, para  $n$  pertencente à região  $m$  :

$$v_g^n \equiv \frac{1}{v_g} \Delta x_m ;$$

$$f_{g'}^n(t) \equiv \nu \Sigma_{fg'}^m(t) \Delta x_m ;$$

e

$$e_{gg'}^n(t) \equiv \Sigma_{gg'}^m(t) \Delta x_m ,$$

enquanto que  $a_g^n(t)$ ,  $b_g^n(t)$  e  $c_g^n(t)$ , para uma malha  $n$  e grupo de energia  $g$ , são definidos como se segue.

### 1) No contorno à esquerda

Para  $n = 1$  e  $m = 1$ , tem-se que

$$c_g^n(t) \equiv \frac{-D_g^m(t)}{\Delta x_m}$$

e

$$b_g^n(t) \equiv \Sigma_{Rg}^m(t) \Delta x_m - c_g^n(t) - \frac{2\alpha D_g^m(t)}{2\beta_g(t) - \alpha \Delta x_m}.$$

### 2) Ponto no interfase à esquerda de uma região

Para  $n = n_{i,m}$  ; com  $m = 2, \dots, M$ , tem-se que

$$a_g^n(t) \equiv \frac{-2D_g^{m-1}(t)D_g^m(t)}{D_g^{m-1}(t) \Delta x_m + D_g^m(t) \Delta x_{m-1}},$$

$$c_g^n(t) \equiv \frac{-D_g^m(t)}{\Delta x_m}$$

e

$$b_g^n(t) \equiv \Sigma_{Rg}^m(t) \Delta x_m - (c_g^n(t) + a_g^n(t)).$$

### 3) Ponto no interior de uma região

Para  $n_{i,m} < n < n_{f,m}$  ; com  $m = 1, \dots, M$ , tem-se que

$$a_g^n(t) \equiv \frac{-D_g^m(t)}{\Delta x_m},$$

$$c_g^n(t) \equiv a_g^n(t)$$

e

$$b_g^n(t) \equiv \Sigma_{Rg}^m(t) \Delta x_m - 2a_g^n(t).$$

### 4) Ponto na interface à direita de uma região

Para  $n = n_{f,m}$  ; com  $m = 1, \dots, M - 1$ , tem-se que

$$a_g^n(t) \equiv \frac{-D_g^m(t)}{\Delta x_m},$$

$$c_g^n(t) \equiv \frac{-2D_g^m(t)D_g^{m+1}(t)}{D_g^m(t) \Delta x_{m+1} + D_g^{m+1}(t) \Delta x_m}$$

e

$$b_g^n(t) \equiv \Sigma_{Rg}^m(t) \Delta x_m - (c_g^n(t) + a_g^n(t)).$$

### 5) No contorno à direita

Para  $n = N$  ; com  $m = M$ , tem-se que

$$a_g^n(t) \equiv \frac{-D_g^m(t)}{\Delta x_m}$$

e

$$b_g^n(t) \equiv \Sigma_{Rg}^m(t) \Delta x_m - a_g^n(t) + \frac{2\alpha D_g^m(t)}{2\beta_g(t) + \alpha \Delta x_m}.$$

Pode-se perceber que  $a_g^n(t)$ ,  $b_g^n(t)$  e  $c_g^n(t)$  são elementos da mesma forma que àqueles apresentados no Capítulo 2, porém agora levando em conta a dependência temporal.

Para que se possa escrever as equações da Cinética Espacial (discretizada espacialmente) na forma matricial, o que é feito na próxima seção, a equação (4.12) é multiplicada por  $\chi_{i,g} \Delta x_m$ , resultando em

$$\frac{d}{dt} \chi_{i,g} \Delta x_m \bar{C}_i^m(t) = \beta_i \sum_{g'=1}^2 \chi_{i,g} \Delta x_m \nu \Sigma_{fg'}^m(t) \bar{\varphi}_{g'}^n(t) - \lambda_i \chi_{i,g} \Delta x_m \bar{C}_i^m(t). \quad (4.13)$$

### 4.3.1 Equação *Semidiscretizada* da Cinética Espacial

As equações (4.11) e (4.13) são chamadas de forma “*Semidiscretizada*” [18] das equações da Cinética Espacial e podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$V \frac{d}{dt} \underline{\varphi}(t) + A(t) \underline{\varphi}(t) = F(t) \underline{\varphi}(t) - \sum_{i=1}^6 \beta_i F_i(t) \underline{\varphi}(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i E_i \underline{C}_i(t) + \underline{S}_{ext}(t) \quad (4.14)$$

e

$$\frac{d}{dt} E_i \underline{C}_i(t) = \beta_i F_i(t) \underline{\varphi}(t) - \lambda_i E_i \underline{C}_i(t). \quad (4.15)$$

As equações (4.14) e (4.15) serão muito úteis no desenvolvimento das equações da Cinética Pontual e no cálculo dos Parâmetros Cinéticos tratados no Capítulo 5, por isso, é importante expor explicitamente a forma matricial que cada termo tem.

As matrizes  $\underline{\varphi}(t)$ ,  $\underline{C}(t)$  e  $\underline{S}_{ext}(t)$  têm a seguinte forma:

$$\underline{\varphi}(t) \equiv \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{c} \bar{\varphi}_1^1(t) \\ \bar{\varphi}_2^1(t) \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_1^n(t) \\ \bar{\varphi}_2^n(t) \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_1^N(t) \\ \bar{\varphi}_2^N(t) \end{array} \right] \end{bmatrix}; \quad \underline{C}(t) \equiv \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{c} \bar{C}_i^1(t) \\ \bar{C}_i^1(t) \\ \vdots \\ \bar{C}_i^n(t) \\ \bar{C}_i^n(t) \\ \vdots \\ \bar{C}_i^N(t) \\ \bar{C}_i^N(t) \end{array} \right] \end{bmatrix} \quad e \quad \underline{S}_{ext}(t) \equiv \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{c} S_{ext,1}^1(t) \\ S_{ext,2}^1(t) \\ \vdots \\ S_{ext,1}^n(t) \\ S_{ext,2}^n(t) \\ \vdots \\ S_{ext,1}^N(t) \\ S_{ext,2}^N(t) \end{array} \right] \end{bmatrix}.$$



$$F^n(t) \equiv \begin{bmatrix} f_{11}^n(t) & f_{12}^n(t) \\ f_{21}^n(t) & f_{22}^n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F_i^n(t) \equiv \begin{bmatrix} f_{i,11}^n(t) & f_{i,12}^n(t) \\ f_{i,21}^n(t) & f_{i,22}^n(t) \end{bmatrix},$$

com

$$f_{gg'}^n(t) = \chi_{g\nu} \nu \Sigma_{fg'}^m(t) \Delta x_m$$

e

$$f_{i,gg'}^n(t) = \chi_{i,g\nu} \nu \Sigma_{fg'}^m(t) \Delta x_m.$$

Por fim, as matrizes  $E_i$  e  $V$ , que não dependem do tempo, são assim definidas:

$$E_i \equiv \begin{bmatrix} E_i^1 & & & \\ & E_i^2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & E_i^N \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V \equiv \begin{bmatrix} V^1 & & & \\ & V^2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & V^N \end{bmatrix},$$

onde:

$$E_i^n \equiv \begin{bmatrix} \chi_{i,1} \Delta x_m & 0 \\ 0 & \chi_{i,2} \Delta x_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V^n \equiv \begin{bmatrix} v_1^n & 0 \\ 0 & v_2^n \end{bmatrix}.$$

## 4.4 Discretização Temporal

Nesta seção a equação *Semidiscretizada* de Cinética Espacial é discretizada no tempo usando o método de Crank-Nicolson [17], mas outros métodos poderiam ser utilizados [19]. Para isto, o intervalo do transiente, caracterizado por  $[t_1, t_{L+1}]$ , é dividido em  $L$  sub-intervalos como mostrado na figura 4.1.

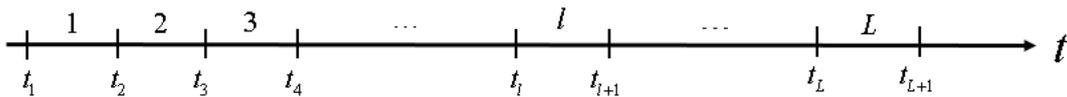


Figura 4.1: Intervalos de discretização temporal.

Sendo assim, integrando as equações (4.14) e 4.15 em  $t_l \leq t \leq t_{l+1}$ , tem-se que

$$\begin{aligned}
V \left\{ \varphi(t_{l+1}) - \varphi(t_l) \right\} + \int_{t_l}^{t_{l+1}} A(t) \varphi(t) dt &= \int_{t_l}^{t_{l+1}} F(t) \varphi(t) dt - \\
- \sum_{i=1}^6 \beta_i \int_{t_l}^{t_{l+1}} F_i(t) \varphi(t) dt + \sum_{i=1}^6 \lambda_i E_i \int_{t_l}^{t_{l+1}} \mathcal{C}_i(t) dt &+ \int_{t_l}^{t_{l+1}} \mathcal{S}_{ext}(t) dt \quad (4.16)
\end{aligned}$$

e

$$E_i \left\{ \mathcal{C}_i(t_{l+1}) - \mathcal{C}_i(t_l) \right\} = \beta_i \int_{t_l}^{t_{l+1}} F_i(t) \varphi(t) dt - \lambda_i E_i \int_{t_l}^{t_{l+1}} \mathcal{C}_i(t) dt \quad (4.17)$$

Agora, segundo o método de Crank-Nicolson, onde para uma função genérica  $\xi(t)$ ,

$$\int_{t_l}^{t_{l+1}} \xi(t) dt \simeq \frac{1}{2} [\xi(t_{l+1}) + \xi(t_l)] \Delta t,$$

com  $\Delta t = t_{l+1} - t_l$ ; para todo  $l = 1, L$ ; as equações (4.16) e (4.17) tornam-se:

$$\begin{aligned}
\left[ V + \frac{1}{2} \Delta t \left\{ A(t_{l+1}) - F(t_{l+1}) + \sum_{i=1}^6 \beta_i F_i(t_{l+1}) \right\} \right] \varphi(t_{l+1}) &= \\
= \frac{1}{2} \Delta t \sum_{i=1}^6 \lambda_i E_i \left\{ \mathcal{C}_i(t_{l+1}) + \mathcal{C}_i(t_l) \right\} + \\
+ \left[ V - \frac{1}{2} \Delta t \left\{ A(t_l) - F(t_l) + \sum_{i=1}^6 \beta_i F_i(t_l) \right\} \right] \varphi(t_l) + \\
+ \frac{1}{2} \Delta t \left\{ \mathcal{S}_{ext}(t_{l+1}) + \mathcal{S}_{ext}(t_l) \right\} \quad (4.18)
\end{aligned}$$

e

$$(2 + \lambda_i \Delta t) E_i \mathcal{C}_i(t_{l+1}) = \beta_i \left\{ F_i(t_{l+1}) \varphi(t_{l+1}) + F_i(t_l) \varphi(t_l) \right\} \Delta t + (2 - \lambda_i \Delta t) E_i \mathcal{C}_i(t_l). \quad (4.19)$$

Da equação (4.19) segue que

$$\mathcal{C}_i(t_{l+1}) = \frac{\beta_i \Delta t}{2 + \lambda_i \Delta t} E_i^{-1} \left\{ F_i(t_{l+1}) \varphi(t_{l+1}) + F_i(t_l) \varphi(t_l) \right\} + \frac{2 - \lambda_i \Delta t}{2 + \lambda_i \Delta t} \mathcal{C}_i(t_l). \quad (4.20)$$

Substituindo a equação (4.20) na equação (4.18) vem

$$\left[ V + \frac{1}{2} \Delta t \left\{ A(t_{l+1}) - F(t_{l+1}) + \sum_{i=1}^6 \frac{2\beta_i}{2 + \lambda_i \Delta t} F_i(t_{l+1}) \right\} \right] \varphi(t_{l+1}) = \mathcal{S}_l, \quad (4.21)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_l \equiv & \left[ V - \frac{1}{2} \Delta t \left\{ A(t_l) - F(t_l) + \sum_{i=1}^6 \frac{2\beta_i}{2 + \lambda_i \Delta t} F_i(t_l) \right\} \right] \varphi(t_l) + \\ & + \sum_{i=1}^6 \frac{2 - \lambda_i \Delta t}{2 + \lambda_i \Delta t} E_i \mathcal{C}_i(t_l) + \frac{1}{2} \Delta t \{ \mathcal{S}_{ext}(t_{l+1}) + \mathcal{S}_{ext}(t_l) \}. \quad (4.22) \end{aligned}$$

Na próxima seção é descrito o método de solução da equação (4.21) para obtenção de  $\varphi(t_{l+1})$ .

## 4.5 Cálculo do Fluxo de Nêutrons

Da equação (4.21) tem-se o seguinte sistema de equações lineares e algébricas:

$$B^{1,1}(t_{l+1}) \bar{\varphi}^1(t_{l+1}) + B^{1,2}(t_{l+1}) \bar{\varphi}^2(t_{l+1}) = \mathcal{S}_l^1, \quad (4.23)$$

$$B^{n,n-1}(t_{l+1}) \bar{\varphi}^{n-1}(t_{l+1}) + B^{n,n}(t_{l+1}) \bar{\varphi}^n(t_{l+1}) + B^{n,n+1}(t_{l+1}) \bar{\varphi}^{n+1}(t_{l+1}) = \mathcal{S}_l^n, \\ \text{para } n=2, N-1; \quad (4.24)$$

e

$$B^{N,N-1}(t_{l+1})\bar{\varphi}^{N-1}(t_{l+1}) + B^{N,N}(t_{l+1})\bar{\varphi}^N(t_{l+1}) = \mathbf{S}_l^N, \quad (4.25)$$

onde:

$$\varphi^n(t_{l+1}) \equiv \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1^n(t_{l+1}) \\ \bar{\varphi}_2^n(t_{l+1}) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}_l^n \equiv \begin{bmatrix} S_{1,l}^n \\ S_{2,l}^n \end{bmatrix};$$

$$B^{n,n-1}(t_{l+1}) \equiv \frac{1}{2} \Delta t \begin{bmatrix} a_1^n(t_{l+1}) & 0 \\ 0 & a_2^n(t_{l+1}) \end{bmatrix}$$

e

$$B^{n,n+1}(t_{l+1}) \equiv \frac{1}{2} \Delta t \begin{bmatrix} c_1^n(t_{l+1}) & 0 \\ 0 & c_2^n(t_{l+1}) \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

enquanto que os elementos da matriz  $B_{n,n}(t_{l+1})$  são da seguinte forma:

- Para  $g' = g$  :

$$\frac{1}{2} \Delta t \left\{ b_1^n(t_{l+1}) - \left[ \chi_g - \sum_{i=1}^6 \frac{2\beta_i}{2 + \lambda_i \Delta t} \chi_{i,g} \right] f_g^n(t_{l+1}) \right\}$$

- Para  $g' \neq g$  :

$$\frac{1}{2} \Delta t \left\{ -e_{gg'}^n(t_{l+1}) - \left[ \chi_g - \sum_{i=1}^6 \frac{2\beta_i}{2 + \lambda_i \Delta t} \chi_{i,g} \right] f_{g'}^n(t_{l+1}) \right\}.$$

A solução do sistema formado pelas equações (4.23) a (4.25) é obtida usando Algoritmo de Thomas [17]. E uma vez determinado  $\varphi(t_{l+1})$  a equação (4.20) é usada para determinar  $\mathcal{C}_i(t_{l+1})$ ; para  $i=1,6$ .

# Capítulo 5

## Cinética Pontual

### 5.1 Introdução

A Cinética Pontual é um modelo simples para descrever o comportamento no tempo da população neutrônica [16], nos casos em que a parte espacial desta população não seja significativamente afetada em um transiente, mas é uma ferramenta poderosa para esta finalidade. Neste capítulo, partindo da equação da Cinética Espacial *Semidiscretizada*, equações (4.14) e (4.15), as equações da Cinética Pontual são desenvolvidos usando para tal a Função Importância proposta por DULLA *et al* [2]. Os Parâmetros Cinéticos, oriundos deste desenvolvimento, são definidos e o método de solução das equações obtidas é apresentado.

### 5.2 Equações da Cinética Pontual

A Função Importância proposta por DULLA *et al* [2] é, para este caso, solução da seguinte equação:

$$A_0^T \underline{\Psi}^* = F_0^T \underline{\Psi}^* + \underline{S}^+ \quad , \quad (5.1)$$

onde  $A_0^T$  e  $F_0^T$  são, respectivamente, as matrizes transpostas das matrizes  $A_0$  e  $F_0$  definidas na seção 2.5 (Capítulo 2), enquanto que os elementos do vetor  $s_g^+$  são assim definidos:

$$s_g^{+n} \equiv \nu \Sigma_{fg}^m \Delta x_m \quad ; \quad g = 1, 2 \quad , \quad (5.2)$$

para  $n_{i,m} \leq n \leq n_{f,m}$  e  $m = 1, M$  (ver figuras 2.1 e 2.2). Agora, fazendo o produto interno de cada termo das equações (4.14) e (4.15) com  $\underline{\Psi}^{*T}$ , vem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\underline{\Psi}^{*T} V \underline{\varphi}(t)) + (\underline{\Psi}^{*T} A(t) \underline{\varphi}(t)) &= (\underline{\Psi}^{*T} F(t) \underline{\varphi}(t)) - \sum_{i=1}^6 \beta_i (\underline{\Psi}^{*T} F_i(t) \underline{\varphi}(t)) + \\ &+ \sum_{i=1}^6 \lambda_i (\underline{\Psi}^{*T} E_i \underline{C}_i(t)) + (\underline{\Psi}^{*T} \underline{S}_{ext}(t)) \end{aligned} \quad (5.3)$$

e

$$\frac{d}{dt}(\underline{\Psi}^{*T} E_i \underline{C}_i(t)) = \beta_i (\underline{\Psi}^{*T} F_i(t) \underline{\varphi}(t)) - \lambda_i (\underline{\Psi}^{*T} E_i \underline{C}_i(t)) \quad . \quad (5.4)$$

Fazendo o produto interno de cada termo da equação (5.1) com  $\underline{\varphi}(t)$  obtém-se a seguinte equação:

$$(\underline{\varphi}(t)^T A_0^T \underline{\Psi}^*) = (\underline{\varphi}(t)^T F_0^T \underline{\Psi}^*) + (\underline{\varphi}(t)^T \underline{S}^+) \quad ,$$

que pode ser assim reescrita:

$$(\underline{\Psi}^{*T} A_0 \underline{\varphi}(t)) = (\underline{\Psi}^{*T} F_0 \underline{\varphi}(t)) + (\underline{S}^{+T} \underline{\varphi}(t)) \quad . \quad (5.5)$$

Agora, subtraindo a equação (5.5) na equação (5.3), vem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\underline{\Psi}^{*T} V \underline{\varphi}(t)) &= (\underline{\Psi}^{*T} (\{F(t) - F_0\} - \{A(t) - A_0\}) \underline{\varphi}(t)) - \sum_{i=1}^6 \beta_i (\underline{\Psi}^{*T} F_i(t) \underline{\varphi}(t)) + \\ &+ \sum_{i=1}^6 \lambda_i (\underline{\Psi}^{*T} E_i \underline{C}_i(t)) - (\underline{S}^{+T} \underline{\varphi}(t)) + (\underline{\Psi}^{*T} \underline{S}_{ext}(t)). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Supondo que os transientes a serem tratados são suficientemente rápidos tal que a forma espacial do fluxo de nêutrons não muda, pode-se escrever:

$$\underline{\varphi}(t) \cong \hat{\underline{\phi}} T(t) \quad , \quad (5.7)$$

com  $\hat{\underline{\phi}}$  sendo solução da equação (3.5), qual seja,

$$A_0 \hat{\underline{\phi}} = F_0 \hat{\underline{\phi}} + \underline{S}_{0_{ext}} \quad .$$

Então, usando a equação (5.7) nas equações (5.6) e (5.4) tem-se, respectivamente,

$$\begin{aligned}
(\Psi^{*T} V \hat{\phi}) \frac{d}{dt} T(t) &= (\Psi^{*T} (\{F(t) - F_0\} - \{A(t) - A_0\}) \hat{\phi}) T(t) - \\
&- \sum_{i=1}^6 \beta_i (\Psi^{*T} F_i(t) \hat{\phi}) T(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i (\Psi^{*T} E_i C_i(t)) - \\
&- (\mathcal{S}_{ext}^{+T} \hat{\phi}) T(t) + (\Psi^{*T} \mathcal{S}_{ext}(t)) \quad (5.8)
\end{aligned}$$

e

$$\frac{d}{dt} (\Psi^{*T} E_i C_i(t)) = \beta_i (\Psi^{*T} F_i(t) \hat{\phi}) T(t) - \lambda_i (\Psi^{*T} E_i C_i(t)) \quad . \quad (5.9)$$

Dividindo cada termo das equações (5.8) e (5.9) por  $(\Psi^{*T} F_0 \hat{\phi})$ , obtém-se as equações da Cinética Pontual [1] associada à sistemas subcríticos:

$$\Lambda \frac{d}{dt} T(t) = (\rho(t) - \bar{\beta}(t)) T(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) - \gamma T(t) + q(t) \quad (5.10)$$

e

$$\frac{d}{dt} C_i(t) = \bar{\beta}_i(t) T(t) - \lambda_i C_i(t) \quad ; \quad i = 1, 6 \quad , \quad (5.11)$$

onde os Parâmetros Cinéticos são assim definidos:

- Tempo médio de geração de nêutrons:

$$\Lambda \equiv \frac{(\Psi^{*T} V \hat{\phi})}{(\Psi^{*T} F_0 \hat{\phi})} \quad (5.12)$$

- Reatividade no instante t:

$$\rho(t) \equiv \frac{(\Psi^{*T} (\{F(t) - F_0\} - \{A(t) - A_0\}) \hat{\phi})}{(\Psi^{*T} F_0 \hat{\phi})} \quad (5.13)$$

- Fração efetiva de nêutrons retardados no instante t:

$$\bar{\beta}(t) = \sum_{i=1}^6 \bar{\beta}_i(t) \quad (5.14)$$

- Fração efetiva do  $i$ -ésimo grupo de precursores de nêutrons retardados no instante t:

$$\bar{\beta}_i(t) \equiv \frac{\beta_i(\underline{\Psi}^{*T} F_i(t) \hat{\phi})}{(\underline{\Psi}^{*T} F_0 \hat{\phi})} \quad (5.15)$$

- Fator gamma:

$$\gamma \equiv \frac{(\underline{S}_{ext}^+ T \hat{\phi})}{(\underline{\Psi}^{*T} F_0 \hat{\phi})} \quad (5.16)$$

- Fator fonte no instante t:

$$q(t) \equiv \frac{(\underline{\Psi}^{*T} \underline{S}_{ext}(t))}{(\underline{\Psi}^{*T} F_0 \hat{\phi})} \quad (5.17)$$

- Concentração do  $i$ -ésimo grupo de precursores de nêutrons retardados, no instante t:

$$C_i(t) \equiv \frac{(\underline{\Psi}^{*T} E_i \underline{C}_i(t))}{(\underline{\Psi}^{*T} F_0 \hat{\phi})} . \quad (5.18)$$

Um programa computacional foi desenvolvido para resolver a equação (5.3) e calcular os Parâmetros Cinéticos dados pelas equações (5.12) e (5.14 - 5.17). Na próxima seção é apresentado o método de solução das equações (5.10) e (5.11) adotado nesta dissertação.

### 5.3 Discretização Temporal

As equações da Cinética Pontual [1], associadas a reatores subcríticos, equações (5.10) e (5.11), quais sejam:

$$\Lambda \frac{d}{dt} T(t) = (\rho - \bar{\beta}) T(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) - \gamma T(t) + q(t)$$

e

$$\frac{d}{dt} C_i(t) = \bar{\beta}_i(t) T(t) - \lambda_i C_i(t) \quad ; \quad i = 1, 6$$

formam um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, que podem ser escritas de forma conveniente, como notação matricial, da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dt} \underset{\sim}{\mathbf{f}}(t) = M \underset{\sim}{\mathbf{f}}(t) + \underset{\sim}{\mathbf{q}}(t) , \quad (5.19)$$

onde as matrizes  $\underset{\sim}{\mathbf{f}}(t)$  ,  $M$  e  $\underset{\sim}{\mathbf{q}}(t)$  são assim definidas:

$$\underset{\sim}{\mathbf{f}}(t) \equiv \begin{bmatrix} T(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \\ C_4(t) \\ C_5(t) \\ C_6(t) \end{bmatrix} , \quad \underset{\sim}{\mathbf{q}}(t) \equiv \begin{bmatrix} \frac{q(t)}{\Lambda} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$M \equiv \begin{bmatrix} \frac{\rho-\beta+\gamma}{\Lambda} & \frac{\lambda_1}{\Lambda} & \frac{\lambda_2}{\Lambda} & \frac{\lambda_3}{\Lambda} & \frac{\lambda_4}{\Lambda} & \frac{\lambda_5}{\Lambda} & \frac{\lambda_6}{\Lambda} \\ \beta_1 & -\lambda_1 & & & & & \\ \beta_2 & & -\lambda_2 & & 0 & & \\ \beta_3 & & & -\lambda_3 & & & \\ \beta_4 & & & & -\lambda_4 & & \\ \beta_5 & & 0 & & & -\lambda_5 & \\ \beta_6 & & & & & & -\lambda_6 \end{bmatrix} .$$

O método usado para a solução da equação (5.19) é o método de matriz exponencial [20], do qual resulta que

$$\underset{\sim}{\mathbf{f}}(t_{k+1}) = e^{M(t_{k+1}-t_k)} \underset{\sim}{\mathbf{f}}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{M(t_{k+1}-t)} \underset{\sim}{\mathbf{q}}(t) dt , \quad (5.20)$$

onde  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ . Na referência [21] pode-se encontrar maiores detalhes do procedimento completo para a obtenção de matriz exponencial.

# Capítulo 6

## Validação dos Programas Desenvolvidos

### 6.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados alguns testes usados na validação dos programas desenvolvidos para os cálculos de Problema de Autovalor, Problema de Fonte Fixa, Função Importância e Cinética Espacial.

Primeiramente é apresentado o teste de validação do programa desenvolvido para o cálculo de Problema de Autovalor, no qual foi adotado o *benchmark* ANL-BSS-6-A2 [22].

Em segundo lugar é apresentado o teste de validação do programa desenvolvido para o cálculo de Problema de Fonte Fixa. Para tal, é utilizada a equação do Problema de Autovalor, que é reescrita como um “Problema de Fonte Fixa”, gerando uma “pseudo-fonte”. Esta “pseudo-fonte” é usada no programa de cálculo de Problema de Fonte Fixa e o fluxo de nêutrons obtido é esperado ser idêntico àquele do Problema de Autovalor que deu origem a tal fonte.

Para a validação do programa desenvolvido para calcular a Função Importância, primeiro foi feita a validação do cálculo do Problema Adjunto de Autovalor, ou seja, do cálculo do fluxo adjunto. O cálculo do fluxo adjunto é feito usando o mesmo programa desenvolvido para cálculo de Problema de Autovalor, transpondo-se as matrizes de discretização. Uma vez validado o cálculo do fluxo adjunto, procedeu-se a validação do Problema Adjunto de Fonte Fixa, do mesmo modo como descrito no terceiro parágrafo acima. Observa-se que o mesmo programa desenvolvido para cálculo de fonte fixa é usado neste caso, bastando transpor as matrizes de discretização e mudando o termo de fonte. Com isso, fica validado o cálculo da Função Importância.

Por fim, é apresentado o testes de validação do programa desenvolvido para os

cálculos da Cinética Espacial, realizando os chamados “Falsos Transientes” (ou *False Time Step*) [18], utilizando a mesma “pseudo-fonte” obtida como descrito no teste de validação do Problema de Fonte Fixa.

### 6.1.1 Configuração do *Benchmark* ANL-BSS-6-A2

O *benchmark* ANL-BSS-A2 será utilizado como núcleo padrão para realizar as validações requeridas neste capítulo. Este “slab” possui três regiões de diferentes comprimentos, a descrição geométrica do núcleo pode ser vista na figura 6.1 [22].



Figura 6.1: Geometria 1-D do *benchmark* ANL-BSS-6-A2.

As constantes nucleares e as constantes para nêutrons retardados são apresentadas na tabela 6.1 [22].

Tabela 6.1: Características do núcleo *benchmark* 1-D ANL-BSS-6-A2.

Constante	Regiões 1 e 3	Região 2
$D_1(cm)$	1,5	1,0
$D_2(cm)$	0,5	0,5
$\Sigma_{R1}(cm^{-1})$	0,026	0,02
$\Sigma_{R2}(cm^{-1})$	0,18	0,08
$\Sigma_{21}(cm^{-1})$	0,015	0,01
$\nu\Sigma_{f1}(cm^{-1})$	0,01	0,0055
$\nu\Sigma_{f2}(cm^{-1})$	0,2	0,099
$\chi_1$	1,0	1,0
$\chi_2$	0,0	0,0
$v_2(cm/s)$	$1,0 \times 10^7$	$1,0 \times 10^7$
$v_1(cm/s)$	$3,0 \times 10^5$	$3,0 \times 10^5$

Constantes de Nêutrons retardados		
Grupo	$\bar{\beta}_i$	$\lambda_i(seg^{-1})$
1	0,00025	0,0124
2	0,00164	0,0305
3	0,00147	0,1110
4	0,00296	0,3010
5	0,00086	1,1400
6	0,00032	3,0100

Para finalizar, foi usada uma malha  $\Delta x = 0,5\text{cm}$  em todos os cálculos a seguir. Além disso, é importante adicionar que utilizou-se  $\chi_{i,1} = \chi_1$  e  $\chi_{i,2} = \chi_2$ , para  $i = 1, 6$ ; necessário para o cálculo de Cinética Espacial.

## 6.2 Cálculo de Problema de Autovalor

Utilizando o *benchmark* ANL-BSS-6-A2 [22] descrito na seção anterior, o programa desenvolvido para cálculo de Problema de Autovalor obteve os fluxos mostrados nas figuras 6.2 e 6.3

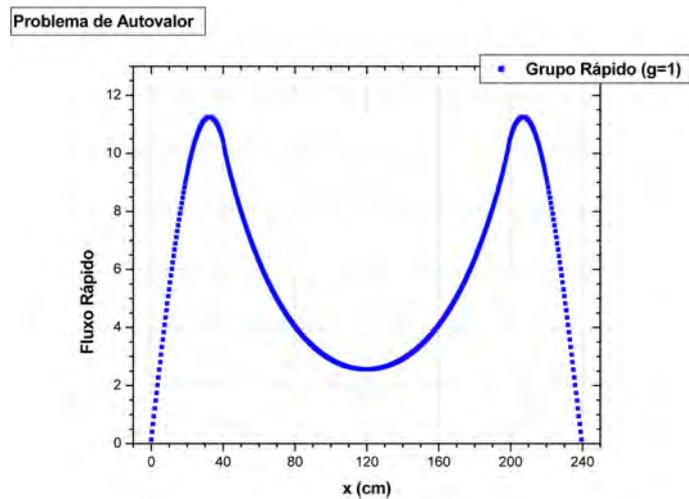


Figura 6.2: Distribuição do fluxo de nêutrons para o grupo rápido.

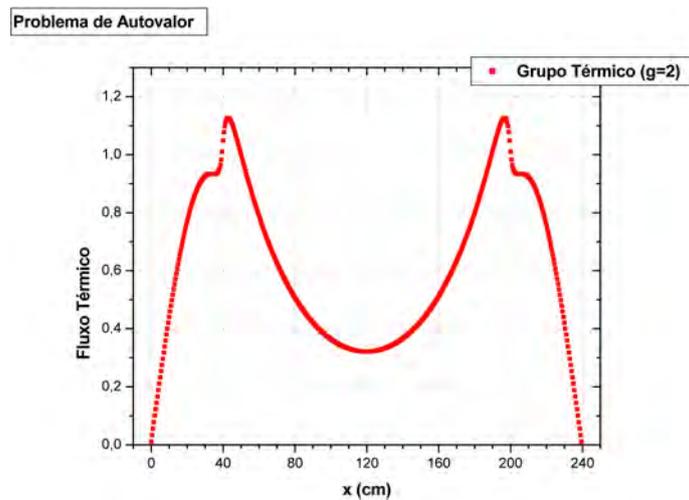


Figura 6.3: Distribuição do fluxo de nêutrons para o grupo térmico.

Visualmente pode se verificar que as formas dos fluxos obtidos possuem um comportamento semelhante com àquelas do *benchmark* ANL-BSS-6-A2 em  $t = 0$  da referência [23].

Para este *benchmark*, o  $K_{eff}^{Ref}$  de referência [22] é 0,9015507 enquanto que foi obtido um  $K_{eff}$  de 0,9016056 com o programa desenvolvido, o que corresponde a um desvio relativo percentual ( $\left|1 - K_{eff}/K_{eff}^{Ref}\right| \times 100\%$ ) de 0,006%. Além disso, as frações de potência (razão entre a potência de uma região e a potência total) obtidas são mostradas na tabela 6.2 e pode-se observar uma excelente concordância com a referência.

Tabela 6.2: Frações de Potência.

Região	Referência	Calculada	Desvio (%)
<b>1</b>	0,2790	0,2789	0,036
<b>2</b>	0,4421	0,4423	0,045
<b>3</b>	0,2790	0,2789	0,036

Os resultados obtidos concordam muito bem com àqueles de referência e, portanto, considera-se, com isso, que o programa está validado.

### 6.3 Cálculo de Problema de Fonte Fixa

Para a validação do programa desenvolvido para cálculo de Problema de Fonte Fixa, foi preciso obter uma “pseudo-fonte”, como mostrado a seguir. Partindo da equação (2.34), qual seja,

$$A_0\underset{\sim}{\phi} = \frac{1}{K_{eff}}F_0\underset{\sim}{\phi} \quad , \quad (6.1)$$

pode se escrever:

$$A_0\underset{\sim}{\phi} = \frac{1}{K_{eff}}F_0\underset{\sim}{\phi} + F_0\underset{\sim}{\phi} - F_0\underset{\sim}{\phi},$$

de onde obtém-se:

$$A_0\underset{\sim}{\phi} = F_0\underset{\sim}{\phi} + \hat{\underset{\sim}{S}} \quad , \quad (6.2)$$

com a “pseudo-fonte”  $\hat{\underset{\sim}{S}}$  assim definida:

$$\hat{\underset{\sim}{S}} \equiv \left(\frac{1}{K_{eff}} - 1\right)F_0\underset{\sim}{\phi} \quad , \quad \text{para } K_{eff} < 1. \quad (6.3)$$

Em seguida é feito  $\underset{\sim}{S}_{0_{ext}} = \hat{\underset{\sim}{S}}$  e a equação (3.5), qual seja,

$$A_0 \hat{\phi} = F_0 \hat{\phi} + \mathbf{S}_0_{ext} \quad , \quad (6.4)$$

é resolvida. Espera-se, então, que o fluxo de nêutrons decorrente da solução da equação (6.4) seja idêntico àquele decorrente da solução da equação (6.1), ou seja,  $\hat{\phi} = \phi$ .

Utilizando os parâmetros nucleares e dados geométricos do *benchmark* ANL-BSS-6-A2, o programa desenvolvido para cálculo de Problema de Fonte Fixa obteve os fluxos mostrados nas figuras 6.4 e 6.5.

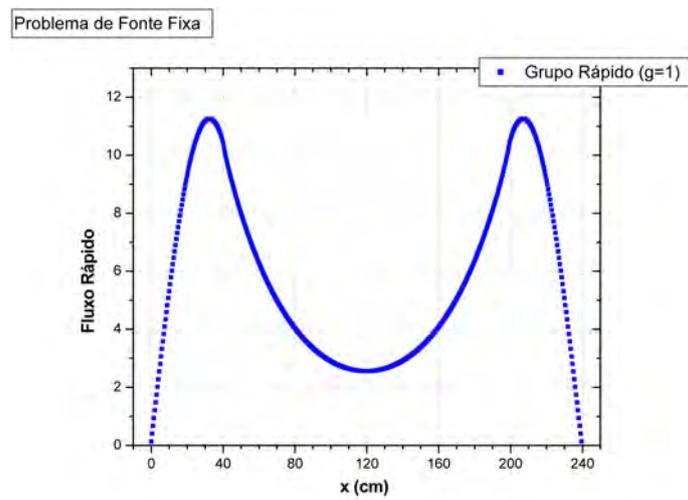


Figura 6.4: Distribuição de fluxo de nêutrons rápidos.

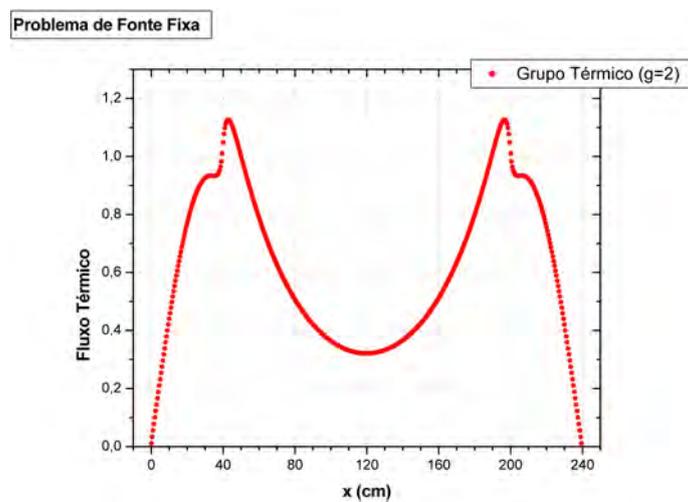


Figura 6.5: Distribuição de fluxo de nêutrons térmicos.

Visualmente é possível verificar que as formas das distribuições de fluxos obtidas possuem semelhanças totais com àquelas formas dos fluxos decorrentes do cálculo do Problema de Autovalor, cujo programa já foi validado (seção 6.2), e está em conformidade com  $\hat{\phi} = \tilde{\phi}$ , pois a maior diferença entre as componentes de  $\hat{\phi}$  e  $\tilde{\phi}$  é da ordem de  $10^{-10}$ . Portanto, pode-se dizer que o programa desenvolvido para cálculo de Problema de Fonte Fixa está funcionando corretamente.

## 6.4 Cálculo de Função Importância

Para validar a Função Importância (nesse caso Problema Adjunto de Fonte Fixa) é adotado o mesmo procedimento da seção anterior, onde, é preciso primeiro calcular o Problema Adjunto de Autovalor, qual seja,

$$A_0^T \tilde{\phi}^* = \frac{1}{K_{eff}} F_0^T \tilde{\phi}^* , \quad (6.5)$$

onde  $K_{eff}$  deve ser o mesmo fator de multiplicação da equação (6.1). Inclusive, esta é uma maneira de verificar se o cálculo do fluxo adjunto está correto.

Utilizando os dados geométricos e os parâmetros nucleares que caracterizam o núcleo do reator *benchmark* ANL-BSS-6-A2, o programa desenvolvido para cálculo de Problema Adjunto de Autovalor obteve, resolvendo a equação (6.5), um  $K_{eff}$  de 0,9016056 que é idêntico àquele do Problema de Autovalor e distribuições de fluxos adjunto que são mostradas nas figuras 6.6 e 6.7.

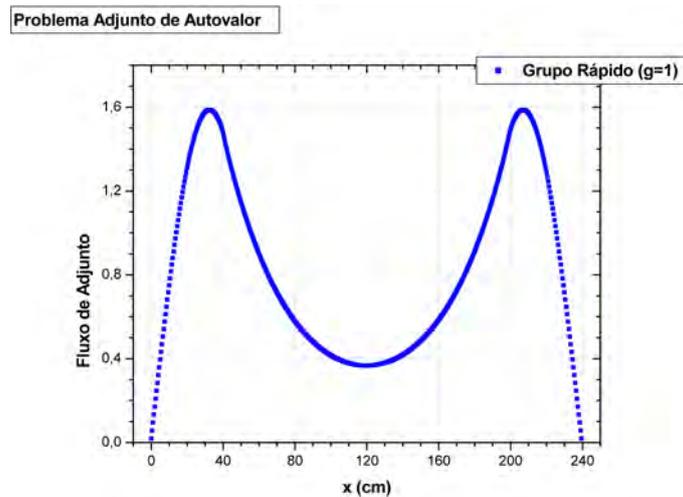


Figura 6.6: Fluxo Adjunto para o grupo rápido.

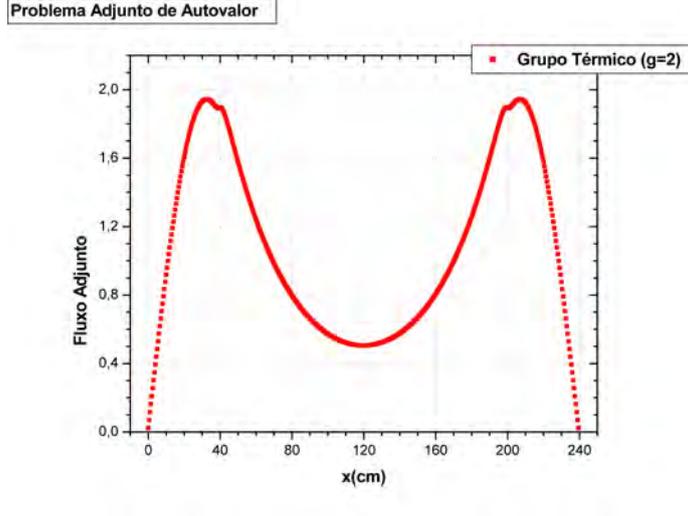


Figura 6.7: Fluxo Adjunto para o grupo térmico.

Para validar o cálculo da Função Importância, a equação (6.5), é reescrita da seguinte forma:

$$A_0^T \tilde{\phi}^* = \frac{1}{K_{eff}} F_0^T \tilde{\phi}^* + F_0^T \tilde{\phi}^* - F_0^T \tilde{\phi}^*$$

de onde obtém-se:

$$A_0^T \tilde{\phi}^* = F_0^T \tilde{\phi}^* + \hat{\mathcal{S}}^* , \quad (6.6)$$

com a “pseudo-fonte”  $\hat{\mathcal{S}}^*$  assim definida:

$$\hat{\mathcal{S}}^* = \left( \frac{1}{K_{eff}} - 1 \right) F_0^T \tilde{\phi}^* , \quad \text{para } K_{eff} < 1. \quad (6.7)$$

Em seguida é feito  $\mathcal{S}^+ = \hat{\mathcal{S}}^*$  e a equação (5.1), qual seja,

$$A_0^T \Psi^* = F_0^T \Psi^* + \mathcal{S}^+ \quad (6.8)$$

é resolvida. Espera-se, então, que a função decorrente da solução da equação (6.8), seja idêntica àquela decorrente da solução da equação (6.5), ou seja,  $\Psi^* \equiv \tilde{\phi}^*$ .

Utilizando os parâmetros nucleares e dados geométricos do *benchmark* ANL-BSS-6-A2, o programa desenvolvido para cálculo de Problema Adjunto de Fonte Fixa obteve as distribuições mostradas nas figuras 6.8 e 6.9.

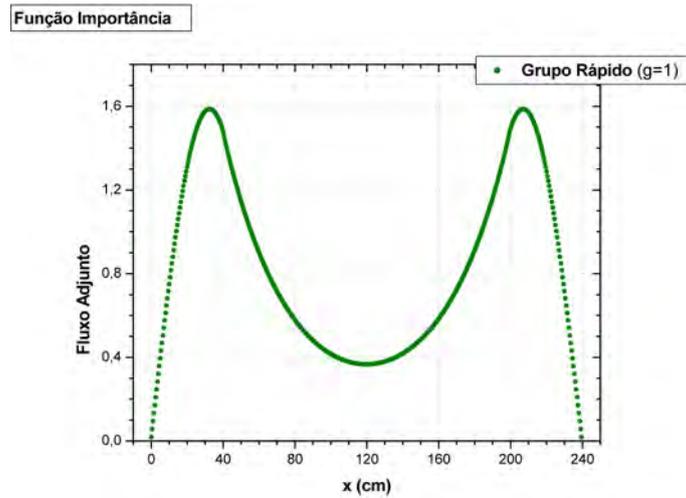


Figura 6.8: Função Importância para o grupo rápido.

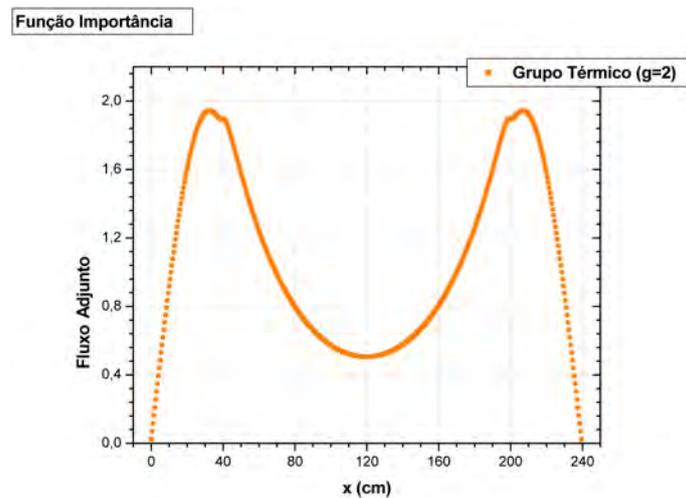


Figura 6.9: Função Importância para o grupo térmico.

Visualmente é possível verificar que as formas destas distribuições possuem totais semelhanças com àquelas decorrentes do cálculo do Problema Adjunto de Autovalor, em conformidade com  $\Psi^* = \phi^*$ , pois a maior diferença entre as componentes de  $\Psi^*$  e  $\phi^*$  é da ordem de  $10^{-10}$ . Portanto, pode-se dizer que o programa desenvolvido para cálculo de Função Importância está funcionando corretamente.

## 6.5 Cálculo da Cinética Espacial

Para a validação do programa desenvolvido para cálculo da Cinética Espacial foi usada a mesma “pseudo-fonte” utilizada no cálculo de Problema de Fonte Fixa (seção 6.3), como fonte externa.

Então, para a fonte externa

$$\mathcal{S}_{ext} = \left( \frac{1}{K_{eff}} - 1 \right) F \hat{\phi} \quad (6.9)$$

e as seguintes condições iniciais:

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{e} \quad C_i(0) = 0; \quad \forall i = 1, 6,$$

O programa desenvolvido para resolver as equações da Cinética Espacial, usando o método de solução apresentado nas seções 4.4 e 4.5 foi executado. Espera-se que o fluxo de nêutrons deste cálculo atinja, após um intervalo de tempo, a mesma forma que o fluxo de nêutrons fornecido pelo cálculo do Problema de Fonte Fixa, ou seja,  $\varphi(t_0 \gg 0) \equiv \hat{\phi}$ .

Utilizando os dados geométricos e os parâmetros nucleares que caracterizam o núcleo do reator *benchmark* ANL-BSS-6-A2, o programa desenvolvido para cálculo de Cinética Espacial, para um  $\Delta t = 10^{-3}$  segundos obteve as distribuições de fluxos mostradas nas figuras 6.10 e 6.11.

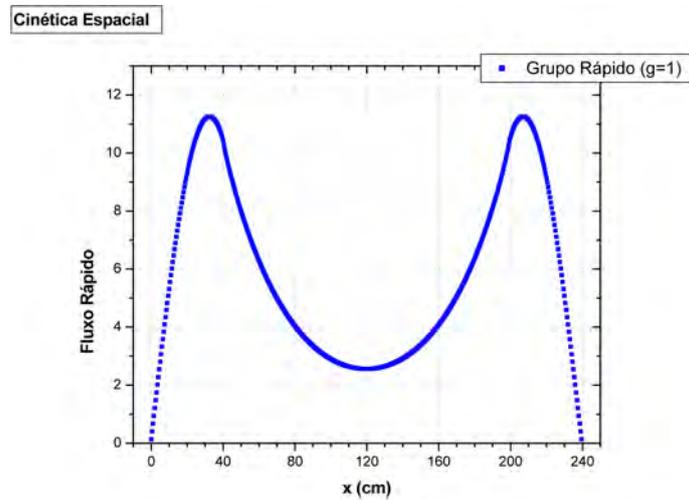


Figura 6.10: Distribuição de fluxo rápido do cálculo de Cinética Espacial.

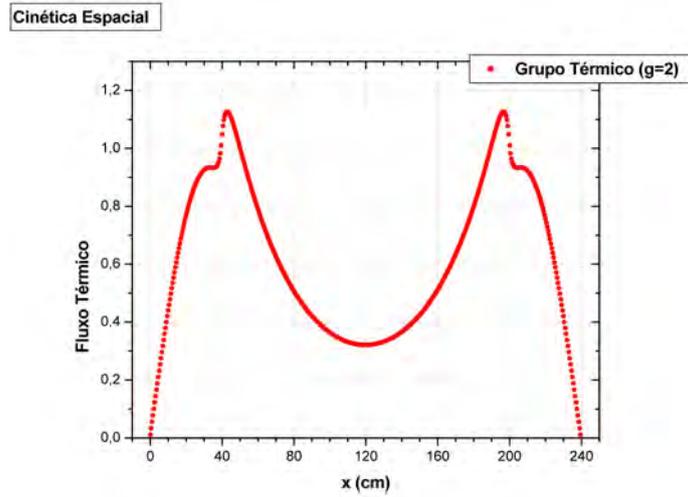


Figura 6.11: Distribuição de fluxo térmico do cálculo de Cinética Espacial.

Visualmente é possível verificar que as distribuições obtidas após um intervalo de tempo da ordem de 1231 *segundos*, possuem totais semelhanças com aquelas decorrentes do cálculo do Problema de Fonte Fixa, em conformidade com  $\varphi(t_0 \gg 0) = \hat{\phi}$ . Portanto, pode-se dizer que o programa desenvolvido para cálculo de Cinética Espacial está funcionando corretamente.

# Capítulo 7

## Cinética Pontual para Reatores Subcríticos com Fonte

### 7.1 Introdução

Neste capítulo é feita a validação das equações da Cinética Pontual desenvolvidas no Capítulo 5 desta dissertação, que foram obtidas usando a Função Importância proposta por DULLA *et al* [2] como função peso. Esta validação será feita por comparação, para alguns transientes, com os resultados obtidos pela Cinética Espacial para estes mesmos transientes.

### 7.2 Configuração do Núcleo Subcrítico

Para a finalidade que se propõe este capítulo foi adotada uma configuração de núcleo, com 5 regiões, como mostrado na figura 7.1, na qual há uma região central de 10 cm contendo material estrutural e onde será inserida a fonte externa de nêutrons.

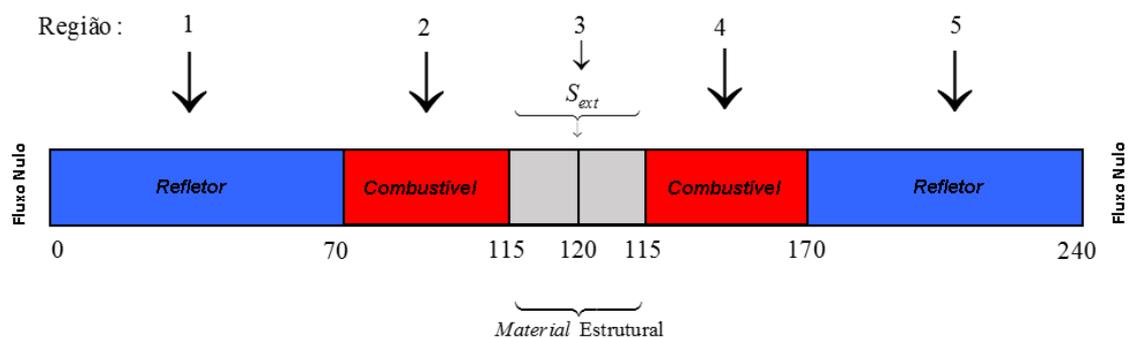


Figura 7.1: Configuração do núcleo subcrítico.

Os parâmetros nucleares para este núcleo subcrítico estão na tabela 7.1. Observa-se que estes parâmetros foram ajustados, usando o programa de cálculo de Problema de Autovalor, para a configuração mostrada na figura 7.1, a fim de se obter um fator de multiplicação da ordem de 0,95. Este valor de  $K_{eff}$  é reportado na literatura como sendo o mais baixo que se pode ter, para os reatores do tipo ADS [24].

Tabela 7.1: Parâmetros Nucleares.

	Região 1 e 5	Região 2 e 4	Região 3
$D_1(cm)$	1,47050000	1,500	1,455600
$D_2(cm)$	0,25230000	0,500	0,636400
$\Sigma_{R1}(cm^{-1})$	0,05383015	0,026	0,018749
$\Sigma_{R2}(cm^{-1})$	0,00115625	0,180	0,149300
$\Sigma_{21}(cm^{-1})$	0,05342700	0,015	0,014030
$\Sigma_{12}(cm^{-1})$	0,00024250	0,0	0,0
$\nu\Sigma_{f1}(cm^{-1})$	0,0	0,01	0,0
$\nu\Sigma_{f2}(cm^{-1})$	0,0	0,20	0,0
$\omega\Sigma_{f1}(J/cm)$	0,0	$1,2816 \times 10^{-13}$	0,0
$\omega\Sigma_{f2}(J/cm)$	0,0	$2,5632 \times 10^{-12}$	0,0
$\chi_1$	0,0	0,999999788	0,0
$\chi_2$	0,0	$2,12 \times 10^{-7}$	0,0

As figuras 7.2 e 7.3 mostram, respectivamente, os fluxos dos grupos 1 e 2 obtidos com o cálculo de Problema de Autovalor.

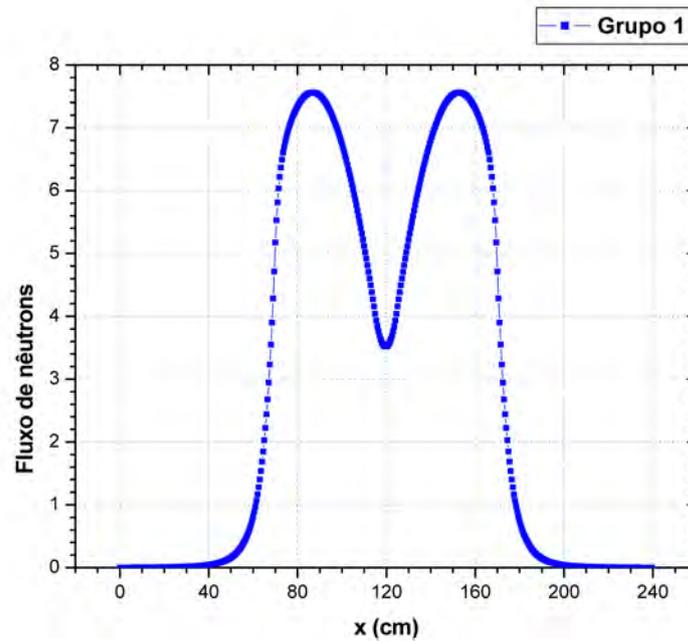


Figura 7.2: Distribuição do fluxo de nêutrons do Grupo 1 para o Problema de Autovalor.

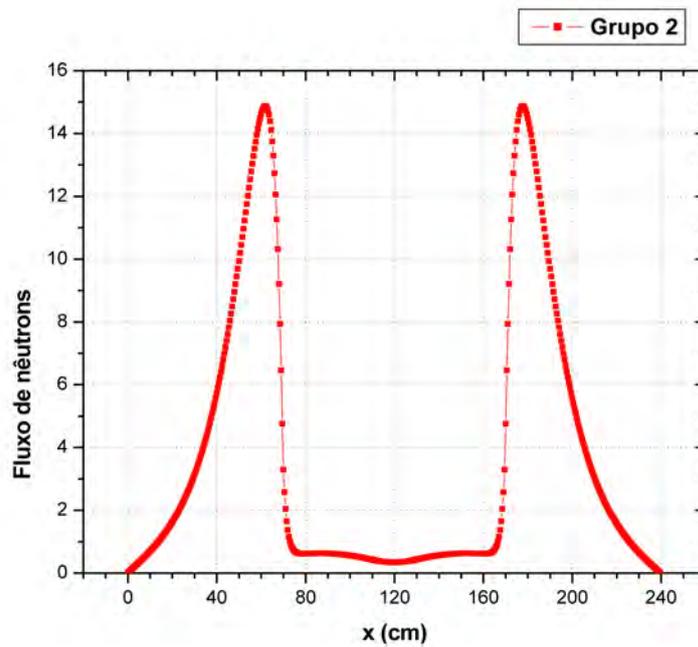


Figura 7.3: Distribuição do fluxo de nêutrons do Grupo 2 para o Problema de Autovalor.

### 7.2.1 Resultados do Problema de Fonte Fixa

A solução da equação (3.5), para uma fonte uniformemente distribuída na região 3 do núcleo subcrítico (Figura 7.1), é o fluxo de nêutrons que representa o estado estacionário deste núcleo. O termo de fonte utilizando neste cálculo é da seguinte forma:

$$S_{ext,g}(x) = \begin{cases} S_{0,g} & ; \text{ para } 115 \leq x < 125 \\ 0 & ; \text{ fora} \end{cases}, \quad (7.1)$$

com

$$S_{0,g} = 10^{11} \text{ nêutrons/cm}^3\text{s} \quad ; \text{ para } g = 1, 2. \quad (7.2)$$

As distribuições de fluxo de nêutrons dos grupos de energia 1 e 2 são mostradas, respectivamente, nas figuras 7.4 e 7.5.

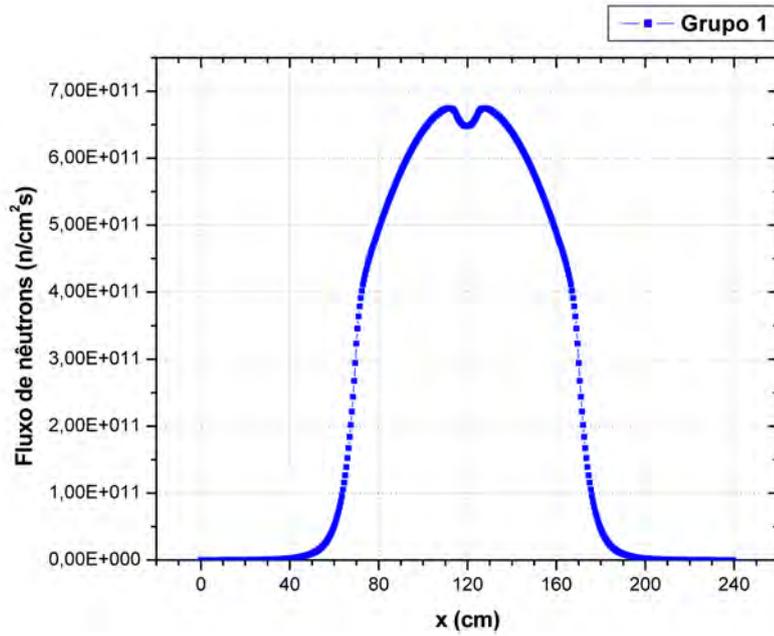


Figura 7.4: Distribuição do fluxo de nêutrons do Grupo 1 para o Problema de Fonte Fixa.

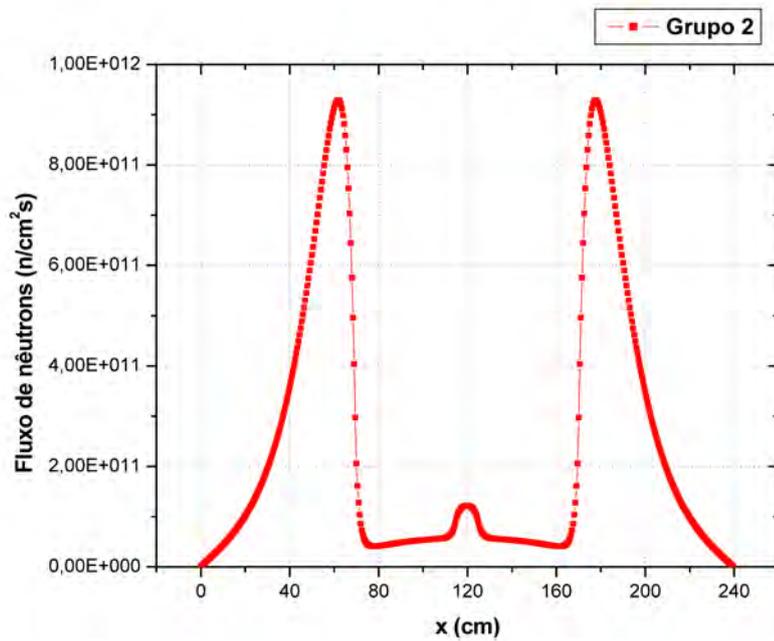


Figura 7.5: Distribuição do fluxo de nêutrons do Grupo 2 para o Problema de Fonte Fixa.

Cabe dizer aqui que estas distribuições de fluxos são utilizadas no cálculo dos parâmetros da Cinética Pontual, apresentados na próxima seção.

A densidade média de potência, que para o núcleo subcrítico aqui considerado, é dada por

$$\bar{P} \equiv \sum_{g=1}^2 \left\{ \int_{70}^{115} \omega_{\Sigma_{fg}}(x) \hat{\phi}_g(x) dx + \int_{125}^{170} \omega_{\Sigma_{fg}}(x) \hat{\phi}_g(x) dx \right\}, \quad (7.3)$$

é de  $19,626 \text{ W/cm}^2$ . Esta densidade média de potência bem como o fluxo de nêutrons, obtidos neste cálculo, são usados em um dos transientes adotados na validação das equações da Cinética Pontual desenvolvidas nesta dissertação.

### 7.3 Parâmetros da Cinética Pontual

Para o cálculo dos parâmetros da Cinética Pontual, definidos na seção 5.2 através das equações (5.12) e (5.14 - 5.17), são necessários, além dos parâmetros cinéticos para os grupos de precursores de nêutrons retardados, que estão na tabela 7.2, o fluxo de nêutrons  $\hat{\phi}$  (solução da equação (3.5)) e a Função Importância proposta por DULLA *et al* [2] (solução da equação (5.1)). As velocidades usadas nos cálculos para o grupo 1 e grupo 2 foram  $v_1 = 10^7 \text{ cm/s}$  e  $v_2 = 3 \times 10^5 \text{ cm/s}$ , respectivamente.

Tabela 7.2: Parâmetros associados aos nêutrons retardados.

<b>i</b>	$\beta_i$	$\lambda_i(\text{seg}^{-1})$	$\chi_{i,1}$	$\chi_{i,2}$
<b>1</b>	0,00025	0,0124	$9,99999852 \times 10^{-1}$	$1,480000 \times 10^{-7}$
<b>2</b>	0,00164	0,0305	$9,99999343 \times 10^{-1}$	$6,570000 \times 10^{-7}$
<b>3</b>	0,00147	0,1110	$9,99999540 \times 10^{-1}$	$4,600000 \times 10^{-7}$
<b>4</b>	0,00296	0,3010	$9,99999707 \times 10^{-1}$	$2,930000 \times 10^{-7}$
<b>5</b>	0,00086	1,1400	$9,99999804 \times 10^{-1}$	$1,960000 \times 10^{-7}$
<b>6</b>	0,00032	3,0100	$9,99999851 \times 10^{-1}$	$1,490000 \times 10^{-7}$

Para efeito de ilustração, as Funções Importância para os grupos 1 e 2 são mostradas, respectivamente, nas figuras 7.6 e 7.7.

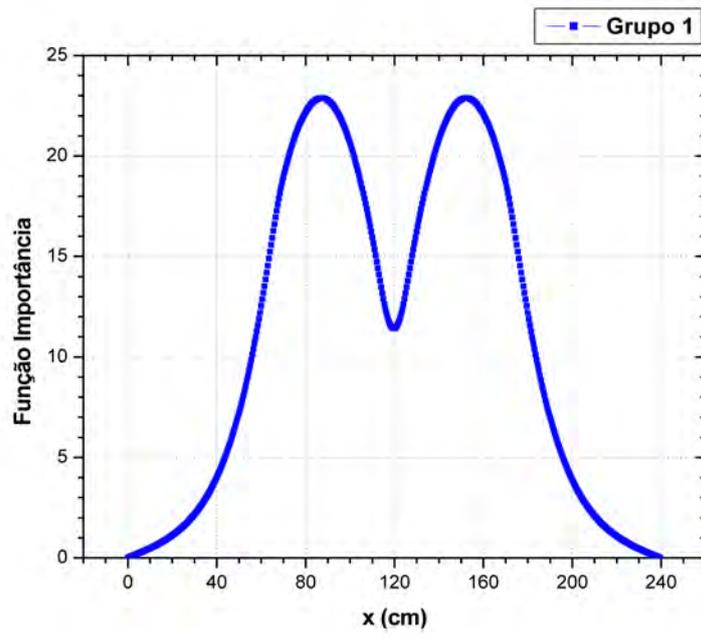


Figura 7.6: Função Importância para o Grupo 1.

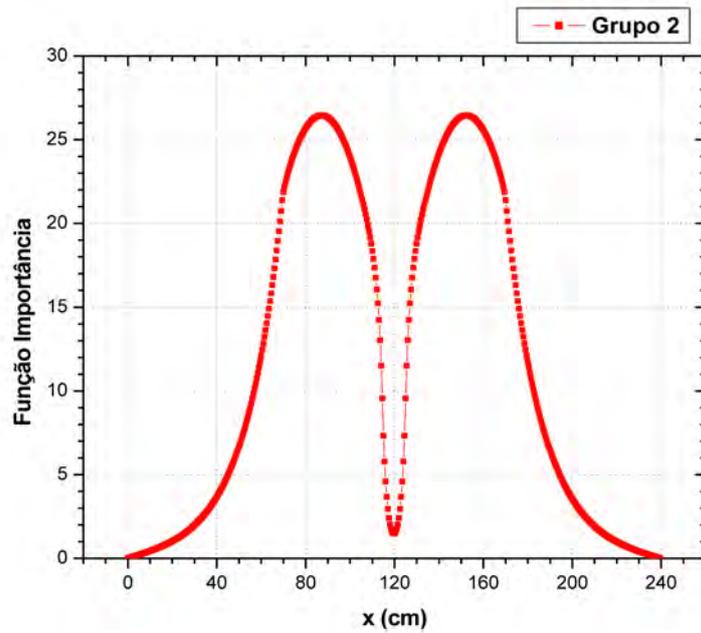


Figura 7.7: Função Importância para o Grupo 2.

Então, usando esta Função Importância, além da fonte externa e do fluxo de nêutrons, que foram apresentados na seção 7.2, os parâmetros da Cinética Pontual podem ser obtidos e seus valores estão mostrados na tabela 7.3.

Tabela 7.3: Parâmetros Cinéticos com a Função Importância de Dulla *et al.*

$\Lambda$	6,620844027101955E-05
$\Gamma$	-5,011867776046725E-02
$Q$	5,011867776046717E-02
$\beta_1$	2,499999976721650E-04
$\beta_2$	1,640000106178374E-03
$\beta_3$	1,470000053039720E-03
$\beta_4$	2,960000034882608E-03
$\beta_5$	8,599999979980619E-04
$\beta_6$	3,199999970669279E-04
$\beta$	7,500000186837856E-03

Na tabela 7.3,  $Q$  é o termo de fonte  $q(t)$ , dado pela equação 5.17, para a fonte externa independente do tempo  $\tilde{\mathbf{S}}_0_{ext}$ , definida pelas equações (7.1) e (7.2). Ou seja,

$$Q \equiv \frac{(\tilde{\Psi}^{*T} \tilde{\mathbf{S}}_0_{ext})}{(\tilde{\Psi}^{*T} F_0 \hat{\phi})}.$$

## 7.4 Validação das Equações da Cinética Pontual

Para testar as equações da Cinética Pontual apresentadas nesta dissertação, os resultados por eles obtidos, para três diferentes transientes, foram comparados com aqueles obtidos pela Cinética Espacial, para estes mesmos transientes. Observa-se que todos os parâmetros (nucleares e cinéticos) necessários aos cálculos foram apresentados nas seções anteriores deste capítulo. E os transientes simulados são assim definidos:

### - Transiente 1

Neste caso é simulada a evolução no tempo da densidade média de potência, desde a partida do reator até que ele atinja a estabilidade.

### - Transiente 2

Neste transiente é simulado o chamado ABI (“Accelerator Beam Interruption”) [18], que aqui é representado pela interrupção da fonte externa de nêutrons por um período de 3 *segundos* e em seguida seu retorno à mesma intensidade de emissão

de nêutrons de antes da interrupção.

### - Transiente 3

Neste transiente é simulado o chamado ABO (“Accelerator Beam Overpower”)[18], que aqui é representado pela manutenção, por um período de 3 *segundos*, do dobro da intensidade de emissão de nêutrons pela fonte externa e em seguida o retorno à intensidade de emissão anterior.

## 7.4.1 Resultados do Transiente 1

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para o Transiente 1, resolvendo tanto as equações da Cinética Espacial quanto aquelas da Cinética Pontual. Para este transiente as equações da Cinética Espacial, utilizando o programa computacional desenvolvido nesta dissertação, foram resolvidas com as seguintes condições no tempo:

$$\varphi(0) = \mathbf{0} \quad ,$$

$$\mathcal{C}_i(0) = \mathbf{0} \quad ; \quad \forall \quad i = 1, 6$$

e

$$\mathcal{S}_{ext}(t) = \mathcal{S}_{0_{ext}} \quad ; \quad \forall \quad t \geq 0.$$

O sistema formado pelas equações (4.23) a (4.25), juntamente com a equação (4.20), foi resolvido para um  $\Delta t$  de  $10^{-3}$  *segundos* e o resultado para o comportamento no tempo da densidade média de potência, dada por

$$\bar{P}(t) = \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{g=1}^2 \omega_{\Sigma_{fg}^m} \left( \sum_{n=n_{i,m}}^{n_{f,m}} \bar{\varphi}_g^n(t) \right) \right\} \Delta x_m, \quad (7.4)$$

é mostrado na figura 7.8.

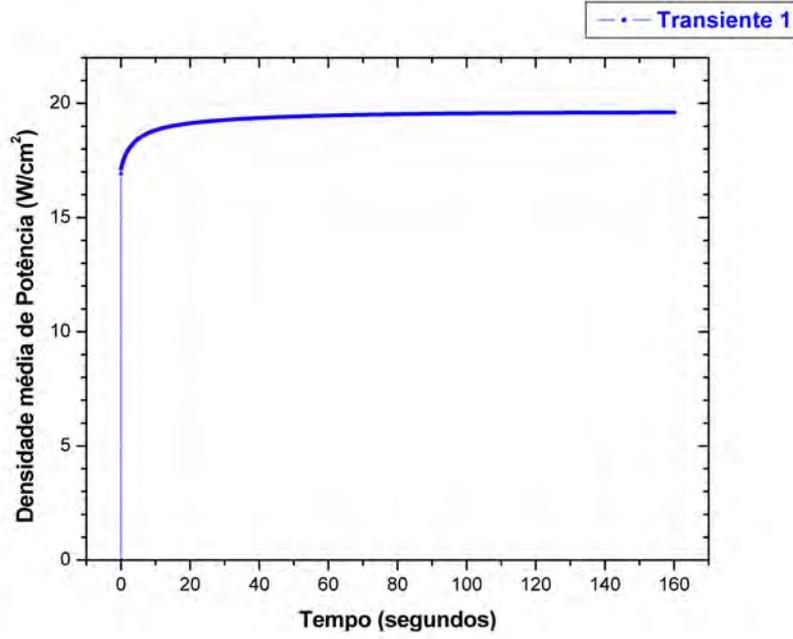


Figura 7.8:  $\bar{P}(t)$  da Cinética Espacial para o Transiente 1.

Observa-se da figura 7.8 que o reator atinge a estabilidade em  $t = 160,076$  segundos, com uma densidade média de potência de  $19,606$   $W/cm^2$ .

Para este mesmo transiente, as equações da Cinética Pontual, utilizando o programa computacional desenvolvido nesta dissertação, foram resolvidas com as seguintes condições:

$$T(0) = 0 \quad ,$$

$$C_i(0) = 0 \quad ; \quad \forall i = 1, 6$$

e

$$q(t) = Q \quad ; \quad \forall t \geq 0.$$

O sistema de equações representado pela equação (5.19) foi resolvido para um  $\Delta t$  de  $10^{-3}$  segundos e o resultado para o comportamento no tempo da densidade média de potência, que neste caso é dada por

$$\bar{P}(t) = \left( \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{g=1}^2 \omega_{\Sigma_{fg}}^m \left[ \sum_{n=n_{i,m}}^{n_{f,m}} \bar{\phi}_g^n(t) \right] \right\} \Delta x_m \right) T(t), \quad (7.5)$$

é mostrado na figura 7.9, da qual observa-se que o reator atinge a estabilidade em  $t = 160,076$  segundos, com uma densidade média de potência de  $19,606$   $W/cm^2$ .

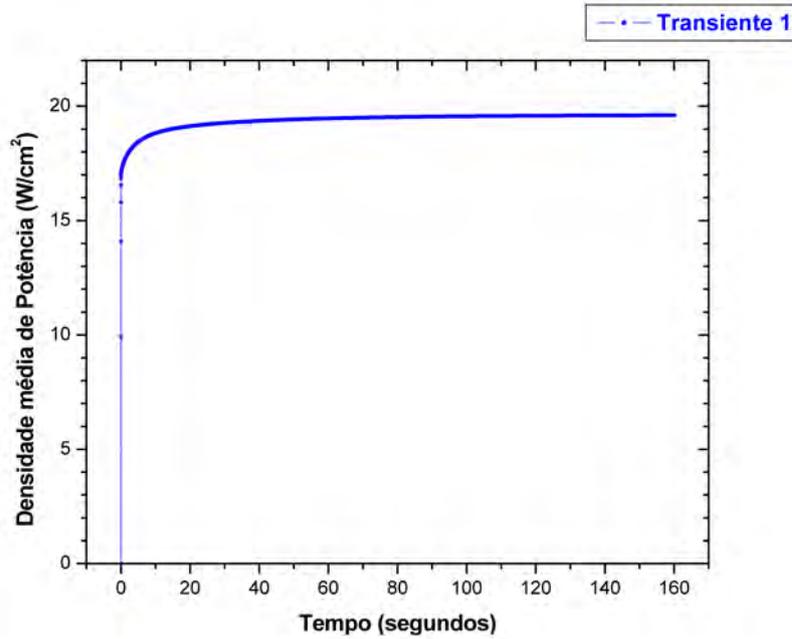


Figura 7.9:  $\bar{P}(t)$  da Cinética Pontual para o Transiente 1.

Pode-se observar que para este transiente as equações de Cinética Pontual desenvolvidas nesta dissertação, com parâmetros cinéticos obtidos usando a Função Importância de DULLA *et all* [2], dá o comportamento correto da densidade média de potência com o tempo, quando comparado com o resultado da Cinética Espacial.

## 7.4.2 Resultados do Transiente 2

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para o Transiente 2(ABI), descrito no início da seção 7.4. E, para tal, novamente as equações da Cinética Espacial e as equações de Cinética Pontual são resolvidas.

Para este transiente as equações de Cinética Espacial foram resolvidas para uma fonte externa da seguinte forma:

$$\mathcal{S}_{ext}(t) = \alpha(t)\mathcal{S}_{0_{ext}},$$

com  $\alpha(t)$  como mostrado na figura 7.10. Já as distribuições de fluxo de nêutrons e de concentrações de precursores para o instante  $t = 0$  segundos são aqueles do final do Transiente 1.

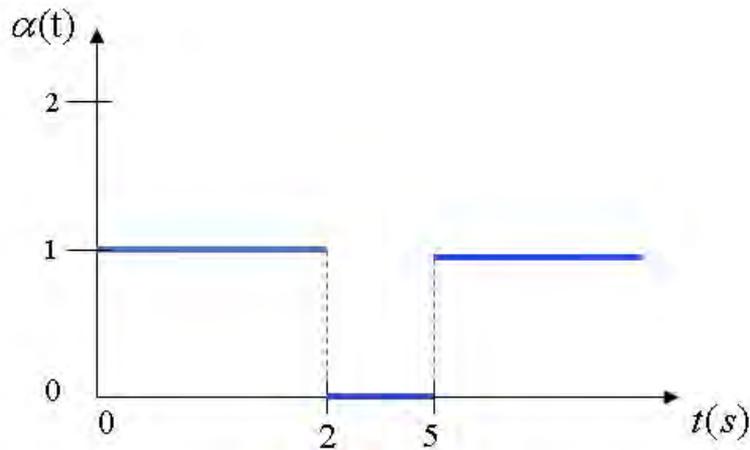


Figura 7.10: Comportamento no tempo da fonte externa para o Transiente 2.

Para um  $\Delta t$  de  $10^{-3}$  segundos, o sistema formado pelas equações (4.24) a (4.25) e mais a equação (4.20) foi resolvido e o resultado do comportamento no tempo da densidade média de potência (equação (7.3) ) é mostrado na figura 7.11.

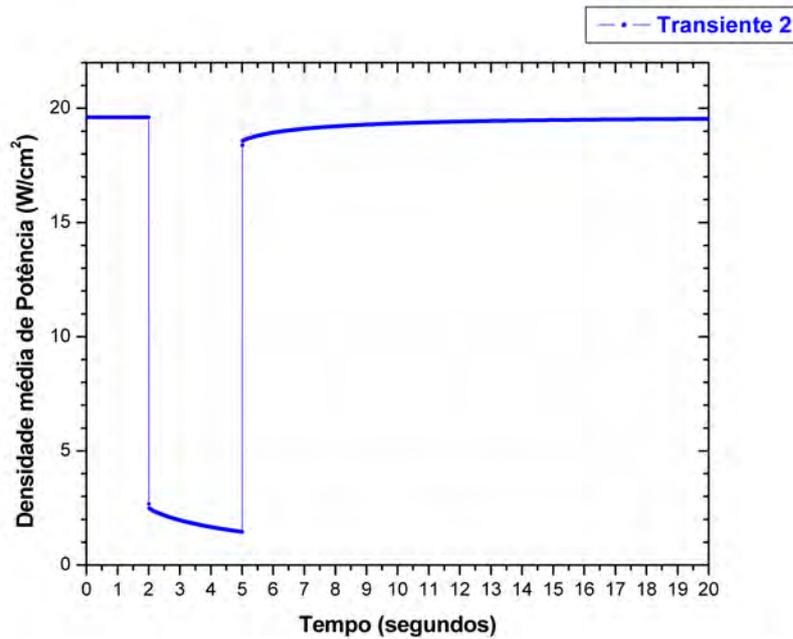


Figura 7.11:  $\bar{P}(t)$  da Cinética Espacial para o Transiente 2.

Observa-se que a densidade média de potência cai a  $1,454 \text{ W/cm}^2$  no instante 5 segundos e imediatamente, após o retorno á intensidade inicial, o reator alcança novamente a estabilidade, com a mesma densidade média de potência de antes do transiente.

Para este mesmo transiente o programa desenvolvido para resolver as equações da Cinética Pontual foi executado para  $q(t)$  da seguinte forma:

$$q(t) = \alpha(t)Q,$$

com o mesmo  $\alpha(t)$  mostrado na figura 7.10, enquanto que  $T(t)$  e  $C_i(t)$ , para  $i = 1, 6$ , em  $t=0$  são aqueles do final do Transiente 1. E, para  $\Delta t$  de  $10^{-3}$  segundos, o resultado do comportamento no tempo da densidade média de potência (equação 7.4 ) é mostrado na figura 7.12.

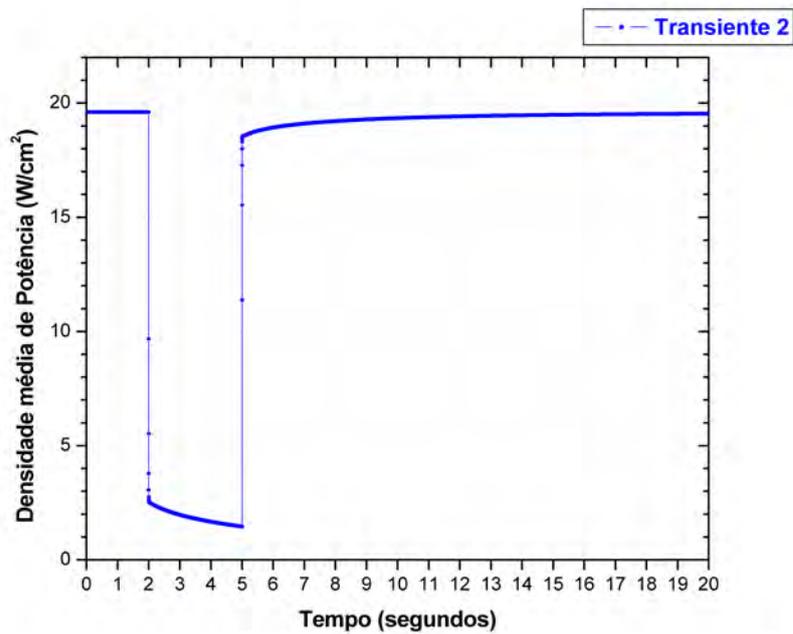


Figura 7.12:  $\bar{P}(t)$  da Cinética Pontual para o Transiente 2.

Observa-se que, neste caso, a densidade média de potência cai à  $1,457 W/cm^2$  no instante 5 segundos. Embora haja uma pequena diferença no mínimo alcançado por  $\bar{P}(t)$ , em comparação com aquele da Cinética Espacial, o resultado obtido pela Cinética Pontual mostra que o reator também recupera a estabilidade imediatamente após o retorno da fonte à intensidade inicial, assim como o fez a Cinética Espacial.

### 7.4.3 Resultados do Transiente 3

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para o Transiente 3(ABO), descrito no início da seção 7.4. Da mesma forma que para a seção 7.4.2, novamente as equações da Cinética Espacial e as equações de Cinética Pontual são resolvidas.

Para este transiente as equações de Cinética Espacial foram resolvidas para uma fonte externa da seguinte forma:

$$\mathcal{S}_{ext}(t) = \alpha(t)\mathcal{S}_{0_{ext}},$$

com  $\alpha(t)$  como mostrado na figura 7.13. Já as distribuições de fluxo de nêutrons e de concentrações de precursores para o instante  $t = 0$  segundos são aqueles do final do Transiente 1.

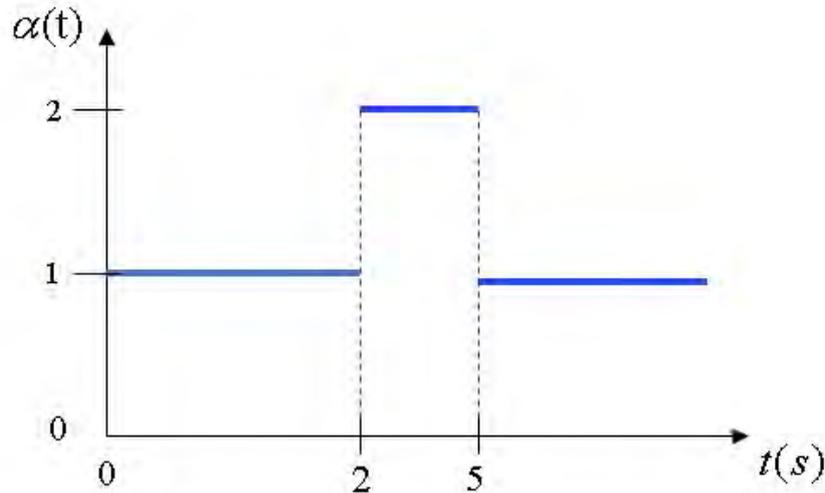


Figura 7.13: Comportamento no tempo da fonte externa para o Transiente 3.

Para um  $\Delta t$  de  $10^{-3}$  segundos, o sistema formado pelas equações (4.24) a (4.25) e mais a equação (4.20) foi resolvido e o resultado do comportamento no tempo da densidade média de potência (equação (7.3) ), para este caso, é mostrado na figura 7.14.

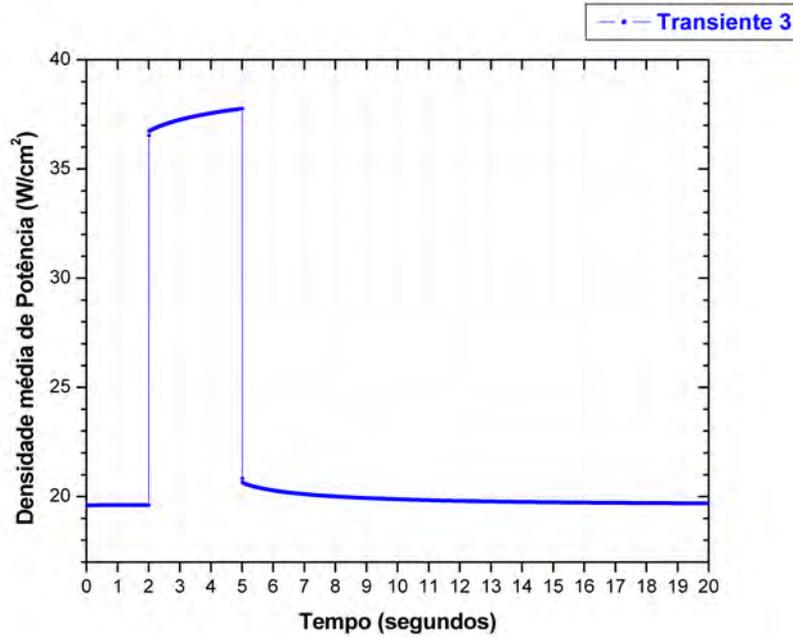


Figura 7.14:  $\bar{P}(t)$  da Cinética Espacial para o Transiente 3.

Observa-se que a densidade média de potência sobe a  $37,762 \text{ W/cm}^2$  no instante  $5 \text{ segundos}$  e imediatamente, após o retorno à intensidade inicial, o reator alcança novamente a estabilidade, com a mesma densidade média de potência de antes do transiente.

Para este mesmo Transiente 3 o programa desenvolvido para resolver as equações da Cinética Pontual foi executado para  $q(t)$  da seguinte forma:

$$q(t) = \alpha(t)Q,$$

com o mesmo  $\alpha(t)$  mostrado na figura 7.13, enquanto que  $T(t)$  e  $C_i(t)$ , para  $i = 1, 6$ , em  $t = 0 \text{ segundos}$  são aqueles do final do Transiente 1. E, para  $\Delta t$  de  $10^{-3} \text{ segundos}$ , o resultado do comportamento no tempo da densidade média de potência (equação 7.4) é mostrado na figura 7.15.

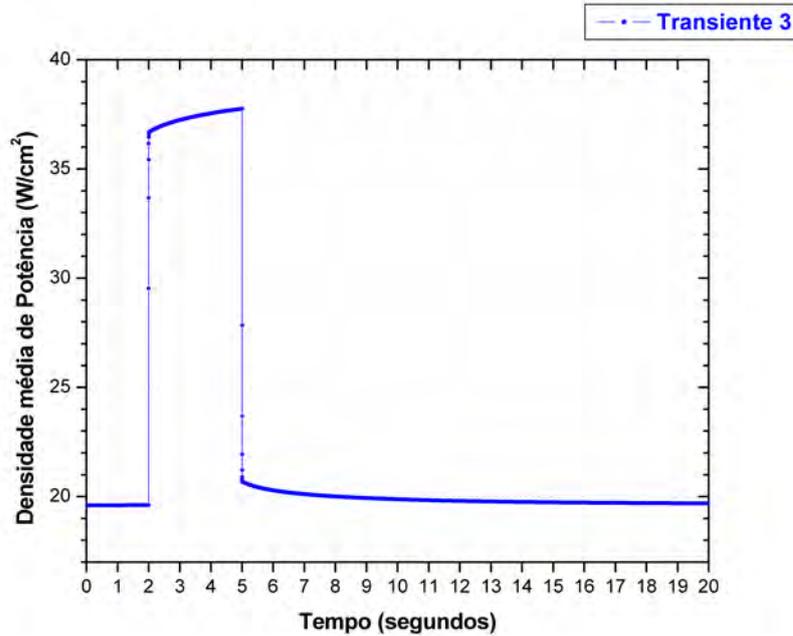


Figura 7.15:  $\bar{P}(t)$  da Cinética Pontual para Transiente 3.

Observa-se que, neste caso, a densidade média de potência sobe à  $37,758 \text{ W/cm}^2$  no instante  $5 \text{ segundos}$ . Embora haja uma pequena diferença no máximo alcançado por  $\bar{P}(t)$ , em comparação com aquele da Cinética Espacial, o resultado obtido pela Cinética Pontual mostra que o reator também recupera a estabilidade imediatamente após o retorno da fonte à intensidade inicial, assim como o fez a Cinética Espacial.

Como pode-se ver, a tabela 7.4 mostra os tempos de cálculo de cada Transiente, tanto para a Cinética Espacial como para a Cinética Pontual. É importante mencionar que para esta finalidade utilizou-se um computador com as seguintes características: *Intel(R) Core(TM)i3-4005U CPU @ 1.70GHz(4CPUs) e 8192MB RAM*.

Tabela 7.4: Tempos de Cálculo(em segundos).

Transiente	Cinética Espacial	Cinética Pontual
<b>1</b>	446,27	0,11
<b>2</b>	56,80	0,01
<b>3</b>	54,32	0,01

# Capítulo 8

## Conclusões

A dissertação como finalidade principal, apresentou uma metodologia para poder testar a Cinética Pontual para sistemas subcríticos, utilizando a Função Importância proposta por DULLA *et al* [2] para cálculo dos parâmetros cinéticos.

Utilizou-se a linguagem computacional FORTRAN para a elaboração dos programas de cálculo, com algoritmos genéricos que permite o emprego de qualquer número de grupos de energia, além de considerar qualquer número de grupos de precursores.

Primeiramente foi implementado um programa para cálculo do Problema de Autovalor, no qual foi adotado o *benchmark* ANL-BSS-6, visualmente verificou-se que as formas dos fluxos obtidos possuem semelhanças totais com àquelas da referência [23], além disso verificou-se uma excelente concordância entre o  $K_{eff}$  calculado e o  $K_{eff}^{Ref}$  da referência [22], com um desvio porcentual de 0.006%.

A maior dificuldade desse trabalho foi devido principalmente a falta de *benchmark* para reatores tipo ADS envolvendo o formalismo da Cinética Espacial, de modo a facilitar a validação dos programas. Por isto, foi imperativo o uso de “pseudo-fontes” para validar os programas desenvolvidos para cálculo de Problema de Fonte Fixa, Função Importância e Cinética Espacial; constatando assim o correto funcionamento dos programas.

Para a obtenção dos resultados no Capítulo 7 apresentou-se uma configuração de núcleo unidimensional de cinco regiões cujas características nucleares foram convenientemente modificadas para obter um  $K_{eff} = 0,95$  [24]. Garantida a subcriticalidade procedeu-se na obtenção dos cálculos de Fonte Fixa o qual forneceu uma densidade média de potência de  $19,626 W/cm^2$ . Também nesse trabalho calculou-se os parâmetros cinéticos  $\Lambda$ ,  $\bar{\beta}_i$ ,  $\Gamma$  e  $q(t)$ ; adotando a Função Importância proposta por DULLA *et al* [2].

Por último, utilizou-se três transientes para poder realizar as comparações. Para o Transiente 1, os resultados tanto para Cinética Espacial como Cinética Pontual em  $t = 160,076$  segundos alcançam a estabilidade, atingindo uma densidade média de potência de  $19,606 \text{ W/cm}^2$  para ambos casos. Já para o transiente 2(ABI) e transiente 3(ABO), os resultados das densidades médias de potência por unidade de área entre a Cinética Espacial e a Cinética Pontual diferiram em 0,2% e 0,01%, respectivamente, no fim do transiente.

Essa dissertação finaliza evidenciando que a Cinética Pontual conseguiu reproduzir adequadamente o comportamento mostrado pela Cinética Espacial, para cada transiente considerado nesse trabalho. Além disso, como é mostrado na tabela 7.4, em termos computacionais também é muito mais econômico o cálculo da Cinética Pontual que a Cinética Espacial. Por tanto pode-se concluir que o trabalho conseguiu fornecer uma ótima metodologia para avaliar a Cinética Pontual [1].

Apesar dos resultados da Cinética Pontual [1] se mostrarem em concordância com a Cinética Espacial, não se pode demonstrar que esta Função Importância(DULLA *et al* [2]) descreve melhor um sistema subcrítico quando comparado com outras Funções Importância (WEMERSON [1] GANDINI e SALVATORES [10] e NISHIHARA *et al* [12]). Isto é uma grande motivação para trabalhos futuros, os quais possam determinar Parâmetros Cinéticos decorrentes de estas Funções Importância, a fim de encontrar quais modelos reproduzem melhor a Cinética Pontual para sistemas subcríticos. Por outro lado, outros pontos a considerar é a utilização de 4 grupos de energia, geometria cartesiana bidimensional (2D), outros tipos de fontes externas, etc., com a finalidade de conseguir representações mais realísticas dos sistemas subcríticos.

# Referências Bibliográficas

- [1] WEMERSON, D. C. G. *Equações da Cinética Pontual para Sistemas Subcríticos baseadas na função Importância associada á fonte externa de nêutrons*. Tese de Doutorado.
- [2] DULLA, S., PICCA, P., RAVETTO, P., et al. “Integral parameters in source-driven systems”, *Progress in Nuclear Energy*, v. 53, n. 1, pp. 32–40, 2011.
- [3] IAEA-TECDOC-1766. *Status of Accelerator Driven Systems Research and Technology Development*. Relatório técnico, Vienna, Austria, 2015.
- [4] TACCA, M. S. *Diseño conceptual del núcleo de un reactor ADS (Accelerator-driven system)*. Tese de Doutorado, Instituto Balseiro, 2014.
- [5] RUBBIA C., R. J. “A Tentative Programme Towards Full Scale Energy Amplifier”, *In European Organization For Nuclear Research*, 1996.
- [6] AKKAYA, R., KEMAH, E., TOKGOZ, S. “Investigation of New Generation Accelerator Driven Subcritical Reactor System (ADS) in Nuclear Energy Production”, *Applied Science Reports*, v. 13, n. 3, pp. 126–129, 2016.
- [7] ANTOLIN, M. Q. *Simulação de um reator subcrítico tipo ADS via Monte Carlo para validação de cálculo da reatividade*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013.
- [8] CINTAS A., L. E., J.I., M. D. “Diseño Neutronic de un ADS”, , n. 2009, pp. 1–11, 2009.
- [9] OECD, N. E. A. *Accelerator Driven Systems(ADS) and Fast Reators(FR) in Advanced Nuclear Fuel Cycles: Acomparative Study*. Relatório Técnico Paris, 2002.
- [10] GANDINI, A., SALVATORES, M. “The physics of subcritical multiplying systems”, *Journal of Nuclear Science and Technology*, v. 39, n. 6, pp. 673–686, 2002.

- [11] DA SILVA, F. C. *Cálculo de Variações em razões de taxas de reações utilizando a teoria de perturbação generalizada*. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [12] NISHIHARA, K., IWASAKI, T., UDAGAWA, Y. “A new static and dynamic one-point equation and analytic and numerical calculations for a subcritical system”, *Nuclear Science and Technology*, v. 40, n. 7, pp. 481–492, 2003.
- [13] DUDERSTADT, J. J., HAMILTON, L. J. *Nuclear Reactor Analysis*. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1976.
- [14] ALVIM, A. C. M. *Métodos Numéricos em Engenharia Nuclear*. Brasil, Editora Certa, 2007.
- [15] TORRES, P. K. T. *Calculo de transmutação de Actinídeos Menores em Reatores Avançados de Tipo ADS*. Dissertação de m.sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [16] STACEY, W. M. *Nuclear reactor physics*. Germany, Wiley-VCH, Winheim, 2004.
- [17] NAKAMURA, S. *Computational Methods in engineering and science*. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1977.
- [18] FIGUEIRA, A. J. *Cinética Espacial para modelar transientes em reatores ADS*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015.
- [19] DE ABREU, W. V., DA CRUZ GONÇALVES, A., DE LIMA, Z. R. “Numerical Analysis for Transients in External Source Driven Reactors”, *World Journal of Nuclear Science and Technology*, v. 7, n. 02, pp. 103–120, 2017.
- [20] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C., HAINES, C. W. *Elementary differential equations and boundary value problems*, v. 9. Wiley New York, 1969.
- [21] ALVIM, A. C. M., DA SILVA, F. C., MARTINEZ, A. S. “Depletion calculation for a nodal reactor physics code”. In: *Proceedings of the 18th International Conference on Nuclear Engineering*, pp. –, Xi’an, China, maio 2010.
- [22] ARGONE CODE CENTER, A. N. L. “Benchmark Problem Book”, *Progress in Nuclear Energy*, pp. 129–161, 1972.
- [23] NAGAYA, Y., KOBAYASHI, K. “Solution of 1-D multi-group time-dependent diffusion equations using the coupled reactors theory”, *Annals of Nuclear Energy*, v. 22, n. 7, pp. 421–440, 1995.

- [24] ABDERRAHIM, H. A., KUPSCHUS, P., MALAMBU, E., et al. “MYRRHA: A multipurpose accelerator driven system for research & development”, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, v. 463, n. 3, pp. 487–494, 2001.