

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Mésons vetoriais num campo
eletromagnético no formalismo de
Duffin-Kemmer-Petiau**

ANDRÉS GUISEPPE JIRÓN VICENTE

ORIENTADOR: LUIS RAFAEL BENITO CASTRO

SÃO LUIS, JULHO DE 2019

ANDRÉS GUISEPPE JIRÓN VICENTE

Mésons vetoriais num campo eletromagnético no formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro

Aprovado em 08 de Julho 2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva - UFMA

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes - UFMA

Prof. Dr. Angel Eduardo Obispo Vasquez - UFMA

Prof. Dr. Antonio Soares de Castro - UNESP (Campus de Guaratinguetá)

DEDICATORIA

Dedico esta dissertação às pessoas mais importantes da minha vida: minha avó, Elva, meu pai Jaime, meus irmãos, Bengy e Stephano e por último mas não menos importante, Priscilla, minha linda noiva.

Agradecimentos

Ao meu pai, Jaime A. Jirón Flores, e à minha mãe, Belinda R. Vicente Silva, aos meus irmãos, Bengy e Stephano, pelo apoio incondicional desde sempre, por serem minha motivação e alegria durante quase dois anos fora de casa.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro, pela grande paciência e amizade durante este pequeno período acadêmico.

Aos professores, Dr. Rodolfo A. Casana e Dr. Jorge A. Espichán, pela grande oportunidade acadêmica oferecida.

A Angel E. Obispo pela amizade e disposição, ajudando-me na compreensão de conceitos físicos que foram de suma importância na minha formação acadêmica.

Aos meus amigos, Neyver Gonzales e Cesar Ibañez, pela convivência, paciência e muitos momentos agradáveis que foram realizados no Centro Histórico - Maranhão, conhecido também como “Reviver”.

A Joelson Reis Prado, o popular “gordito”, quem é e será para sempre “ meu amigo de fé, meu irmão camarada”. À dona Maria, minha mãe adotiva, ao Sr. Prado, estarei eternamente agradecido por vocês.

Aos novos amigos do programa de pós-graduação da UFMA: João Victor Conceição, Saulo dos Santos, João Alfieres, Marcos Lima, Joel Félix, João Tenório, entre outros.

À minha noiva, Priscilla, pelo apoio incondicional, pela infinita compreensão, paciência e por ser minha “ força estranha” durante esta grande etapa da minha vida.

Resumo

O formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) é uma teoria relativística de primeira ordem, que surge como uma proposta alternativa às equações tradicionais de Klein-Gordon (KG) e Proca para o estudo das partículas de spin 0 e spin 1, respectivamente. Nesta dissertação, estudamos o problema de um méson vetorial interagindo com um campo magnético constante e com um potencial coulombiano com o objetivo de obter as correspondentes autofunções e autovalores. É mostrado que, considerando a interação eletromagnética como um acoplamento mínimo, não é possível encontrar soluções analíticas devido à presença do chamado termo anômalo, o qual impossibilita o desacoplamento das equações das componentes físicas do espinor de DKP. Posteriormente, identificamos que a presença do termo anômalo nas equações de movimento é devido ao fato que o fator giromagnético da teoria não é o correto ($g = 1$). Seguindo a sugestão de considerar uma interação eletromagnética completa (interação mínima e não mínima), consideramos a interação não-mínima como uma interação do tipo tensorial antisimétrica e conseguimos obter o valor correto do fator giromagnético sendo $g = 2$, e assim obtemos a solução do nosso problema.

Palavras chave: méson vetorial, interação eletromagnética, potencial coulombiano, campo magnético, fator giromagnético.

Abstract

The first-order Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) formalism is a relativistic theory, which arises as an alternative proposal to the traditional Klein-Gordon (KG) and Proca equations for the study of spin-0 and spin-1 particles, respectively. In this dissertation, we study the problem of a vector meson interacting with a constant magnetic field and a Coulombian potential in order to obtain the corresponding autofunctions and autovalues. It is shown that, considering electromagnetic interaction as a minimum coupling, it is not possible to find analytical solutions due to the presence of the so-called anomalous term, which makes it impossible to decouple the equations of the physical components of the DKP spinor. Next, we identify that the presence of the anomalous term in the equations of motion is due to the fact that the gyromagnetic factor of the theory is not the correct one ($g = 1$). Following the suggestion to considering a complete electromagnetic interaction (minimal and non-minimal interaction), we consider a non-minimal interaction as a tensor interaction of the antisymmetric type and we get the correct value of gyromagnetic factor being $g = 2$, and thus we obtain solution to our problem.

Keywords: vector meson, electromagnetic interaction, Coulombian potential, magnetic field, gyromagnetic factor.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)	5
2.1	Álgebra de DKP	5
2.2	Covariância de Lorentz na teoria DKP	9
2.3	A equação adjunta de DKP	10
2.4	A equação de continuidade na teoria de DKP	11
2.5	Condição de normalização e valor esperado	12
2.6	Representação das matrizes β	12
2.7	Equivalência entre a teoria de DKP e as teorias de Klein-Gordon e Proca para o caso livre	13
2.7.1	Operadores de seleção	13
2.7.2	Setor escalar $S = 0$	13
2.7.3	Setor vetorial $S = 1$	15
2.8	Interações na teoria DKP	18
2.9	Equivalência entre a teoria de DKP e as teorias de Klein-Gordon e Proca para o caso de acoplamento mínimo	21
3	Mésons vetoriais num campo magnético externo	24
3.1	Equação de DKP num campo magnético externo	27
3.2	Correção do fator giromagnético	34
3.2.1	Caso: $m > 0$	39
3.2.2	Caso: $m < 0$	40
4	Mésons vetoriais em um potencial coulombiano	43
4.1	Equação de DKP num potencial coulombiano	46

4.1.1	Paridade: $(-1)^j$	51
4.1.2	Paridade: $(-1)^{j+1}$	53
4.2	Correção do fator giromagnético	58
4.2.1	Paridade $(-1)^j$	60
4.2.2	Paridade $(-1)^{j+1}$	61
5	Conclusões	69
A	Vetor Pauli-Lubanski da teoria DKP	71
A.1	Setor escalar	72
A.2	Setor vetorial	72
B	DKP em coordenadas curvilíneas	74
B.1	Coordenadas cilíndricas	76
B.2	Coordenadas esféricas	78
C	Harmônicos esféricos vetoriais	81
D	Diagonalização para o caso de campo magnético	84
E	Equivalência entre o sistema cilíndrico e retangular	87
F	Diagonalização para o caso do potencial coulombiano	90
G	Condição de normalização	92
G.1	Condição de normalização para o campo magnético	92
G.2	Condição de normalização para o potencial coulombiano	99
	Bibliografia	107

Capítulo 1

Introdução

O sucesso da teoria de Dirac na descrição de férmions massivos de spin $1/2$ motivou um interesse natural na procura de equações relativísticas de primeira ordem para as partículas de spin 0 e spin 1, as quais poderiam ser usadas como um formalismo alternativo para as equações conhecidas de Klein-Gordon (KG) e Proca. Um dos primeiros esforços nessa direção foi proposto por De Broglie [1] em 1936. Ele sugeriu que uma teoria para fótons massivos poderia surgir a partir da combinação de duas partículas de spin $1/2$. Tomado por esta ideia e com profundo conhecimento da estrutura algébrica da equação de Dirac, De Broglie conseguiu construir um conjunto de equações lineares de primeira ordem (acopladas) envolvendo matrizes de dimensão 16×16 , as quais por sua vez foram obtidas a partir do produto direto de duas representações diferentes para as matrizes de Dirac. Verificou-se que esse novo conjunto de matrizes 16×16 (que chamaremos de matrizes β) satisfazem uma álgebra diferente à álgebra de Dirac, e cuja obtenção foi um objetivo que De Broglie não conseguiu atingir.

Dois anos mais tarde, e envolvido nesses mesmos questionamentos, G. Petiau [2], um dos alunos de De Broglie, foi o primeiro a propor uma álgebra consistente associada a esse conjunto de equações lineares de primeira ordem acopladas baseando-se em uma representação de matrizes 16×16 do grupo $SO(5)$. Posteriormente, foi mostrado que tal representação é redutível, podendo-se decompor em outras 3 representações irredutíveis: 1 representação 5×5 , 1 representação 10×10 e uma última representação trivial. Infelizmente eram tempos de guerra, e esses resultados foram publicados só depois do final da Segunda Guerra Mundial.

De forma simultânea e completamente alheio ao trabalho de Petiau, Kemmer [3] conseguiu reescrever as equações de segunda ordem de Proca e KG como um sistema de equações de primeira ordem acopladas de dimensão 10×10 e 5×5 , respectivamente. Dessa forma, Kemmer conjecturou que devia existir uma forma matricial para seu sistema de equações, de forma que elas possuísem representações irredutíveis, representando partículas de spin 0 e 1. No entanto, ele não conseguia clarificar, num primeiro instante, qual era a álgebra que as matrizes β deveriam satisfazer.

Foi assim que o matemático R. J. Duffin [4], inspirado em um seminário ministrado por Kemmer sobre as equações de Proca, conseguiu relacionar dentro de um formalismo algébrico os campos de spin 0 e 1 com as equações de primeira ordem na formulação β , afirmando que elas deveriam satisfazer as já conhecidas relações de comutação obtidas por Petiau em 1936. Foi Kemmer quem sintetizou seus trabalhos, junto aos avanços realizados por Duffin e Petiau, escrevendo seu célebre artigo intitulado *The particle aspect of meson theory*, onde se mostrou para a comunidade científica a nova equação relativística matricial de primeira ordem, conhecida atualmente como a Equação de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP).

Embora sejam estruturalmente semelhantes, as equações de DKP e de Dirac se diferenciam principalmente na álgebra da suas matrizes representativas, sendo que as matrizes de DKP (β^μ) obedecem uma álgebra de maior complexidade:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = \beta^\mu g^{\nu\lambda} + \beta^\lambda g^{\nu\mu}.$$

Como dito anteriormente, em $3 + 1$ dimensões as matrizes β^μ têm três representações irredutíveis: uma representação de dimensão 5×5 para descrever partículas de spin 0 (setor escalar), uma outra representação de 10×10 para descrever partículas de spin 1 (setor vetorial) e uma última representação trivial de 1×1 que não tem significado físico. O estado dinâmico Ψ para uma partícula de spin 0 é representado por um espinor de 5 componentes e para partículas de spin 1 tem um espinor de 10 componentes. Assim, antes de abordar um problema, é necessário selecionar o setor de interesse, e isso pode ser realizado escolhendo uma representação específica. Outra forma de selecionar o setor de interesse é com a ajuda dos chamados *operadores de projeção*. Esses operadores (que atuam sobre o espinor de DKP) fornecem um espinor com componentes (chamadas de componentes físicas) que satisfazem à equação de Proca (KG), no caso de trabalhar no setor vetorial (escalar).

Apesar da elegância deste formalismo, é claro que resolver um sistema de 10 equações diferenciais acopladas é um cálculo complicado, mesmo seja numericamente. Existe na literatura um erro recorrente que consiste em igualar e/ou excluir (sem motivação física) algumas componentes do espinor de DKP (neste caso, no setor vetorial) com a finalidade de simplificar convenientemente o sistema de equações e assim obter soluções exatas [5–11]. Nesta dissertação abordamos o mesmo procedimento sem a necessidade de lançar mão dessas técnicas questionáveis. Um outro ponto de controvérsia é referente ao chamado *termo anômalo*. Ele surge quando consideramos a equação de DKP no setor vetorial com interação eletromagnética via acoplamento mínimo. O resultado desse procedimento é o surgimento de um termo proporcional a $\frac{1}{M^2}$ na equação de segunda ordem (após tentar desacoplar as equações de primeira ordem). Devido ao fato de que esse termo não tem analogia na teoria de Dirac, alguns autores [12–14] consideram ele como sendo não físico, usando isso como justificativa para tirar à mão essa *anomalia* do sistema de equações. Nos capítulos 3 e 4 mostramos que esse termo anômalo é excluído naturalmente da teoria se consideramos interação mínima e não-mínima simultaneamente. Nosso argumento está baseado no fato de que sistemas compostos por mésons vetoriais apresentam um fator giromagnético de $g = 2$, o qual é conseguido só quando esses dois acoplamentos são considerados no sistema.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: No capítulo 2 apresentamos uma revisão dos fundamentos básicos do formalismo DKP. A álgebra de DKP é discutida na seção 2.1, a covariância de Lorentz é discutida na seção 2.2, a equação adjunta de DKP na seção 2.3 e a equação de continuidade, a normalização e os valores esperados são discutidos nas seções 2.4 e 2.5, respectivamente. As representações explícitas das matrizes β para descrever partículas de spin 0 e 1 são dadas na seção 2.6. A equivalência da teoria DKP com as equações de segunda ordem de KG e Proca no caso livre é descrita na seção 2.7. Os diferentes tipos de interação da teoria DKP para o setor escalar e vetorial são apresentados na seção 2.8, e na seção 2.9 é mostrado a equivalência da equação de DKP com as equações de Klein-Gordon e Proca para o caso de acoplamento eletromagnético.

No capítulo 3, estudamos a interação de um méson vetorial com um campo eletromagnético externo. Para isso, usamos a equação de DKP em coordenadas cilíndricas em presença de um campo magnético externo. Mostramos que, no limite não relativístico da teoria, um fator giromagnético $g = 1$ aparece como consequência de considerar somente o sistema minimamente acoplamento. Posteriormente, na seção 3.2, é introduzido o acoplamento não-mínimo com a finalidade de obter o fator giromagnético correto $g = 2$.

No capítulo 4, estudamos a interação de um méson vetorial imerso em um potencial coulombiano. Para isso, utilizamos a equação de DKP em coordenadas esféricas, obtendo um sistema de equações que só pode ser resolvido analiticamente para os casos em que $j = l \neq 0$ e $j = 0, l = 1$. Na seção 4.2, propõe-se a correção do fator giromagnético com a interação não-mínima que foi definida na seção anterior. Desta forma, é obtido um sistema de equações diferenciais ordinárias que é resolvido por meio de um método de diagonalização. Finalmente, no capítulo 5, apresentamos as conclusões e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)

2.1 Álgebra de DKP

A equação de DKP [15] que descreve um bóson livre de massa de repouso M é dada por¹

$$\left(i\beta^\mu\partial_\mu - M\right)\psi = 0, \quad (2.1)$$

onde as matrizes β^μ obedecem a seguinte álgebra:

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda + \beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu = \beta^\mu g^{\nu\lambda} + \beta^\lambda g^{\nu\mu}, \quad (2.2)$$

e o tensor métrico é $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Assim como as matrizes β^μ , também existe um conjunto de matrizes que complementam a álgebra e são definidas da seguinte maneira:

$$\eta^\mu \equiv 2(\beta^\mu)^2 - g^{\mu\mu}, \quad (2.3)$$

onde η^μ satisfaz a seguinte propriedade:

$$(\eta^\mu)^2 = \mathbb{I}, \quad (2.4)$$

¹Em unidades naturais $\hbar = 1$, $c = 1$.

com \mathbb{I} representando a matriz identidade. Agora serão calculadas algumas relações de comutação e anticomutação entre as matrizes η^μ e β^ν que serão importantes no desenvolvimento deste capítulo. Para isto, vamos multiplicar (2.3) por β^ν à direita, assim

$$\eta^\mu \beta^\nu = 2\beta^\mu \beta^\mu \beta^\nu - g^{\mu\mu} \beta^\nu. \quad (2.5)$$

Por outro lado, fazendo $\nu = \mu$ em (2.2), temos que

$$g^{\mu\mu} \beta^\nu = \beta^\mu \beta^\mu \beta^\nu + \beta^\nu \beta^\mu \beta^\mu - g^{\nu\mu} \beta^\mu. \quad (2.6)$$

Finalmente, substituindo (2.6) em (2.5), obtemos

$$\eta^\mu \beta^\nu = \beta^\mu \beta^\mu \beta^\nu - \beta^\nu \beta^\mu \beta^\mu + g^{\nu\mu} \beta^\mu. \quad (2.7)$$

Analogamente, se multiplicamos (2.3) por β^ν à esquerda

$$\beta^\nu \eta^\mu = 2\beta^\nu \beta^\mu \beta^\mu - g^{\mu\mu} \beta^\nu, \quad (2.8)$$

e substituímos (2.6) em (2.8), tem-se

$$\beta^\nu \eta^\mu = \beta^\nu \beta^\mu \beta^\mu - \beta^\mu \beta^\mu \beta^\nu + g^{\nu\mu} \beta^\mu. \quad (2.9)$$

Apartir dos resultados anteriores, podemos encontrar duas relações importantes. A primeira relação é encontrada somando (2.7) com (2.9) para obter

$$\{\eta^\mu, \beta^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \beta^\mu, \quad (2.10)$$

e a segunda relação, subtraindo (2.9) de (2.7), obtendo

$$[\eta^\mu, \beta^\nu] = 2\left(\beta^\mu \beta^\mu \beta^\nu - \beta^\nu \beta^\mu \beta^\mu\right). \quad (2.11)$$

Para o caso $\mu = \nu$, a expressão (2.11) torna-se

$$[\eta^\mu, \beta^\mu] = 0. \quad (2.12)$$

Agora, precisamos calcular as relações entre as próprias matrizes η^μ . Calculando

$$[\eta^\mu, \eta^\nu] = \eta^\mu \eta^\nu - \eta^\nu \eta^\mu, \quad (2.13)$$

e substituindo (2.3) em (2.13), tem-se

$$[\eta^\mu, \eta^\nu] = 4\left((\beta^\mu)^2(\beta^\nu)^2 - (\beta^\nu)^2(\beta^\mu)^2\right). \quad (2.14)$$

Usando a álgebra (2.2) podemos obter as seguintes expressões:

$$(\beta^\mu)^2\beta^\nu = g^{\mu\mu}\beta^\nu + g^{\nu\mu}\beta^\mu - \beta^\nu(\beta^\mu)^2, \quad (2.15)$$

e

$$\beta^\nu\beta^\nu\beta^\mu = g^{\mu\mu}\beta^\nu + g^{\nu\mu}\beta^\mu - \beta^\mu\beta^\nu\beta^\nu. \quad (2.16)$$

Substituindo (2.15) e (2.16) em (2.14), obtemos

$$[\eta^\mu, \eta^\nu] = 4g^{\mu\nu}[\beta^\mu, \beta^\nu], \quad (2.17)$$

de forma que para o caso $\mu \neq \nu$, temos

$$[\eta^\mu, \eta^\nu] = 0. \quad (2.18)$$

E por último, outra relação importante é obtida fazendo $\mu = \nu$ em (2.7)

$$\eta^\mu\beta^\mu = g^{\mu\mu}\beta^\mu. \quad (2.19)$$

Tendo encontrado relações importantes associadas à álgebra das matrizes η^μ , o seguinte passo agora é calcular a conjugação complexa das matrizes β^μ . Para isto, exigimos que a seguinte relação seja satisfeita:

$$(\beta^\mu)^\dagger = g^{\mu\mu}\beta^\mu, \quad (2.20)$$

onde é possível definir uma matriz D , de tal maneira que

$$D\beta^\mu D = (\beta^\mu)^\dagger, \quad (2.21)$$

com $D^2 = \mathbb{I}$. Para identificar a matriz D , primeiro devemos aplicar a conjugação complexo da matriz η^μ , obtendo

$$(\eta^\mu)^\dagger = 2(\beta^\mu)^\dagger(\beta^\mu)^\dagger - g^{\mu\mu}. \quad (2.22)$$

Desta maneira substituindo (2.20) em (2.22) obtemos

$$(\eta^\mu)^\dagger = 2(\beta^\mu)^2 - g^{\mu\mu}, \quad (2.23)$$

onde foi usado $(g^{\mu\mu})^2 = \mathbb{I}$, mostrando assim que $(\eta^\mu)^\dagger = \eta^\mu$, quer dizer que a matriz η^μ é hermitiana.

Por outro lado, multiplicando (2.3) por D à direita e esquerda, obtemos

$$D\eta^\mu D = 2D(\beta^\mu)^2 D - g^{\mu\mu}. \quad (2.24)$$

Usando a propriedade $D^2 = \mathbb{I}$ junto com a definição (2.21), a equação (2.24) pode ser escrita como

$$D\eta^\mu D = 2(\beta^\mu)^\dagger(\beta^\mu)^\dagger - g^{\mu\mu}. \quad (2.25)$$

Comparando as equações (2.22) com (2.25), tem-se a seguinte igualdade:

$$D\eta^\mu D = (\eta^\mu)^\dagger, \quad (2.26)$$

e como η^μ é hermitiana, pode-se concluir que

$$D\eta^\mu D = \eta^\mu. \quad (2.27)$$

Além disso, multiplicando (2.27) por D à esquerda, temos que

$$\eta^\mu D = D\eta^\mu, \quad (2.28)$$

de onde podemos concluir que

$$[\eta^\mu, D] = 0. \quad (2.29)$$

Como foi mostrado em (2.18), D pode ser escolhida convenientemente como

$$D = \eta^\nu, \quad (2.30)$$

onde se verifica que $D^2 = (\eta^\nu)^2 = 1$. Com (2.20) e (2.21) temos que $(\beta^\mu)^\dagger = D\beta^\mu D = g^{\mu\mu}\beta^\mu$. Pode-se deduzir que esta última expressão é satisfeita se e somente se

$$D = \eta^0. \quad (2.31)$$

Desta forma

$$(\beta^\mu)^\dagger = \eta^0\beta^\mu\eta^0 = g^{\mu\mu}\beta^\mu, \quad (2.32)$$

portanto a matriz responsável pela hermiticidade das matrizes β^μ é a matriz η^0 , ou seja, as matrizes β^μ são hermitianas com respeito a η^0 .

2.2 Covariância de Lorentz na teoria DKP

Nesta seção, vamos estudar a covariância da equação de DKP sob transformações de Lorentz. A condição de covariância exige que sob as transformações

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \bar{\partial}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu, \quad (2.33)$$

$$\bar{\psi}(\bar{x}) = U(\Lambda)\psi(x), \quad \bar{M} \equiv M, \quad (2.34)$$

a equação de DKP permaneça invariante com respeito à forma, ou seja

$$\left(i\bar{\beta}^\mu \bar{\partial}_\mu - \bar{M} \right) \bar{\psi}(\bar{x}) = 0, \quad (2.35)$$

onde as matrizes $\bar{\beta}^\mu$ devem satisfazer a álgebra de DKP

$$\bar{\beta}^\mu \bar{\beta}^\nu \bar{\beta}^\lambda + \bar{\beta}^\lambda \bar{\beta}^\nu \bar{\beta}^\mu = \bar{\beta}^\mu g^{\nu\lambda} + \bar{\beta}^\lambda g^{\nu\mu}. \quad (2.36)$$

Para encontrar a forma explícita das transformações $U(\Lambda)$ e $\bar{\beta}^\mu$, serão substituídas as transformações (2.33) e (2.34) em (2.35), obtendo

$$i\bar{\beta}^\mu \Lambda_\mu{}^\nu U(\Lambda) \partial_\nu \psi(\bar{x}) - MU(\Lambda)\psi(\bar{x}) = 0. \quad (2.37)$$

Multiplicando (2.37) pela matriz $U^{-1}(\Lambda)$ à esquerda, temos

$$i\left(U^{-1}(\Lambda) \bar{\beta}^\mu U(\Lambda) \Lambda_\mu{}^\nu \right) \partial_\nu \psi(\bar{x}) - M\psi(\bar{x}) = 0. \quad (2.38)$$

Para que a equação (2.38) seja invariante, é preciso que as matrizes β^μ transformem-se como

$$U^{-1} \bar{\beta}^\mu U = \Lambda^\mu{}_\nu \beta^\nu. \quad (2.39)$$

Agora que foi determinada a forma explícita das matrizes β^μ sob transformações de Lorentz, podemos construir a matriz $U(\Lambda)$ para as transformações infinitesimais, dadas por

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \delta_\mu^\nu + \Delta\omega_\mu{}^\nu + \mathcal{O}(\Delta\omega^2), \quad \Delta\omega_{\mu\nu} = -\Delta\omega_{\nu\mu}, \quad (2.40)$$

para isso, é expandido $U(\Lambda)$ em potências de $\Delta\omega^{\mu\nu}$

$$U(\Lambda) = 1 + i\alpha\Delta\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\Delta\omega^2), \quad (2.41)$$

logo, substituindo (2.41) em (2.39), obtemos

$$\bar{\beta}^\mu + i\alpha\Delta\omega_{\eta\beta}\bar{\beta}^\mu S^{\eta\beta} = \beta^\mu + \Delta\omega^\mu{}_\nu\beta^\nu + i\alpha\Delta\omega_{\eta\beta}S^{\eta\beta}\beta^\mu + \mathcal{O}(\Delta\omega^2), \quad (2.42)$$

onde, igualando coeficientes dos termos $\Delta\omega_{\eta\beta}$, pode-se concluir que

$$\bar{\beta}^\mu = \beta^\mu, \quad i\alpha\Delta\omega_{\eta\beta}[\beta^\mu, S^{\eta\beta}] = \Delta\omega_\mu{}^\nu\beta^\nu. \quad (2.43)$$

O primeiro resultado nos mostra que as matrizes β^μ devem ser independentes do sistema de coordenadas escolhido no espaço de Minkowski. No entanto, o segundo resultado será usado para calcular o gerador infinitesimal $S^{\mu\nu}$, obtendo

$$\alpha = -\frac{i}{2} \quad \text{e} \quad S^{\eta\nu} = [\beta^\eta, \beta^\nu]. \quad (2.44)$$

Uma transformação de Lorentz própria finita pode ser gerada a partir das transformações próprias infinitesimais. Tal transformação de Lorentz é determinada por

$$U(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right). \quad (2.45)$$

2.3 A equação adjunta de DKP

Nesta seção será construída a equação adjunta de DKP para o caso livre. Aplicando o conjugado hermitiano sobre a equação de DKP (2.1), temos

$$\left[\left(i\beta^\mu\partial_\mu - M \right) \psi \right]^\dagger = 0, \quad (2.46)$$

que pode ser escrita como

$$i(\partial_\mu\psi^\dagger)\beta^{\mu\dagger} + M\psi^\dagger = 0, \quad (2.47)$$

ou ainda

$$i(\partial_\mu\psi^\dagger)\eta^0\beta^\mu\eta^0 + M\psi^\dagger = 0. \quad (2.48)$$

Multiplicando (2.48) por η^0 à direita, tem-se

$$i(\partial_\mu\psi^\dagger)\eta^0\beta^\mu + M\psi^\dagger\eta^0 = 0, \quad (2.49)$$

e definindo o espinor adjunto $\bar{\psi}$ como

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \eta^0, \quad (2.50)$$

obtemos a equação de DKP adjunta

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu + M\bar{\psi} = 0, \quad (2.51)$$

a qual é uma equação de movimento para o espinor adjunto $\bar{\psi}$.

2.4 A equação de continuidade na teoria de DKP

A equação de continuidade na teoria DKP é obtida via processo padrão. Multiplicando a equação de DKP (2.1) por $\bar{\psi}$ à esquerda obtemos

$$i\bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi - M\bar{\psi} \psi = 0, \quad (2.52)$$

e multiplicando a equação de DKP conjugada (2.51) por ψ à direita obtemos

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu \psi + M\bar{\psi} \psi = 0, \quad (2.53)$$

logo, somando (2.52) e (2.53) temos que

$$i\bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi + i\partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu \psi = 0, \quad (2.54)$$

que pode ser escrita em uma forma compacta como

$$i\partial_\mu (\bar{\psi} \beta^\mu \psi) = 0. \quad (2.55)$$

A partir deste último resultado é possível definir a densidade de quadricorrente como

$$J^\mu = \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \psi, \quad (2.56)$$

onde o fator $\frac{1}{2}$ é necessário para reproduzir a densidade de carga obtida na teoria de Klein-Gordon.

De (2.56) obtemos que

$$J^0 \equiv \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta^0 \psi \equiv \rho, \quad (2.57)$$

$$J^i \equiv \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta^i \psi. \quad (2.58)$$

e a equação (2.56) torna-se

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (2.59)$$

que possui a forma da equação de continuidade. É necessário mencionar que o componente temporal de J^μ (ou seja, J^0) não é positivo-definido, o que impede que J^0 seja interpretado como uma densidade de probabilidade. Todavia J^0 pode ser interpretado como uma densidade de carga.

2.5 Condição de normalização e valor esperado

A condição de normalização é dada por $\int J^0 d\tau = \pm 1$, e usando (2.57) pode ser expressa na teoria de DKP como

$$\int \bar{\psi} \beta^0 \psi d\tau = \pm 2, \quad (2.60)$$

onde o sinal positivo (negativo) deve ser usado para uma carga positiva (negativa).

O valor esperado de qualquer observável \mathcal{O} é dado por

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int d\tau \psi^\dagger \eta^0 (\beta^0 \mathcal{O}) \psi}{\int d\tau \psi^\dagger \eta^0 \beta^0 \psi}, \quad (2.61)$$

onde $\beta^0 \mathcal{O}$ deve ser hermitiano com respeito a η^0 , ou seja, $[\eta^0 (\beta^0 \mathcal{O})]^\dagger = \eta^0 (\beta^0 \mathcal{O})$, para assegurar que $\langle \mathcal{O} \rangle$ seja uma quantidade real [16].

2.6 Representação das matrizes β

A teoria DKP tem uma representação que é redutível a três representações irredutíveis: uma representação trivial de primeira ordem sem significado físico, uma representação de quinta ordem (chamada setor escalar) que descreve partículas de spin 0 e uma representação de décima ordem (chamada setor vetorial) que descreve partículas de spin 1.

Para descrever partículas de spin 0 usamos a representação padrão [17]

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \theta & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{0}} & \rho_i \\ -\rho_i^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.62)$$

onde

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

em que $\bar{\mathbf{0}}$, $\tilde{\mathbf{0}}$ e $\mathbf{0}$ são matrizes nulas 2×3 , 2×2 e 3×3 , respectivamente.

Também usamos a representação padrão [17] para descrever partículas de spin 1

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{0}}^T & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{0}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\mathbf{0}} & e_i & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ -e_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{0}}^T & -is_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

onde s_i são matrizes 3×3 em que $(s_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}$, e_i são matrizes 1×3 em que $(e_i)_{1j} = \delta_{ij}$ e $\bar{\mathbf{0}}$, $\mathbf{0}$ são matrizes nulas 1×3 , 3×3 , enquanto \mathbf{I} designa a matriz identidade 3×3 .

2.7 Equivalência entre a teoria de DKP e as teorias de Klein-Gordon e Proca para o caso livre

2.7.1 Operadores de seleção

Já que a equação de DKP pode descrever partículas de spin 0 ou de spin 1, é proposto Umazewa [18] propôs um conjunto de operadores de projeção para facilitar a identificação das componentes físicas do espinor de DKP e assim selecionar o setor físico da teoria.

2.7.2 Setor escalar $S = 0$

Os seguintes operadores de projeção são definidos:

$$P \equiv -(\beta^0)^2(\beta^1)^2(\beta^2)^2(\beta^3)^2, \quad (2.66)$$

com $P^2 = P$ e

$$P^\mu \equiv P\beta^\mu, \quad (2.67)$$

com as seguintes propriedades:

$$P^\mu \beta^\nu = Pg^{\mu\nu}, \quad (2.68)$$

$$PS^{\mu\nu} = S^{\mu\nu}P = 0, \quad (2.69)$$

$$P^\mu S^{\sigma\nu} = g^{\mu\sigma}P^\nu - g^{\mu\nu}P^\sigma. \quad (2.70)$$

Considerando que as matrizes β^μ e P são invariantes sob transformação de Lorentz, quer dizer $(\beta^\mu)' = \beta^\mu$, $P' = P$ e $(P^\mu)' = P^\mu$. Analizaremos a seguir o comportamento de $(P\psi)$ e $P^\mu\psi$. Analisando $P\psi$ sob uma transformação de Lorentz e usando a propriedade (2.69) pode-se mostrar que

$$(P\psi)' = P'\psi' = P(U(\Lambda)\psi) = P\left(1 + \frac{1}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\Delta\omega^2)\right)\psi = P\psi, \quad (2.71)$$

mostrando assim que $P\psi$ transforma-se como um escalar sob transformações de Lorentz. De modo análogo, analisando $P^\mu\psi$ sob uma transformação de Lorentz, temos que

$$(P^\mu\psi)' = P^\mu(U(\Lambda)\psi) = P^\mu\left(1 + \frac{1}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\Delta\omega^2)\right)\psi, \quad (2.72)$$

e usando a propriedade (2.70), obtemos que

$$(P^\mu\psi)' = \left(\delta_\nu^\mu + \Delta\omega^\mu{}_\nu + \mathcal{O}(\Delta\omega^2)\right)P^\nu\psi = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu\psi. \quad (2.73)$$

Pode-se ver que $P^\mu\psi$ transforma-se como um vetor sob transformações de Lorentz.

Equivalência entre DKP e KG

Aplicando o operador de projeção P na equação de DKP livre (2.1)

$$iP\beta^\mu\partial_\mu\psi = MP\psi, \quad (2.74)$$

e usando $P\beta^\mu = P^\mu$, a equação (2.74) pode ser escrita como

$$P\psi = \frac{i}{M}\partial_\mu P^\mu\psi. \quad (2.75)$$

Por outro lado, aplicando o operador P^ν à equação de DKP (2.1)

$$iP^\nu\beta^\mu\partial_\mu\psi = MP^\nu\psi, \quad (2.76)$$

e usando $P^\nu\beta^\mu = Pg^{\mu\nu}$, (2.76) torna-se

$$P^\nu\psi = \frac{i}{M}\partial^\nu P\psi. \quad (2.77)$$

Substituindo (2.77) em (2.75), obtém-se

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + M^2\right)(P\psi) = 0, \quad (2.78)$$

que é a equação de KG para uma partícula livre de spin 0. Como pode ser visto em (2.78), quando é aplicado o operador de projeção P à equação de DKP é selecionado o setor escalar $S = 0$ da teoria, fazendo com que unicamente a componente física $P\psi$ satisfaça a equação de KG livre. Usando a representação dada na seção 2.6, $P\psi$ é dado por

$$P\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

De (2.79) podemos deduzir que a componente que satisfaz à equação de KG é ψ_1 ², e as outras quatro componentes ($\psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5$) são componentes redundantes, já que podem ser expressas por meio de (2.77) em termos de ψ_1 . Neste ponto é importante mencionar que a componente física $P\psi$ e as outras quatro componentes redundantes $P^\mu\psi$, estão associadas ao valor de $S = 0$, isso é mostrado formalmente no apêndice A.1

2.7.3 Setor vetorial $S = 1$

Os seguintes operadores de projeção são definidos:

²Isso significa que há apenas um grau de liberdade, garantindo a descrição do comportamento de uma partícula de spin 0.

$$R^\mu \equiv (\beta^1)^2(\beta^2)^2(\beta^3)^2(\beta^\mu\beta^0 - g^{\mu 0}), \quad (2.80)$$

e

$$R^{\mu\nu} \equiv R^\mu\beta^\nu, \quad (2.81)$$

com as seguintes propriedades:

$$R^{\mu\nu} = -R^{\nu\mu}, \quad (2.82)$$

$$R^{\mu\nu}\beta^\alpha = g^{\nu\alpha}R^\mu - g^{\mu\alpha}R^\nu, \quad (2.83)$$

$$R^\mu S^{\nu\alpha} = g^{\mu\nu}R^\alpha - g^{\mu\alpha}R^\nu, \quad (2.84)$$

$$S^{\nu\rho}R^\mu = 0, \quad (2.85)$$

$$R^{\mu\nu}S^{\alpha\rho} = g^{\mu\rho}R^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha}R^{\nu\rho} + g^{\nu\alpha}R^{\mu\rho} - g^{\nu\rho}R^{\mu\alpha}. \quad (2.86)$$

As propriedades anteriores nos permitem mostrar que sob uma transformação de Lorentz temos que

$$(R^\mu\psi)' = R^\mu(U(\Lambda)\psi) = R^\mu\left(1 + \frac{1}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\Delta\omega^2)\right)\psi = \Lambda^\mu{}_\nu R^\nu\psi, \quad (2.87)$$

$$(R^{\mu\nu}\psi)' = R^{\mu\nu}\left(1 + \frac{1}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\Delta\omega^2)\right)\psi = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\eta R^{\rho\eta}\psi, \quad (2.88)$$

demonstrando assim que $R^\mu\psi$ e $R^{\mu\nu}\psi$ transformam-se como um vetor e um tensor, respectivamente sob transformações de Lorentz.

Equivalência entre DKP e Proca

Aplicando o operador de projeção R^μ à equação (2.1) obtemos

$$\partial_\nu R^{\mu\nu}\psi = -iMR^\mu\psi, \quad (2.89)$$

enquanto aplicando o operador $R^{\mu\nu}$ à equação (2.1), conduz à

$$R^{\mu\nu}\psi = \frac{i}{M}U^{\nu\mu}, \quad (2.90)$$

onde foi definido

$$U^{\nu\mu} \equiv \partial^\nu R^\mu\psi - \partial^\mu R^\nu\psi. \quad (2.91)$$

Substituindo (2.90) em (2.89), obtém-se a seguinte equação:

$$\partial_\nu U^{\nu\mu} + M^2 R^\mu\psi = 0, \quad (2.92)$$

que é a equação de Proca para uma partícula livre de spin 1. Aplicando ∂_μ à equação (2.92), obtemos que

$$\partial_\mu R^\mu\psi = 0, \quad (2.93)$$

e substituindo (2.93) em (2.92), tem-se

$$(\partial^\mu\partial_\mu + M^2)(R^\mu\psi) = 0. \quad (2.94)$$

As equações (2.93) e (2.94) são equivalentes à equação de Proca (2.92). Assim podemos concluir que o operador R^μ seleciona o setor vetorial $S = 1$ da teoria. Usando a representação da seção 2.6, $R^\mu\psi$ é dado por

$$R^0\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R^1\psi = \begin{pmatrix} -\psi_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R^2\psi = \begin{pmatrix} -\psi_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R^3\psi = \begin{pmatrix} -\psi_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.95)$$

De (2.94) e (2.95) vemos que as componentes ψ_1, ψ_2, ψ_3 e ψ_4 são as componentes físicas do espinor para o setor vetorial da teoria DKP, no entanto a equação (2.93) pode ser usada para obter três componentes físicas independentes³. E as outras seis componentes ($\psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9$ e ψ_{10}) são componentes redundantes, já que podem ser expressas por meio de (2.90) em termos das componentes físicas. Igual ao caso anterior, é importante mencionar que as quatro componentes físicas $R^\mu\psi$ e as outras seis componentes redundantes $R^{\mu\nu}\psi$ estão associadas com o valor de $S = 1$. Isto é mostrado formalmente no apêndice A.2.

2.8 Interações na teoria DKP

A equação DKP com interação é escrita como

$$\left(i\beta^\mu\partial_\mu - M - V\right)\psi = 0, \quad (2.96)$$

onde V é um potencial da maneira mais geral possível. Na presença de interações, a equação conjugada de DKP torna-se

$$\left[\left(i\beta^\mu\partial_\mu - M - V\right)\psi\right]^\dagger = 0, \quad (2.97)$$

$$i(\partial_\mu\psi^\dagger)\beta^{\mu\dagger} + M\psi^\dagger + \psi^\dagger V^\dagger = 0, \quad (2.98)$$

³Isso significa que há três graus de liberdade garantindo a descrição do comportamento de uma partícula de spin 1.

$$i(\partial_\mu \psi^\dagger) \eta^0 \beta^\mu \eta^0 + M \psi^\dagger + \psi^\dagger V^\dagger = 0, \quad (2.99)$$

$$i(\partial_\mu \psi^\dagger) \eta^0 \beta^\mu + M \psi^\dagger \eta^0 + \psi^\dagger \eta^0 \eta^0 V^\dagger \eta^0 = 0. \quad (2.100)$$

como $\bar{\psi} = \psi^\dagger \eta^0$ temos que

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu + M \bar{\psi} + \bar{\psi} \eta^0 V^\dagger \eta^0 = 0, \quad (2.101)$$

Para a obtenção da equação de continuidade o processo será igual que no caso livre, obtendo

$$i\partial_\mu (\bar{\psi} \beta^\mu \psi) + \bar{\psi} (\eta^0 V^\dagger \eta^0 - V) \psi = 0, \quad (2.102)$$

e usando $J^\mu \equiv \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \psi$, (2.102) é reescrito como

$$\partial_\mu J^\mu + \frac{i}{2} \bar{\psi} (V - \eta^0 V^\dagger \eta^0) \psi = 0, \quad (2.103)$$

onde a quadricorrente só será conservada se o potencial V for hermitiano com respeito a η^0 [19]. Neste ponto é necessário mencionar que a interação matricial V pode ser escrita como uma combinação linear de estruturas de Lorentz bem definidas. Estas estruturas são classificadas de acordo com seu comportamento sob as transformações de Lorentz. Para o setor escalar, as interações são constituídas da seguinte maneira: dois escalares, dois vetores e dois tensores [20]. Para o setor vetorial são: dois escalares, um pseudoescalar, dois vetores, dois pseudovetores e oito tensores [14, 21].

Explicitamente os covariantes bilineares para o setor escalar são

- **Interações do tipo escalar**

- $\bar{\psi} \psi$
- $\bar{\psi} \beta_\mu \beta^\mu \psi$

- **Interações do tipo vetorial**

- $\bar{\psi} \beta^\mu \psi$
- $i\bar{\psi} [P, \beta^\mu] \psi$, onde $P = \frac{1}{3} (\beta^\mu \beta_\mu - 1)$

- **Interações do tipo tensorial simétrico**

$$- \bar{\psi} \{ \beta^\mu, \beta^\nu \} \psi$$

- **Interações do tipo tensorial antisimétrico**

$$- i \bar{\psi} [\beta^\mu, \beta^\nu] \psi$$

E para o setor vetorial, os covariantes bilineares são

- **Interações do tipo escalar**

$$- \bar{\psi} \psi$$

$$- \bar{\psi} \beta_\mu \beta^\mu \psi$$

- **Interações do tipo pseudoescalar**

$$- \bar{\psi} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} \beta^\kappa \beta^\lambda \beta^\mu \beta^\nu \psi$$

- **Interações do tipo vetorial**

$$- \bar{\psi} \beta^\mu \psi$$

$$- i \bar{\psi} [P, \beta^\mu] \psi, \quad \text{onde } P = (\beta^\mu \beta_\mu - 2)$$

- **Interações do tipo pseudovetorial**

$$- \bar{\psi} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} \beta^\lambda \beta^\mu \beta^\nu \psi$$

$$- i \bar{\psi} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} [\beta^\sigma \beta_\sigma, \beta^\lambda \beta^\mu \beta^\nu] \psi$$

- **Interações do tipo tensorial simétrico**

$$- \bar{\psi} \left[\{ \beta^\mu, \beta^\nu \} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \beta^\sigma \beta_\sigma \right] \psi$$

$$- \bar{\psi} \left[\left\{ \beta^\sigma \beta_\sigma, \{ \beta^\mu, \beta^\nu \} \right\} - g^{\mu\nu} (\beta^\sigma \beta_\sigma)^2 \right] \psi$$

- **Interações do tipo pseudotensorial simétrico**

$$- \bar{\psi} \left[\left\{ \beta^\mu, \epsilon_{\lambda\sigma\nu}^\kappa \beta^\lambda \beta^\sigma \beta^\nu \right\} + \left\{ \beta^\kappa, \epsilon_{\lambda\sigma\nu}^\mu \beta^\lambda \beta^\sigma \beta^\nu \right\} \right] \psi$$

- **Interações do tipo tensorial antisimétrico**

$$- i \bar{\psi} [\beta^\mu, \beta^\nu] \psi$$

$$- i \bar{\psi} \left\{ \beta^\sigma \beta_\sigma, [\beta^\mu, \beta^\nu] \right\} \psi$$

- **Interações do tipo tensorial**

$$- T^{\mu\nu\rho} \psi$$

$$- i \bar{\psi} \left\{ \beta^\sigma \beta_\sigma, T^{\mu\nu\rho} \right\} \psi$$

$$- \bar{\psi} Y^{\kappa\lambda\mu\nu} \psi$$

onde:

$$T^{\mu\nu\rho} \equiv i \left\{ \beta^\mu, [\beta^\nu, \beta^\rho] \right\} + \frac{2}{3} \epsilon^{\mu\nu\rho\kappa} \epsilon_{\kappa\lambda\sigma\pi} \beta^\lambda \beta^\sigma \beta^\pi - \frac{i}{3} \delta^{\mu\nu} [\beta^\sigma \beta_\sigma, \beta^\rho] + \frac{i}{3} \delta^{\mu\rho} [\beta^\sigma \beta_\sigma, \beta^\nu]. \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} Y^{\kappa\lambda\mu\nu} &\equiv \left\{ [\beta^\kappa, \beta^\mu], [\beta^\lambda, \beta^\nu] \right\} - \left\{ [\beta^\kappa, \beta^\nu], [\beta^\lambda, \beta^\mu] \right\} - \frac{1}{2} \delta^{\kappa\mu} \left\{ [\beta^\rho, \beta^\nu], [\beta_\rho, \beta^\lambda] \right\} \\ &- \frac{1}{2} \delta^{\lambda\nu} \left\{ [\beta^\rho, \beta^\mu], [\beta_\rho, \beta^\kappa] \right\} + \frac{1}{2} \delta^{\kappa\nu} \left\{ [\beta^\rho, \beta^\mu], [\beta_\rho, \beta^\lambda] \right\} + \frac{1}{2} \delta^{\lambda\mu} \left\{ [\beta^\rho, \beta^\nu], [\beta_\rho, \beta^\kappa] \right\} \\ &\frac{1}{6} \left(\delta^{\kappa\mu} \delta^{\lambda\nu} - \delta^{\kappa\nu} \delta^{\lambda\mu} \right) \left\{ [\beta^\rho, \beta^\alpha], [\beta_\rho, \beta_\alpha] \right\}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

2.9 Equivalência entre a teoria de DKP e as teorias de Klein-Gordon e Proca para o caso de acoplamento mínimo

Na seção 2.6 foi mostrado que as componentes físicas do espinor de DKP para o caso livre, obedecem à equação de KG no setor escalar, e à equação de Proca no setor vetorial. Agora vamos mostrar que também existe essa correspondência no caso do acoplamento mínimo para ambos setores, escalar e vetorial.

A equação de DKP com acoplamento mínimo é

$$\left(i\beta^\mu\partial_\mu - M - \beta^\mu A_\mu\right)\psi = 0, \quad (2.106)$$

da qual podemos definir a derivada covariante como

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (2.107)$$

onde A_μ é o quadripotencial e q é a carga do méson vetorial, a equação (2.106) é reescrita da seguinte maneira:

$$\left(i\beta^\mu D_\mu - M\right)\psi = 0. \quad (2.108)$$

Equivalência entre DKP e a equação KG com acoplamento mínimo

Aplicando o operador de projeção P à equação (2.108), temos

$$iP\beta^\mu D_\mu\psi - PM\psi = 0, \quad (2.109)$$

e usando $P\beta^\mu = P^\mu$, (2.109) é

$$P\psi = \frac{i}{M}D_\mu(P^\mu\psi). \quad (2.110)$$

Por outro lado, aplicando o operador P^ν à equação (2.109), tem-se

$$P^\nu\psi = \frac{i}{M}D^\nu(P\psi), \quad (2.111)$$

e substituindo (2.111) em (2.110), conduz a

$$\left(D^\mu D_\mu + M^2\right)(P\psi) = 0. \quad (2.112)$$

Este resultado nos mostra, que em analogia com o caso livre, só a componente física $P\psi$ satisfaz à equação de KG com acoplamento mínimo.

Equivalência entre DKP e a equação de Proca

Aplicando o operador R^ν à equação (2.108)

$$iR^\nu \beta^\mu D_\mu - MR^\nu \psi = 0, \quad (2.113)$$

e usando $R^\nu \beta^\mu = R^{\nu\mu}$, temos que

$$R^\nu \psi = \frac{i}{M} D_\mu (R^{\nu\mu} \psi). \quad (2.114)$$

Logo, aplicando $R^{\nu\mu}$ em (2.108) temos

$$iR^{\nu\mu} \beta^\mu D_\mu \psi - MR^{\nu\mu} \psi = 0, \quad (2.115)$$

e já que $R^{\nu\mu} \beta^\alpha = R^\nu g^{\mu\alpha} - R^\mu g^{\nu\alpha}$, (2.115) pode-se escrever

$$D_\mu U^{\mu\nu} + M^2 R^\nu \psi = 0, \quad (2.116)$$

onde foi definido $U^{\mu\nu} \equiv D^\mu R^\nu \psi - D^\nu R^\mu \psi$. O resultado obtido em (2.116), é a equação de Proca com acoplamento mínimo. Para poder fazer um melhor análise, é conveniente expressar a equação (2.116) da seguinte maneira:

$$\left(D^\mu D_\mu + M^2 \right) R^\nu \psi - \frac{iq}{2} R^\nu S^{\alpha\mu} F_{\mu\alpha} \psi - D^\nu D_\mu R^\mu \psi = 0, \quad (2.117)$$

onde foi usado $[D_\mu, D^\nu] = -iqF_\mu{}^\nu$ e a seguinte relação é obtida:

$$D_\mu R^\mu \psi = \frac{iq}{2M^2} U^{\nu\mu} F_{\mu\nu}. \quad (2.118)$$

O resultado obtido em (2.117) nos mostra que só as componentes físicas $R^\nu \psi$ satisfazem uma equação de Proca com acoplamento mínimo. A semelhança com o caso de Dirac pode ser vista pela identificação do termo de Pauli $S^{\alpha\mu} F_{\mu\alpha}$. O último termo de (2.117) é chamado de termo anômalo, já que não tem analogia com as outras equações relativísticas. Pode ser visto que mesmo selecionando o setor vetorial da teoria de DKP o termo anômalo persiste, e não pode ser desprezado em contradição ao que outros autores afirmam [12, 13]. Mais adiante quando formos tratar o caso específico do problema de um campo magnético externo, esta questão ficará mais clara.

Capítulo 3

Mésons vetoriais num campo magnético externo

Em 1896, Zeeman mostrou que as linhas espectrais do elemento químico sódio (Na) eram modificadas com a presença de um campo magnético externo, e que tal modificação consistia em multipletos igualmente separados. Este fenômeno, hoje conhecido como o efeito Zeeman, desempenha um papel importante no desenvolvimento do conhecimento das propriedades magnéticas da matéria, que mais tarde seria importante para a descoberta do spin e do momento magnético do elétron.

O hamiltoniano não-relativístico para uma partícula com carga q na presença de um campo magnético uniforme¹ caracterizado pelo potencial vetor \vec{A} , pode ser escrita como

$$H = \frac{1}{2M} (\vec{P} - q\vec{A})^2, \quad (3.1)$$

onde o potencial vetor é $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$. Considerando o *gauge* de Coulomb ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$), a equação (3.1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2M} (\vec{P} - q\vec{A})^2 \\ &= \frac{\vec{P}^2}{2M} \psi + \frac{q^2}{2M} \vec{A}^2 \psi - \frac{q}{M} \vec{A} \cdot \vec{P}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

¹A interação eletromagnética foi introduzida via acoplamento mínimo $\vec{P} \rightarrow \vec{P} - q\vec{A}$.

e usando a seguinte relação vetorial:

$$\vec{A} \cdot \vec{P} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r}) \cdot \vec{P} = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot (\vec{r} \times \vec{P}) = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{L}, \quad (3.3)$$

(3.2) é reescrito como

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{q^2}{2M}\vec{A}^2 - \frac{q}{2M}\vec{B} \cdot \vec{L}. \quad (3.4)$$

Neste caso, para o nosso propósito, serão desprezados os termos quadráticos do vetor potencial \vec{A} , já que as contribuições deste termo são muito fracas para o efeito Zeeman. Assim, considerando apenas termos lineares, (3.4) torna-se

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} - \frac{q}{2M}\vec{B} \cdot \vec{L}. \quad (3.5)$$

A equação (3.5) pode ser reescrita como

$$H = H_0 - \vec{\mu}_L \cdot \vec{B} \quad (3.6)$$

onde

$$H_0 = \frac{\vec{P}^2}{2M}, \quad (3.7)$$

e

$$\vec{\mu}_L = \frac{q}{2M}\vec{L}, \quad (3.8)$$

com \vec{L} sendo o momento angular. Aqui, H_0 e $\vec{\mu}_L$ são a hamiltoniana livre e o momento magnético, respectivamente.

A introdução *ad hoc* do spin por Pauli na equação de Schrödinger conduziu Landé, em uma base empírica, em reformular o fator giromagnético² como

$$\vec{\mu}_L = g \frac{q}{2M}\vec{L}, \quad (3.9)$$

²O fator giromagnético $\frac{q}{2M}$ foi definido como o coeficiente de proporcionalidade entre o momento magnético de uma carga q e o momento angular orbital.

onde g é uma constante numérica, chamada fator de Landé, que depende de números quânticos semi-inteiros. Posteriormente, Einstein e De Haas realizaram trabalhos experimentais para determinar a relação giromagnética das moléculas de um corpo rígido, no denominado efeito Einstein-de Haas [22, 23]. Eles encontraram um valor de $g = 1$ devido às medições que não foram muito precisas, medições posteriores foram feitas mostrando $g = 2$, dando assim o valor anômalo³ da relação giromagnética para o elétron. Agora, mudando o operador de momento angular orbital pelo de spin podemos definir o momento magnético de spin, como:

$$\vec{\mu}_S = 2 \frac{q}{2M} \vec{S}. \quad (3.10)$$

Usando o fato de $\vec{\mu}_J = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S$ podemos construir o hamiltoniano total,

$$H_T = H_0 - \vec{\mu}_J \cdot \vec{B}, \quad (3.11)$$

$$H = H_0 - (\vec{\mu}_S + \vec{\mu}_L) \cdot \vec{B}, \quad (3.12)$$

$$H_T = H_0 - \left(\frac{q}{2M} \vec{L} + \frac{q}{M} \vec{S} \right) \cdot \vec{B}, \quad (3.13)$$

$$H_T = H - \frac{q}{M} \vec{S} \cdot \vec{B}, \quad (3.14)$$

onde H é dada pela equação (3.6) e a contribuição do spin para a energia magnética é

$$H_s = - \frac{q}{M} \vec{S} \cdot \vec{B}. \quad (3.15)$$

Mais tarde, graças ao desenvolvimento da teoria quântica relativística de Dirac, foi mostrado naturalmente por meio do acoplamento mínimo com um campo eletromagnético externo, que o fator giromagnético do elétron é $g = 2$. Da mesma maneira, para partículas com spin diferente de $1/2$ interagindo minimamente com o campo eletromagnético, Rarita e Schwinger [24] apresentaram uma equação relativística para $s = 3/2$. Consequentemente, Belifante [25] calculou o fator giromagnético para $s = 3/2$, encontrando $g = 2/3$. Isso o levou a conjecturar pela primeira vez, depois de comparar com a equação de Dirac $s = 1/2$ e com a equação de Proca $s = 1$, que o fator g para uma partícula com spin arbitrário

³Historicamente é chamado anômalo, devido ao fato que naquela época era esperado que o fator giromagnético de um corpo magnetizado fosse $g = 1$, segundo a teoria clássica.

seria $g = 1/s$. Mas com o avanço da teoria quântica de campos, Weinberg [26], usando as propriedades da matriz S , mostrou que ao exigir que as amplitudes de espalhamento tenham um bom comportamento na energia, levou ao valor correto do fator giromagnético para partículas com spin arbitrário era $g = 2$, corrigindo a conjectura de Belifante. Da mesma forma, Ferrari et al. [27] obtiveram os mesmos resultados mas usando uma formulação lagrangiana.

Graças ao desenvolvimento da cromodinâmica quântica (QCD do inglês *Quantum Chromodynamics*) tem-se estudado certos fenômenos como a condensação de mésons vetoriais [28], efeito magnético quiral (CME do inglês *Chiral Magnetic Effect*) [29], efeito vórtico quiral (CVE do inglês *Chiral Vortical Effect*) [30], catálise magnética, catálise inversa [31] e o comportamento de mésons massivos [32, 33]. Por outro lado, na área de astrofísica e cosmologia sabe-se que em um universo primordial grandes campos magnéticos foram criados produzindo magnetares [28]. Estes fenômenos hoje podem ser reproduzidos fazendo colisões no colisor de íons pesados relativísticos (RHIC do inglês *Relativistic Heavy Ion Collider*) e no grande colisor de hádrons (LHC, do inglês *Large Hadron Collider*) [34].

Já que foi mencionado a importância de estudar mésons imersos em campos magnéticos, temos razões suficientes para estudar o comportamento de uma partícula de spin 1 em um campo magnético uniforme e como consequência encontrar seu fator giromagnético correspondente, no formalismo de DKP.

3.1 Equação de DKP num campo magnético externo

Para estudar o efeito de um méson interagindo com um campo magnético uniforme, por simplicidade, escolheremos a direção do campo magnético no eixo z . Pela simetria que o sistema possui, usaremos coordenadas cilíndricas.

A equação de DKP em coordenadas cilíndricas é⁴

$$\left(i\beta^{(0)}\partial_0 + i\beta^{(1)}\partial_r + \frac{i}{r}\beta^{(2)}\partial_\varphi + \frac{i}{r}\beta^{(2)}\left[\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\right] + i\beta^{(3)}\partial_z - M \right)\Psi = 0. \quad (3.16)$$

Agora, introduzimos um campo magnético na direção z , via acoplamento mínimo

⁴ Para mais detalhes, consulte o apêndice B.1.

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (3.17)$$

onde

$$A_\mu = e^{(a)}{}_\mu A_{(a)}, \quad (3.18)$$

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqe^{(a)}{}_\mu A_{(a)}, \quad (3.19)$$

sendo $e^{(a)}{}_\mu$ a tetrada associada ao elemento de linha em coordenadas cilíndricas. Escolhendo o quadripotencial com simetria axial

$$A_{(a)} = (0, 0, -A_{(2)}, 0), \quad \text{com} \quad A_{(2)} = \frac{Br}{2}. \quad (3.20)$$

Como $e^{(2)}{}_2 = r$, temos que o potencial vetorial é dado por

$$A_2 = e^{(2)}{}_2 A_{(2)} = \frac{Br^2}{2}. \quad (3.21)$$

Pelo fato de considerar uma interação independente do tempo, temos a liberdade de fazer

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{-iEt}, \quad (3.22)$$

onde E representa a energia do bóson vetorial. Substituindo (3.21) e (3.22) em (3.16) obtemos

$$\left[\beta^{(0)}E + i\beta^{(1)}\partial_r + i\beta^{(2)} \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2} \right) + \frac{i}{r}\beta^{(2)} [\beta^{(1)}, \beta^{(2)}] + i\beta^{(3)}\partial_z - M \right] \psi = 0, \quad (3.23)$$

Usando a representação das matrizes β^μ dadas na seção 2.6 para o setor vetorial ($S = 1$) e escrevendo o espinor como

$$\psi^T = (\Phi, -\psi^+, -\psi^-, -\psi^0, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_{10})^T, \quad (3.24)$$

a equação (3.23) torna-se

$$M\Phi - i \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \varphi_5 - i \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2} \right) \varphi_6 - i\partial_z \varphi_7 = 0, \quad (3.25)$$

$$M\psi^+ + E\varphi_5 - i\partial_z\varphi_9 + i\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\varphi_{10} = 0, \quad (3.26)$$

$$M\psi^- + E\varphi_6 + i\partial_z\varphi_8 - i\partial_r\varphi_{10} = 0, \quad (3.27)$$

$$M\psi^0 + E\varphi_7 - i\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\varphi_8 + i\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\varphi_9 = 0, \quad (3.28)$$

$$-M\varphi_5 - i\partial_r\Phi - E\psi^+ = 0, \quad (3.29)$$

$$-M\varphi_6 - i\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\Phi - E\psi^- = 0, \quad (3.30)$$

$$-M\varphi_7 - E\psi^0 - i\partial_z\Phi = 0, \quad (3.31)$$

$$-M\varphi_8 - i\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\psi^0 + i\partial_z\psi^- = 0, \quad (3.32)$$

$$-M\varphi_9 + i\partial_r\psi^0 - i\partial_z\psi^+ = 0, \quad (3.33)$$

$$-M\varphi_{10} + i\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\psi^+ - i\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\psi^- = 0, \quad (3.34)$$

onde usamos as componentes físicas como

$$\Phi = \varphi_1, \quad \psi^+ = -\varphi_2, \quad \psi^- = -\varphi_3, \quad \psi^0 = -\varphi_4. \quad (3.35)$$

Antes de começar a encontrar as equações de movimento para as componentes físicas do sistema anterior, devemos calcular uma relação auxiliar. Para obter a relação auxiliar procedemos da seguinte maneira:

1. Multiplicando a equação (3.25) por $-iE$, obtemos

$$-iE\Phi - \frac{E}{M}\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\varphi_5 - \frac{E}{M}\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\varphi_6 - \frac{E}{M}\partial_z\varphi_7 = 0. \quad (3.36)$$

2. Aplicando o operador diferencial $(\partial_r + \frac{1}{r})$ à equação (3.26), obtemos

$$\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\psi^+ + \frac{E}{M}\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\varphi_5 - i\frac{1}{M}\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\partial_z\varphi_9 + \frac{1}{M}i\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\left[\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\varphi_{10}\right] = 0. \quad (3.37)$$

3. Aplicando o operador diferencial $\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)$ à equação (3.27), obtemos

$$\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\psi^- + \frac{E}{M}\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\varphi_6 + i\frac{1}{M}\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\partial_z\varphi_8 - i\frac{1}{M}\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\partial_r\varphi_{10} = 0. \quad (3.38)$$

4. Aplicando o operador diferencial ∂_z à equação (3.28), obtemos

$$\partial_z\psi^0 + \frac{E}{M}\partial_z\varphi_7 - i\frac{1}{M}\partial_z\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\varphi_8 + i\frac{1}{M}\partial_z\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\varphi_9 = 0. \quad (3.39)$$

5. Finalmente somando as equações (3.36), (3.37), (3.38) e (3.39) obtém-se

$$-iE\Phi + \left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\psi^+ + \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\psi^- + \partial_z\psi^0 = -\frac{qB}{M^2}U_{21}, \quad (3.40)$$

onde

$$U_{21} = i\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\psi^+ - i\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\psi^-. \quad (3.41)$$

A equação (3.40) será chamada *equação subsidiária* e desempenha um papel muito importante no desenvolvimento deste trabalho, já que relaciona uma das componentes físicas com outras três. Desta forma temos só três componentes físicas independentes, o que proporciona uma descrição completa de uma partícula de spin 1 representada com 3 graus de liberdade $(2S + 1)$.

Vamos começar a encontrar a equação de movimento para Φ . Multiplicando a equação (3.25) por M , temos

$$M^2\Phi - i\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)(M\varphi_5) - i\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)(M\varphi_6) - i\partial_z(M\varphi_7) = 0, \quad (3.42)$$

e substituindo as equações (3.29), (3.30) e (3.31) em (3.42), obtemos

$$\left[M^2 - \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \partial_r - \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right)^2 - \partial_z^2 \right] \Phi + iE \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \psi^+ + iE \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right) \psi^- + iE \partial_z \psi^0 = 0. \quad (3.43)$$

Por outro lado, multiplicando a equação subsidiária (3.40) por iE e substituindo em (3.43), obtemos

$$\left[\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} + \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right)^2 + \partial_z^2 - (M^2 - E^2) \right] \Phi = -i \frac{EqB}{M^2} U_{21}. \quad (3.44)$$

A equação (3.44) representa a equação de movimento para a componente física Φ . Da mesma maneira é calculada a equação de movimento para as outras componentes físicas. Assim temos a equação para ψ^+

$$\left[\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} - \frac{1}{r^2} + \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right)^2 + \partial_z^2 - (M^2 - E^2) \right] \psi^+ - 2 \frac{\partial_\varphi}{r^2} \psi^- = -\frac{qB}{M^2} \partial_r U_{21}, \quad (3.45)$$

para ψ^-

$$\begin{aligned} & \left[\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} - \frac{1}{r^2} + \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right)^2 + \partial_z^2 - (M^2 - E^2) \right] \psi^- + \frac{2\partial_\varphi}{r^2} \psi^+ \\ & = -\frac{qB}{M^2} \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right) U_{21}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

e para ψ^0

$$\left[\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} + \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right)^2 + \partial_z^2 - (M^2 - E^2) \right] \psi^0 = -\frac{qB}{M^2} \partial_z U_{21}. \quad (3.47)$$

Desta forma já temos as quatro equações de movimento para as componentes físicas, e estas podem ser expressas em uma forma compacta como

$$\left[\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} + \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right)^2 + \partial_z^2 - (M^2 - E^2) \right] \Phi = -i \frac{qBE}{M^2} U_{21}, \quad (3.48)$$

$$\left[\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} - \frac{s^2}{r^2} + \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right)^2 + \partial_z^2 - (M^2 - E^2) \right] \psi - \frac{2i\partial_\varphi}{r^2} \hat{S}_z \psi = -\frac{qB}{M^2} (\vec{\nabla} - iq\vec{A}) U_{21}, \quad (3.49)$$

onde o espinor ψ e a matriz de spin \hat{S}_z são dados por

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \\ \psi^0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

respectivamente. Aqui s é um parâmetro que toma os valores $+1$ (para ψ^+), -1 (para ψ^-) e 0 (para ψ^0). As equações (3.48) e (3.49) têm uma similaridade com o resultado de Dirac, exceto pelo último termo proporcional à $\frac{qB}{M^2}$ que foi chamado por Kemmer de *termo anômalo* já que é exclusivamente para partículas de spin 1 com acoplamento mínimo. De acordo com as referências [12–14], quando as mesmas equações são calculadas usando os operadores de projeção, que selecionam as componentes físicas, o *termo anômalo* persiste e portanto não pode ser excluído sem motivo, pois contém componentes físicas misturadas. Pode-se ver a partir das equações (3.48) e (3.49) que a presença do termo anômalo não permite desacoplar o sistema.

Devido a essas desvantagens, não podemos obter soluções analíticas para (3.48) e (3.49) usando somente o acoplamento mínimo. Uma possível razão para tal problema surge do fato que o lado direito da equação subsidiária é diferente de zero; já que apoiamos-nos nela para construir as equações de segunda ordem para Φ e ψ . Para analisar este problema com mais detalhe, o limite não-relativístico será estudado. Para isso, primeiro vamos escrever a equação subsidiária (3.40) em uma notação vetorial

$$-iE\Phi + i\vec{P} \cdot \psi - iq\vec{A} \cdot \psi = -\frac{q}{M^2} \vec{B} \cdot (\vec{P} \times \psi) + \frac{q^2}{M^2} \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \psi), \quad (3.51)$$

onde $\vec{P} = -i\vec{\nabla}$, é o operador de momento linear e \vec{A} é o potencial vetorial⁵.

⁵ \vec{A} é a componente espacial do quadrivetor A^μ .

No limite não-relativístico, a energia da partícula é praticamente a energia de repouso, quer dizer que a baixas energias pode ser considerado $E \sim M$ e $|\vec{A}| \ll M$. Assim (3.51) reduz-se a

$$\Phi = \frac{1}{M} (\vec{P} \cdot \psi), \quad (3.52)$$

onde se desprezou os termos $\mathcal{O}\left(\frac{1}{M^2}\right)$. A relação encontrada em (3.52) nos diz que a baixas energias Φ é proporcional a ψ e no regime de velocidades muito pequenas $v \ll 1$, se obtém

$$\Phi \rightarrow 0. \quad (3.53)$$

Assim concluímos que os efeitos da componente escalar Φ não são percebidos no limite não-relativístico.

Agora, analisando o limite não-relativístico na equação (3.49), considerando a seguinte aproximação

$$E + M \approx 2M, \quad E - M \approx E_{NR}, \quad (3.54)$$

(3.49) pode ser reescrita como

$$\left[\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} - \frac{\hat{S}_z^2}{r^2} + \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right)^2 + \partial_z^2 + 2ME_{NR} \right] \psi - \frac{2i\partial_\varphi}{r^2} \hat{S}_z \psi = 0. \quad (3.55)$$

Devido ao fato que o operador \hat{S}_z não é diagonal, a equação (3.55) não pode ser resolvida. Por esta razão será realizado uma transformação de similiaridade⁶, obtendo

$$\left[\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} - \frac{\hat{S}_z^2}{r^2} + \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right)^2 + \partial_z^2 - \frac{2i\partial_\varphi}{r^2} \hat{S}_z^{diag} + 2ME_{NR} \right] \bar{\psi} = 0, \quad (3.56)$$

onde

⁶Os cálculos detalhados da transformação de similiaridade são dados no apêndice D

$$\hat{S}_z^{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{S}_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Continuando com o estudo do limite não-relativístico, para nosso propósito é mais conveniente passar a equação (3.56) a coordenadas retangulares, de esta maneira tem-se⁷

$$E_{NR}\bar{\psi} = \left[\frac{1}{2M} (\vec{P} - q\vec{A})^2 - \frac{q}{2M} \vec{S}^{diag} \cdot \vec{B} \right] \bar{\psi}. \quad (3.58)$$

onde \vec{P} é o momento linear em coordenadas rectangulares e \vec{A} é o potencial vetor dado por $\vec{A} = (-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0)$.

Comparando o último termo da equação (3.58) com (3.15) e junto com a definição (3.10), pode-se deduzir que o fator giromagnético da teoria DKP para partículas de spin 1 com acoplamento mínimo é $g = 1$. Esse resultado está em desacordo com o que Weinberg [26] e Ferrara [27] mostraram, que o fator giromagnético é $g = 2$ independente do spin da partícula. Por outro lado, Corben e Schwinger [35] falam sobre os problemas que a equação de Proca tem com o fator giromagnético $g = 1$. Eles fundamentam que essa equação tem problemas quando se quer incorporar um acoplamento mínimo, especialmente com os estados estacionários em um potencial tipo coulombiano. Devido ao fato de que eles não encontram um conjunto de estados completos e só podem ter duas soluções regulares ($j = l \neq 0$ e $j = 0, l = 1$), propõem solucionar o problema com uma modificação na lagrangiana de Proca de tal forma a reproduzir o fator giromagnético $g = 2$. Por outro lado, Daicic e Frankel [36], usando a equação de Sakata-Taketani em um campo eletromagnético externo e com um acoplamento não-mínimo, calcularam os autoestados, corrente e os autovalores correspondentes; mostrando que para campos magnéticos intensos a energia assume valores imaginários.

3.2 Correção do fator giromagnético

Baseados no que foi mencionado anteriormente, estamos prontos para identificar a origem do *termo anômalo*. No caso do acoplamento mínimo ($g = 1$) o lado direito da equação subsidiária é diferente de zero carregando um termo proporcional a $\frac{1}{M^2}$ que é mantido

⁷Os cálculos detalhados encontram-se no apêndice E

até as equações de movimento para as componentes físicas. Para resolver isso, propõe-se incluir um acoplamento não-mínimo proporcional ao tensor eletromagnético (que inclui derivadas do potencial vetorial) para obter o fator giromagnético $g = 2$ e assim esperar obter no lado direito da equação subsidiária igual a zero e ter equações de movimento desacopladas. Com referência ao acima mencionado, nos apoiaremos no trabalho de Vijayalakshmi et al. [21], onde a interação proposta é

$$R = \frac{iq}{M} \left(\sigma^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \{ \beta^\alpha \beta_\alpha, \sigma^{\mu\nu} \} \right) F_{\mu\nu}, \quad (3.59)$$

onde

$$\sigma^{\mu\nu} = [\beta^\mu, \beta^\nu] \quad \text{e} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.60)$$

O termo R pode ser interpretado como a interação de um momento magnético anômalo com um campo eletromagnético externo, devido à semelhança com a interação magnética anômala para partículas de $s = 1/2$. É necessário mencionar que se consideramos apenas $\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ como interação anômala para partículas de spin 1, a causalidade é violada [21].

Refazendo os cálculos, temos

$$M\Phi - i \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \varphi_5 - i \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right) \varphi_6 - i \partial_z \varphi_7 = 0, \quad (3.61)$$

$$M\psi^+ + \frac{iqB}{M} \psi^- + E\varphi_5 - i \partial_z \varphi_9 + i \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right) \varphi_{10} = 0, \quad (3.62)$$

$$M\psi^- - \frac{iqB}{M} \psi^+ + E\varphi_6 + i \partial_z \varphi_8 - i \partial_r \varphi_{10} = 0, \quad (3.63)$$

$$M\psi^0 + E\varphi_7 - i \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right) \varphi_8 + i \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \varphi_9 = 0, \quad (3.64)$$

$$- M\varphi_5 - i \partial_r \Phi - E\psi^+ = 0, \quad (3.65)$$

$$- M\varphi_6 - i \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right) \Phi - E\psi^- = 0, \quad (3.66)$$

$$-M\varphi_7 - E\psi^0 - i\partial_z\Phi = 0, \quad (3.67)$$

$$-M\varphi_8 - i\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\psi^0 + i\partial_3\psi^- = 0, \quad (3.68)$$

$$-M\varphi_9 + i\partial_r\psi^0 - i\partial_z\psi^+ = 0, \quad (3.69)$$

$$-M\varphi_{10} + i\left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\psi^+ - i\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\psi^- = 0, \quad (3.70)$$

onde usamos $F_{12} = B$. Da mesma forma que a seção anterior, a nova relação subsidiária é calculada e obtemos

$$-iE\Phi + \left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\psi^+ + \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2}\right)\psi^- + \partial_z\psi^0 = 0. \quad (3.71)$$

Comparando com a equação subsidiária obtida no caso para o acoplamento mínimo (3.40), podemos notar que a presença da interação R fornece o lado direito da equação subsidiária igual a zero e portanto não teremos a presença do *termo anômalo* nas equações de movimento para as componentes físicas. Portanto, usando a equação subsidiária, as equações de segundo ordem para as componentes físicas tornam-se

$$\left[M^2 - E^2 - \left(\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} \right) - \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2} \right)^2 - \partial_z^2 \right] \Phi = 0, \quad (3.72)$$

$$\left[M^2 - E^2 - \left(\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} - \frac{1}{r^2} \right) - \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2} \right)^2 - \partial_z^2 \right] \psi^+ + \left(2\frac{\partial_\varphi}{r^2} + iqB \right) \psi^- = 0, \quad (3.73)$$

$$\left[M^2 - E^2 - \left(\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} - \frac{1}{r^2} \right) - \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i\frac{qBr}{2} \right)^2 - \partial_z^2 \right] \psi^- - \left(2\frac{\partial_\varphi}{r^2} + iqB \right) \psi^+ = 0, \quad (3.74)$$

$$\left[M^2 - E^2 - \left(\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} \right) - \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right)^2 - \partial_z^2 \right] \psi^0 = 0. \quad (3.75)$$

Escrevendo as equações numa forma compacta, temos

$$\left[\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} + \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right)^2 + \partial_z^2 - (M^2 - E^2) \right] \Phi = 0, \quad (3.76)$$

$$\left[\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} - \frac{s^2}{r^2} + \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right)^2 + \partial_z^2 - (M^2 - E^2) \right] \psi - i \left(\frac{2\partial_\varphi}{r^2} + iqB \right) \hat{S}_z \psi = 0. \quad (3.77)$$

Já que a equação de movimento para Φ é igual à equação da componente ψ^0 , será resolvida só a equação (3.77). Também é notado que o operador \hat{S}_z não é diagonal, como foi dado em (3.50), por esta razão será aplicado a mesma transformação de similiaridade (ver apêndice D). Desta maneira a equação (3.77) é reescrita como.

$$\left[\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} - \frac{s^2}{r^2} + \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right)^2 + \partial_z^2 - i \frac{2\partial_\varphi}{r^2} \hat{S}_z^{diag} + qB \hat{S}_z^{diag} - (M^2 - E^2) \right] \bar{\psi} = 0, \quad (3.78)$$

onde $\bar{\psi}$ é autoestado de \hat{S}_z^{diag} , quer dizer $\hat{S}_z^{diag} \bar{\psi} = s \bar{\psi}$. Neste ponto, para resolver a equação (3.78) podemos fazer o uso da decomposição usual em coordenadas cilíndricas

$$\bar{\psi} = r^{-1/2} e^{i(m+s)\phi} e^{ik_z z} R^s(r), \quad (3.79)$$

neste ponto, é necessário esclarecer que devido ao fato que a equação da componente Φ é idêntica à equação de ψ^0 , o parâmetro $s = 0$ será usado para representar ambas componentes. Assim, substituindo (3.79) em (3.78), obtemos

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(m^2 - \frac{1}{4})}{r^2} - \lambda^2 r^2 + \kappa^2 \right] R^s(r) = 0, \quad (3.80)$$

onde

$$\lambda^2 = \frac{q^2 B^2}{4} \quad \text{e} \quad \kappa^2 = qB(m + 2s) - k_z^2 - (M^2 - E^2). \quad (3.81)$$

A equação de movimento (3.80) descreve uma partícula de spin 1 em um campo magnético uniforme. A solução para (3.80) com λ e κ real é precisamente a bem conhecida solução radial da equação Schrödinger para o oscilador harmônico em duas dimensões espaciais. A solução perto da origem válida para todo valor de m pode ser escrita sendo proporcional a $r^{|m|+1/2}$. Por outro lado, para r grande a solução quadrado-integrável comporta-se como $e^{-\lambda r^2/2}$, e portanto a solução para todo r pode ser expressa como

$$R^s(r) = r^{|m|+1/2} e^{-\lambda r^2/2} f(r), \quad (3.82)$$

onde f é uma função regular na origem. Adicionalmente, introduzindo

$$\begin{aligned} \rho &= \lambda r^2, \\ a &= \frac{1}{2} \left(|m| + 1 - \frac{\kappa^2}{2\lambda} \right), \\ b &= |m| + 1, \end{aligned} \quad (3.83)$$

encontra-se que $f(r)$ satisfaz uma equação hipergeométrica confluyente, ou equação de Kummer,

$$\rho \frac{d^2 f}{d\rho^2} + (b - \rho) \frac{df}{d\rho} - af = 0, \quad (3.84)$$

que tem como solução geral [37]

$$f(\rho) = AM(a, b, \rho) + B\rho^{1-b}M(a - b + 1, 2 - b, \rho), \quad (3.85)$$

onde A e B são constantes arbitrárias. Já que o segundo termo de (3.85) tem uma singularidade em $\rho = 0$ ⁸ precisamos fazer $B = 0$.

Por outro lado, analisando o comportamento assintótico da função de Kummer

$$M(a, b, \rho) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-1)} e^{-ia\pi} \rho^{-a} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{\rho} \rho^{a-b}. \quad (3.86)$$

Podemos notar que o termo e^{ρ} prejudica o bom comportamento da solução (3.82) para ρ grande. Para resolver este problema, fazemos $a = -n$ ⁹, onde n é um inteiro não negativo.

⁸Podemos ver que $\rho^{1-b} = \rho^{-|m|}$.

⁹Devido à propriedade da função gamma $\Gamma(-n) = \infty$.

Já que $b > 0$, $M(-n, b, \rho)$ é proporcional ao polinômio de Laguerre $L_n^{(b-1)}(\rho)$ de grau n , e assim a solução (3.82) torna-se

$$R^s(r) = N_{n,m} r^{|m|+1/2} e^{-\lambda r^2/2} L_n^{(|m|)}(\lambda r^2). \quad (3.87)$$

Por outro lado, o requerimento de $a = -n$ nos leva à expressão para a energia dada por

$$E = \pm \left[M^2 + k_z^2 + qB(2n_r + 1) - 2sqB \right]^{1/2}, \quad (3.88)$$

onde

$$n_r = n + \frac{|m| - m}{2}. \quad (3.89)$$

A expressão (3.88) é a energia de um méson vetorial imerso em um campo magnético uniforme ao longo do eixo z , ou também chamada níveis de Landau [38]. Como podemos notar, agora aparece um fator $2sqB$ na energia, isto é devido ao fato que o fator giromagnético da partícula é $g = 2$. Este resultado está de acordo com o obtido em [36] no formalismo de Sakata-Taketani. Também podemos encontrar este mesmo resultado na condensação de mésons vetoriais [32, 33].

Neste ponto, podemos analisar a expressão da energia (3.88) para dois casos possíveis que dependem do sinal de m ($m > 0$ e $m < 0$).

3.2.1 Caso: $m > 0$

Para valores de m_l positivos, as energias para as componentes físicas são

$$E^+ = \pm \left[M^2 + k_z^2 + qB(2n^+ - 1) \right]^{1/2} \quad \text{para } s = 1, \quad (3.90)$$

$$E^- = \pm \left[M^2 + k_z^2 + qB(2n^- + 3) \right]^{1/2} \quad \text{para } s = -1, \quad (3.91)$$

$$E^0 = \pm \left[M^2 + k_z^2 + qB(2n^0 + 1) \right]^{1/2} \quad \text{para } s = 0. \quad (3.92)$$

Devido ao fato de que a energia tem que ser a mesma no sistema, E^+ , E^- e E^0 serão igualadas obtendo

$$E_n = \pm \left[M^2 + k_z^2 + qB(2n+1) \right]^{1/2}, \quad (3.93)$$

onde a relação dos números quânticos das componentes físicas são

$$n = n^0 = n^+ - 1 = n^- + 1. \quad (3.94)$$

3.2.2 Caso: $m < 0$

Para valores de m negativos, as energias para as componentes físicas são

$$E^+ = \pm \left[M^2 + P_z^2 + qB(2n^+ + 2m - 1) \right]^{1/2} \quad \text{para } s = 1, \quad (3.95)$$

$$E^- = \pm \left[M^2 + P_z^2 + qB(2n^- + 2m + 3) \right]^{1/2} \quad \text{para } s = -1, \quad (3.96)$$

$$E^0 = \pm \left[M^2 + P_z^2 + qB(2n^0 + 2m + 1) \right]^{1/2} \quad \text{para } s = 0. \quad (3.97)$$

De modo análogo E^+ , E^- e E^0 serão igualadas obtendo

$$E_n = \pm \left[M^2 + P_z^2 + qB(2n + 2m + 1) \right]^{1/2}, \quad (3.98)$$

onde a relação dos números quânticos das componentes físicas são as mesmas que no caso anterior, dadas por

$$n = n^0 = n^+ - 1 = n^- + 1. \quad (3.99)$$

Por outro lado, a solução para cada componente física dependendo dos valores de m , são

$$\bar{\psi}^+ = N_{n,m}^+ r^{|m|} e^{-\lambda r^2/2} e^{i(m+1)\varphi} L_{n+1}^{(|m|)}(\lambda r^2), \quad (3.100)$$

$$\bar{\psi}^- = N_{n,m}^- r^{|m|} e^{-\lambda r^2/2} e^{i(m-1)\varphi} L_{n-1}^{(|m|)}(\lambda r^2), \quad (3.101)$$

$$\bar{\psi}^0 = N_{n,m}^0 r^{|m|} e^{-\lambda r^2/2} e^{im\varphi} L_n^{(|m|)}(\lambda r^2), \quad (3.102)$$

$$\Phi = C_{n,m}^0 r^{|m|} e^{-\lambda r^2/2} e^{im_i \varphi} L_n^{(|m|)}(\lambda r^2), \quad (3.103)$$

onde as constantes N^+ , N^- , N^0 e C^0 são dados por¹⁰

$$|N_{n,m}^+| = \left\{ \frac{M\lambda^{|m|+1} \epsilon_2 (2n + |m| + 1) (E^4 Z_1 - k_z^4 Z_2) (n + 1)!}{E\xi(2\pi)(2L)(n + 1 + |m|)!} \right\}^{1/2}, \quad (3.104)$$

$$|N_{n,m}^-| = \left\{ \frac{M\lambda^{|m|+1} (2n + |m| + 1) (E^4 Z_1 - k_z^4 Z_2) (n - 1)! \epsilon_1}{E\xi(2\pi)(2L)(n - 1 + |m|)!} \right\}^{1/2}, \quad (3.105)$$

$$|N_{n,m}^0| = \left\{ \frac{4k_z^2 Z_2 Z_3 M\lambda^{|m|+2} \epsilon_2 n!}{E\xi(2\pi)(2L)(n + |m|)!} \right\}^{1/2}, \quad \text{e} \quad |C_{n,m}^0| = \left\{ \frac{4E\lambda Z_1 Z_3 M\lambda^{|m|+1} \epsilon_2 n!}{\xi(2\pi)(2L)(n + |m|)!} \right\}^{1/2}, \quad (3.106)$$

onde

$$\delta = (2n + 2 + |m| - m)^2 - 2(m + |m| + 2n + 4) + 2a, \quad (3.107)$$

$$a = (n + 1)(n + 1 + |m|) + (n + 2)(n + 2 + |m|), \quad (3.108)$$

$$\omega = (2n + |m| - m)^2 - 2(m + |m| + 2n - 2) + 2b, \quad (3.109)$$

$$b = n(n + |m|) + (n - 1)(n - 1 + |m|), \quad (3.110)$$

$$y = M^2 - E^2 - k_z^2, \quad (3.111)$$

$$\epsilon_1 = \left\{ \left[\frac{y(3 + 2n + |m|)}{\lambda} + \delta \right]^2 + a \left[\frac{y}{\lambda} + 2(2n + |m| - m) \right]^2 \right\}, \quad (3.112)$$

$$\epsilon_2 = \left\{ \left[\frac{y(2n - 1 + |m|)}{\lambda} + \omega \right]^2 + b \left[\frac{y}{\lambda} + 2(2n + 1 + |m| - m) \right]^2 \right\}, \quad (3.113)$$

¹⁰Os cálculos detalhados encontram-se no apêndice G.1.

$$\xi = (\epsilon_1 + \epsilon_2)(2n + |m| + 1)(E^4 Z_1 - k_z^4 Z_2) + 2Z_3 \epsilon_2 \lambda (k_z^2 Z_2 - E^2 Z_1), \quad (3.114)$$

$$p = (1 + 2n + |m|)^2 + n(n + |m|) + (n + 1)(n + 1 + |m|), \quad (3.115)$$

$$Z_1 = \left\{ p \left[\left(\frac{M^2 - E_z^2}{\lambda} \right) + 2(n + 1) \right]^2 + \frac{k_z^4}{\lambda} (2n + 1 + |m|) \right\}, \quad (3.116)$$

$$Z_2 = \left\{ p \left[\left(\frac{M^2 - k_z^2}{\lambda} \right) + 2(n + 1) \right]^2 + \frac{E^4}{\lambda} (2n + 1 + |m|) \right\}, \quad (3.117)$$

$$Z_3 = \frac{n(n + |m|)\epsilon_1}{\epsilon_2} + \frac{(n + \frac{|m|-m}{2})^2 \epsilon_1}{\epsilon_2} + (n + 1 + |m|)(n + 1) + (n + 1 + |m| - m)^2. \quad (3.118)$$

Capítulo 4

Mésons vetoriais em um potencial coulombiano

Sabe-se que o modelo atômico de Rutherford apresentou alguns problemas ao tentar explicar certos fenômenos, um deles está associada à radiação emitida pelo elétron na sua própria órbita. Esse problema consiste na perda contínua de energia do elétron, fazendo que esse colapse no núcleo. Esse fato estava em total contradição com os dados espectrocópicos dos átomos conhecidos até a segunda metade do século XIX. Por esta razão, Bohr, que tinha sido estudante de Rutherford em 1962, propôs incorporar nesse modelo a recente teoria quântica desenvolvida por Einstein e Planck, de modo que o elétron emite ou absorve energia na forma de minúsculos pacotes¹, e não de forma contínua. Mostrando assim que, se o elétron tem uma órbita circular e considerando a quantização de Planck, pode-se obter a seguinte expressão:

$$E_n = -\frac{Z^2 q^2}{2a_0 n^2}, \quad (4.1)$$

aqui a_0 é o radio de Bohr definido como $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Mq^2}$, Z é o número atômico, $|q|$ é a carga do elétron e ϵ_0 é a permissividade do vácuo. Como observamos, a energia depende do número quântico principal n que determina a quantização das órbitas do elétron. Apesar de reproduzir as linhas espectrais como as do hidrogênio, o modelo de Bohr apresenta algumas limitações. Já que a resolução das linhas espectrais nos átomos estava sendo aperfeiçoadas, foram observadas desdobramentos entre elas que não poderiam ser explica-

¹A esse pequeno pacote de energia Planck deu o nome de *quantum* (o plural é *quanta*).

dos com esse modelo. Assim, também não explicaram a razão pela qual algumas linhas eram mais brilhantes que outras. Essas deficiências na teoria de Bohr continuaram até que Schrödinger, tomando como base a dualidade onda-partícula de De-Broglie e o princípio de incerteza de Heisenberg, formulasse a teoria quântica do elétron. Schrödinger construiu a partir de operadores diferenciais o seguinte hamiltoniano:

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad (4.2)$$

onde

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + V(\vec{r}), \quad (4.3)$$

com \hat{P} sendo o operador de momento e $V(\vec{r})$ como um potencial que depende das coordenadas. Usando coordenadas esféricas para descrever um elétron na presença de um potencial radial $V(r) = -Zq^2/r$, e considerando que ψ pode-se escrever como $\psi = \frac{1}{r}u(r)Y(\theta, \phi)$ ², tem-se

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2u(r)}{dr^2} + \left[\frac{\hbar l(l+1)}{2Mr^2} - \frac{Zq^2}{r} \right] u(r) = Eu(r). \quad (4.4)$$

Resolvendo (4.4) e considerando que a solução tenha um bom comportamento perto da origem e a distâncias muito grandes, obtém-se a energia do sistema

$$E_n = -\frac{Z^2q^2}{2a_0n^2}. \quad (4.5)$$

A expressão (4.5) reproduz o mesmo resultado obtido por Bohr, mostrando assim que a teoria quântica do elétron de Schrödinger estava no caminho certo. Mas, com a introdução *ad hoc* do spin feita por Pauli e a formulação da teoria da relatividade restrita feita por Einstein, foi necessário a modificação do espectro de energia dos átomos e partículas que já eram conhecidos. Já que foi mostrado experimentalmente que essas correções são pequenas, estes poderiam ser consideradas como perturbações à energia do elétron. Deste modo, as principais correções são dadas em sua forma hamiltoniana da seguinte maneira:

$$H_T = H_0 + H_{SO} + H_{rel} + H_D, \quad (4.6)$$

² A função angular $Y_l^m(\theta, \varphi)$ é chamada harmônico esférico.

onde o termo H_0 é a energia não perturbada dada por (4.5). O termo H_{SO} é o hamiltoniano devido à interação do momento angular orbital \vec{L} com o momento angular intrínseco \vec{S} , essa interação é chamada *acoplamento spin-órbita*

$$H_{SO} = \frac{1}{2M^2c^2r} \frac{dV}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S}, \quad (4.7)$$

com a energia associada

$$E_{SO} = \frac{Z^4 q^4}{4Mc^2 a_0^2 n^3 l(l+1/2)(l+1)} \begin{cases} l, & \text{se } j = l + 1/2, \\ -(l+1), & \text{se } j = l - 1/2. \end{cases} \quad (4.8)$$

O termo H_{rel} contribui ao hamiltoniano H com as correções relativísticas à energia cinética. Tal modificação é

$$T = \sqrt{P^2c^2 + M^2c^4} - Mc^2. \quad (4.9)$$

Fazendo $Pc \ll Mc^2$ podemos expandir (4.9), obtendo

$$T = \frac{P^2}{2M^2} - \frac{P^4}{8M^3c^2}, \quad (4.10)$$

onde o segundo termo de (4.10) é a correção relativística

$$H_{rel} = -\frac{P^4}{8M^3c^2}, \quad (4.11)$$

com a energia associada

$$E_{rel} = -\frac{1}{2Mc^2} \frac{Z^4 e^4}{a_0^2 n^3} \left(\frac{1}{l+1/2} - \frac{3}{4n} \right). \quad (4.12)$$

Por último, o termo H_D é a correção de Darwin que nos diz que o elétron não pode estar em $r = 0$ para $l = 0$

$$H_{Darwin} = \frac{\pi \hbar^2}{2M^2c^2} Z e^2 \delta(r), \quad (4.13)$$

com a energia associada

$$E_{Darwin} = \frac{Z^4 e^4}{2Mc^2 n^3 a_0^2} \quad \text{só, se } l = 0. \quad (4.14)$$

Com o desenvolvimento da teoria quântica relativística, formulou-se a equação que descreve a uma partícula de spin 0, chamada equação de Klein-Gordon. Por outro lado, Dirac formulou a teoria das partículas de spin 1/2, obtendo-se a seguinte expressão para a energia:

$$E = Mc^2 \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{[n - j - 1/2 + \sqrt{(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2}]^2} \right]^{-1/2}, \quad (4.15)$$

onde poder-se-ia naturalmente encontrar todas as correções relativísticas mencionadas anteriormente fazendo uma expansão em torno de $(Z\alpha)$. Tendo narrado brevemente como se foi afinando o espectro de emissão de uma partícula de spin 1/2, o mais natural seria estudar os estados ligados de uma partícula massiva e carregada de spin 1 que interage com um potencial de Coulomb. Como um exemplo disso, temos os bósons W^\pm .

Sabe-se que existe uma dificuldade no problema de Coulomb para partículas de spin 1. Pouco depois que Proca formulou uma teoria para partículas vetoriais, Schwinger e Corben [35] mostraram que a equação de Proca com acoplamento mínimo não é suficiente para descrever um conjunto completo de estados, identificando como responsável o fator giromagnético natural da teoria $g = 1$, e propondo modificar o lagrangiano para corrigir o fator para $g = 2$.

Por outro lado, no formalismo DKP, o único que tentou resolver o problema dos potenciais centrais de partículas de spin 1 foi Barret [17], encontrando apenas solução para uma componente física do espinor de DKP. É por esse motivo, que nosso objetivo principal é mostrar que é possível encontrar estados ligados sujeitos a um potencial Coulomb para mésons vetoriais.

4.1 Equação de DKP num potencial coulombiano

Neste capítulo estudaremos os estados estacionários de um bóson vetorial sujeito a um potencial coulombiano. Para isso, começamos com a equação de DKP em coordenadas esféricas³

³Para mais detalhes, veja o apêndice B.2.

$$\left[\beta^{(0)} \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) + i \left(\beta^{(1)} \partial_r + \frac{\beta^{(3)} [\beta^{(1)}, \beta^{(3)}] - \beta^{(2)} [\beta^{(1)}, \beta^{(2)}]}{r} \right) + \frac{\Sigma_{\theta\varphi}}{r} - M \right] \Psi = 0, \quad (4.16)$$

onde foi introduzido um potencial radial mediante um acoplamento mínimo⁴ de natureza atrativa tipo Coulomb $qA_0 = \frac{-Z\alpha}{r}$ ⁵ e

$$\Sigma_{\theta\varphi} = \beta^{(2)} \partial_{\theta} + \frac{\beta^{(3)}}{\sin \theta} \left(\partial_{\varphi} + \cos \theta [\beta^{(2)}, \beta^{(3)}] \right), \quad (4.17)$$

é um operador angular, respectivamente.

Usando a representação das matrizes dada em [17] e escrevendo o espinor

$\Psi^T = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_{10})^T$, a equação (4.16) fornece o seguinte sistema de equações acopladas:

$$-M\varphi_1 + i \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \varphi_5 + \frac{i}{r} \left(\partial_{\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \varphi_6 + \frac{i}{r \sin \theta} \partial_{\varphi} \varphi_7 = 0, \quad (4.18)$$

$$-M\varphi_2 + \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \varphi_5 - \frac{i}{r \sin \theta} \partial_{\varphi} \varphi_9 + \frac{i}{r} \left(\partial_{\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \varphi_{10} = 0, \quad (4.19)$$

$$-M\varphi_3 + \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \varphi_6 + \frac{i}{r \sin \theta} \partial_{\varphi} \varphi_8 - i \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \varphi_{10} = 0, \quad (4.20)$$

$$-M\varphi_4 + \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \varphi_7 - \frac{i}{r} \partial_{\theta} \varphi_8 + i \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \varphi_9 = 0, \quad (4.21)$$

$$-M\varphi_5 + \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \varphi_2 - i \partial_r \varphi_1 = 0, \quad (4.22)$$

$$-M\varphi_6 + \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \varphi_3 - \frac{i}{r} \partial_{\theta} \varphi_1 = 0, \quad (4.23)$$

$$-M\varphi_7 + \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \varphi_4 - \frac{i}{r \sin \theta} \partial_{\varphi} \varphi_1 = 0, \quad (4.24)$$

⁴ $\partial_0 \rightarrow \partial_0 + iqA_0$.

⁵Aqui foi usado o fato que $\alpha = q^2$, que é a constante de estrutura fina em unidades naturais.

$$-M\varphi_8 - \frac{i}{r} \frac{\partial_\phi}{\sin\theta} \varphi_3 + \frac{i}{r} \left(\partial_\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right) \varphi_4 = 0, \quad (4.25)$$

$$-M\varphi_9 - i \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \varphi_4 + \frac{i}{r \sin\theta} \partial_\phi \varphi_2 = 0, \quad (4.26)$$

$$-M\varphi_{10} + i \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \varphi_3 - \frac{i}{r} \partial_\theta \varphi_2 = 0. \quad (4.27)$$

O sistema de equações (4.18)-(4.27) pode ser escrito de forma compacta como

$$M\vec{\Phi} = \vec{\nabla} \cdot \vec{G}, \quad (4.28)$$

$$M\vec{F} = \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \vec{G} + i\vec{\nabla} \times \vec{H}, \quad (4.29)$$

$$M\vec{G} = \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \vec{F} + \vec{\nabla} \Phi, \quad (4.30)$$

$$M\vec{H} = i\vec{\nabla} \times \vec{F}, \quad (4.31)$$

onde fizemos uso da seguinte notação:

$$i\Phi = \varphi_1, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \end{pmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} \varphi_8 \\ \varphi_9 \\ \varphi_{10} \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Neste ponto, o mais natural seria continuar trabalhando em coordenadas esféricas (com uma base vetorial usual). Mas a literatura [39] nos diz que, no caso de bósons vetoriais massivos, se tem a liberdade de escolher duas bases ou como também são chamados *vetores de polarização*. Por um lado, temos a base de polarização linear, que é composta de três vetores que formam uma base vetorial, dois transversais e uma longitudinal, com os quais são construídos os chamados modos magnético, elétrico e longitudinal [40]. A desvantagem dessa base é que misturam as componentes físicas e para nosso propósito não é conveniente já que estamos interessados nos estados ligados e na equação de movimento para cada componente física. Por esta razão, propõe-se a construção de outra base vetorial, igualmente composta por três vetores linearmente independentes, mas com a diferença de poder representar cada componente física com cada vetor dessa nova base.

Esta base é chamada *base esférica*⁶ e está associada à chamada polarização circular.

Nesta nova base vetorial são definidos os harmônicos esféricos vetoriais, onde é possível decompor qualquer vetor da seguinte maneira:

$$\vec{F}(\vec{r}) \equiv \sum_l F_{njl}(r) \vec{Y}_{j,l,1}^m(\theta, \phi), \quad (4.33)$$

onde l é triplamente degenerado tomando os valores de $l = j + 1$, $l = j - 1$ e $l = j$. Com a definição (4.33), o espinor reescreve-se da seguinte maneira:

$$\Psi = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} i\phi_{nj}(r) Y_j^m(\theta, \varphi) \\ \sum_l F_{njl}(r) \vec{Y}_{jl1}^m(\theta, \varphi) \\ \sum_l G_{njl}(r) \vec{Y}_{jl1}^m(\theta, \varphi) \\ \sum_l H_{njl}(r) \vec{Y}_{jl1}^m(\theta, \varphi) \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

onde F_{njl} , G_{njl} , H_{njl} são funções radiais enquanto $Y_j^m(\theta, \varphi)$ é o harmônico esférico de ordem j , e $\vec{Y}_{jl1}^m(\theta, \varphi)$ representa o harmônico esférico vetorial normalizado

$$\vec{Y}_{jl1}^m(\theta, \varphi) = \sum_{\lambda, \mu} \langle jm | l\lambda 1\mu \rangle Y_{l\lambda}(\theta, \varphi) \hat{\chi}_{1\mu}, \quad (4.35)$$

e com a ajuda das propriedades dos harmônicos vetoriais⁷ o sistema de equações (4.18)-(4.27) pode ser reescrito.

De (4.28)

$$M\phi = -\alpha_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) G_{+1} + \zeta_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) G_{-1}, \quad (4.36)$$

⁶A base esférica é ideal para poder separar os estados, somente no caso livre, com uma projeção de spin bem definida ao longo do eixo z com valores de helicidade $+1, -1, 0$.

⁷Para mais detalhes, consulte o apêndice C.

com

$$\alpha_j = \left(\frac{j+1}{2j+1}\right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \zeta_j = \left(\frac{j}{2j+1}\right)^{1/2}. \quad (4.37)$$

De (4.29)

$$MF_{+1} - \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)G_{+1} + \zeta_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r}\right)H_0 = 0, \quad (4.38)$$

$$MF_{-1} - \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)G_{-1} + \alpha_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r}\right)H_0 = 0, \quad (4.39)$$

$$MF_0 - \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)G_0 + \zeta_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)H_{+1} + \alpha_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)H_{-1} = 0, \quad (4.40)$$

de (4.30)

$$MG_{+1} = \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)F_{+1} - \alpha_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r}\right)\phi, \quad (4.41)$$

$$MG_{-1} = \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)F_{-1} + \zeta_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r}\right)\phi, \quad (4.42)$$

$$MG_0 = \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)F_0, \quad (4.43)$$

e de (4.31)

$$MH_{+1} = -\zeta_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r}\right)F_0, \quad (4.44)$$

$$MH_{-1} = -\alpha_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r}\right)F_0, \quad (4.45)$$

$$MH_0 = -\zeta_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)F_{+1} - \alpha_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)F_{-1}, \quad (4.46)$$

onde foi usada a seguinte notação:

$$F_{njj}(r) = F_0, \quad F_{njj\pm 1}(r) = F_{\pm 1}, \quad (4.47)$$

a mesma definição foi usada para G_0 , $G_{\pm 1}$, H_0 e $H_{\pm 1}$. Antes de proceder a calcular as equações de movimento, será definido o operador paridade na teoria DKP

$$\Pi\Psi = \eta^0\mathbf{P}\Psi, \quad (4.48)$$

onde \mathbf{P} é o operador de paridade orbital e $\eta^0 = 2(\beta^0)^2 - 1$. Já que a paridade de $Y_j^m(\theta, \varphi)$ e $\vec{Y}_{j,j,1}^m(\theta, \varphi)$ é $(-1)^j$, e a paridade de $\vec{Y}_{j,j+1,1}^m(\theta, \varphi)$ e $\vec{Y}_{j,j-1,1}^m(\theta, \varphi)$ é $(-1)^{j+1}$, tem-se

$$\Pi\Psi = \eta^0\mathbf{P}\Psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -i\mathbf{P}\Phi(\vec{r}) \\ \mathbf{P}\vec{F}(\vec{r}) \\ \mathbf{P}\vec{G}(\vec{r}) \\ -\mathbf{P}\vec{H}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{cases} (-1)^j\Psi(\vec{r}) \\ (-1)^{j+1}\Psi(\vec{r}) \end{cases}. \quad (4.49)$$

Note-se que o espinor de DKP é um autoestado do operador de paridade e também um autoestado de \vec{J}^2 e J_z [41], assim o espinor de DKP pode ser classificado pela paridade, pelo momento angular total, e pela componente do momento angular total na direção z . O espinor de DKP pode ser classificado em dois grupos associados à sua paridade

$$\text{Paridade } (-1)^j \begin{cases} F_0, G_0, H_{+1}, H_{-1} \neq 0, \\ \phi, F_{+1}, F_{-1}, G_{+1}, G_{-1}, H_0 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Paridade } (-1)^{j+1} \begin{cases} \phi, F_{+1}, F_{-1}, G_{+1}, G_{-1}, H_0 \neq 0, \\ F_0, G_0, H_{+1}, H_{-1} = 0. \end{cases}$$

Como pode-se ver, a componente física F_0 está associado com a paridade $(-1)^j$ e as componentes físicas ϕ, F_{+1}, F_{-1} com a paridade $(-1)^{j+1}$.

4.1.1 Paridade: $(-1)^j$

O sistema de equações associadas a esta paridade são

$$MF_0 - \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)G_0 + \zeta_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)H_{+1} + \alpha_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)H_{-1} = 0, \quad (4.50)$$

$$MG_0 = \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)F_0, \quad (4.51)$$

$$MH_{+1} = -\zeta_j \left[\frac{d}{dr} - \frac{(j+1)}{r} \right] F_0, \quad (4.52)$$

$$MH_{-1} = -\alpha_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) F_0. \quad (4.53)$$

Resolvendo este conjunto de equações, é possível encontrar uma solução para a componente física F_0 . Para isso procedemos da seguinte forma:

Multiplicando (4.50) por M , tem-se

$$M^2 F_0 - \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)(MG_0) + \zeta_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)(MH_{+1}) + \alpha_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)(MH_{-1}) = 0. \quad (4.54)$$

Substituindo o valor de G_0 , H_{+1} e H_{-1} de (4.51), (4.52) e (4.53) em (4.54), obtemos

$$M^2 F_0 - \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)^2 F_0 - \zeta_j^2 \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right) \left(\frac{dF_0}{dr} - \frac{j+1}{r} F_0\right) - \alpha_j^2 \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right) \left(\frac{dF_0}{dr} + \frac{j}{r} F_0\right) = 0, \quad (4.55)$$

$$M^2 F_0 - \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)^2 F_0 - \zeta_j^2 \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} \right] F_0 - \alpha_j^2 \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} \right] F_0 = 0. \quad (4.56)$$

Usando o fato de $\alpha_j^2 + \zeta_j^2 = 1$ podemos obter uma equação desacoplada para F_0 dada por

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} - M^2 + \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)^2 \right] F_0 = 0. \quad (4.57)$$

Já que a componente F_0 está associado ao harmônico vetorial $\vec{Y}_{j,j,1}^m(\theta, \varphi)$ e este não está definido para $j = 0$, os valores que j pode tomar são $j = l \neq 0$.

4.1.2 Paridade: $(-1)^{j+1}$

As outras seis equações restantes associadas à paridade $(-1)^{j+1}$ são

$$M\phi = -\alpha_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) G_{+1} + \zeta_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) G_{-1}, \quad (4.58)$$

$$MF_{+1} - \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) G_{+1} + \zeta_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) H_0 = 0, \quad (4.59)$$

$$MF_{-1} - \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) G_{-1} + \alpha_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) H_0 = 0, \quad (4.60)$$

$$MG_{+1} = \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) F_{+1} - \alpha_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) \phi, \quad (4.61)$$

$$MG_{-1} = \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) F_{-1} + \zeta_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) \phi, \quad (4.62)$$

$$MH_0 = -\zeta_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) F_{+1} - \alpha_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) F_{-1}. \quad (4.63)$$

Neste caso, é possível obter uma equação auxiliar que relaciona as três componentes físicas F_{+1} , F_{-1} e ϕ . Para calcular essa equação, procedemos da seguinte forma:

1- Multiplicando $\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right)$ à equação (4.58) obtemos

$$\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \phi + \frac{\alpha_j}{M} \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) G_{+1} - \frac{\zeta_j}{M} \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) G_{-1} = 0. \quad (4.64)$$

2- Aplicando o operador diferencial $\alpha_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right)$ à equação (4.59)

$$\begin{aligned} & \alpha_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) F_{+1} - \frac{\alpha_j}{M} \frac{d}{dr} \left(\frac{Z\alpha}{r} \right) G_{+1} - \frac{\alpha_j}{M} \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) G_{+1} \\ & + \frac{\alpha_j \zeta_j}{M} \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} \right] H_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.65)$$

3- Aplicando o operador diferencial $-\zeta_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right)$ à equação (4.60)

$$\begin{aligned}
& -\zeta_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) F_{-1} + \frac{\zeta_j}{M} \frac{d}{dr} \left(\frac{Z\alpha}{r} \right) G_{-1} + \frac{\zeta_j}{M} \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) G_{-1} \\
& - \frac{\alpha_j \zeta_j}{M} \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} \right] H_0 = 0.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

4- Finalmente somando as equações (4.64), (4.65) e (4.66) obtém-se

$$\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \phi + \alpha_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) F_{+1} - \zeta_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) F_{-1} = \frac{1}{M^2} \frac{Z\alpha}{r^2} U_{01}, \tag{4.67}$$

onde

$$U_{01} = - \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \left(\alpha_j F_{+1} - \zeta_j F_{-1} \right) + \frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{r}. \tag{4.68}$$

A expressão (4.67) é chamada *equação subsidiária* e será de importância no desenvolvimento deste trabalho para encontrar as equações de movimento para as três componentes físicas. Podemos ver que (4.67) relaciona três das componentes físicas, assim podemos expressar uma em função das outras duas.

Primeiro será calculado a equação para F_{+1} , multiplicando por M à equação (4.59) obtemos

$$M^2 F_{+1} - \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) (M G_{+1}) + \zeta_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) (M H_0) = 0. \tag{4.69}$$

Substituindo o valor de G_{+1} e H_0 de (4.61), (4.51) em (4.69), respectivamente

$$\begin{aligned}
& M^2 F_{+1} - \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \left[\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) F_{+1} - \alpha_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) \phi \right] \\
& - \zeta_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) \left[\zeta_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) F_{+1} + \alpha_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) F_{-1} \right] = 0,
\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
& M^2 F_{+1} - \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right)^2 F_{+1} - \zeta_j^2 \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(j+2)(j+1)}{r^2} \right] F_{+1} \\
& - \alpha_j \zeta_j \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2j+1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{j(j+2)}{r^2} \right] F_{-1} + \alpha_j \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) \phi = 0.
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Por outro lado, aplicando o operador $\alpha_j \left[\frac{d}{dr} - \frac{(j+1)}{r} \right]$ à equação subsidiária (4.67), obtemos

$$\begin{aligned} & \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \alpha_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) \phi + \alpha_j^2 \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(j+2)(j+1)}{r^2} \right] F_{+1} - \alpha_j \frac{Z\alpha}{r^2} \phi \\ & - \alpha_j \zeta_j \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2j+1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{j(j+2)}{r^2} \right] F_{-1} = \frac{1}{M^2} \alpha_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) \left(\frac{Z\alpha}{r^2} U_{01} \right). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Substituindo (4.72) em (4.71), encontramos

$$\begin{aligned} & \left\{ M^2 - \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right)^2 - \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} \right] \right\} F_{+1} = -\alpha_j \frac{Z\alpha}{r^2} \phi \\ & - \frac{1}{M^2} \alpha_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) \left(\frac{Z\alpha}{r^2} U_{01} \right). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Desta forma obtemos uma equação diferencial não homogênea para F_{+1} com termos à direita que misturam as componentes físicas. O valor de j neste caso pode tomar $j = 0, 1, 2, \dots$ devido ao fato que F_{+1} está associado ao harmônico vetorial $\vec{Y}_{j,j+1,1}^m(\theta, \varphi)$, o qual é bem definido para $j = 0$. Usando um procedimento análogo podemos calcular as equações para as outras componentes físicas. Assim obtemos a seguinte equação diferencial para F_{-1} :

$$\left\{ M^2 - \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right)^2 - \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j-1)}{r^2} \right] \right\} F_{-1} = \zeta_j \frac{Z\alpha}{r^2} \phi + \frac{1}{M^2} \zeta_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) \left(\frac{Z\alpha}{r^2} U_{01} \right), \quad (4.74)$$

onde j só toma $j = 1, 2, 3, \dots$ devido ao fato que a componente F_{-1} está associada ao harmônico vetorial $\vec{Y}_{j,j-1,1}^m(\theta, \varphi)$, o qual não está definido para $j = 0$.

A equação diferencial para a componente ϕ é dado por

$$\begin{aligned} & \left\{ M^2 - \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right)^2 - \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} \right] \right\} \phi = \frac{Z\alpha}{r^2} \left(\alpha_j F_{+1} - \zeta_j F_{-1} \right) \\ & - \frac{1}{M^2} \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \frac{Z\alpha}{r^2} U_{01}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Neste caso, devido ao fato que a componente ϕ está associada ao harmônico esférico $Y_j^m(\theta, \varphi)$, o qual está associado a $S = 0$, com $j = l = 0, 1 \dots$ como valores para j .

Neste ponto do desenvolvimento de nosso trabalho, vamos escrever as quatro equações associadas às componentes físicas numa forma compacta

$$\left\{ M^2 - \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right)^2 - \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(j+s)(j+1+s)}{r^2} \right] \right\} \vec{F} = -\frac{Z\alpha}{r^2} \hat{r} \Phi + \frac{1}{M^2} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{Z\alpha}{r^2} U_{01} \right), \quad (4.76)$$

$$\left\{ M^2 - \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right)^2 - \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} \right] \right\} \Phi = \frac{Z\alpha}{r^2} \hat{r} \cdot \vec{F} - \frac{\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right)}{M^2} \left(\frac{Z\alpha}{r^2} U_{01} \right), \quad (4.77)$$

Notamos que em ambas equações (4.76) e (4.77) o último termo da direita é proporcional a $\frac{1}{M^2}$ e está associado ao *termo anômalo* para o caso elétrico, causando a impossibilidade de encontrar soluções analíticas na paridade $(-1)^{j+1}$, quer dizer para as componentes F_{+1} , F_{-1} e ϕ . Além disso, temos o penúltimo termo em ambas equações, que será explicado depois. Por causa desses termos, vamos tentar desacoplar o sistema fixando o valor de $j = 0$, reduzindo o sistema a duas componentes físicas F_{+1} e ϕ , já que são as únicas não nulas para $j = 0$. Então (4.76) e (4.77) reduzem-se a

$$\left[M^2 - \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right)^2 - \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right) \right] F_{+1} = -\frac{Z\alpha}{r^2} \phi - \frac{1}{M^2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{Z\alpha}{r^2} U_{01} \right), \quad (4.78)$$

e

$$\left[M^2 - \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right)^2 - \frac{d^2}{dr^2} \right] \phi = \frac{Z\alpha}{r^2} F_{+1} - \frac{\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right)}{M^2} \left(\frac{Z\alpha}{r^2} U_{01} \right), \quad (4.79)$$

e a equação subsidiária (4.67) é reduzida a

$$\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \phi + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) F_{+1} = \frac{1}{M^2} \frac{Z\alpha}{r^2} U_{01}, \quad (4.80)$$

onde

$$U_{01} = -\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) F_{+1} + \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \Phi. \quad (4.81)$$

Para desacoplar o sistema, aplicaremos o operador diferencial $\left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\right)$ na equação (4.80)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2}F_{+1} &= \frac{2}{r^2}F_{+1} + \frac{1}{r}\left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\phi - \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\frac{d\phi}{dr} + \frac{Z\alpha}{r^2}\phi \\ &+ \frac{1}{M^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{Z\alpha}{r^2}U_{01}\right) - \frac{1}{M^2}\frac{1}{r}\left(\frac{Z\alpha}{r^2}U_{01}\right), \end{aligned} \quad (4.82)$$

substituindo (4.82) em (4.78) resulta em

$$M^2F_{+1} - \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)^2 = -\left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\left(\frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{r}\right). \quad (4.83)$$

Por otro lado, multiplicando a equação (4.81) por $\left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)$, obtemos

$$\left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\left(\frac{d\phi}{dr} - \frac{1}{r}\phi\right) = \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)U_{01} + \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)^2F_{+1}. \quad (4.84)$$

Substituindo (4.84) em (4.83), obtemos a seguinte relação:

$$F_{+1} = -\frac{1}{M^2}U_{01}\left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right). \quad (4.85)$$

Este último resultado mostra uma relação entre a componente física F_{+1} e a função U_{01} . Para encontrar uma relação que envolva ϕ aplicaremos o operador diferencial $\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)$ à equação (4.81), obtendo

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)U_{01} - \frac{(Z\alpha)}{r^2}F_{+1} + \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\frac{dF_{+1}}{dr} + \frac{1}{r}\left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)F_{+1}, \quad (4.86)$$

e substituindo (4.86) em (4.79)

$$\phi = \frac{1}{M^2}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)U_{01}, \quad (4.87)$$

obtem-se uma relação entre a componente escalar ϕ e U_{01} . E finalmente substituindo (4.85) e (4.87) em (4.81), obtemos

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2 - (Z\alpha)^2}{r^2} + \frac{2EZ\alpha}{r} - (M^2 - E^2)\right]U_{01} = 0. \quad (4.88)$$

Este último resultado é uma equação tipo Klein-Gordon para U_{01} com $j = 0$ ou $l = 1$, e consequentemente uma possível solução analítica poderia ser encontrada usando (4.85) e (4.87), para F_{+1} e ϕ , respectivamente.

Portanto, podemos resumir nossos resultados nesta primeira parte: Para a componente F_0 na paridade $(-1)^j$ encontra-se uma equação de movimento para $j = l \neq 0$. Para a paridade $(-1)^{j+1}$ não encontramos uma solução analítica para F_{+1} , F_{-1} e ϕ devido ao termo anômalo e ao termo proporcional a $\frac{Z\alpha}{r^2}$ que mistura as componentes físicas. Por esta razão, intentamos desacoplar o sistema de equações para $j = 0$, obtendo uma possível solução analítica para F_{+1} e ϕ .

Este mesmo resultado foi encontrado por Schwinger e Corben [35], encontrando um conjunto incompleto de estados ($j = l \neq 0$, $j = 0$) para o potencial Coulomb na equação de Proca ($g = 1$). Eles resolvem esse problema introduzindo um termo à mão na lagrangiana, forçando o sistema para obter $g = 2$.

Da mesma maneira, Barrett [17] consegue obter solução para $F_0(r)\vec{Y}_{j,j,1}^m(\theta, \varphi)$ na paridade $(-1)^j$. Enquanto para a paridade $(-1)^{j+1}$ só consegue obter solução para as componentes físicas $\Phi(r)Y_j^m(\theta, \varphi)$ e $F_{+1}(r)\vec{Y}_{j,j+1,1}^m(\theta, \varphi)$ no caso especial de $j = 0$. É importante destacar, que os autores também obtém uma solução em $j = 0$ para $F_{-1}(r)\vec{Y}_{j,j-1,1}^m(\theta, \varphi)$. Este resultado é errado, já que para $j = 0$ o harmônico vetorial $\vec{Y}_{j,j-1,1}^m(\theta, \varphi)$ não está definido. O que é possível, é encontrar uma solução para a equação diferencial radial de $F_{-1}(r)$ mas isso não é suficiente na obtenção de um autovalor para $l = j - 1$.

4.2 Correção do fator giromagnético

Então, com o descrito no capítulo anterior, sobre os mésons vetoriais num campo magnético, introduzimos um acoplamento não-mínimo da seguinte maneira:

$$R(x) = \frac{qi}{M} \left(\sigma^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \{ \beta^\alpha \beta_\alpha, \sigma^{\mu\nu} \} \right) F_{\mu\nu}, \quad (4.89)$$

com $\sigma^{\mu\nu} = [\beta^\mu, \beta^\nu]$. Então refazendo os cálculos novamente, tem-se⁸

⁸Onde $F_{01} = \mathcal{E}(r)$ é o campo elétrico na direção radial.

$$-M\varphi_1 + i\frac{\mathcal{E}(r)}{M}\varphi_2 + i\left(\partial_r + \frac{2}{r}\right)\varphi_5 + \frac{i}{r}\left(\partial_\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\varphi_6 + \frac{i}{r}\frac{\partial_\varphi}{\sin\theta}\varphi_7 = 0, \quad (4.90)$$

$$-M\varphi_2 + i\frac{\mathcal{E}(r)}{M}\varphi_1 + \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\varphi_5 - \frac{i}{r}\frac{\partial_\varphi}{\sin\theta}\varphi_9 + \frac{i}{r}\left(\partial_\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\varphi_{10} = 0, \quad (4.91)$$

$$-M\varphi_3 + \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\varphi_6 + \frac{i}{r}\frac{\partial_\varphi}{\sin\theta}\varphi_8 - i\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\varphi_{10} = 0, \quad (4.92)$$

$$-M\varphi_4 + \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\varphi_7 - \frac{i}{r}\partial_\theta\varphi_8 + i\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\varphi_9 = 0, \quad (4.93)$$

$$-M\varphi_5 + \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\varphi_2 - i\partial_r\varphi_1 = 0, \quad (4.94)$$

$$-M\varphi_6 + \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\varphi_3 - \frac{i}{r}\partial_\theta\varphi_1 = 0, \quad (4.95)$$

$$-M\varphi_7 + \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\varphi_4 - \frac{i}{r}\frac{\partial_\varphi}{\sin\theta}\varphi_1 = 0, \quad (4.96)$$

$$-M\varphi_8 - \frac{i}{r}\frac{\partial_\varphi}{\sin\theta}\varphi_3 + \frac{i}{r}\left(\partial_\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\varphi_4 = 0, \quad (4.97)$$

$$-M\varphi_9 - i\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\varphi_4 + \frac{i}{r\sin\theta}\partial_\varphi\varphi_2 = 0, \quad (4.98)$$

$$-M\varphi_{10} + i\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\varphi_3 - \frac{i}{r}\partial_\theta\varphi_2 = 0, \quad (4.99)$$

que podem ser escritos de uma forma vetorial como

$$-M\Phi + \frac{\vec{\mathcal{E}}(r) \cdot \vec{F}}{M} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0, \quad (4.100)$$

$$-M\vec{F} - \frac{\vec{\mathcal{E}}(r)\Phi}{M} + \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\vec{G} + i\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0, \quad (4.101)$$

$$-M\vec{G} + \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\vec{F} + \vec{\nabla}\Phi = 0, \quad (4.102)$$

$$-M\vec{H} + i\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0. \quad (4.103)$$

Igual à seção anterior, o sistema de 10 equações pode ser separado em dois grupos de equações com paridade bem definida, esses grupos são

4.2.1 Paridade $(-1)^j$

O sistema de equações associadas a esta paridade são

$$MF_0 - \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)G_0 + \zeta_j\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)H_{+1} + \alpha_j\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)H_{-1} = 0, \quad (4.104)$$

$$MG_0 = \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)F_0, \quad (4.105)$$

$$MH_{+1} = -\zeta_j\left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r}\right)F_0, \quad (4.106)$$

$$MH_{-1} = -\alpha_j\left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r}\right)F_0. \quad (4.107)$$

Deste grupo de equações, é possível obter a equação de movimento para a componente física F_0 , que comparado com o caso anterior, esta não foi modificada pela interação não-mínima, ficando assim

$$\left[(M^2 - E^2) - 2\frac{E(Z\alpha)}{r} - \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\gamma^2 - 1/4}{r^2} \right) \right] F_0 = 0, \quad (4.108)$$

onde

$$\gamma = \sqrt{(j+1/2)^2 - (Z\alpha)^2}. \quad (4.109)$$

4.2.2 Paridade $(-1)^{j+1}$

As outras seis equações restantes associadas a esta paridade são

$$M\phi + \frac{\mathcal{E}(r)}{M}\alpha_j F_{+1} - \frac{\mathcal{E}(r)}{M}\zeta_j F_{-1} + \alpha_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) G_{+1} - \zeta_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) G_{-1} = 0, \quad (4.110)$$

$$MF_{+1} - \frac{\mathcal{E}(r)}{M}\alpha_j \phi - \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) G_{+1} + \zeta_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) H_0 = 0, \quad (4.111)$$

$$MF_{-1} + \frac{\mathcal{E}(r)}{M}\zeta_j \phi - \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) G_{-1} + \alpha_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) H_0 = 0, \quad (4.112)$$

$$\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) F_{+1} - MG_{+1} - \alpha_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) \phi = 0, \quad (4.113)$$

$$\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) F_{-1} - MG_{-1} + \zeta_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) \phi = 0, \quad (4.114)$$

$$MH_0 + \zeta_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) F_{+1} + \alpha_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) F_{-1} = 0. \quad (4.115)$$

Neste caso, igual à seção anterior, é construído do sistema de seis equações uma relação que envolva as outras três componentes físicas F^+ , F^- e ϕ chamada *equação subsidiária*. Para isso, o seguinte procedimento será realizado:

1- Multiplicando $\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right)$ à equação (4.110) obtemos

$$\begin{aligned} & \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \phi + \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \frac{\mathcal{E}(r)}{M^2} \alpha_j F_{+1} - \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \frac{\mathcal{E}(r)}{M^2} \zeta_j F_{-1} \\ & + \frac{\alpha_j}{M} \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) G_{+1} - \frac{\zeta_j}{M} \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) G_{-1} = 0. \end{aligned} \quad (4.116)$$

2- Aplicando o operador diferencial $\alpha_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right)$ à equação (4.111)

$$\begin{aligned}
& \alpha_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) F_{+1} - \frac{\alpha_j^2}{M^2} \phi \left(\frac{d\mathcal{E}(r)}{dr} \right) - \frac{\alpha_j^2}{M^2} \mathcal{E}(r) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \phi - \frac{\alpha_j}{M} \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{Z\alpha}{r} \right) \right] G_{+1} \\
& - \frac{\alpha_j}{M} \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) G_{+1} + \frac{\alpha_j \zeta_j}{M} \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} \right] H_0 = 0.
\end{aligned} \tag{4.117}$$

3- Aplicando o operador diferencial $-\zeta_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right)$ à equação (4.112)

$$\begin{aligned}
& -\zeta_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) F_{-1} - \frac{\zeta_j^2}{M^2} \phi \frac{d\mathcal{E}(r)}{dr} - \frac{\zeta_j^2}{M^2} \mathcal{E}(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \phi + \frac{\zeta_j}{M} \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{Z\alpha}{r} \right) \right] G_{-1} \\
& + \frac{\zeta_j}{M} \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) G_{-1} - \frac{\alpha_j \zeta_j}{M} \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} \right] H_0 = 0.
\end{aligned} \tag{4.118}$$

4- Finalmente somando as equações (4.116),(4.117) e (4.118) obtém-se

$$\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) \phi + \alpha_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) F_{+1} - \zeta_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) F_{-1} = \frac{\Gamma(r)}{M^2} \phi, \tag{4.119}$$

onde foi considerado o gradiente do potencial elétrico

$$\vec{\mathcal{E}}(r) = -\vec{\nabla} \left(\frac{Z\alpha}{r} \right), \tag{4.120}$$

e a densidade de carga externa como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}}(r) = \Gamma(r). \tag{4.121}$$

Podemos notar a diferença da equação subsidiária (4.67), que foi obtida mediante o acoplamento mínimo, com nosso resultado (4.119) que é obtido usando o acoplamento mínimo e não-mínimo ($g = 2$). Neste caso, devido à introdução do acoplamento não-mínimo o termo anômalo é substituído por uma densidade de carga externa $\Gamma(r)$ ⁹. Para o caso do potencial de Coulomb $\frac{Z\alpha}{r}$, a densidade de carga externa é proporcional a $\delta(r)$ originando

⁹Esta densidade é interpretado como uma *densidade de carga externa* para diferenciar da densidade j^0 .

uma singularidade em $r = 0$. No entanto, já que estamos interessados na dinâmica externa do méson, quer dizer em regiões $r > 0$, podemos evitar esse problema considerando $\Gamma(r) = 0$. Desta forma a equação subsidiária (4.119) reduz-se a

$$\left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\phi + \alpha_j \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)F_{+1} - \zeta_j \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)F_{-1} = 0, \quad (4.122)$$

ou também pode ser escrito em sua forma vetorial

$$\left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\Phi - \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0. \quad (4.123)$$

Com a ajuda da equação subsidiária (4.122), podemos calcular as equações associadas à paridade $(-1)^{j+1}$, obtendo assim a equação de movimento para F_{+1}

$$\left[(M^2 - E^2) - 2\frac{E(Z\alpha)}{r} - \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\gamma^2 - 1/4}{r^2}\right) \right] F_{+1} = -\frac{2(j+1)}{r^2} F_{+1} - 2\alpha_j \frac{Z\alpha}{r^2} \phi, \quad (4.124)$$

para F_{-1} ,

$$\left[(M^2 - E^2) - 2\frac{E(Z\alpha)}{r} - \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\gamma^2 - 1/4}{r^2}\right) \right] F_{-1} = \frac{2j}{r^2} F_{-1} + 2\zeta_j \frac{Z\alpha}{r^2} \phi, \quad (4.125)$$

e para ϕ ,

$$\left[(M^2 - E^2) - 2\frac{E(Z\alpha)}{r} - \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\gamma^2 - 1/4}{r^2}\right) \right] \phi = 2\alpha_j \frac{Z\alpha}{r^2} F_{+1} - 2\zeta_j \frac{Z\alpha}{r^2} F_{-1}. \quad (4.126)$$

O sistema de equações (4.124), (4.125) e (4.126) pode ser expresso da seguinte forma:

$$\Omega_{KG}\psi = -\frac{2}{r^2}\Lambda_j\psi, \quad (4.127)$$

onde

$$\Omega_{KG} = (M^2 - E^2) - 2\frac{E(Z\alpha)}{r} - \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\gamma^2 - 1/4}{r^2}\right), \quad (4.128)$$

$$\Lambda_j = \begin{pmatrix} (j+1) & 0 & \alpha_j(Z\alpha) \\ 0 & -j & -\zeta_j(Z\alpha) \\ -\alpha_j(Z\alpha) & \zeta_j(Z\alpha) & 0 \end{pmatrix}, \quad e \quad \psi = \begin{pmatrix} F_{+1} \\ F_{-1} \\ \phi \end{pmatrix}. \quad (4.129)$$

Podemos notar que a matriz Λ_j não é diagonal, portanto será aplicado uma transformação de similiaridade. Desta maneira a equação (4.127) torna-se

$$\left(\Omega_{KG} + \frac{2}{r^2} \Lambda_j^{diag} \right) \bar{\psi} = 0, \quad (4.130)$$

onde $\bar{\psi}$ e Λ_j^{diag} são dados por¹⁰

$$\Lambda_j^{diag} = \begin{pmatrix} (1/2 + \gamma) & 0 & 0 \\ 0 & (1/2 - \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{F}_{+1} \\ \bar{F}_{-1} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}. \quad (4.131)$$

O novo sistema de equações (4.130) é

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2E(Z\alpha)}{r} - \frac{(\gamma+1)^2 - 1/4}{r^2} - (M^2 - E^2) \right] \bar{F}_{+1} = 0, \quad (4.132)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2E(Z\alpha)}{r} - \frac{(\gamma-1)^2 - 1/4}{r^2} - (M^2 - E^2) \right] \bar{F}_{-1} = 0, \quad (4.133)$$

e

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2E(Z\alpha)}{r} - \frac{\gamma^2 - 1/4}{r^2} - (M^2 - E^2) \right] \bar{\phi} = 0, \quad (4.134)$$

reescrevendo as três equações de forma compacta, temos

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\lambda\xi}{r} - \frac{(\gamma+s)^2 - 1/4}{r^2} - \frac{\xi^2}{4} \right] \bar{R}^s(r) = 0, \quad (4.135)$$

onde

¹⁰Os cálculos detalhados da transformação de similiaridade são dados no apêndice F.

$$\epsilon = \frac{E}{\xi}, \quad \frac{\xi^2}{4} = M^2 - E^2, \quad \lambda = 2\epsilon(Z\alpha). \quad (4.136)$$

e s é um parâmetro que toma os valores $+1, -1$ e 0 para identificar as componentes físicas $\bar{F}_{+1}, \bar{F}_{-1}$ e $\bar{\phi}$, respectivamente. A equação de movimento (4.135) descreve uma partícula de spin 1 em um potencial coulombiano. A solução para (4.135) com λ real e positivo é precisamente a bem conhecida solução da equação Schrödinger para o potencial de Coulomb. A solução perto da origem pode ser escrita sendo proporcional a $r^{|\gamma+s|+1/2}$. Por outro lado, para r grande a solução de quadrado integrável comporta-se como $e^{-r\xi/2}$, e portanto a solução para $r > 0$ pode ser expressa como

$$\bar{R}^s(r) = e^{-r\xi/2} r^{1/2+|\gamma+s|} f(r), \quad (4.137)$$

onde f é uma função regular na origem. Adicionalmente, introduzindo

$$\begin{aligned} \rho &= \xi r, \\ a &= (1/2 + \gamma + s) - \lambda, \\ b &= 1 + |2\gamma + 2s|, \end{aligned} \quad (4.138)$$

e substituindo (4.137) em (4.135) encontra-se que $f(\rho)$ satisfaz uma equação hipergeométrica confluyente, ou equação de Kummer

$$\rho \frac{d^2 f}{d\rho^2} + (b - \rho) \frac{df}{d\rho} - a f = 0, \quad (4.139)$$

que tem como solução geral

$$f(\rho) = AM(a, b, \rho) + B\rho^{1-b}M(a - b + 1, 2 - b, \rho), \quad (4.140)$$

onde A e B são constantes arbitrárias. Já que o segundo termo de (4.140) tem uma singularidade em $\rho = 0$ ¹¹ precisamos fazer $B = 0$.

Por outro lado, analisando o comportamento assintótico da função de Kummer

$$M(a, b, \rho) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-1)} e^{-ia\pi} \rho^{-a} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{\rho} \rho^{a-b}, \quad (4.141)$$

¹¹Podemos ver que $\rho^{1-b} = \rho^{-|2\gamma+2s|}$.

como podemos notar, o termo e^ρ estraga o bom comportamento da solução (4.137) para ρ grande. Para resolver este problema, fazemos $a = -n$, onde n é um inteiro não negativo. Já que $b > 0$, $M(-n, b, \rho)$ é proporcional ao polinômio de Laguerre $L_n^{(b-1)}(\rho)$ de grau n , e assim a solução (4.137) torna-se

$$\bar{R}^s(\rho) = N_n e^{-\rho/2} \rho^{1/2+|\gamma+s|} L_n^{(|2\gamma+2s|)}(\rho). \quad (4.142)$$

Por outro lado, a condição $a = -n$ leva a

$$E^s = \pm M \left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left\{ n + 1/2 + s + [(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2} \right\}^2} \right)^{-1/2}, \quad (4.143)$$

fazendo $n' = n + j + 1$, a expressão da energia (4.143) torna-se

$$E^s = M \left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left\{ n' + s - (j + 1/2) + [(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2} \right\}^2} \right)^{-1/2}. \quad (4.144)$$

Desta forma, as energias para as componentes físicas são dadas por¹²

$$E^+ = M \left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left\{ n^+ + 1 - (j + 1/2) + [(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2} \right\}^2} \right)^{-1/2} \quad \text{para } s = 1, \quad (4.145)$$

$$E^- = M \left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left\{ n^- - 1 - (j + 1/2) + [(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2} \right\}^2} \right)^{-1/2} \quad \text{para } s = -1, \quad (4.146)$$

¹²Já que as equações para F_0 e $\bar{\phi}$ são as mesmas só que com diferentes paridades, será usado E^0 para representar ambas energias.

$$E^0 = M \left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left\{ n^0 - (j + 1/2) + [(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2} \right\}^2} \right)^{-1/2} \quad \text{para } s = 0. \quad (4.147)$$

Devido ao fato que a energia tem que ser a mesma no sistema, E^+ , E^- e E^0 serão igualadas obtendo

$$E_{n'} = M \left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left\{ n' - (j + 1/2) + [(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2} \right\}^2} \right)^{-1/2}, \quad (4.148)$$

com $n' = 2, 3 \dots$, $j = 1, 2 \dots$ e a relação dos números quânticos das componentes físicas são

$$n' = n^0 = n^+ + 1 = n^- - 1, \quad (4.149)$$

Por outro lado, a solução para a componente física associado à paridade $(-1)^j$ é

$$F_0(\rho) = N_{n,j}^0 \rho^{1/2+\gamma} e^{-\rho/2} L_n^{(|2\gamma|)}(\rho), \quad (4.150)$$

onde $N_{n,j}^0$ é a constante de normalização dado por

$$N_{n,j}^0 = \left\{ \frac{M(2j+1)n!}{4\pi(n+2\gamma)! [\epsilon(2n+1+2\gamma) + Z\alpha]} \right\}^{1/2}, \quad (4.151)$$

onde

$$\epsilon = \frac{E}{2(M^2 - E^2)^{1/2}}. \quad (4.152)$$

E as soluções para as componentes físicas associadas à paridade $(-1)^{j+1}$ são

$$\bar{F}_+(\rho) = N_{n,j}^+ \rho^{1/2+\gamma+1} e^{-\rho/2} L_{n-1}^{(|2\gamma+2|)}(\rho), \quad (4.153)$$

$$\bar{F}_-(\rho) = N_{n,j}^- \rho^{1/2+\gamma-1} e^{-\rho/2} L_{n+1}^{(|2\gamma-2|)}(\rho), \quad (4.154)$$

$$\bar{\phi}(\rho) = C_{n,j}^0 \rho^{1/2+\gamma} e^{-\rho/2} L_n^{(|2\gamma|)}(\rho), \quad (4.155)$$

onde as constantes $N_{n,j}^+$, $N_{n,j}^-$ e $C_{n,j}^0$ são dados por¹³

$$|N_{n,j}^+| = \left\{ \frac{M(n-1)!(Z\alpha)^2}{(4\pi)\delta[\epsilon(2n+2\gamma-1)+(Z\alpha)](n-1+2\gamma)!} \right\}^{1/2}, \quad (4.156)$$

$$|N_{n,j}^-| = \left\{ \frac{M(n-1)!(Z\alpha)^2 n^2 (n+1)^2 (a_3)^2}{(4\pi)\delta[\epsilon(2n+2\gamma-1)+(Z\alpha)](n-1+2\gamma)!} \right\}^{1/2}, \quad (4.157)$$

e

$$|C_{n,j}^0| = \left\{ \frac{M(n-1)!n^2(j+1)^2(a_4)^2}{(4\pi)(Z\alpha)^2\delta[\epsilon(2n+2\gamma-1)+(Z\alpha)](n-1+2\gamma)!} \right\}^{1/2}. \quad (4.158)$$

onde

$$\delta = \frac{\gamma(2\gamma+1)(n+1+2\gamma)(n+2\gamma)}{(2j+3)} + \frac{\gamma(2\gamma-1)n(n+1)(a_3)^2}{(2j-1)} - \frac{(\gamma^2-1/4)(n+2\gamma)n(j+1)(a_4)^2}{j(2j+1)(Z\alpha)^2}, \quad (4.159)$$

$$a_1 = \frac{(\gamma+1/2)(3\gamma+1/2+2n)}{(\gamma-1/2)} - \frac{\lambda(\gamma+3/2)}{(\gamma-1/2)}, \quad (4.160)$$

$$a_2 = \frac{(\gamma-1/2)(\gamma+1/2+2n)}{(\gamma+1/2)} - \frac{\lambda(\gamma-3/2)}{(\gamma+1/2)}, \quad (4.161)$$

$$a_3 = \frac{a_1(Z\alpha)^2 + \lambda(j+1)(j+1/2+\gamma)}{a_2(Z\alpha)^2 + \lambda(j+1)(j+1/2-\gamma)}, \quad (4.162)$$

$$a_4 = (j+1/2)(a_3-1) - \gamma(a_3+1). \quad (4.163)$$

¹³Os cálculos detalhados encontram-se no apêndice G.2.

Capítulo 5

Conclusões

Nesta dissertação foi estudado o problema de um méson vetorial interagindo com um campo magnético constante e em um potencial Coulomb, via o formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). Para entender o formalismo foi feita uma revisão detalhada dos conceitos básicos da teoria de DKP, como por exemplo a equação de DKP no caso livre, a covariância de Lorentz, a equação adjunta de DKP, a equação de continuidade, condição de normalização e a definição dos valores esperados. Também foi feita uma revisão sobre os operadores de projeção (seleção) e foi discutido a equivalência com as equações de Klein-Gordon (KG) e Proca no caso livre. Devido ao fato que a equação de DKP possui mais interações possíveis que KG e Proca, foi feita uma revisão detalhada de todos os covariantes bilineares para os dois setores da teoria. Adicionalmente, também foi discutido a equivalência com as equações de KG e Proca no caso da interação eletromagnética mínima, na qual faz aparição o famoso termo anômalo no caso do setor vetorial (spin 1), chamado assim porque esse termo não tem analogia na teoria de Dirac.

Tendo todos os conceitos básicos da teoria de DKP, o primeiro problema a ser abordado foi considerar um méson vetorial interagindo com um campo magnético constante. Este problema já foi estudado na literatura [5–11] mas foi resolvida de forma errada, já que na desesperação por desacoplar as equações de movimentos alguns autores zeram sem justificativa aparente algumas componentes físicas do espinor de DKP. Nesta dissertação foi mostrado que considerando a interação por meio do acoplamento mínimo as equações de movimento para as componentes físicas não podem ser desacopladas, e assim não conseguimos obter soluções analíticas. Posteriormente, identificou-se que o problema disso era devido ao fato que o fator giromagnético natural da teoria $g = 1$ e como consequência

o surgimento do termo anômalo no sistema de equações. Por esta razão foi introduzido um acoplamento não mínimo para corrigir o fator giromagnético e a eliminação do termo anômalo nas equações de movimento das componentes físicas do espinor de DKP. Portanto, conclui-se que o fator giromagnético natural da teoria é $g = 2$, e isso nós permite encontrar soluções analíticas e o espectro de energia. Desta forma o problema de partículas de spin 1 interagindo com um campo magnético constante no formalismo de DKP foi resolvido.

O segundo problema em ser abordado foi considerar um méson vetorial imerso em um potencial Coulomb. Este problema também já foi estudado na literatura mas foi resolvido de forma errada [17]. Semelhante ao caso de campo magnético constante, foi mostrado que em geral o problema não tem solução analítica considerando a interação por meio do acoplamento mínimo. Também foi mostrado que só existe solução analítica para o caso particular de $(j = l \neq 0)$ e $(j = 0, l = 1)$. Analogamente, como no problema anterior, esse problema também mostra presença do termo anômalo no sistema de equações e consequentemente, ao fator giromagnético da teoria. Desta forma, a interação não-mínima foi introduzida para corrigir o fator giromagnético, descobrindo que o termo anômalo torna-se uma densidade de carga externa proporcional a $\delta(r)$, que para o nosso propósito $r > 0$, ela é zero. Portanto, pode-se encontrar soluções analíticas e o espectro de energia para as componentes físicas F_0 , com paridade $(-1)^j$, e F_+ , F_- e ϕ com paridade $(-1)^{j+1}$, respectivamente. Para a componente física F_0 foi obtido uma equação diferencial hipergeométrica que foi resolvida completamente. Por outro lado, para as componentes físicas F_+ , F_- e ϕ foi obtido um sistema de equações ordinárias que foram resolvidas por meio de um método de diagonalização, mostrando assim que é possível resolver o problema de Coulomb para mésons vetoriais no formalismo de DKP.

Um possível trabalho futuro versa sobre a implementação da equação de DKP em 2+1 dimensões como teoria efetiva para as redes de Lieb (rectangular) e Kagome (triangular), materiais recentemente sintetizados em laboratório [42]. Nesse sentido, os resultados obtidos nesta dissertação, particularmente os do campo magnético uniforme, podem ser facilmente implementados no contexto em que os portadores de carga em alguma dessas duas redes interagem com um campo magnético uniforme perpendicular à superfície. Por outro lado, para o caso do potencial coulombiano, nossos resultados podem ser aproveitados como uma alternativa no estudo da polarização do vácuo para o bóson vetorial W^\pm , que foi feita mediante a teoria QCD [43], e portanto resolver o problema da carga localizada na origem do méson usando o formalismo DKP.

Apêndice A

Vetor Pauli-Lubanski da teoria DKP

O vetor Pauli-Lubanski é definido como

$$W_\alpha = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}P^\beta M^{\mu\nu}, \quad (\text{A.1})$$

onde P^β é o quadrimomento e $M^{\mu\nu}$ é o tensor momento angular. Em estado de repouso ($\mathbf{P} = 0$), a contração de W_α torna-se

$$W_\alpha W^\alpha \psi = -M^2 \hat{S}^2 \psi, \quad (\text{A.2})$$

onde \hat{S} é o operador de spin, que satisfaz a seguinte relação de autovalores:

$$\hat{S}^2 \psi = S(S+1)\psi. \quad (\text{A.3})$$

Por outro lado, o último termo de (A.2) pode ser reescrito como

$$\hat{S}^2 \psi = S^k S_k \psi. \quad (\text{A.4})$$

Usando $S^k = \frac{i}{2}\epsilon^{kjl}S_{jl}$, (A.4) é expresso como

$$\hat{S}^2 \psi = -\frac{1}{4}\epsilon^{kjl}\epsilon_{kmn}S_{jl}S^{mn}\psi, \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{S}^2 \psi = -\frac{1}{4}(\delta_j^m \delta_n^l - \delta_n^j \delta_m^l)S_{jl}S^{mn}\psi, \quad (\text{A.6})$$

$$\hat{S}^2\psi = -\frac{1}{4}\left(S_{mn}S^{mn} - S_{nm}S^{mn}\right)\psi, \quad (\text{A.7})$$

obtendo

$$\hat{S}^2\psi = -\frac{1}{2}S^{mn}S_{mn}\psi, \quad (\text{A.8})$$

e finalmente substituindo (A.8) em (A.2), tem-se

$$W_\alpha W^\alpha\psi = \frac{M^2}{2}S^{mn}S_{mn}\psi. \quad (\text{A.9})$$

A.1 Setor escalar

Aplicando o operador de projeção P à equação (A.2) obtemos

$$W_\alpha W^\alpha(P\psi) = \frac{M^2}{2}P S^{mn}S_{mn}\psi, \quad (\text{A.10})$$

usando a propriedade (2.69) em (A.10), se obtém

$$W_\alpha W^\alpha(P\psi) = 0\psi. \quad (\text{A.11})$$

Comparando (A.11) com (A.2), tem-se

$$S(S+1) = 0\psi, \quad (\text{A.12})$$

onde o único valor positivo que satisfaz a equação (A.12) é $S = 0$, confirmando que o valor do spin para o setor escalar da teoria DKP é $S = 0$.

A.2 Setor vetorial

Aplicando o operador de projeção R^μ à equação (A.2) obtemos

$$W_\alpha W^\alpha(R^\mu\psi) = \frac{M^2}{2}R^\mu S^{mn}S_{mn}\psi, \quad (\text{A.13})$$

usando a propriedade (2.84) em (A.13), obtém-se

$$W_\alpha W^\alpha (R^\mu \psi) = \frac{M^2}{2} \left(g^{\mu m} (R^n S_{mn}) - g^{\mu n} (R^m S_{mn}) \right) \psi. \quad (\text{A.14})$$

Usando a propriedade (2.84) em (A.14), tem-se

$$W_\alpha W^\alpha (R^\mu \psi) = \frac{M^2}{2} \left(g^{\mu m} g_m^n R_n - g_n^n g^{\mu m} R_m - g^{\mu n} g_m^m R_n + g^{\mu n} g_n^m R_m \right) \psi. \quad (\text{A.15})$$

Para o caso de 3 + 1 dimensões, é satisfeita a propriedade $g_l^l = 3$ com $l = 1, 2, 3$, assim a equação (A.15) torna-se

$$W_\alpha W^\alpha (R^\mu \psi) = \frac{M^2}{2} \left(g^{\mu m} R_m - 3g^{\mu m} R_m - 3g^{\mu n} R_n + g^{\mu n} R_n \right) \psi, \quad (\text{A.16})$$

$$W_\alpha W^\alpha (R^\mu \psi) = \frac{M^2}{2} \left(-2g^{\mu m} R_m - 2g^{\mu n} R_n \right) \psi, \quad (\text{A.17})$$

$$W_\alpha W^\alpha (R^\mu \psi) = -2M^2 (R^\mu \psi). \quad (\text{A.18})$$

Comparando (A.18) com (A.2), tem-se

$$S(S + 1) = 2, \quad (\text{A.19})$$

onde o único valor positivo que satisfaz a equação (A.19) é $S = 1$, confirmando que o valor do spin para as 4 componentes físicas do espinor de DKP no setor vetorial da teoria DKP é $S = 1$.

Apêndice B

DKP em coordenadas curvilíneas

O princípio de equivalência diz que um sistema de referência não-inercial é indistinguível de um sistema imerso em um campo gravitacional. Nesse sentido, um sistema euclidiano parametrizado em coordenadas curvilíneas pode ser tratado da mesma forma como se fosse um sistema no espaço-tempo curvo [44]. Por esta razão temos a liberdade de usar o formalismo de tetradas da relatividade geral para descrever a equação de DKP em coordenadas curvilíneas. A de DKP em um espaço-tempo curvo [45–48] é dado por

$$(i\beta^\mu \nabla_\mu - M) \Psi = 0, \quad (\text{B.1})$$

onde ∇_μ é a derivada covariante dado por

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu, \quad (\text{B.2})$$

onde Γ_μ é a conexão afim, e está definido como

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} \omega_{\mu(a)(b)} [\beta^{(a)}, \beta^{(b)}]. \quad (\text{B.3})$$

Por outro lado, as matrizes β^μ num espaço-tempo curvilíneo são definidas como

$$\beta^\mu = e_{(a)}{}^\mu \beta^{(a)}, \quad (\text{B.4})$$

onde as matrizes β^μ também satisfazem o álgebra de DKP. Nesse ponto, é definido um conjunto de vetores ortonormais $e_{(a)}{}^\mu$ com base no espaço de Minkowski, chamadas tetradas, onde os índices gregos $\mu = 0, 1, 2, 3$ representam as componentes do vetor no espaço-tempo

curvo e os índices latinos $a = 0, 1, 2, 3$ as componentes do vetor no espaço-tempo de Minkowski. Em continuação, serão mencionadas algumas de suas propriedades

$$e_{(a)}{}^\mu e^{(a)}{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu, \quad (\text{B.5})$$

$$e_{(a)}{}^\mu e^{(b)}{}_\mu = \delta_{(a)}{}^{(b)}, \quad (\text{B.6})$$

$$e_{(a)}{}^\mu e_{(b)}{}^\nu g_{\mu\nu} = e_{(a)}{}^\mu e_{(b)\mu} = g_{(a)(b)}, \quad (\text{B.7})$$

onde $g_{(a)(b)}$ é o tensor métrico de Minkowski

$$g_{(a)(b)} e^{(b)}{}_\mu = e_{(a)\mu}, \quad (\text{B.8})$$

$$g^{(a)(b)} e_{(b)\mu} = e^{(a)}{}_\mu, \quad (\text{B.9})$$

$$e_{(a)\mu} e^{(a)}{}_\nu = e^{(a)}{}_\mu e^{(b)}{}_\nu g_{(a)(b)} = g_{\mu\nu}, \quad (\text{B.10})$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o elemento de linha do espaço-tempo. Da mesma forma, os componentes de um vetor podem ser escritos como

$$A^{(a)} = e^{(a)}{}_\mu A^\mu = e^{(a)\mu} A_\mu, \quad (\text{B.11})$$

$$A_{(a)} = g_{(a)(b)} A^{(b)} = e_{(a)\mu} A^\mu = e_{(a)}{}^\mu A_\mu, \quad (\text{B.12})$$

$$A^\mu = e_{(a)}{}^\mu A^{(a)} = e^{(a)\mu} A_{(a)}, \quad (\text{B.13})$$

$$A_\mu = e_{(a)\mu} A^{(a)} = e^{(a)}{}_\mu A_{(a)}. \quad (\text{B.14})$$

Já que as tetradas foram definidas, é necessário agora definir a conexão spin $\omega_{\mu ab}$, dada por

$$\omega_{\mu(a)(b)} = e_{(a)l} e^{(b)j} \Gamma_{ju}^l - e_{(b)j} \partial_\mu e_{(a)j}, \quad \omega_{\mu(a)(b)} = -\omega_{\mu(b)(a)} \quad (\text{B.15})$$

onde os símbolos Christoffel são definidos como

$$\Gamma_{j\mu}^l = \frac{1}{2} g^{l\lambda} \left(\partial_j g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\lambda j} - \partial_\lambda g_{\mu j} \right). \quad (\text{B.16})$$

B.1 Coordenadas cilíndricas

O elemento de linha em coordenadas cilíndricas é dado por

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2, \quad (\text{B.17})$$

da definição (B.3), é calculado os respectivos símbolos de Christoffel associados a (B.17)

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{22} = -\frac{1}{2}(-1)\partial_r(-r^2),$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad (\text{B.18})$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{22}\partial_1 g_{22} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_r(-r^2),$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad (\text{B.19})$$

e as tetradas associadas ao elemento de linha em coordenadas cilíndricas (B.17), são

$$e_{(a)}{}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_{(a)}{}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \end{pmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

Com essas ferramentas, podemos construir a conexão afim (B.3) e as matrizes β^μ (B.4). Para isto, primeiro encontramos as componentes não nulas de (B.15)

$$\omega_{2(1)(2)} = e_{(1)1}e_{(2)}{}^2\Gamma_{22}^1 = (-1)\left(\frac{1}{r}\right)(-r),$$

$$\omega_{2(1)(2)} = 1, \quad (\text{B.21})$$

seguidamente a conexão afim é construída

$$\Gamma_0 = 1, \quad (\text{B.22})$$

$$\Gamma_1 = 1, \quad (\text{B.23})$$

$$\Gamma_2 = [\beta^{(1)}, \beta^{(2)}], \quad (\text{B.24})$$

$$\Gamma_3 = 1. \quad (\text{B.25})$$

E posteriormente os termos da derivada covariante são

$$\nabla_0 = \partial_0, \quad (\text{B.26})$$

$$\nabla_1 = \partial_r, \quad (\text{B.27})$$

$$\nabla_2 = \partial_\varphi + [\beta^{(1)}, \beta^{(2)}], \quad (\text{B.28})$$

$$\nabla_3 = \partial_z. \quad (\text{B.29})$$

Por outro lado, as matrizes β^μ em coordenadas cilíndricas são

$$\beta^0 = e_{(0)}{}^0 \beta^{(0)} = \beta^{(0)}, \quad (\text{B.30})$$

$$\beta^r = e_{(1)}{}^1 \beta^{(1)} = \beta^{(1)}, \quad (\text{B.31})$$

$$\beta^\varphi = e_{(2)}{}^2 \beta^{(2)} = \frac{1}{r} \beta^{(2)}, \quad (\text{B.32})$$

$$\beta^z = e_{(3)}{}^3 \beta^{(3)} = \beta^{(3)}, \quad (\text{B.33})$$

para finalmente obter a equação de DKP (B.1) em coordenadas cilíndricas

$$\left(i\beta^{(0)}\partial_0 + i\beta^{(1)}\partial_r + \frac{i}{r}\beta^{(2)}\partial_\varphi + \frac{i}{r}\beta^{(2)}S^{(1)(2)} + i\beta^{(3)}\partial_z - M \right) \Psi = 0 \quad (\text{B.34})$$

B.2 Coordenadas esféricas

O elemento de linha em coordenadas esféricas é

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (\text{B.35})$$

da definição (B.3), é calculado os respectivos símbolos de Christoffel do espaço-tempo (B.35)

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{22} = -\frac{1}{2}(-1)\partial_r(-r^2), \\ \Gamma_{22}^1 &= -r, \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{33} = -\frac{1}{2}(-1)\partial_r(-r^2 \sin^2 \theta), \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}\partial_1 g_{22} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_r(-r^2), \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{33} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_\theta(-r^2 \sin^2 \theta), \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}\partial_1 g_{33} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)\partial_r(-r^2 \sin^2 \theta), \\ \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$$\Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2}g^{33}\partial_2 g_{33} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)\partial_\theta(-r^2 \sin^2 \theta),$$

$$\Gamma_{32}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad (\text{B.41})$$

e as tetradas associadas com (B.35), são

$$e_{(a)}{}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r \sin \theta} \end{pmatrix}, \quad e_{(a)\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.42})$$

Com essas ferramentas, podemos construir a conexão afim e as matrizes β^μ . Para isto, primeiro é encontrado as componentes não nulas de (B.15)

$$\omega_{2(1)(2)} = e_{(1)1}e_{(2)}{}^2 \Gamma_{22}^1 = (-1)\left(\frac{1}{r}\right)(-r),$$

$$\omega_{2(1)(2)} = 1, \quad (\text{B.43})$$

$$\omega_{3(1)(3)} = e_{(1)1}e_{(3)}{}^3 \Gamma_{33}^1 = (-1)\left(\frac{1}{r \sin \theta}\right)(-r \sin^2 \theta),$$

$$\omega_{3(1)(3)} = \sin \theta, \quad (\text{B.44})$$

$$\omega_{3(2)(3)} = e_{(2)2}e_{(3)}{}^3 \Gamma_{33}^2 = (-r)\left(\frac{1}{r \sin \theta}\right)(-\sin \theta \cos \theta),$$

$$\omega_{3(2)(3)} = \cos \theta. \quad (\text{B.45})$$

Seguidamente é construído a conexão afim

$$\Gamma_0 = 1, \quad (\text{B.46})$$

$$\Gamma_1 = 1, \quad (\text{B.47})$$

$$\Gamma_2 = [\beta^{(1)}, \beta^{(2)}], \quad (\text{B.48})$$

$$\Gamma_3 = \sin \theta [\beta^{(1)}, \beta^{(3)}] + \cos \theta [\beta^{(2)}, \beta^{(3)}], \quad (\text{B.49})$$

e posteriormente os termos da derivada covariante é

$$\nabla_0 = \partial_0, \quad (\text{B.50})$$

$$\nabla_1 = \partial_1, \quad (\text{B.51})$$

$$\nabla_2 = \partial_2 + [\beta^{(1)}, \beta^{(2)}], \quad (\text{B.52})$$

$$\nabla_3 = \partial_3 + \sin \theta [\beta^{(1)}, \beta^{(3)}] + \cos \theta [\beta^{(2)}, \beta^{(3)}]. \quad (\text{B.53})$$

Por outro lado é construído as matrizes β^μ em coordenadas esféricas

$$\beta^0 = e_{(0)}{}^0 \beta^{(0)} = \beta^{(0)}, \quad (\text{B.54})$$

$$\beta^1 = e_{(1)}{}^1 \beta^{(1)} = \beta^{(1)}, \quad (\text{B.55})$$

$$\beta^2 = e_{(2)}{}^2 \beta^{(2)} = \frac{1}{r} \beta^{(2)}, \quad (\text{B.56})$$

$$\beta^3 = e_{(3)}{}^3 \beta^{(3)} = \frac{1}{r \sin \theta} \beta^{(3)}. \quad (\text{B.57})$$

Para finalmente obter a equação de DKP (B.1) em coordenadas esféricas

$$\left[i\beta^{(0)} \partial_t + i\beta^{(1)} \partial_r + i\frac{1}{r} \beta^{(2)} \left(\partial_\theta + [\beta^{(1)}, \beta^{(2)}] \right) + i\frac{1}{r \sin \theta} \beta^{(3)} \left(\partial_\varphi + \sin \theta [\beta^{(1)}, \beta^{(3)}] \right) \right. \\ \left. + \cos \theta [\beta^{(2)}, \beta^{(3)}] \right) - M \Big] \Psi = 0. \quad (\text{B.58})$$

Apêndice C

Harmônicos esféricos vetoriais

Os conceitos dos harmônicos esféricos vetoriais foram estudados por Hill [49] como uma extensão dos harmônicos esféricos escalares amplamente utilizados como base na mecânica quântica e eletromagnetismo [50,51]. Para uma consulta mais específica, o leitor pode consultar o livro [52].

Neste apêndice, as principais propriedades e características dos harmônicos esféricos vetoriais serão brevemente descritas

$$\hat{r} \cdot Y_j^m(\theta, \phi) = -\left(\frac{j+1}{2j+1}\right)^{1/2} \vec{Y}_{j,j+1,1}^m(\theta, \phi) + \left(\frac{j}{2j+1}\right)^{1/2} \vec{Y}_{j,j-1,1}^m(\theta, \phi), \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left(f(r) Y_j^m(\theta, \phi) \right) &= -\left(\frac{j+1}{2j+1}\right)^{1/2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{j,j+1,1}^m(\theta, \phi) \\ &\quad + \left(\frac{j}{2j+1}\right)^{1/2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{j,j-1,1}^m(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\vec{\nabla} \times \left(f(r) \vec{Y}_{j,j+1,1}^m \right) = i \left(\frac{j}{2j+1} \right)^{1/2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{j,j,1}^m(\theta, \phi), \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left(f(r) \vec{Y}_{j,j,1}^m(\theta, \phi) \right) &= i \left(\frac{j}{2j+1} \right)^{1/2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{j,j+1,1}^m(\theta, \phi) \\ &\quad + i \left(\frac{j+1}{2j+1} \right)^{1/2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{j,j-1,1}^m(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\vec{\nabla} \times \left(f(r) \vec{Y}_{j,j-1,1}^m(\theta, \phi) \right) = i \left(\frac{j+1}{2j+1} \right)^{1/2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{j,j,1}^m(\theta, \phi), \quad (\text{C.5})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(f(r) \vec{Y}_{j,j+1,1}^m(\theta, \phi) \right) = - \left(\frac{j+1}{2j+1} \right)^{1/2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) f(r) Y_j^m(\theta, \phi), \quad (\text{C.6})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(f(r) \vec{Y}_{j,j,1}^m(\theta, \phi) \right) = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(f(r) \vec{Y}_{j,j-1,1}^m(\theta, \phi) \right) = \left(\frac{j}{2j+1} \right)^{1/2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) f(r) Y_j^m(\theta, \phi), \quad (\text{C.8})$$

$$\hat{r} \times \vec{Y}_{j,j+1,1}^m(\theta, \phi) = i \left(\frac{j}{2j+1} \right)^{1/2} \vec{Y}_{j,j,1}^m(\theta, \phi), \quad (\text{C.9})$$

$$\hat{r} \times \vec{Y}_{j,j,1}^m(\theta, \phi) = i \left(\frac{j}{2j+1} \right)^{1/2} \vec{Y}_{j,j+1,1}^m(\theta, \phi) + i \left(\frac{j+1}{2j+1} \right)^{1/2} \vec{Y}_{j,j-1,1}^m(\theta, \phi), \quad (\text{C.10})$$

$$\hat{r} \times \vec{Y}_{j,j-1,1}^m(\theta, \phi) = i \left(\frac{j+1}{2j+1} \right)^{1/2} \vec{Y}_{j,j,1}^m(\theta, \phi), \quad (\text{C.11})$$

$$\hat{r} \cdot \vec{Y}_{j,j+1,1}^m(\theta, \phi) = - \left(\frac{j+1}{2j+1} \right)^{1/2} Y_j^m(\theta, \phi), \quad (\text{C.12})$$

$$\hat{r} \cdot \vec{Y}_{j,j,1}^m(\theta, \phi) = 0, \quad (\text{C.13})$$

$$\hat{r} \cdot \vec{Y}_{j,j-1,1}^m(\theta, \phi) = \left(\frac{j}{2j+1} \right)^{1/2} Y_j^m(\theta, \phi), \quad (\text{C.14})$$

Para $j = 0$, o único vetor esférico vetorial diferente de zero é $\vec{Y}_{j,j+1,1}^m(\theta, \phi)$.

Por outro lado, são definidos os harmônicos esféricos vetoriais relacionados à polarização linear

$$\vec{Y}_{j,m}^{(e)}(\theta, \phi) = \left(\frac{j+1}{2j+1} \right)^{1/2} \vec{Y}_{j,j-1,1}^m(\theta, \phi) - \left(\frac{j}{2j+1} \right)^{1/2} \vec{Y}_{j,j+1,1}^m(\theta, \phi), \quad (\text{C.15})$$

$$\vec{Y}_{j,m}^{(m)}(\theta, \phi) = \vec{Y}_{j,j,1}^m(\theta, \phi), \quad (\text{C.16})$$

$$\vec{Y}_{j,m}^{(o)}(\theta, \phi) = \left(\frac{j}{2j+1}\right)^{1/2} \vec{Y}_{j,j-1,1}^m(\theta, \phi) + \left(\frac{j+1}{2j+1}\right)^{1/2} \vec{Y}_{j,j+1,1}^m(\theta, \phi), \quad (\text{C.17})$$

onde $\vec{Y}_{j,m}^{(e)}(\theta, \phi)$, $\vec{Y}_{j,m}^{(m)}(\theta, \phi)$, $\vec{Y}_{j,m}^{(o)}(\theta, \phi)$ são os modos elétrico, magnético e longitudinal, correspondentemente.

Apêndice D

Diagonalização para o caso de campo magnético

A equação que obtém-se em (3.55), é

$$\left(\Omega_{KG} - \frac{\hat{S}_z^2}{r^2} \right) \psi - i \frac{2i\partial_\varphi}{r^2} \hat{S}_z \psi = 0, \quad (\text{D.1})$$

onde

$$\Omega_{KG} = \left[\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} + \left(\frac{\partial_\varphi}{r} - i \frac{qBr}{2} \right)^2 + \partial_z^2 + 2ME_{NR} \right]. \quad (\text{D.2})$$

Aplicando a seguinte transformação de similiaridade à equação (D.1), tem-se

$$\Omega_{KG} (D^{-1}\psi) - \frac{1}{r^2} (D^{-1}\hat{S}_z^2 D) (D^{-1}\psi) - \frac{2i\partial_\varphi}{r^2} (D^{-1}\hat{S}_z D) (D^{-1}\psi) = 0, \quad (\text{D.3})$$

onde D é uma matriz construída pelos autovetores do operador \hat{S}_z , dado por

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.4})$$

cuja inversa é

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 & 0 \\ 1/2 & i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.5})$$

a equação (D.3) é reescrita como

$$\left(\Omega_{KG} - \frac{\hat{S}_z^2}{r^2} - i \frac{2i\partial_\varphi}{r^2} \hat{S}_z^{diag} \right) \bar{\psi} = 0, \quad (\text{D.6})$$

onde foi definido

$$\bar{\psi} = D^{-1}\psi, \quad (\text{D.7})$$

com

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}^+ \\ \bar{\psi}^- \\ \bar{\psi}^0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.8})$$

e também

$$\hat{S}_z^{diag} = D^{-1}\hat{S}_z D \quad \text{e} \quad \hat{S}_z^2 = D^{-1}\hat{S}_z^2 D. \quad (\text{D.9})$$

Por outro lado, é possível definir a relação entre ψ e $\bar{\psi}$ dado por

$$\psi^+ = (\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-), \quad (\text{D.10})$$

$$\psi^- = i(\bar{\psi}^+ - \bar{\psi}^-), \quad (\text{D.11})$$

$$\psi^0 = \bar{\psi}^0, \quad (\text{D.12})$$

ou também uma relação entre $\bar{\psi}$ e ψ dado por

$$\bar{\psi}^+ = \frac{\psi^+ - i\psi^-}{2}, \quad (\text{D.13})$$

$$\bar{\psi}^- = \frac{\psi^+ + i\psi^-}{2}, \quad (\text{D.14})$$

$$\bar{\psi}^0 = \psi^0, \tag{D.15}$$

é importante mencionar que as componentes físicas ψ^0 e Φ são iguais, exceto pela constante de normalização.

Apêndice E

Equivalência entre o sistema cilíndrico e retangular

Escrevendo as componentes do espinor para o caso magnético ψ da seguinte maneira

$$\psi = \psi^+ \hat{e}_\rho + \psi^- \hat{e}_\varphi + \psi^0 \hat{e}_z, \quad (\text{E.1})$$

junto com as relações (D.10), (D.11) e (D.12), pode-se expressar as componentes de $\bar{\psi}$ da seguinte maneira

$$\bar{\psi}^\pm = \psi \cdot \frac{(\hat{e}_\rho \mp i\hat{e}_\varphi)}{2}, \quad \bar{\psi}^0 = \psi \cdot \hat{e}_z, \quad (\text{E.2})$$

e assim definir

$$\bar{\psi} \equiv \bar{\psi}^+ \frac{(\hat{e}_\rho + i\hat{e}_\varphi)}{2} + \bar{\psi}^- \frac{(\hat{e}_\rho - i\hat{e}_\varphi)}{2} + \bar{\psi}^0 \hat{e}_z. \quad (\text{E.3})$$

Por outro lado, para poder ter uma equivalência entre o sistema de coordenadas cilíndricas e retangulares, é necessário usar as seguintes relações

$$\frac{\partial}{\partial x}(\hat{e}_r + i\hat{e}_\varphi) = \frac{i \sin \varphi}{r}(\hat{e}_r + i\hat{e}_\varphi), \quad \frac{\partial}{\partial y}(\hat{e}_r + i\hat{e}_\varphi) = -\frac{i \cos \varphi}{r}(\hat{e}_r + i\hat{e}_\varphi), \quad (\text{E.4})$$

e seus respectivas conjugadas complexas.

Tendo definido as relações (E.3) e (E.4), é possível transformar os operadores $\left(\hat{P}_x + \frac{qBy}{2}\right)$ e $\left(\hat{P}_y - \frac{qBx}{2}\right)$ a coordenadas cilíndricas, desta maneira usando a definição de (E.3), tem-se

$$\left(\hat{P}_x + \frac{qBy}{2}\right) \bar{\psi} = \left(-i\partial_x + \frac{qBy}{2}\right) \left[\bar{\psi}^+ \frac{(\hat{e}_\rho + i\hat{e}_\varphi)}{2} + \bar{\psi}^- \frac{(\hat{e}_\rho - i\hat{e}_\varphi)}{2} + \bar{\psi}^0 \hat{e}_z \right], \quad (\text{E.5})$$

$$\left(\hat{P}_y - \frac{qBx}{2}\right) \bar{\psi} = \left(-i\partial_y - \frac{qBx}{2}\right) \left[\bar{\psi}^+ \frac{(\hat{e}_\rho + i\hat{e}_\varphi)}{2} + \bar{\psi}^- \frac{(\hat{e}_\rho - i\hat{e}_\varphi)}{2} + \bar{\psi}^0 \hat{e}_z \right], \quad (\text{E.6})$$

onde foi usado $\hat{P}_x = -i\partial_x$, $\hat{P}_y = -i\partial_y$ e o quadrivetor de potencial vetorial $\vec{A} = \left(-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0\right)$. Assim, calculando (E.5), tem-se

$$\begin{aligned} \left(\hat{P}_x + \frac{qBy}{2}\right) \bar{\psi} = & \left\{ -i \left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \frac{\sin \varphi}{r} + i \frac{qB}{2} r \sin \varphi \right] \psi^+ \right\} \frac{(\hat{e}_\rho + i\hat{e}_\varphi)}{2} \\ & + \left\{ -i \left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - i \frac{\sin \varphi}{r} + i \frac{qB}{2} r \sin \varphi \right] \psi^- \right\} \frac{(\hat{e}_\rho - i\hat{e}_\varphi)}{2} \\ & + \left\{ -i \left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \frac{qB}{2} r \sin \varphi \right] \psi^0 \right\} \hat{e}_z, \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

e calculando (E.6), tem-se

$$\begin{aligned} \left(\hat{P}_y - \frac{qBx}{2}\right) \bar{\psi} = & \left\{ -i \left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - i \frac{\cos \varphi}{r} - i \frac{qB}{2} r \cos \varphi \right] \psi^+ \right\} \frac{(\hat{e}_\rho + i\hat{e}_\varphi)}{2} \\ & + \left\{ -i \left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \frac{\cos \varphi}{r} - i \frac{qB}{2} r \cos \varphi \right] \psi^- \right\} \frac{(\hat{e}_\rho - i\hat{e}_\varphi)}{2} \\ & + \left\{ -i \left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - i \frac{qB}{2} r \cos \varphi \right] \psi^0 \right\} \hat{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Podemos resumir nossos resultados usando a notação que foi usada em (D.8), desta forma é possível expressar (E.7) e (E.8) como

$$\left(\hat{P}_x + \frac{qBy}{2}\right) \bar{\psi} = -i \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \frac{\sin \varphi}{r} \hat{S}_z^{diag} + i \frac{qB}{2} r \sin \varphi \right) \bar{\psi}, \quad (\text{E.9})$$

$$\left(\hat{P}_y - \frac{qBx}{2}\right) \bar{\psi} = -i \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - i \frac{\cos \varphi}{r} \hat{S}_z^{diag} - i \frac{qB}{2} r \cos \varphi \right) \bar{\psi}, \quad (\text{E.10})$$

com

$$\hat{S}_z^{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.11})$$

Deste modo, a equivalência do operador $(\vec{P} - q\vec{A})^2$, atuando no $\bar{\psi}$, com o sistema de coordenadas cilíndricas é dado por

$$\begin{aligned} (\vec{P} - q\vec{A})^2 \bar{\psi} &= \left[\left(\hat{P}_x + \frac{qBy}{2}\right)^2 + \left(\hat{P}_y - \frac{qBx}{2}\right)^2 + P_z^2 \right] \bar{\psi} \\ &= - \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{S}_z^2}{r^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{iqBr}{2} \right)^2 - qB \hat{S}_z^{diag} - \frac{2i}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{S}_z^{diag} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \bar{\psi}, \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

ou também pode-se expressar como

$$\left[(\vec{P} - q\vec{A})^2 - qB \hat{S}_z^{diag} \right] \bar{\psi} = - \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{S}_z^2}{r^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{iqBr}{2} \right)^2 - \frac{2i}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{S}_z^{diag} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \bar{\psi}. \quad (\text{E.13})$$

Apêndice F

Diagonalização para o caso do potencial coulombiano

A equação que obtém-se em (4.127) é

$$\Omega_{KG}\psi = -\frac{2}{r^2}\Lambda_j\psi, \quad (\text{F.1})$$

onde

$$\Omega_{KG} = (M^2 - E^2) - 2\frac{E(Z\alpha)}{r} - \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\gamma^2 - 1/4}{r^2} \right). \quad (\text{F.2})$$

Aplicando a seguinte transformação de similiaridade

$$\Omega_{KG}(O^{-1}\psi) = -\frac{2}{r^2}(O\Lambda_jO^{-1})(O^{-1}\psi), \quad (\text{F.3})$$

onde O é uma matriz formada pelos autovetores do operador Λ_j , dado por

$$O = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_j(Z\alpha)}{(j+1/2-\gamma)} & -\frac{\alpha_j(Z\alpha)}{(j+1/2+\gamma)} & -\frac{\alpha_j(Z\alpha)}{(j+1)} \\ -\frac{\zeta_j(Z\alpha)}{(j+1/2+\gamma)} & -\frac{\zeta_j(Z\alpha)}{(j+1/2-\gamma)} & -\frac{\zeta_j(Z\alpha)}{j} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.4})$$

Definindo

$$\bar{\psi} = O^{-1}\psi, \quad (\text{F.5})$$

e

$$O^{-1}\Lambda_j O = \Lambda_j^{diag}, \quad (\text{F.6})$$

a equação (F.1) é reescrita como

$$\left(\Omega_{KG} + \frac{2}{r^2} \Lambda_j^{diag} \right) \bar{\psi} = 0. \quad (\text{F.7})$$

Também é possível definir a relação entre ψ e $\bar{\psi}$ dado por

$$F_{+1} = -\frac{\alpha_j(Z\alpha)}{(j+1/2-\gamma)} \bar{F}_{+1} - \frac{\alpha_j(Z\alpha)}{(j+1/2+\gamma)} \bar{F}_{-1} - \frac{\alpha_j(Z\alpha)}{(j+1)} \bar{\phi}, \quad (\text{F.8})$$

$$F_{-1} = -\frac{\zeta_j(Z\alpha)}{(j+1/2+\gamma)} \bar{F}_{+1} - \frac{\zeta_j(Z\alpha)}{(j+1/2-\gamma)} \bar{F}_{-1} - \frac{\zeta_j(Z\alpha)}{j} \bar{\phi}, \quad (\text{F.9})$$

$$\phi = \bar{F}_{+1} + \bar{F}_{-1} + \bar{\phi}. \quad (\text{F.10})$$

Apêndice G

Condição de normalização

G.1 Condição de normalização para o campo magnético

Neste apêndice, serão calculadas as constantes de normalização. Para isso, primeiro usaremos a densidade de corrente J^0 , que foi descrito na seção 2.5, desta maneira temos

$$J^0 = \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta^0 \psi, \quad (\text{G.1})$$

considerando o espinor que foi dado na equação (3.24), obtemos

$$J^0 = -\frac{1}{2} (\chi^\dagger \cdot \psi + \psi^\dagger \cdot \chi), \quad (\text{G.2})$$

onde χ representa o conjunto de equações (3.65), (3.66) e (3.67), que neste caso foram escritas em notação vetorial dado pela seguinte expressão:

$$\chi = -\frac{1}{M} (E\psi + i(\vec{\nabla} - iq\vec{A})\Phi), \quad (\text{G.3})$$

portanto, substituindo (G.3) em (G.2), tem-se

$$J^0 = \frac{1}{2M} \left(2E|\psi|^2 - i(\vec{\nabla}\Phi^\dagger) \cdot \psi + i\psi^\dagger \cdot (\nabla\Phi) + \frac{qBr}{2} \Phi^\dagger \psi^- + \frac{qBr}{2} \psi^{-\dagger} \Phi \right). \quad (\text{G.4})$$

Por outro lado, usando a seguinte identidade vetorial:

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi\Phi) = \nabla\Phi \cdot \psi + \Phi\vec{\nabla} \cdot \psi, \quad (\text{G.5})$$

a equação (G.4) pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
 J^0 = & \frac{1}{2M} \left(2E|\psi|^2 + i\Phi^\dagger \vec{\nabla} \cdot \psi - i\Phi \vec{\nabla} \cdot \psi^\dagger \right) - \frac{i}{2M} \left(\vec{\nabla} \cdot (\psi\Phi^\dagger) - \vec{\nabla} \cdot (\psi^\dagger\Phi) \right) \\
 & + \frac{1}{2M} \left(\frac{qBr}{2} \psi^{-\dagger} \Phi + \frac{qBr}{2} \Phi^\dagger \psi^- \right). \tag{G.6}
 \end{aligned}$$

A expressão (G.6) pode ser reescrita de outra maneira, para isto escrevemos a equação subsidiária (3.71) em notação vetorial

$$\vec{\nabla} \cdot \psi = iE\Phi + \frac{iqBr}{2} \psi^-, \tag{G.7}$$

para depois ser substituída na equação (G.6), e assim obter

$$J^0 = \frac{E}{M} \left(|\psi|^2 - |\Phi|^2 \right) - \frac{i}{2M} \left(\vec{\nabla} \cdot (\psi\Phi^\dagger) - \vec{\nabla} \cdot (\psi^\dagger\Phi) \right). \tag{G.8}$$

Seguidamente será calculada a condição de normalização, para isso é integrado a equação (G.8) em todo o volumen, obtendo

$$\int_V J^0 dV = \frac{E}{M} \int_V (|\psi|^2 - |\Phi|^2) dV - \frac{i}{2M} \int_V \left(\vec{\nabla} \cdot (\psi\Phi^\dagger) - \vec{\nabla} \cdot (\psi^\dagger\Phi) \right) dV. \tag{G.9}$$

A expressão obtida na equação (G.9) ainda pode ser reduzida, para isso será mostrado que a integral do lado direito

$$I = \int_V \left(\vec{\nabla} \cdot (\psi\Phi^\dagger) - \vec{\nabla} \cdot (\psi^\dagger\Phi) \right) dV. \tag{G.10}$$

é nula. Para mostrar isso, serão substituídas as componentes físicas (D.10), (D.11) e (D.12) em (G.10), obtendo

$$\begin{aligned}
 \int \vec{\nabla} \cdot (\psi \Phi^\dagger) dV &= \left(\int_{-L}^L dz \right) \left(\int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\varphi \right) \left[\int_0^\infty \partial_r \left(r f_{+1}(r) g^\dagger(r) \right) dr \right] \\
 &+ \left(\int_{-L}^L dz \right) \left(\int_0^{2\pi} e^{-i\varphi} d\varphi \right) \left[\int_0^\infty \partial_r \left(r f_{-1}(r) g^\dagger(r) \right) dr \right] \\
 &+ i \left(\int_{-L}^L dz \right) \left[\int_0^{2\pi} \partial_\varphi (e^{i\varphi}) d\varphi \right] \left(\int_0^\infty r f_{+1}(r) g^\dagger(r) dr \right) \\
 &- i \left(\int_{-L}^L dz \right) \left[\int_0^{2\pi} \partial_\varphi (e^{-i\varphi}) d\varphi \right] \left(\int_0^\infty r f_{-1}(r) g^\dagger(r) dr \right) + 2\pi \int_0^\infty \left[\int_{-L}^L \partial_z \left(f_0(r) g^\dagger(r) \right) dz \right] r dr,
 \end{aligned} \tag{G.11}$$

onde foi usado o operador $\vec{\nabla}$ em coordenadas cilíndricas, e também foi usado as funções $f_{+1}(r)$, $f_{-1}(r)$, $f_0(r)$ e $g(r)$ para representar as partes radiais das componentes ψ^+ , ψ^- , ψ^0 e ϕ .

Logo, como podemos notar, integrando sobre ao angulo φ , os quatro primeiros termos da integral (G.11) são nulos. E derivando em relação a z , o último termo também é nulo. Portanto, é mostrado que

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\psi \Phi^\dagger) dV = 0, \tag{G.12}$$

da mesma maneira também pode-se provar que

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\psi^\dagger \Phi) dV = 0, \tag{G.13}$$

assim, é mostrado que a integral (G.10) é nula, e por consequência a condição de normalização (G.9), pode-se expressar como

$$\int_V J^0 dV = \frac{E}{M} \int (|\psi|^2 - |\Phi|^2) dV. \tag{G.14}$$

Consequentemente, substituindo as componentes (D.10), (D.11) e (D.12) em (G.14), e com ajuda das propriedades de ortonormalidade dos polinômios de Laguerre, tem-se

$$\frac{(2\lambda)M\lambda^{|m|}(n-1)!}{2E(2\pi)(2L)(n-1+|m|)!} = |N^+|^2 \frac{(n+1+|m|)(n+|m|)}{(n+1)n} + |N^-|^2 + \frac{(|N^0|^2 - |C^0|^2)}{2} \frac{(n+|m|)}{n}, \quad (\text{G.15})$$

onde foi considerado $\int_V J^0 dV = +1$. Como é visto na equação (G.15), para obter o valor das constantes de normalização, só é necessário conhecer previamente o valor de apenas três constantes em função de uma. Para obter isso, serão seguidos os seguintes passos

1. Substituindo (D.10), (D.11) e (D.12) em a equação subsidiária (3.71), tem-se

$$iE\Phi = \left\{ \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) - \frac{[(m+1) - \lambda r^2]}{r} \right\} \bar{\psi}^+ + \left\{ \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) + \frac{[(m-1) - \lambda r^2]}{r} \right\} \bar{\psi}^- + ik_z \psi^0, \quad (\text{G.16})$$

em seguida, é substituído as componentes (3.100), (3.101), (3.102) e (3.103) em (G.16). Depois, multiplica-se por sua mesma conjugada complexa. Finalmente, integrando em todo o volumen e usando as propriedades de ortonormalidade dos polinômios de Laguerre, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{E^2(2n+|m|+1)}{4\lambda} |C^0|^2 &= |N^+|^2 \left[(n+1+|m|)^2 + \frac{(n+1 + \frac{|m|-m}{2})^2 (n+1+|m|)}{(n+1)} \right] \\ |N^-|^2 \left[n^2 + \frac{(n + \frac{|m|-m}{2})^2 n}{(n+|m|)} \right] &+ |N^0|^2 \frac{k_z^2 (2n+|m|+1)}{4\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{G.17})$$

2- Substituindo (D.10), (D.11) e (D.12) em a equação (3.61), tem-se

$$\begin{aligned} \left\{ (M^2 - k_z^2) - \left(\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} \right) + \frac{[m - (\lambda r^2)]^2}{r^2} \right\} \Phi &= Ei \left\{ \frac{[(m+1) - (\lambda r^2)]}{r} - \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \right\} \bar{\psi}^+ \\ + EK_z \psi^0 - Ei \left\{ \frac{[(m-1) - (\lambda r^2)]}{r} + \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \right\} \bar{\psi}^-, \end{aligned} \quad (\text{G.18})$$

em seguida, é substituído as componentes (3.100), (3.101), (3.102) e (3.103) em (G.18). Depois, multiplica-se por sua mesma conjugada complexa. Finalmente, integrando em todo o volumen e usando as propriedades de ortonormalidade dos polinômios de Laguerre, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\frac{M^2 - k_z^2}{\lambda} \right) + 2(n+1) \right]^2 \left[(1 + 2n + |m|)^2 + n(n + |m|) + (n+1)(n+1 + |m|) \right] |C^0|^2 \\
 &= \frac{E^2 k_z^2 (2n + |m| + 1)}{\lambda} |N^0|^2 + 4E^2 \left[(n+1 + |m|)^2 + \frac{(n+1 + \frac{|m|-m}{2})^2 (n+1 + |m|)}{(n+1)} \right] |N^+|^2 \\
 &+ 4E^2 \left[n^2 + \frac{(n + \frac{|m|-m}{2})^2 n}{(n + |m|)} \right] |N^-|^2.
 \end{aligned} \tag{G.19}$$

3- Substituindo (D.10), (D.11) e (D.12) em a equação (3.64), tem-se

$$\begin{aligned}
 & \left\{ (M^2 - E^2) - \left(\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} \right) + \frac{[m - (\lambda r^2)]^2}{r^2} \right\} \psi^0 = ik_z \left\{ \frac{[(m+1) - (\lambda r^2)]}{r} - \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \right\} \bar{\psi}^+ \\
 & - EK_z \Phi - ik_z \left\{ \frac{[(m-1) - (\lambda r^2)]}{r} + \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \right\} \bar{\psi}^-,
 \end{aligned} \tag{G.20}$$

em seguida, é substituído as componentes (3.100), (3.101), (3.102) e (3.103) em (G.20). Depois, multiplica-se por sua mesma conjugada complexa. Finalmente, integrando em todo o volumen e usando as propriedades de ortonormalidade dos polinômios de Laguerre, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\frac{M^2 - E^2}{\lambda} \right) + 2(n+1) \right]^2 \left[(1+2n+|m|)^2 + n(n+|m|) + (n+1)(n+1+|m|) \right] |N^0|^2 \\
 &= \frac{E^2 k_z^2 (2n+|m|+1)}{\lambda} |C^0|^2 + 4k_z^2 \left[(n+1+|m|)^2 + \frac{(n+1+\frac{|m|-m}{2})^2 (n+1+|m|)}{(n+1)} \right] |N^+|^2 \\
 &+ 4k_z^2 \left[n^2 + \frac{(n+\frac{|m|-m}{2})^2 n}{(n+|m|)} \right] |N^-|^2.
 \end{aligned} \tag{G.21}$$

4- Substituindo (D.10) e (D.11) em a equação (3.73), tem-se

$$\begin{aligned}
 & \left\{ (M^2 - E^2 - k_z^2) - \left(\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{[(m+1) - (\lambda r^2)]^2}{r^2} - \frac{2[(m+1) + \lambda r^2]}{r^2} \right\} \bar{\psi}^+ \\
 &= - \left\{ (M^2 - E^2 - k_z^2) - \left(\partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{[(m-1) - (\lambda r^2)]^2}{r^2} + \frac{2[(m-1) + \lambda r^2]}{r^2} \right\} \bar{\psi}^-,
 \end{aligned} \tag{G.22}$$

em seguida, é substituído as componentes (3.100) e (3.101) em (G.22). Depois, multiplica-se por sua mesma conjugada complexa. Finalmente, integrando em todo o volume e usando as propriedades de ortonormalidade dos polinômios de Laguerre, obtemos

$$|N^-|^2 = \frac{(n+1+|m|)(n+|m|)\epsilon_1}{n(n+1)\epsilon_2} |N^+|^2, \tag{G.23}$$

onde

$$\delta = (2n+2+|m|-m)^2 - 2(m+|m|+2n+4) + 2a, \tag{G.24}$$

$$a = (n+1)(n+1+|m|) + (n+2)(n+2+|m|), \tag{G.25}$$

$$\omega = (2n+|m|-m)^2 - 2(m+|m|+2n-2) + 2b, \tag{G.26}$$

$$b = n(n+|m|) + (n-1)(n-1+|m|), \tag{G.27}$$

$$y = M^2 - E^2 - k_z^2, \quad (\text{G.28})$$

$$\epsilon_1 = \left\{ \left[\frac{y(3 + 2n + |m|)}{\lambda} + \delta \right]^2 + a \left[\frac{y}{\lambda} + 2(2n + |m| - m) \right]^2 \right\}, \quad (\text{G.29})$$

$$\epsilon_2 = \left\{ \left[\frac{y(2n - 1 + |m|)}{\lambda} + \omega \right]^2 + b \left[\frac{y}{\lambda} + 2(2n + 1 + |m| - m) \right]^2 \right\}. \quad (\text{G.30})$$

5- Já que em (G.23) foi obtido uma relação entre N^+ e N^- , esta será aproveitada para encontrar as constantes N^0 e C^0 em função de N^+ . Assim, usando as equações (G.23), (G.21), (G.19), e (G.17), é possível obter

$$|N^0|^2 = \frac{4k_z^2 \lambda Z_2 Z_3 (n + 1 + |m|)}{(n + 1)(2n + |m| + 1)(E^4 Z_1 - k_z^4 Z_2)} |N^+|^2, \quad (\text{G.31})$$

$$|C^0|^2 = \frac{4E_z^2 \lambda Z_1 Z_3 (n + 1 + |m|)}{(n + 1)(2n + |m| + 1)(E^4 Z_1 - k_z^4 Z_2)} |N^+|^2, \quad (\text{G.32})$$

onde

$$p = (1 + 2n + |m|)^2 + n(n + |m|) + (n + 1)(n + 1 + |m|), \quad (\text{G.33})$$

$$Z1 = \left\{ p \left[\left(\frac{M^2 - E_z^2}{\lambda} \right) + 2(n + 1) \right]^2 + \frac{k_z^4}{\lambda} (2n + 1 + |m|) \right\}, \quad (\text{G.34})$$

$$Z2 = \left\{ p \left[\left(\frac{M^2 - k_z^2}{\lambda} \right) + 2(n + 1) \right]^2 + \frac{E^4}{\lambda} (2n + 1 + |m|) \right\}, \quad (\text{G.35})$$

$$Z3 = \frac{n(n + |m|)\epsilon_1}{\epsilon_2} + \frac{(n + \frac{|m|-m}{2})^2 \epsilon_1}{\epsilon_2} + (n + 1 + |m|)(n + 1) + (n + 1 + |m| - m)^2. \quad (\text{G.36})$$

Desta maneira são obtidas as constantes N^- , N^0 e C^0 em função de N^+ . Seguidamente, é substituído (G.23), (G.31) e (G.32) em (G.15), obtendo

$$|N^+| = \left\{ \frac{M\lambda^{|m|+1}\epsilon_2(2n+|m|+1)(E^4Z_1 - k_z^4Z_2)(n+1)!}{E\xi(2\pi)(2L)(n+1+|m|)!} \right\}^{1/2}, \quad (\text{G.37})$$

onde

$$\xi = (\epsilon_1 + \epsilon_2)(2n + |m| + 1)(E^4Z_1 - k_z^4Z_2) + 2Z_3\epsilon_2\lambda(k_z^2Z_2 - E^2Z_1). \quad (\text{G.38})$$

6- Finalmente é calculado a constante de normalização N^+ . Para encontrar as outras constantes, é substituído (G.37) em (G.32), (G.31) e (G.23), obtendo

$$|N^-| = \left\{ \frac{M\lambda^{|m|+1}(2n+|m|+1)(E^4Z_1 - k_z^4Z_2)(n-1)!\epsilon_1}{E\xi(2\pi)(2L)(n-1+|m|)!} \right\}^{1/2}, \quad (\text{G.39})$$

$$|N^0| = \left\{ \frac{4k_z^2Z_2Z_3M\lambda^{|m|+2}\epsilon_2n!}{E\xi(2\pi)(2L)(n+|m|)!} \right\}^{1/2}, \quad \text{e} \quad |C^0| = \left\{ \frac{4E\lambda Z_1Z_3M\lambda^{|m|+1}\epsilon_2n!}{\xi(2\pi)(2L)(n+|m|)!} \right\}^{1/2}. \quad (\text{G.40})$$

G.2 Condição de normalização para o potencial coulombiano

Neste apêndice, serão calculadas as constantes de normalização. Para isso, primeiro usaremos a densidade de corrente J^0 , que foi descrito na seção 2.5, desta maneira temos

$$J^0 = \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta^0\psi, \quad (\text{G.41})$$

considerando o espinor que foi dado na equação (4.34), obtemos

$$J^0 = \frac{1}{2}\left(\vec{F}^\dagger\vec{G} + \vec{G}^\dagger\vec{F}\Psi\right), \quad (\text{G.42})$$

e substituindo o conjunto de equações representadas pela equação (4.102) em (G.42), tem-se

$$J^0 = \frac{1}{2M} \left[2 \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) |\vec{F}|^2 + \vec{F}^\dagger \cdot \nabla \Phi + \nabla \Phi^\dagger \cdot \vec{F} \right]. \quad (\text{G.43})$$

Neste ponto, é importante mencionar que devido ao fato que o operador paridade comuta com a equação de movimento, o espinor é separado em dois casos diferentes dependendo da paridade correspondente. Por esta razão o procedimento para encontrar as constantes de normalização serão separadas em paridade $(-1)^j$ e paridade $(-1)^{j+1}$.

Paridade $(-1)^j$

Já que para a paridade $(-1)^j$ a componente $F_0 \neq 0$, enquanto as outras componentes F_+ , F_- , ϕ são nulas, o procedimento para obter a condição de normalização é mais simple. Deste modo, é integrado a densidade de corrente (G.43), obtendo

$$\int_V J^0 = \frac{1}{M} \int_V \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) |F_0|^2, \quad (\text{G.44})$$

substituindo a componente F_0 (4.150) em (G.44) e usando as propriedades de ortonormalidade dos polinômios de Laguerre, tem-se

$$N^0 = \left\{ \frac{M(2j+1)n!}{4\pi(n+2\gamma)! [\epsilon(2n+1+2\gamma) + Z\alpha]} \right\}^{1/2}, \quad \epsilon = \frac{E}{2(M^2 - E^2)^{1/2}} \quad (\text{G.45})$$

Paridade $(-1)^{j+1}$

Neste caso, a diferença com a paridade $(-1)^j$, as componentes F^+ , F^- e Φ são diferentes de zero, em consequência a densidade de carga é mais difícil que o caso anterior. Para este caso, será usado a seguinte identidade vetorial:

$$\vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{F}) = \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{F} + \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{F}, \quad (\text{G.46})$$

a equação (G.43) pode ser expressa como

$$J^0 = \frac{1}{2M} \left[2 \left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right) |\vec{F}|^2 - \Phi^\dagger \nabla \cdot \vec{F} - \Phi \nabla \cdot \vec{F}^\dagger + \nabla(\Phi \vec{F}^\dagger) + \nabla(\Phi^\dagger \vec{F}) \right]. \quad (\text{G.47})$$

A expressão (G.47) pode ser reescrita de outra maneira, para isso escrevemos a equação subsidiária para o caso $\Gamma(r) = 0$

$$\left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)\Phi - \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0. \quad (\text{G.48})$$

para depois ser substituída na equação (G.47), e assim obter

$$J^0 = \frac{1}{M} \left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right) \left(|\vec{F}|^2 - |\Phi|^2\right) + \frac{1}{2M} \left[\nabla \left(\Phi \vec{F}^\dagger\right) + \nabla \left(\Phi^\dagger \vec{F}\right)\right]. \quad (\text{G.49})$$

Seguidamente será calculada a condição de normalização, para isso é integrado a equação (G.49) em todo o volumen, obtendo

$$\int_V J^0 dV = \frac{1}{M} \int_V \left(E - \frac{Z\alpha}{r}\right) \left(|\vec{F}|^2 - |\Phi|^2\right) dV + \frac{1}{2M} \int_V \left[\nabla \left(\Phi \vec{F}^\dagger\right) + \nabla \left(\Phi^\dagger \vec{F}\right)\right] dV. \quad (\text{G.50})$$

A expressão obtida na equação (G.50) ainda pode ser reduzida mais, para isso será mostrado que a integral do lado direito

$$I = \frac{1}{2M} \int_V \left[\nabla \left(\Phi^\dagger \vec{F}\right) + \nabla \left(\Phi \vec{F}^\dagger\right)\right] dV \quad (\text{G.51})$$

é nula. Para mostrar isso, serão substituídas as componentes físicas (F.8), (F.9) e (F.10) em (G.51), obtendo

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\Phi^\dagger \vec{F}) dV = B_1 + B_2 + B_3, \quad (\text{G.52})$$

com

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-i\varphi} \left(\sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta \partial_\theta}{r} - \frac{i \partial_\varphi}{r \sin \theta}\right) \left(f_{+1}(r) Y_{j+1}^m(\theta, \varphi) g^\dagger(r) Y_j^{\dagger m}(\theta, \varphi)\right) dr d\Omega, \quad (\text{G.53})$$

$$B_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{i\varphi} \left(\sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta \partial_\theta}{r} + \frac{i \partial_\varphi}{r \sin \theta}\right) \left(f_{-1}(r) Y_{j-1}^m(\theta, \varphi) g^\dagger(r) Y_j^{\dagger m}(\theta, \varphi)\right) dr d\Omega, \quad (\text{G.54})$$

$$B_3 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \right) \left(f_0(r) Y_j^m(\theta, \varphi) g^\dagger(r) Y_j^{\dagger m}(\theta, \varphi) \right) dr d\Omega, \quad (\text{G.55})$$

onde foi usado a definição do operador $\vec{\nabla}$ em base esférica [52]

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} \left(\sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta - \frac{i}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right) A_{+1} + \left(\cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \right) A_0 \\ &- \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \left(\sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta + \frac{i}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right) A_{-1}, \end{aligned} \quad (\text{G.56})$$

e foi usado as funções $f_{+1}(r)$, $f_{-1}(r)$ e $g(r)$ para representar a parte radial de F_{+1} , F_{-1} e Φ .

Agora serão resolvidas as integrais B_1, B_2 e B_3 , desta forma temos

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_0^\infty \partial_r \left(f_{+1}(r) g^\dagger(r) \right) dr \right] \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-i\varphi} \sin \theta Y_{j+1}^m(\theta, \varphi) Y_j^{\dagger m}(\theta, \varphi) d\Omega \right] \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_0^\infty \frac{f_{+1}(r) g^\dagger(r)}{r} dr \right] \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{i\varphi} \cos \theta \partial_\theta \left(Y_{j+1}^m(\theta, \varphi) Y_j^{\dagger m}(\theta, \varphi) \right) d\Omega \right] \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_0^\infty \frac{f_{+1}(r) g^\dagger(r)}{r} dr \right] \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{ie^{i\varphi}}{\sin \theta} \partial_\varphi \left(Y_{j+1}^m(\theta, \varphi) Y_j^{\dagger m}(\theta, \varphi) \right) d\Omega \right], \end{aligned} \quad (\text{G.57})$$

expressando os harmônicos esféricos da seguinte maneira:

$$Y_j^m(\theta, \varphi) \propto e^{im\varphi} P_j^m(\cos \theta), \quad e \quad Y_j^{\dagger m}(\theta, \varphi) \propto e^{-im\varphi} P_j^m(\cos \theta), \quad (\text{G.58})$$

a integral (G.57) é reescrita como

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_0^\infty \partial_r \left(f_{+1}(r) g^\dagger(r) \right) dr \right] \left[\int_0^{2\pi} e^{-i\varphi} d\varphi \right] \left[\int_0^\pi \sin^2 \theta P_{j+1}^m(\cos \theta) P_j^m(\cos \theta) d\theta \right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_0^\infty \frac{f_{+1}(r) g^\dagger(r)}{r} dr \right] \left[\int_0^{2\pi} e^{-i\varphi} d\varphi \right] \left[\int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \partial_\theta \left(P_{j+1}^m(\cos \theta) P_j^m(\cos \theta) \right) d\theta \right] \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_0^\infty \frac{f_{+1}(r) g^\dagger(r)}{r} dr \right] \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\pi ie^{i\varphi} \partial_\varphi \left(P_{j+1}^m(\cos \theta) P_j^m(\cos \theta) \right) d\theta d\varphi \right], \end{aligned} \quad (\text{G.59})$$

asim, integrando a expressão anterior, é mostrado que

$$B_1 = 0. \quad (\text{G.60})$$

A seguinte integral é B_2 , já que devido à semelhança com B_1 , pode-se concluir que

$$B_2 = 0. \quad (\text{G.61})$$

A última integral é B_3 , usando (G.58) em (G.55), tem-se

$$\begin{aligned} B_3 = & 2\pi \left[\int_0^\infty \partial_r \left(f_0(r) g^\dagger(r) \right) dr \right] \left[\int_0^\pi \cos \theta P_j^m(\cos \theta) P_j^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right] \\ & + 4\pi \left[\int_0^\infty \frac{f_0(r) g^\dagger(r)}{r} dr \right] \left[\int_0^\pi \cos \theta P_j^m(\cos \theta) P_j^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right], \end{aligned} \quad (\text{G.62})$$

usando a seguinte relação de recorrência dos polinômios de Legendre:

$$(2j+1) \cos \theta P_j^m(\cos \theta) = (j-m+1) P_{j+1}^m(\cos \theta) + (j+m) P_{j-1}^m(\cos \theta), \quad (\text{G.63})$$

a integral (G.62) é reescrita como

$$\begin{aligned} B_3 = & \frac{2\pi(j-m+1)}{(2j+1)} \left[\int_0^\infty \partial_r \left(f_0(r) g^\dagger(r) \right) dr \right] \left[\int_0^\pi P_{j+1}^m(\cos \theta) P_j^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right] \\ & + \frac{2\pi(j+m)}{(2j+1)} \left[\int_0^\infty \partial_r \left(f_0(r) g^\dagger(r) \right) dr \right] \left[\int_0^\pi P_{j-1}^m(\cos \theta) P_j^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right] \\ & + \frac{4(j-m+1)\pi}{(2j+1)} \left[\int_0^\infty \frac{f_0(r) g^\dagger(r)}{r} dr \right] \left[\int_0^\pi P_{j+1}^m(\cos \theta) P_j^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right] \\ & + \frac{4\pi(j+m)}{(2j+1)} \left[\int_0^\infty \frac{f_0(r) g^\dagger(r)}{r} dr \right] \left[\int_0^\pi P_{j-1}^m(\cos \theta) P_j^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right], \end{aligned} \quad (\text{G.64})$$

e finalmente, usando a relação de ortonormalidade dos polinômios de Legendre, a integral (G.64) resulta

$$B_3 = 0, \quad (\text{G.65})$$

seguidamente, substituindo os resultados obtidos em (G.60), (G.61) e (G.65) em a integral (G.52), é mostrado que

$$\int \vec{\nabla} \cdot (\Phi^\dagger \vec{F}) dV = 0, \quad (\text{G.66})$$

da mesma maneira, pode-se mostrar que

$$\int \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{F}^\dagger) dV = 0, \quad (\text{G.67})$$

e assim poder expressar a condição de normalização como

$$\int J^0 dV = \frac{1}{M} \int \left(E - \frac{Z\alpha}{r} \right) \left(|\vec{F}|^2 - |\Phi|^2 \right) dV. \quad (\text{G.68})$$

Consequentemente, substituindo as componentes (F.8), (F.9) e (F.10) em (G.68), e com ajuda das propriedades de ortonormalidade dos polinômios de Laguerre, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{M(n-1)!}{(4\pi) [\epsilon(2n+2\gamma-1) + (Z\alpha)] (n-1+2\gamma)!} &= \frac{\gamma(2\gamma+1)(n+1+2\gamma)(n+2\gamma)}{(Z\alpha)^2(2j+3)} |N^+|^2 \\ + \frac{\gamma(2\gamma-1)}{(Z\alpha)^2(n+1)n(2j-1)} |N^-|^2 &- \frac{(\gamma^2-1/4)(n+2\gamma)}{j(j+1)(2j+1)n} |C_0|^2, \end{aligned} \quad (\text{G.69})$$

onde foi considerado $\int_V J^0 dV = +1$. Como é visto na equação (G.69), para obter o valor das constantes de normalização, só é necessário conhecer previamente o valor de apenas duas constantes em função de uma. Para obter isso, serão seguidos os seguintes passos

1- Substituindo (F.8), (F.9) e (F.10) em a equação subsidiária (4.122), tem-se

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{2} \bar{\phi} + (\gamma+1/2) \left[\frac{d}{d\rho} + \frac{(\gamma+1/2)}{\rho} - \frac{\lambda}{2(\gamma+1/2)} \right] \bar{F}_{+1} \\ - (\gamma-1/2) \left[\frac{d}{d\rho} - \frac{(\gamma-1/2)}{\rho} + \frac{\lambda}{2(\gamma-1/2)} \right] \bar{F}_{-1} = 0, \end{aligned} \quad (\text{G.70})$$

em seguida, é substituído as componentes (4.153), (4.154) e (4.155) em (G.70). Depois, é integrado em todo o volumen e usando propriedades dos polinômios de Laguerre¹, é obtido

¹Onde foi usado a seguinte propriedade: $\int_0^\infty x^\beta e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) dx = \frac{(\alpha-\beta-1+n)! \beta!}{n! (\alpha-\beta-1)!}$.

$$C^0 = \frac{n}{\lambda} \left(a_1 N^+ + \frac{a_2}{n(n+1)} N^- \right), \quad (\text{G.71})$$

onde

$$a_1 = \frac{(\gamma + 1/2)(3\gamma + 1/2 + 2n)}{(\gamma - 1/2)} - \frac{\lambda(\gamma + 3/2)}{(\gamma - 1/2)}, \quad (\text{G.72})$$

$$a_2 = \frac{(\gamma - 1/2)(\gamma + 1/2 + 2n)}{(\gamma + 1/2)} - \frac{\lambda(\gamma - 3/2)}{(\gamma + 1/2)}. \quad (\text{G.73})$$

2- Substituindo (F.8), (F.9) e (F.10) em a equação (4.124), tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(j + 1/2 - \gamma)} \left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{[(\gamma + 1)^2 - 1/4]}{\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} \right] \bar{F}_{+1} \\ & + \frac{1}{(j + 1/2 + \gamma)} \left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{[(\gamma - 1)^2 - 1/4]}{\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} \right] \bar{F}_{-1} \\ & + \frac{1}{(j + 1)} \left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{(\gamma^2 - 1/4)}{\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} \right] \bar{\phi} = 0, \end{aligned} \quad (\text{G.74})$$

em seguida, é substituído as componentes (4.153), (4.154) e (4.155) em (G.74). Depois, é integrado em todo o volumen e usando propriedades dos polinômios de Laguerre, é obtido

$$C^0 = -n(j + 1) \left[\frac{N^+}{(j + 1/2 - \gamma)} + \frac{N^-}{n(n + 1)(j + 1/2 + \gamma)} \right]. \quad (\text{G.75})$$

3- Substituindo (G.71) em (G.75), tem-se

$$N^- = -n(n + 1)a_3 N^+, \quad (\text{G.76})$$

onde

$$a_3 = \frac{a_1(Z\alpha)^2 + \lambda(j + 1)(j + 1/2 + \gamma)}{a_2(Z\alpha)^2 + \lambda(j + 1)(j + 1/2 - \gamma)}. \quad (\text{G.77})$$

4- Substituindo (G.76) em (G.75), tem-se

$$C^0 = \frac{n(j + 1)a_4}{(Z\alpha)^2} N^+, \quad (\text{G.78})$$

onde

$$a_4 = (j + 1/2)(a_3 - 1) - \gamma(a_3 + 1). \quad (\text{G.79})$$

Desta maneira são obtidas as constantes N^- e C^0 em função de N^+ . Seguidamente, é substituído (G.76) e (G.78) em (G.69)

$$|N^+| = \left\{ \frac{M(n-1)!(Z\alpha)^2}{(4\pi)\delta [\epsilon(2n+2\gamma-1) + (Z\alpha)] (n-1+2\gamma)!} \right\}^{1/2}, \quad (\text{G.80})$$

onde

$$\delta = \frac{\gamma(2\gamma+1)(n+1+2\gamma)(n+2\gamma)}{(2j+3)} + \frac{\gamma(2\gamma-1)n(n+1)(a_3)^2}{(2j-1)} - \frac{(\gamma^2-1/4)(n+2\gamma)n(j+1)(a_4)^2}{j(2j+1)(Z\alpha)^2}. \quad (\text{G.81})$$

5- Finalmente, é calculado a constante de normalização N^+ . Para encontrar as outras constantes é substituído (G.81) em (G.76) e (G.78), obtendo

$$|N^-| = \left\{ \frac{M(n-1)!(Z\alpha)^2 n^2 (n+1)^2 (a_3)^2}{(4\pi)\delta [\epsilon(2n+2\gamma-1) + (Z\alpha)] (n-1+2\gamma)!} \right\}^{1/2}, \quad (\text{G.82})$$

e

$$|C^0| = \left\{ \frac{M(n-1)! n^2 (j+1)^2 (a_4)^2}{(4\pi)(Z\alpha)^2 \delta [\epsilon(2n+2\gamma-1) + (Z\alpha)] (n-1+2\gamma)!} \right\}^{1/2}. \quad (\text{G.83})$$

Bibliografia

- [1] L. de Broglie. Comptes rendus de l'académie des sciences. 199, 1934.
- [2] G. Petiau. Contribution à la théorie des équations d'ondes corpusculaires. *Académie Royale de Belgique*, 16, 1936.
- [3] N. Kemmer. Quantum theory of Einstein-Bose particles and nuclear interaction. *imperial College of Science and Technology*, 166, 1938.
- [4] R. J. Duffin. On the characteristic matrices of covariant systems. *Physical Review*, 54, 1938.
- [5] A. Boumali. Particule de spin-1 dans un potentiel d'Aharonov-Bohm. *Canadian Journal of Physics*, 85, 2007.
- [6] A. Boumali, L. Chetouani, and H. Hassanabadi. Two-dimensional Duffin-Kemmer-Petiau oscillator under an external magnetic field. *Canadian Journal of Physics*, 91, 2013.
- [7] A. Boumali and N. Messai. Exact solutions of a two-dimensional Duffin-Kemmer-Petiau oscillator subject to a Coulomb potential in the gravitational field of cosmic string. *Canadian Journal of Physics*, 95, 2017.
- [8] H. Hassanabadi, Z. Molaei, and S. Zarrinkamar. DKP oscillator in the presence of magnetic field in (1+2)-dimensions for spin-zero and spin-one particles in noncommutative phase space. *The European Physical Journal C*, 72, 2012.
- [9] H. Hassanabadi, Z. Molaei, M. Ghominejad, and S. Zarrinkamar. Spin-one DKP equation in the presence of Coulomb and harmonic oscillator interactions in (1+3)-dimension. *Advances in High Energy Physics*, 2012, 2012.

- [10] Shu-Rui Wu et al. Effects of generalized uncertainty principle on the two-dimensional DKP oscillator. *The European Physical Journal Plus*, 132, 2017.
- [11] Bing-Qian Wang et al. Solution of the spin-one DKP oscillator under an external magnetic field in noncommutative space with minimal length. *Chinese Physics B*, 27, 2018.
- [12] M. Abreu, S. Santos, and M. Vianna. Duffin–Kemmer–Petiau theory with minimal and non-minimal couplings. *Journal Physics A*, 43, 2010.
- [13] T. Lunardi, B. M. Pimentel, G. Teixeira, and S. Valverde. Remarks on Duffin–Kemmer–Petiau theory and gauge invariance. *Journal Physics Letters A*, 268, 2000.
- [14] T. R. Cardoso and B. M. Pimentel. The theory of Duffin–Kemmer–Petiau. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 38, 2016.
- [15] N. Kemmer. The particle aspect of meson theory. *imperial College of Science and Technology*, 173, 1939.
- [16] L. B. Castro and A. S. de Castro. Corroborating the equivalence between the Duffin–Kemmer–Petiau and the Klein–Gordon and Proca equations. *Physical Review A*, 90, 2014.
- [17] Y. Nedjadi and C. Barrett. Solution of the central field problem for a Duffin–Kemmer–Petiau vector boson. *Journal of Mathematical Physics*, 35, 1994.
- [18] H. Umezawa. Quantum field theory. *North-Holland*, 1956.
- [19] T. R. Cardoso, L. B. Castro, and A. S. de Castro. On the nonminimal vector coupling in the Duffin–Kemmer–Petiau theory and the confinement of massive bosons by a linear potential. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43, 2010.
- [20] R. F. Guertin and T. L. Wilson. Noncausal propagation in spin 0 theories with external field interactions. *Physical Review D*, 15, 1977.
- [21] Vijayalakshmi et al. Consistency of spin-1 theories in external electromagnetic fields. *Journal of Physics A*, 12, 1979.
- [22] A. Einstein and W. J. de Haas. Experimenteller nachweis der ampereschen molekularströme. *Deutsche Physikalische Gesellschaft*, 17, 1915.

- [23] A. Einstein and W. J. de Haas. Proof of the existence of Ampère's molecular currents. *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 18, 1915.
- [24] W. Rarita and J. Schwinger. On a theory of particles with half-integral spin. *Physical Review*, 60, 1941.
- [25] F. J. Belifante. Intrinsic magnetic moment of elementary particles of spin $3/2$. *Physical Review*, 92, 1953.
- [26] S. Weinberg. Dynamic and algebraic symmetries. *Brandeis Lectures vol 1*, 1, 1970.
- [27] S. Ferrara, M. Porrati, and V. L. Telegdi. $g=2$ as the natural value of the tree-level gyromagnetic ratio of elementary particles. *Physical Review D*, 46, 1992.
- [28] R. Mallick et al. On the possibility of rho-meson condensation in neutron stars. *Royal Astronomical Society*, 449, 2015.
- [29] K. Fukushima et al. Chiral magnetic effect. *Physical Review D*, 78, 2008.
- [30] E. Kharzeev and T. Son. Testing the chiral magnetic and chiral vortical effects in heavy ion collisions. *Physical Review Letters*, 106, 2011.
- [31] S. Bali et al. QCD quark condensate in external magnetic fields. *Physical Review D*, 86, 2012.
- [32] O. Hidaka and A. Yamamoto. Charged vector mesons in a strong magnetic field. *Physical Review D*, 87, 2013.
- [33] Hao Liu, Lang Yu, and Mei Huang. Charged and neutral vectormesons in a magnetic field. *Physical Review D*, 91, 2015.
- [34] V. Skokov et al. Estimate of the magnetic field strength in heavy-ion collisions. *International Journal of Modern Physics A*, 24, 2009.
- [35] H. C. Corben and J. Schwinger. The electromagnetic properties of mesotrons. *Physical Review*, 58, 1940.
- [36] J. Daicic and N. E. Frankel. Relativistic spin-1 bosons in a magnetic field. *Journal of Physics A*, 26, 1993.
- [37] M. Abramowitz and I. A. Stegun. Handbook Of Mathematical Functions (without numerical tables). 1972.

- [38] P. Gubler et. al. D mesons in a magnetic field. *Journal Physics Letters D*, 93, 2016.
- [39] W. Greiner and J. Reinhardt. Field quantization. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, pages 164–166, 1996.
- [40] R. G. Newton. Scattering theory of waves and particles. *Springer Science and Business Media International*, 1982.
- [41] L. B. Castro and A. S. de Castro. Spinless bosons embedded in a vector Duffin–Kemmer–Petiau oscillator. *Physics Letters A*, 375, 2011.
- [42] M. R. Slot, T. S. Gardenier, P. H. Jacobse, G. C. P. van Miert, S. N. Kempkes, S. J. M. Zevenhuizen, C. M. Smith, D. Vanmaekelbergh, and I. Swart. Experimental realization and characterization of an electronic Lieb lattice. *Nature Physics*, 13, 2017.
- [43] M. Kuchiev and V. V. Flambaum. Coulomb problem for vector bosons. *Physical Review D*, 73, 2006.
- [44] S. C. Ulhoa. O teleparalelismo equivalente ‘a relatividade geral e o momento angular gravitacional. *Physicae, [S.l.]*, 2009.
- [45] L. B. Castro. Noninertial effects on the quantum dynamics of scalar bosons. *The European Physical Journal C*, 61, 2016.
- [46] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, and R.G. Teixeira. Interacting spin 0 fields with torsion via Duffin-Kemmer-Petiau theory. *General Relativity and Gravitation*, 34, 2002.
- [47] L. B. Castro. Quantum dynamics of scalar bosons in a cosmic string background. *The European Physical Journal C*, 75, 2015.
- [48] R. Casana, J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, and R. G. Teixeira. Spin 1 fields in Riemann-Cartan space-times via Duffin-Kemmer-Petiau theory. *General Relativity and Gravitation*, 34, 2002.
- [49] E. L. Hill. The theory of vector spherical harmonics. *American Journal of Physics*, 22, 1953.
- [50] R. G. Barrera, G. A. Estévez, and J. Giraldo. Vector spherical harmonics and their application to magnetostatics. *European Journal of Physics*, 12, 1985.

- [51] D. J. Ivers and C. G. Phillips. Scalar and vector spherical harmonic spectral equations of rotating non-linear and linearised magnetohydrodynamics. *Geophysical Journal International*, 175, 2008.
- [52] D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, V. K., and Khersonskii. Quantum theory of angular momentum. 1988.