

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Formas normales y estabilidad de soluciones de equilibrio
en sistemas Hamiltonianos con parte lineal no
diagonalizable

*Tesis presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención
Matemática Aplicada, o Mención Estadística del Departamento de
Estadística y Departamento de Matemática de la Universidad del
Bío-Bío, como parte de los requisitos para la obtención del grado de
Magíster en Matemática con Mención en Matemática Aplicada.*

Díver Elías Espejo Rimapa

Profesor Director Claudio Vidal
Profesor Co-Director Francisco Crespo

Concepción, 2018.

Formas normales y estabilidad de soluciones de equilibrio en sistemas Hamiltonianos con parte lineal no diagonalizable

por

Dílder Elías Espejo Rimapa

Disertación presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención Matemática Aplicada, o Mención Estadística del Departamento de Estadística y Departamento de Matemática de la Universidad del Bío Bío, como requisito parcial para la obtención del Grado de Magíster en Matemática con Mención en Matemática Aplicada.

Aprobada por:



Dr. Claudio Vidal Díaz
Profesor Guía
DMAT-Univ. del Bío-Bío, Chile



Dr. Francisco Crespo Cutillas
Profesor Co-Guía
DMAT-Univ. del Bío-Bío, Chile

Antonio Carlos Fernandes

Profesor Informante

Departamento de Matemática y Computación - Univ. Federal de Itajubá, Brasil



Dante Carrasco Olivera

Profesor Informante

DMAT-Univ. del Bío-Bío, Chile

Universidad del Bío Bío

Facultad de Ciencias Departamento de Estadística y Departamento de Matemática Programa de Magíster en Matemática, Mención Matemática Aplicada, o Mención Estadística

Dedicatoria

- *A mis queridos padres y a mis hermanos, por su esfuerzo, comprensión, sacrificio y ese apoyo incondicional que me brindan día tras día, en su afán de convertirme en un profesional de éxito, basado en valores humanos.*
- *A mi asesor Claudio Vidal por su paciencia, por sus sabios consejos y atinadas sugerencias en el desarrollo de esta tesis. A mi co-asesor Francisco Crespo, por su apoyo constante. Ustedes han sido quienes me han guiado en este complicado proceso. Es cierto, no ha sido nada fácil, sin embargo gracias a su ayuda, ha sido posible alcanzar los objetivos de este proyecto. El resultado de mi tesis ha sido espectacular, mejor de lo que esperaba y una gran parte del desarrollo de ese excelente trabajo se lo debo a ustedes. Que Dios los bendiga.*
- *A la secretaria de la unidad de postgrado, me refiero a la Sra. Marcia Arriagada, por su amabilidad, carisma y apoyo permanente con los trámites de mis documentos.*
- *A mis compañeros, por una buena convivencia y un gran compañerismo durante estos dos años de sacrificio y esfuerzo, pues así logramos sumar mejores resultados en nuestra formación académica.*
- *A toda mi familia y amigos, por su acogida y sus lecciones de vida, que sirvieron de mucho en mi desarrollo profesional.*

AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos:

- *A Dios por permitirme gozar de la vida y salud, así pues se hizo realidad la presente tesis.*
- *A los docentes del Departamento de Matemáticas, quienes se preocuparon por la formación de nuestro conocimiento y pensamiento matemático.*
- *A mis padres que se encargaron de hacerme crecer fuerte en salud y con espíritu triunfador. Asimismo por su sacrificio, esfuerzo y apoyo que me brindan cada día.*
- *Y a todas aquellas personas que de una u otra manera contribuyeron en la formulación de este proyecto.*

RESUMEN

En esta tesis estudiamos las formas normales y estabilidad de soluciones de equilibrio de un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad cuando la matriz asociada a la parte lineal no es diagonalizable. Presentamos resultados de estabilidad e inestabilidad, los cuales son obtenidos vía el método de Liapunov, siendo previamente utilizado el proceso de normalización no lineal de Gustavson y/o el método de Lie o Deprit. Además, los resultados obtenidos en el caso dos grados de libertad son extendidos al caso tres grados de libertad en algunas situaciones.

Como aplicación, en el caso dos grados de libertad estudiamos el problema restringido circular de tres cuerpos y el problema lunar de Hill, ambos en el caso planar. Como aplicación en el caso tres grados de libertad estudiamos el problema del satélite y el problema restringido circular de tres cuerpos, ambos en el caso espacial.

ABSTRACT

In this thesis we study the normal forms and stability of equilibria solutions (the origin) of a Hamiltonian system with two degrees of freedom when the matrix associated with the linear part is not diagonalizable. We present results stability and instability, which are obtained by the Liapunov method, previously used the Gustavson's and/or Lie's process of normalization nonlinear. Additionally, the results obtained in the case two degrees of freedom are extended to the case three degrees of freedom in some situations.

As an application, in the case of two degrees of freedom we study the restricted three-body problem and the lunar problem, both in the planar case, and as an application in the case three degrees of freedom we study the problem of the satellite and the restricted problem of three bodies spatial case, both in the spatial case.

Índice general

1. Introducción	11
2. Preliminares	13
2.1. Funciones elípticas	13
2.2. Sistemas Hamiltonianos	16
2.2.1. Sistemas Hamiltonianos lineales autónomos	16
2.2.2. Ecuaciones variacionales	18
2.2.3. Funciones generadoras	18
2.3. Espacios simplécticos y caracterización de las matrices simplécticas	19
2.3.1. Espacios simplécticos	20
2.3.2. Caracterización de las matrices simplécticas	21
2.4. Forma normal para un Hamiltonianos con un grado de libertad	22
2.5. Forma normal para un Hamiltoniano con dos grados de libertad caso raíces simples e imaginarias puras	26
2.6. Forma normal en el caso de autovalores imaginários puros debida a N. Burgoyne y R. Cushman [2]	29
2.7. Forma normal para un Hamiltoniano con un grado de libertad hasta términos de quinto orden cuando la parte cuadrática es nula [11]	35
2.8. La forma normal de Lie o método de Deprit-Hori	39
2.9. Cambio de coordenadas simplécticas próxima de la identidad	39

2.10. Algoritmo	40
2.11. Forma normal en un equilibrio	46
2.12. Caso donde la parte lineal es semisimple	47
2.13. El caso general de una matriz Hamiltoniana	47
2.14. Teorema de la Curva Invariante de Moser	50
2.15. Estabilidad de soluciones de equilibrio para sistemas Hamiltonianos con un grado de libertad	51
2.16. Estabilidad de soluciones de equilibrio en sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad, en el caso autónomo	55
3. Formas normales para Hamiltonianos con dos grados de libertad	63
3.1. Análisis del caso donde todas las frecuencias son nulas y la matriz A no es diagonalizable	64
3.2. Análisis del caso donde una frecuencia es nula, una no nula y la matriz A no es diagonalizable	74
3.3. Análisis del caso donde las frecuencias son no nulas, iguales y la matriz A no es diagonalizable	79
3.4. Análisis del caso donde las frecuencias son no nulas, iguales y la matriz A no es diagonalizable debido a N. Burgoyne y R. Cushman para dos grados de libertad	84
3.5. Aplicaciones	93
3.5.1. Aplicación para el caso donde las frecuencias son todas nulas y $rg(S) = 2$	93
3.5.2. Aplicación al problema lunar de Hill en \mathbb{R}^2	95
3.5.3. Aplicación al problema planar restringido circular de tres cuerpos . . .	97
4. Formas normales para sistema Hamiltonianos no lineales	103
4.1. Forma normal para un Hamiltoniano con dos grados de libertad hasta términos de quinto orden cuando la parte cuadrática es nula	103

4.2.	Forma normal hasta cuarto orden para un Hamiltoniano con dos grados de libertad cuando la parte cuadrática no es diagonalizable	107
4.3.	Forma normal de un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad con parte lineal no diagonalizable vía el método de Lie	121
4.3.1.	Normalización de los términos de orden tres en caso donde todas las frecuencias son nulas y $\text{rg}(S)=1$	122
4.3.2.	Normalización del caso donde una frecuencia es nula	123
4.3.3.	Normalización del caso donde las frecuencias son no nulas e iguales	125
5.	Estabilidad de soluciones de equilibrio de un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad con parte lineal no diagonalizable	135
5.1.	Análisis del caso donde una frecuencia es nula	136
5.2.	Cuando las frecuencias del sistema lineal son no nulas e iguales	140
5.3.	Estabilidad de un sistema Hamiltoniano caso límite	142
5.4.	Aplicaciones	149
5.4.1.	Aplicación al problema restringido circular de los tres cuerpos	150
6.	Formas normales para sistemas Hamiltonianos con tres grados de libertad cuando la parte lineal es no diagonalizable	151
6.1.	Análisis del caso donde todas las frecuencias son nulas y la matriz no es diagonalizable	152
6.2.	Análisis del caso donde dos frecuencias son nulas, una no nula y la matriz A no es diagonalizable	177
6.3.	Análisis del caso donde una frecuencia es nula, dos no nulas y la matriz A no es diagonalizable	183
6.4.	Análisis del caso donde las frecuencias son no nulas y la matriz A no es diagonalizable	190
6.5.	Aplicaciones	192
6.5.1.	Aplicación al problema del satélite caso espacial	192

6.5.2. Aplicación al problema restringido circular de los tres cuerpos caso espacial	199
7. Estabilidad de un sistema Hamiltoniano con tres grados de libertad cuando una de las frecuencias es nula	203
7.1. Formulación del problema	203
7.2. Forma normal de la parte cuadrática	204
7.3. Forma normal de Lie de los términos de orden superior	205
7.4. Resultado principal	210
Bibliografía	211

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo de tesis tiene como objetivo estudiar nociones importantes de los sistemas dinámicos Hamiltonianos, éstos son una clase muy importante de ecuaciones diferenciales ordinarias, debido a que presenta aspectos puramente matemáticos y una diversidad de aplicaciones a problemas matemáticos, físicos, mecánicos, biológicos, químicos, etc. Estos problemas pueden ser modelados por medio de un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, por tal motivo el estudio de los sistemas dinámicos Hamiltonianos es una área muy importante de la investigación en la Matemática. El principal objetivo es estudiar la estabilidad en el sentido de Lyapunov de una solución de equilibrio de un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad, cuando la parte lineal no es diagonalizable.

En el Capítulo 2, se introducen las nociones esenciales y pertinentes para una buena comprensión de esta tesis, es decir, describiremos las definiciones básicas y enunciaremos varios resultados estándar que serán utilizados para los estudios que se realizarán en los próximos capítulos. Los temas considerados están ligados a la teoría de Sistemas Hamiltonianos y a la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

En el Capítulo 3, estudiamos la forma normal de la parte cuadrática de un Hamiltoniano con dos grados de libertad, cuando la parte lineal no es diagonalizable. El análisis que realizamos es de acuerdo a la naturaleza de los valores propios y corresponde a los siguientes casos: análisis donde todas las frecuencias son nulas, es decir, $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Aquí, la forma normal depende del rango de la matriz asociada al sistema linealizado y fue estudiado por Sokol'skii en [20], pero en los casos rango uno y dos presentamos algoritmos generales ya que los algoritmos que proporciona Sokol'skii son más particulares. El segundo caso es cuando una frecuencia es nula y una no nula, esto es, $\omega_1 = 0, \omega_2 \neq 0$. Finalmente nuestro análisis es cuando las frecuencias son no nulas e iguales, es decir, $\omega_1 = \omega_2 = \omega \neq 0$. En este último

caso, hacemos un análisis en dos versiones, debido a Markeev y a N. Burgoyne y R. Cushman para dos grados de libertad. Como aplicaciones, estudiamos el problema lunar de Hill y el problema restringido circular de tres cuerpos, ambos en el caso planar.

El Capítulo 4 está dedicado al estudio de los sistemas Hamiltonianos autónomos no lineales, en particular, describiremos la forma normal para un Hamiltoniano con dos grados de libertad hasta términos de quinto orden cuando la parte cuadrática es nula, este caso es uno de nuestros resultados originales ya que aún no ha sido estudiado anteriormente. Luego, calculamos la forma normal hasta cuarto orden para un Hamiltoniano con dos grados de libertad cuando la parte cuadrática no es diagonalizable, para este fin, usamos el método de Gustavson y el método de Lie o Deprit - Hori, siguiendo [13].

En el Capítulo 5 nos concentramos en el estudio de la estabilidad de una solución de equilibrio en el sentido de Lyapunov para los sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad. La estabilidad de equilibrio será estudiada a partir de los coeficientes de la función Hamiltoniana.

En el Capítulo 6, extenderemos los resultados obtenidos en el Capítulo 2 al caso $n = 3$ en algunas situaciones, es decir, estudiamos la forma normal de la parte cuadrática de un Hamiltoniano con tres grados de libertad cuando la parte lineal no es diagonalizable. El análisis que realizamos es de acuerdo a la naturaleza de los valores propios y corresponde a los siguientes casos: análisis donde todas las frecuencias son nulas, es decir, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$. Este caso, fue estudiado por Was en [23] cuando el rango de la matriz del sistema linealizado es cuatro y cinco. En el caso rango cuatro, presentamos un algoritmo más general y los resultados obtenidos para los casos rango uno, dos y tres son originales. Debido a que en la literatura no hay evidencias de formas normales para sistemas Hamiltonianos con tres grados de libertad cuando la matriz asociada al sistema linealizado no es diagonalizable, todos los resultados que presentamos en lo que sigue son originales; cuando dos frecuencia son nulas, esto es, $\omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 \neq 0$; luego, cuando una frecuencia es nula, esto es, $\omega_1 = 0, \omega_2 = \omega_3 \neq 0$ (o $\omega_2 \neq \omega_3 \neq 0$). Finalmente analizamos el caso cuando las frecuencias son no nulas, es decir, $\omega_1 \neq \omega, \omega_2 = \omega_3 = \omega$ con $\omega_1 \neq \omega$. Aquí, como aplicaciones de algunos de nuestros resultados obtenidos, estudiamos el problema del satélite y el problema restringido circular de los tres cuerpos, ambos en el caso espacial.

En el Capítulo 7, presentamos el resultado principal, aquí, estudiamos la estabilidad formal sobre un nivel de energía fijo, de un Hamiltoniano con tres grados de libertad cuando los valores propios son de la forma: $0, \pm\omega_1, \pm\omega_2$ con $\omega_1 \neq \omega_2 \neq 0$. Este resultado es original, debido a que no ha sido estudiado anteriormente.

Capítulo 2

Preliminares

El objetivo en este capítulo es distinguir algunos resultados básicos y esenciales que permiten facilitar al lector la comprensión del presente trabajo, cuya finalidad es fundamentar de manera teórica los resultados obtenidos. Comenzamos describiendo las definiciones y propiedades básicas de funciones elípticas, luego iniciamos el estudio de sistemas Hamiltonianos, posteriormente introducimos las nociones importantes de los espacios simplécticos y caracterización de las matrices simplécticas. Además, obtenemos la forma normal de la parte cuadrática de un Hamiltoniano con un grado de libertad cuando la matriz es o no diagonalizable, la forma normal de un Hamiltoniano con dos grados de libertad cuando la matriz asociada a la parte lineal es diagonalizable y estudiamos la forma normal en el caso de valores propios imaginarios puros debido a N. Burgoyne y R. Cushman [2] en su versión general. Luego, describimos la forma normal de acuerdo a Gustavson para un Hamiltoniano con un de libertad hasta términos de quinto orden cuando la parte cuadrática es nula, posteriormente describimos el algoritmo de Lie [13] que nos permite normalizar Hamiltonianos no lineales. Finalmente describimos y distinguimos los principales resultados de estabilidad e inestabilidad de soluciones de equilibrio de un sistema Hamiltoniano con uno y dos grados de libertad en el caso autónomo.

2.1. Funciones elípticas

A continuación introducimos algunas definiciones y propiedades importantes de funciones elíptica, las cuales son de gran importancia en nuestro análisis de la estabilidad e inestabilidad que realizaremos más adelante.

Sea \mathbb{C} , el conjunto de los números complejos.

Definición 1 Una función $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es doblemente periódica, con periodo η y $\bar{\eta}$ (con $\eta, \bar{\eta} \in \mathbb{C}$ y parte imaginaria definida positiva), si

$$F(z + m\eta + n\bar{\eta}) = F(z), \quad (2.1)$$

con $m, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ y $\forall z \in \mathbb{C}$.

Las funciones elípticas son funciones doblemente periódicas y se definen como soluciones, $y(x, \bar{a})$, de las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a_4y^4 + a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0, \quad (2.2)$$

donde $\bar{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$. Notemos que la solución de (2.2) es

$$y(x, \bar{a}) = x_0 \pm \int_{y_0(\bar{a})}^y \frac{ds}{\sqrt{a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}}, \quad (2.3)$$

con condición inicial $x(y_0, \bar{a}) = x_0$.

Las funciones elípticas de *Jacobi* son aquellas en que el polinomio de cuarto grado en (2.2), es de la forma

$$(1 - y^2)(1 - m^2y^2), \quad (2.4)$$

con m una constante positiva.

Las funciones de Weierstrass son aquellas en que el polinomio en (2.2) es de tercer grado ($a_4 = a_2 = 0$) de la forma

$$4y^3 - g_1y - g_2,$$

con g_1, g_2 constantes reales.

La función elíptica de Jacobi $y(z) = sn(z, m)$ está definida en términos de la inversa de la integral

$$z = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2(\theta)}} = \int_0^{\sin(\varphi)} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - m^2y^2)}} \equiv sn^{-1}(\varphi, m), \quad (2.5)$$

$m > 0, 0 \leq \varphi \leq 2\phi$.

Esta notación se introduce puesto que

$$\lim_{m \rightarrow 0} sn(z, m) = \sin(z),$$

y su desarrollo en serie de Taylor en torno de $z = 0$, es dado por,

$$sn(z, m) = z + \left(-\frac{m}{6}\right) + \frac{1}{120}(1 + 14m + m^2)z^5 + \frac{(-1 - 135m - 135m^2 - m^3)}{5040}z^7 + \mathcal{O}(z)^8.$$

Así como sn es la generalización de la función seno para oscilaciones finitas, se puede definir algo que sea generalización de la función coseno

$$cn^2(z, m) = 1 - sn^2(z, m), \quad (2.6)$$

y para cualquier m

$$dn^2(z, m) = 1 - m^2 sn^2(z, m) \quad (2.7)$$

Estas tres funciones $sn(z, m)$, $cn(z, m)$, $dn(z, m)$; son denominadas funciones elípticas de Jacobi.

La función $sn(z, m)$ tiene un período puramente real $4K$, donde

$$K \equiv \text{cuarto de período} \equiv K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 - m^2 \sin^2(\theta)}. \quad (2.8)$$

Además, tiene un período puramente imaginario $4i\bar{K}$, donde

$$i\bar{K} \equiv iK(m) = i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 - \bar{m}^2 \sin^2(\theta)}, \quad (2.9)$$

con $\bar{m}^2 = 1 - m^2 \equiv$ módulo complementario.

Las funciones elípticas de Jacobi adicionales $sn(z, m)$ y $dn(z, m)$ como

$$z = \int_{cn(z, m)}^1 \frac{dy}{(1 - y^2)(\bar{m}^2 + m^2 y^2)} = \int_{dn(z, m)}^1 \frac{dy}{(1 - y^2)(y^2 - \bar{m}^2)}, \quad (2.10)$$

tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} cn(z) &\equiv cn(z, m) \equiv \cos(\varphi), \\ dn(z) &\equiv dn(z, m) \equiv \sqrt{1 - m^2 \sin^2(\varphi)}, \\ sn^2(z) + cn^2(z) &= dn^2(z) + m^2 sn^2(z) = 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Otras propiedades

$$\begin{aligned} sn(z, 0) &= \sin(z), & sn(z, 1) &= \tanh(z), \\ cn(z, 0) &= \cos(z), & cn(z, 1) &= \text{sech}(z), \\ dn(z, 0) &= 1, & dn(z, 1) &= \text{sech}(z). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sus derivadas satisfacen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} sn(z, m) &= cn(z, m) dn(z, m), \\ \frac{d}{dz} cn(z, m) &= -sn(z, m) dn(z, m), \\ \frac{d}{dz} dn(z, m) &= -cn(z, m) sn(z, m). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para mayor información respecto a los conceptos y propiedades de las funciones elípticas consultar [16].

2.2. Sistemas Hamiltonianos

En esta sección estudiamos las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que admiten una forma particular, pero muy importante debido a su gran interés en la formulación de muchos problemas, los cuales son denominados *Sistemas Hamiltonianos*.

Un sistema Hamiltoniano en \mathbb{R}^{2n} , $n \in \mathbb{N}$ es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p), \quad (2.14)$$

donde la función $H = H(q, p)$ es la función Hamiltoniana diferenciable a valores reales definida para $(q, p) \in W$, donde W es un abierto en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Las variables q y p son llamadas conjugadas y el entero n es el número de grados de libertad del sistema (2.14) en el caso autónomo.

Supongamos que el origen corresponde a una solución de equilibrio del sistema (2.14), luego escribimos H en serie de Taylor en una vecindad del origen de tal forma que

$$H = H_2(q, p) + H_3(q, p) + \cdots + H_m(q, p) + \cdots, \quad (2.15)$$

con H_m polinomio homogéneo de grado m , cuya expresión en las coordenadas (q, p) es dada por

$$H_m = \sum_{k_1 + \cdots + k_n + l_1 + \cdots + l_n = m} h_{k_1 \cdots k_n l_1 \cdots l_n} q_1^{k_1} \cdots q_n^{k_n} p_1^{l_1} \cdots p_n^{l_n}, \quad (2.16)$$

aquí, $h_{k_1 \cdots k_n l_1 \cdots l_n}$ representa los coeficientes del monomio $q_1^{k_1} \cdots q_n^{k_n} p_1^{l_1} \cdots p_n^{l_n}$.

2.2.1. Sistemas Hamiltonianos lineales autónomos

Un caso particular de sistemas Hamiltonianos (2.14) son los sistemas lineales. Sea $S \in M^{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y suponga que el Hamiltoniano H_2 en (2.15) es una forma cuadrática en $z \in \mathbb{R}^{2n}$, más precisamente, H_2 admite una representación de la siguiente forma

$$H_2 = H_2(z) = \frac{1}{2} z^T S z, \quad (2.17)$$

entonces obtenemos que el sistema (2.14) asociado a (2.17), tiene la forma

$$\dot{z} = J\nabla_z H_2(z) = JSz = Az, \quad (2.18)$$

con $A = JS$, donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

es una matriz antisimétrica de orden $2n \times 2n$ que cumple ($J^{-1} = J^T$, $J^2 = -I_{2n}$, $\det(J) = 1$) e I_n es la matriz identidad de orden $n \times n$. Cuando esto ocurre, el sistema Hamiltoniano (2.18) es denominado sistema *Hamiltoniano lineal autónomo*.

Debemos tener presente las siguientes definiciones.

Definición 2 Una matriz $A \in M^{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ se denomina *Hamiltoniana* si satisface $A^T J + JA = 0$. Denotaremos por $sp(n, \mathbb{R})$ al conjunto de toda las matrices Hamiltonianas de orden $2n$.

Es fácil verificar que la matriz A del sistema (2.18) es Hamiltoniana. Esto es,

$$JA = JJS = J^2S = -S = SJ^2 = S^T J J = -(JS)^T J = -A^T J.$$

Definición 3 Una matriz $S \in M^{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ se denomina *simpléctica* si satisface $S^T JS = J$. Denotaremos por $Sp(n, \mathbb{R})$ al conjunto de toda las matrices simplécticas de orden $2n$.

Definición 4 Sean $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$, el corchete de Poisson entre vectores está definido por

$$\{u, v\} = u^T J v = \langle u, J v \rangle,$$

donde $\langle \cdot \rangle$ es el producto interno canónico de \mathbb{R}^{2n} .

Definición 5 Se dice que el conjunto $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{2n}\}$, es una base simpléctica de \mathbb{R}^{2n} , si y solo si, \mathcal{C} es base y además $\{v_j, v_{n+j}\} = 1, \forall j = 1, \dots, n$.

A continuación, presentamos el siguiente resultado que será útil en el estudio de las formas normales.

Lema 1 Sean $A \in sp(n, \mathbb{R})$ y u_k, v_l vectores propios de A correspondientes a los valores propios λ_k, λ_l , respectivamente. Si $\lambda_k + \lambda_l \neq 0$, entonces $\{v_k, v_l\} = 0$, para todo $l, k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Fijemos $k, l \in \mathbb{N}$ y si λ_k, λ_l son valores propios de A , entonces $Au_k = \lambda_k u_k$ y $Av_l = \lambda_l v_l$. Así, se tiene que

$$\begin{aligned}\lambda_k \{u_k, v_l\} &= \lambda_k \langle u_k, Jv_l \rangle = \langle \lambda_k u_k, Jv_l \rangle = \langle Au_k, Jv_l \rangle = \langle u_k, A^T Jv_l \rangle = \langle u_k, -JAv_l \rangle \\ &= \langle u_k, -J\lambda_l v_l \rangle = -\lambda_l \langle u_k, Jv_l \rangle = -\lambda_l \{u_k, v_l\}.\end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$(\lambda_k + \lambda_l) \{v_k, v_l\} = 0.$$

Luego como $\lambda_k + \lambda_l \neq 0$, se sigue que $\{v_k, v_l\} = 0, \forall k, l \in \mathbb{N}$. Así concluimos la demostración. ■

2.2.2. Ecuaciones variacionales

Sea $\varphi(t, t_0, z)$ la solución general del sistema Hamiltoniano (2.14), así $\varphi(t_0, t_0, z) = \zeta$, y sea $X(t, \tau, \zeta)$ la matriz Jacobiana de φ con respecto a ζ , o sea, $X(t, \tau, \zeta) = \frac{\partial \varphi(t, \tau, \zeta)}{\partial \zeta} \cdot X(t, \tau, \zeta)$ es llamada matriz de modronomía. Sustituyendo φ en (2.14) y derivando con respecto a ζ obtenemos

$$\dot{X} = JS(t, \tau, \zeta)X, \quad S(t, \tau, \zeta) = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}(\varphi(t, \tau, \zeta), t). \quad (2.19)$$

La ecuación (2.19) es llamada ecuación variacional y es un sistema lineal Hamiltoniano. Derivando la identidad $\varphi(\tau, \tau, \zeta) = \zeta$ con respecto a ζ tenemos $X(\tau, \tau, \zeta) = I$, donde I es la matriz identidad de $2n \times 2n$; así X es la matriz solución fundamental de la ecuación variacional y es una matriz simpléctica.

Teorema 1 *Sea $\varphi(t, \tau, \zeta)$ la solución general del sistema Hamiltoniano (2.14). entonces para cada t fijo y τ , la aplicación $\zeta \rightarrow \varphi(t, \tau, \zeta)$ es la solución general de la ecuación diferencial $\dot{z} = f(t, z)$, donde f es definida y diferenciable sobre $I \times U$, $I \cap \mathbb{R}$ intervalo abierto y conexo y $U \cap \mathbb{R}^{2n}$ bola abierta, y la aplicación $\zeta \rightarrow \varphi(t, \tau, \zeta)$ es siempre simpléctica, entonces la ecuación diferencial $\dot{z} = f(t, z)$ es Hamiltoniana.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [13] o ver también [22].

2.2.3. Funciones generadoras

Usaremos la notación clásica $z = (q, p)$, así la forma simpléctica estándar según [13] es

$$\Omega = \sum_{j=1}^n dq_j \wedge dp_j := dq \wedge dp.$$

Sea $Q = Q(q, p)$, $P = P(q, p)$ una transformación de variables, y asuma que las funciones Q y P están definidas en una bola U en \mathbb{R}^{2n} . Esta transformación será simpléctica, si y sólo si,

$$dq \wedge dp = dQ \wedge dP \Leftrightarrow d(qdp - QdP) = 0. \quad (2.20)$$

Definiendo la 1-forma $\sigma_1 = qdp - QdP$ tendremos que σ_1 es cerrada, si y sólo si, $\sigma_2 = \sigma_1 + d(QP) = qdp + PdQ$ es cerrada. Dado que U es una bola en \mathbb{R}^{2n} , por el Lema de Poincaré (cerrada, si y sólo si, exacta ver [8], pág. 137) se tiene que el cambio de coordenadas es simpléctico, si y sólo si, cada una de las siguientes 1-formas es cerrada

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= qdp - QdP, & \sigma_3 &= pdq - PdQ = \sigma_2 + d(pq), \\ \sigma_2 &= qdp + PdQ = \sigma_1 + d(QP), & \sigma_4 &= pdq + QdP = \sigma_3 + d(PQ). \end{aligned}$$

Luego, la transformación de coordenadas es simpléctica, si y sólo si, una de las funciones

$$S_1 = S(p, P), S_2 = S_2(p, Q), S_3 = S_3(q, Q), S_4 = S_4(q, P)$$

existe y satisface, respectivamente,

$$dS_1 = \sigma_1, dS_2 = \sigma_2, dS_3 = \sigma_3, dS_4 = \sigma_4.$$

Así, tenemos el siguiente resultado, cuya demostración es dada en [13].

Teorema 2 *Los siguientes cambios de variables definen una transformación local de coordenadas simplécticas:*

$$\begin{aligned} q &= \frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P), Q = -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P) \quad \text{cuando} \quad \frac{\partial^2 S_1}{\partial p \partial P}(p, P) \quad \text{es no singular,} \\ q &= \frac{\partial S_2}{\partial p}(p, Q), P = \frac{\partial S_2}{\partial Q}(p, Q) \quad \text{cuando} \quad \frac{\partial^2 S_2}{\partial p \partial Q}(p, Q) \quad \text{es no singular,} \\ p &= \frac{\partial S_3}{\partial q}(q, Q), P = -\frac{\partial S_3}{\partial Q}(q, Q) \quad \text{cuando} \quad \frac{\partial^2 S_3}{\partial q \partial Q}(q, Q) \quad \text{es no singular,} \\ p &= \frac{\partial S_4}{\partial q}(q, P), Q = \frac{\partial S_4}{\partial P}(q, P) \quad \text{cuando} \quad \frac{\partial^2 S_4}{\partial q \partial P}(q, P) \quad \text{es no singular.} \end{aligned}$$

2.3. Espacios simplécticos y caracterización de las matrices simplécticas

En esta sección describiremos brevemente la teoría básica de los espacios vectoriales simplécticos y luego haremos la caracterización de las matrices simplécticas utilizando bases simplécticas, esta teoría es de suma importancia en el análisis de las formas normales para sistemas Hamiltonianos con tres grados de libertad que estudiaremos en el Capítulo 6.

2.3.1. Espacios simplécticos

Un espacio simpléctico es un par (V, ω) donde V es un espacio vectorial sobre un cuerpo F (\mathbb{R} o \mathbb{C}) y ω es una 2-forma bilineal en V , alternada y no degenerada. La 2-forma ω es llamada la forma simpléctica. Desde que ω es no degenerada la función $\omega^* : V \rightarrow V^*$, $v \rightarrow \omega(\cdot, v)$ es un isomorfismo y $\omega(\cdot, v) = \omega^*(v)$, $\forall v \in V$.

Sea (ω_{ij}) la matriz de ω^* relativa a una base $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ de V con $\dim(V) = m$, $m \in \mathbb{N}$ y la base dual $\{v_1^*, v_2^*, \dots, v_m^*\}$ de V^* , esto es,

$$\omega^*(v_j) = \sum_{i=1}^m \omega_{ij} v_i^*.$$

Entonces, $\omega_{ij} = \omega^*(v_j)v_i = \omega(v_i, v_j)$, o sea, $A = (\omega_{ij})$ es la matriz de la forma bilineal ω en la base $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. Así, esta matriz es invertible y como $A^T = -A$, resulta que $\det(A) = (-1)^m \det(A)$, luego, $(-1)^m = 1$ y, como consecuencia m es par. Esto muestra que todo espacio simpléctico de dimensión finita tiene dimensión par.

En nuestro caso la 2-forma no degenerada ω da origen al isomorfismo entre V y V^* vía la aplicación ω^* , de esta forma la aplicación inversa, denotada por $(\omega^*)^{-1}$, nos da un isomorfismo entre V^* y V . Considerando U como subespacio de V definamos el subespacio U^\perp de V por

$$U^\perp = \{v \in V / \omega(v, u) = 0, \forall u \in U\}.$$

Teorema 3 *Todo espacio simpléctico, siempre admite una base simpléctica.*

Para la demostración de este resultado puede consultar [13], ver también [22].

Dados los espacios simplécticos (V_i, ω_i) , $i = 1, 2$, un isomorfismo simpléctico o un simplectomorfismo, es un isomorfismo lineal

$$L : V_1 \rightarrow V_2$$

tal que

$$\omega_2(L(x), L(y)) = \omega_1(x, y),$$

para todo $x, y \in V_1$, o sea, L preserva las formas simplécticas.

Además, sea $\{v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$, $n \in \mathbb{N}$ una base simpléctica del espacio simpléctico (V, ω) y sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}) \in F^{2n}$ el vector de las coordenadas de $u \in V$, es decir, $u = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i v_i$.

El isomorfismo $L : V \rightarrow F^{2n}$, $L(u) = \alpha$ es simpléctico. En efecto, si $v = \sum_{j=1}^{2n} \beta_j v_j$, tenemos

$$\begin{aligned}\omega(u, v) &= \omega\left(\sum_i \alpha_i v_i, \sum_j \beta_j v_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \omega(v_i, v_j) = \sum_{i,j} \alpha_i J_{ij} \beta_j \\ &= \alpha^T J \beta = \omega_J(\alpha, \beta) = \omega_J(Lu, Lv).\end{aligned}$$

De este modo todo espacio simpléctico V es simplectomorfo a F^{2n} . Se sigue, por transitividad, que dos espacios simplécticos arbitrarios de la misma dimensión son simplectomorfos, esto es, son isomorfos vía un isomorfismo simpléctico.

Un subespacio simpléctico U de un espacio simpléctico (V, ω) es un subespacio U de V , para el cual la 2-forma $\omega_U = \omega|_{U \times U}$ no es degenerada. Siendo ω_U una forma simpléctica en U , éste subespacio tiene necesariamente, dimensión par.

Proposición 1 *Sea U un subespacio simpléctico de V , entonces existe un único subespacio simpléctico W tal que $V = U \oplus W$ y $\omega(U, W) = 0$.*

Para la demostración consultar [13], ver también [22].

Otro hecho interesante sobre espacios simplécticos aparece en la siguiente proposición.

Proposición 2 *Sean U y W subespacios de un espacio simpléctico (V, ω) , tales que $\omega(U, W) = 0$ y $V = U \oplus W$, entonces U y W son subespacios simplécticos.*

Demostración consulte [13] sección 3.2, o ver también [22].

Una descomposición simpléctica de (V, ω) es una descomposición de la forma $V = U \oplus W$ con $\omega(U, W) = 0$, donde U y W son subespacios simplécticos de V .

2.3.2. Caracterización de las matrices simplécticas

Sea λ un valor propio de S , y defina subespacios de \mathbb{C}^{2n} , $n \in \mathbb{N}$ por $\eta_k(\lambda) = \text{Ker}(A - \lambda I)^k$, $k \in \mathbb{N}$ y $\eta^\dagger(\lambda) = \bigcup_{k=1}^{2n} \eta_k(\lambda)$. El subespacio de A generado por el valor propio λ es $\eta(\lambda) = \eta_1(\lambda)$, y el subespacio generalizado es $\lambda^\dagger(\lambda)$. Si $\{x, y\} = 0$, se dice que x e y son J -ortogonales.

Lema 2 *Si λ y μ son valores propios de la matriz simpléctica S tal que $\lambda\mu \neq 1$, entonces $\{\eta(\lambda), \eta(\mu)\} = 0$. Esto es, los vectores propios correspondientes a λ y μ son J -ortogonales.*

Demostración ver [13], ver también [22].

Supongamos que S es una matriz simpléctica real con valores propios distintos digamos

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1},$$

por lo tanto 1 no es un valor propio. Los valores propios de S se dividen en tres grupos: los valores propios reales $\pm\mu_1 \dots, \pm\mu_s$, los valores propios con módulo unitario $\alpha_1 \pm \beta_1 i \dots, \alpha_r \pm \beta_r i$, y los valores propios complejos con módulo diferente de uno, $\pm(\gamma_1 \pm \delta_1 i) \dots, \pm(\gamma_t \pm \delta_t i)$. Esto define una descomposición en suma directa

$$V = (\oplus_j U_j) \oplus (\oplus_j W_j) \oplus (\oplus_j Z_j), \quad (2.21)$$

donde

$$U_j = \eta(\mu_j) \oplus \eta(\mu_j^{-1})$$

$$W_j = \eta(\alpha_j + \beta_j i) \oplus \eta(\alpha_j - \beta_j^{-1} i)$$

$$Z_j = \{\eta(\gamma_j + \delta_j i) \oplus \eta(\gamma_j - \delta_j^{-1} i)\} \oplus \{\eta(\gamma_j + \delta_j i)^{-1} \oplus \eta(\gamma_j - \delta_j^{-1} i)^{-1}\}$$

Cada uno de los sumandos en (2.21) es invariante para S . De acuerdo al Lema 2, cada espacio es J -ortogonal entre sí, en consecuencia cada espacio debe ser un espacio simpléctico. Para más detalles ver [13].

2.4. Forma normal para un Hamiltonianos con un grado de libertad

En esta sección, obtenemos la forma normal para sistemas Hamiltonianos con un grado de libertad cuando la matriz asociada al sistema Hamiltoniano linealizado es o no diagonalizable, pues estas nociones serán de mucho valor en el análisis de las formas normales en el caso tres grados de libertad que estudiaremos más adelante.

Suponga que $H_2 = H_2(x_1, y_1)$ es la función cuadrática dada en (2.17) para un grado de libertad, definida por

$$H_2 = h_{20}x_1^2 + h_{02}y_1^2 + h_{11}x_1y_1. \quad (2.22)$$

Teorema 4 *Si los valores propios de A son $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\omega$ y A es diagonalizable, entonces existe una matriz $N \in Sp(1, \mathbb{R})$ tal que el Hamiltoniano H_2 en (2.22) tiene la forma*

$$K_2 = \frac{\delta\omega}{2}(q^2 + p^2), \quad (2.23)$$

donde $\delta = \pm 1$.

Demostración. Considerando (2.23) encontramos que la forma normal del sistema lineal se escribe en la forma del siguiente sistema Hamiltoniano de ecuaciones

$$\dot{y} = \frac{dz}{dt} = JS^*y, \quad (2.24)$$

donde S^* es una matriz diagonal real cuyos elementos están determinados por las igualdades

$$h_{11}^* = \delta\omega, \quad h_{22}^* = -\delta\omega.$$

La transformación de coordenadas z para y es dada por medio de una matriz simpléctica N real, que debe satisfacer las siguientes ecuaciones matriciales:

$$NJS^* = JSN, \quad N^T JN = J. \quad (2.25)$$

La solución N de (2.25) será buscada en la forma $N = A_1 B_1$.

Sea $a = r + is$ un vectore propio arbitrario de la matriz $A = JS$ correspondiente al valor propio $i\omega$. Entonces

$$Aa = i\omega a \quad \Leftrightarrow \quad Ar = -\omega s \quad \text{y} \quad As = \omega r.$$

Luego, se verifica fácilmente que

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & \delta\omega \\ -\delta\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C^T = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix},$$

donde las columnas de la matriz C está formada por los vectores propios de la matriz JS^* . Ahora es necesario hallar la matriz A_1 que lleva a la matriz JS del sistema original de ecuaciones a la forma diagonal. Las columnas de esta matriz deben ser vectores propios de la matriz JS , es decir,

$$A_1 a = i\omega a, \quad \text{y} \quad A_1 \bar{a} = -i\omega \bar{a}.$$

Aquí, \bar{a} representa el vector conjugado de a . Por lo tanto se tiene que la matriz A_1 es de la forma

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{col}(a \quad \bar{a}) \\ &= \begin{pmatrix} r_{11} + is_{11} & r_{11} - is_{11} \\ r_{12} + is_{12} & r_{12} - is_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De acuerdo a la forma de la matriz C^T , definamos la matriz B_1 de la siguiente manera

$$B_1 = \begin{pmatrix} i\delta\kappa & \kappa \\ -i\delta\kappa & \kappa \end{pmatrix},$$

donde κ es una constante real no nula.

Así, la matriz N viene dada como

$$\begin{aligned} N &= \begin{pmatrix} r_{11} + is_{11} & r_{11} - is_{11} \\ r_{12} + is_{12} & r_{12} - is_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\delta\kappa & \kappa \\ -i\delta\kappa & \kappa \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2s_{11}\delta\kappa & 2r_{11}\kappa \\ -2s_{12}\delta\kappa & 2r_{12}\kappa \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego calculando la ecuación $N^T J N$, obtenemos condiciones para las constantes δ y κ , esto es,

$$\begin{aligned} N^T J N &= \begin{pmatrix} -2s_{11}\delta\kappa & -2s_{12}\delta\kappa \\ 2r_{11}\kappa & 2r_{12}\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2s_{11}\delta\kappa & 2r_{11}\kappa \\ -2s_{12}\delta\kappa & 2r_{12}\kappa \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4\delta\kappa^2\{r, s\} \\ -4\delta\kappa^2\{r, s\} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En donde, basta considerar

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{|\{r, s\}|}} \quad \text{y} \quad \delta = \text{sgn}(\{r, s\}).$$

De este modo, obtenemos la expresión para la matriz N como

$$N = [-2\delta\kappa s \quad 2\kappa r].$$

Esta matriz es simpléctica con

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{|\{r, s\}|}} \quad \text{y} \quad \delta = \text{sgn}(\{r, s\}).$$

De donde, se sigue inmediatamente la demostración del teorema. ■

Teorema 5 *Si los valores propios de A son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y A no es diagonalizable, entonces existe una matriz $N \in Sp(1, \mathbb{R})$ tal que el Hamiltoniano H_2 en (2.22) tiene la forma*

$$K_2 = \frac{\delta}{2} p^2, \tag{2.26}$$

donde $\delta = \pm 1$.

Demostración. Sean a_1, a_2 vectores de \mathbb{R}^2 linealmente independientes tales que

$$Aa_1 = 0, \quad Aa_2 = a_1.$$

Seguendo la misma notación del Teorema 4, se verifica fácilmente que

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & \delta c_{11} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_1 = \begin{pmatrix} \delta b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix},$$

donde en este caso $B_1 = C^{-1}$, $c_{11} \neq 0$, $b_1 = \frac{1}{c_{11}}$ y $b_2 = -\frac{c_{12}}{c_{11}}$.

Considerando $A_1 = [a_1 \quad a_2] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ se sigue inmediatamente que

$$N = A_1 B_1 = [\delta b_1 a_1 \quad b_1 a_2 - b_2 a_1].$$

Luego, haciendo $c_{12} = 0$ obtenemos que $b_2 = 0$, en consecuencia se tiene otra expresión para la matriz N dada por

$$N = [\delta b_1 a_1 \quad b_1 a_2],$$

la cual es simpléctica con

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}} \quad \text{y} \quad \delta = \text{sgn}(\{a_1, a_2\}).$$

De donde, se sigue inmediatamente la demostración del teorema. ■

Observación 1 *En el Teorema 5, si la matriz A es diagonalizable se tiene que $K_2 \equiv 0$.*

De hecho, si A es diagonalizable existen vectores linealmente independientes $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ tales que $Aa_1 = 0$ y $Aa_2 = 0$, además, la matriz que lleva a su forma diagonal a la matriz JS^* es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}, \quad c_{11}, c_{22} \neq 0.$$

De donde se obtiene que la matriz $B_1 = C^{-1}$ es dada por

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad b_1 = \frac{1}{c_{11}}, \quad b_2 = \frac{1}{c_{22}}.$$

Considerando la matriz A_1 del Teorema 5, luego haciendo $b_2 = 1$ en $N = A_1 B_1$, se sigue que la matriz N viene dada por

$$N = [b_1 a_1, \quad b_1 a_2].$$

Esta matriz es simpléctica con $b_1 = \frac{1}{\{a_1, a_2\}}$.

2.5. Forma normal para un Hamiltoniano con dos grados de libertad caso raíces simples e imaginarias puras

En esta sección, vamos a dar el algoritmo para la normalización del Hamiltoniano (2.17) cuando la matriz $A = JS$ es diagonalizable, es decir, cuando las frecuencias son de la forma $\pm i\omega_1$ y $\pm i\omega_2$ con $\omega_1 \neq \omega_2$, pues este resultado será muy útil en nuestro análisis de las formas normales en el caso tres grados de libertad que estudiaremos en el Capítulo 6.

Suponga que $H_2 = H_2(\tilde{x}, \tilde{y})$ con $\tilde{x} = (x_1, x_2)$, $\tilde{y} = (y_1, y_2)$ es la función cuadrática dada en (2.17), definida por

$$H_2 = h_{2000}x_1^2 + h_{1100}x_1x_2 + h_{0200}x_2^2 + h_{1010}x_1y_1 + h_{1001}x_1y_2 + h_{0110}x_2y_1 + h_{0101}x_2y_2 + h_{0020}y_1^2 + h_{0011}y_1y_2 + h_{0002}y_2^2. \quad (2.27)$$

Teorema 6 *Suponga que los valores propios de $A = JS$ son $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$ con $\omega_1 \neq \omega_2$ y la matriz A es diagonalizable. Entonces existe una matriz $N \in Sp(2, \mathbb{R})$ la cual transforma el Hamiltoniano (2.27) en un Hamiltoniano dado por*

$$K_2 = \frac{1}{2}\delta_1\omega_1(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\delta_2\omega_2(q_2^2 + p_2^2),$$

donde $\delta_1 = \pm 1$ y $\delta_2 = \pm 1$.

Demostración. Para la demostración seguimos las mismas ideas que en el Teorema 4, en este caso los elementos de la matriz diagonal S^* están determinados por las igualdades

$$h_{11}^* = \delta_1\omega_1, \quad h_{22}^* = -\delta_1\omega_1, \quad h_{33}^* = \delta_2\omega_2 \quad \text{y} \quad h_{44}^* = -\delta_2\omega_2.$$

De acuerdo a la ecuación (2.25), la solución N será buscada en la forma $N = A_1B_1$.

Sean $a_1 = r_1 + is_1$ y $a_2 = r_2 + is_2$ los vectores propios de $A = JS$ correspondientes a los valores propios $i\omega_1$ y $i\omega_2$. Entonces

$$\begin{aligned} Aa_1 = i\omega_1 a_1 &\Leftrightarrow Ar_1 = -\omega_1 s_1 \quad \text{y} \quad As_1 = \omega_1 r_1, \\ Aa_2 = i\omega_2 a_2 &\Leftrightarrow Ar_2 = -\omega_2 s_2 \quad \text{y} \quad As_2 = \omega_2 r_2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Luego, se verifica fácilmente que

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_1\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2\omega_2 \\ -\delta_1\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_2\omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C^T = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde las columnas de la matriz C está formada por los vectores propios de la matriz JS^* . Ahora es necesario hallar la matriz A_1 , aquí, A_1 lleva a la matriz JS del sistema original de ecuaciones a la forma diagonal. Las columnas de esta matriz deben ser vectores propios de la matriz JS , es decir,

$$\begin{aligned} A_1 a_1 &= i\omega_1 a_1 \quad y \quad A_1 \bar{a}_1 = -i\omega_1 \bar{a}_1, \\ A_1 a_2 &= i\omega_2 a_2 \quad y \quad A_1 \bar{a}_2 = -i\omega_2 \bar{a}_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz A_1 está determinada por

$$\begin{aligned} A_1 &= col(a_1 \quad a_2 \quad \bar{a}_1 \quad \bar{a}_2) \\ &= \begin{pmatrix} r_{11} + is_{11} & r_{21} + is_{21} & r_{11} - is_{11} & r_{21} - is_{21} \\ r_{12} + is_{12} & r_{22} + is_{22} & r_{12} - is_{12} & r_{22} - is_{22} \\ r_{13} + is_{13} & r_{23} + is_{23} & r_{13} - is_{13} & r_{23} - is_{23} \\ r_{14} + is_{14} & r_{24} + is_{24} & r_{14} - is_{14} & r_{24} - is_{24} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por otro lado, de acuerdo a la forma de la matriz C^T , definamos la matriz B_1 de la siguiente manera

$$B_1 = \begin{pmatrix} i\delta_1 \kappa_1 & 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & i\delta_2 \kappa_2 & 0 & \kappa_2 \\ -i\delta_1 \kappa_1 & 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & -i\delta_2 \kappa_2 & 0 & \kappa_2 \end{pmatrix},$$

donde κ_1 y κ_2 son constantes reales no nulas.

Luego reemplazando $N = A_1 B_1$ en $N^T J N = J$, se tiene que $B_1^T A_1^T J A_1 B_1 = J$, de donde se sigue inmediatamente que $B_1^T F B_1 = J \Leftrightarrow F = (B_1^T)^{-1} J (B_1)^{-1}$ con $F = A_1^T J A_1$.

Ahora calculando el producto de matrices $F = (B_1^T)^{-1} J (B_1)^{-1}$, se obtiene que

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{i}{2\delta_1 \kappa_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2\delta_2 \kappa_2^2} \\ \frac{i}{2\delta_1 \kappa_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2\delta_2 \kappa_2^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Por otro lado, calculando el producto de matrices $F = A_1^T J A_1$, se tiene que

$$F = \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & 2i\{s_1, r_1\} & f_{14} \\ f_{21} & 0 & f_{23} & 2i\{s_2, r_2\} \\ 2i\{r_1, s_1\} & f_{32} & 0 & f_{34} \\ f_{41} & 2i\{r_2, s_2\} & f_{43} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

donde

$$\begin{aligned} f_{12} &= \{r_1, r_2\} + \{s_2, s_1\} + i(\{s_1, r_2\} + \{r_1, s_2\}), \\ f_{14} &= \{r_1, r_2\} + \{s_1, s_2\} + i(\{s_1, r_2\} + \{r_1, s_2\}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21} &= \{r_2, r_1\} + \{s_1, s_2\} + i(\{r_2, s_1\} + \{s_2, r_1\}), \\
f_{23} &= \{r_2, r_1\} + \{s_2, s_1\} + i(\{s_1, r_2\} + \{s_2, r_1\}), \\
f_{32} &= \{r_1, r_2\} + \{s_1, s_2\} + i(\{r_2, s_1\} + \{r_1, s_2\}), \\
f_{34} &= \{r_1, r_2\} + \{s_2, s_1\} + i(\{r_2, s_1\} + \{s_2, r_1\}), \\
f_{41} &= \{r_2, r_1\} + \{s_2, s_1\} + i(\{r_2, s_1\} + \{r_1, s_2\}), \\
f_{43} &= \{r_2, r_1\} + \{s_1, s_2\} + i(\{s_1, r_2\} + \{r_1, s_2\}).
\end{aligned}$$

Luego comparando las entradas de F dadas en las ecuaciones (2.29) y (2.30) se obtiene que $f_{12} = f_{14} = f_{21} = f_{23} = f_{32} = f_{34} = f_{41} = f_{43} = 0$, resolviendo el sistema de ecuaciones se deduce que

$$\begin{aligned}
\{r_1, r_2\} = \{s_1, s_2\} = \{s_1, r_2\} = \{r_2, r_1\} = \{r_1, s_2\} = 0 \text{ y adem\u00e1s,} \\
\delta_1 \kappa_1^2 = \frac{1}{4\{r_1, s_1\}} \quad \text{y} \quad \delta_2 \kappa_2^2 = \frac{1}{4\{r_2, s_2\}}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Ahora, como $N = A_1 B_1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
N &= \begin{pmatrix} r_{11} + is_{11} & r_{21} + is_{21} & r_{11} - is_{11} & r_{21} - is_{21} \\ r_{12} + is_{12} & r_{22} + is_{22} & r_{12} - is_{12} & r_{22} - is_{22} \\ r_{13} + is_{13} & r_{23} + is_{23} & r_{13} - is_{13} & r_{23} - is_{23} \\ r_{14} + is_{14} & r_{24} + is_{24} & r_{14} - is_{14} & r_{24} - is_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\delta_1 \kappa_1 & 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & i\delta_2 \kappa_2 & 0 & \kappa_2 \\ -i\delta_1 \kappa_1 & 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & -i\delta_2 \kappa_2 & 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\delta_1 \kappa_1 s_{11} & -2\delta_2 \kappa_2 s_{21} & 2\kappa_1 r_{11} & 2\kappa_2 r_{21} \\ -2\delta_1 \kappa_1 s_{12} & -2\delta_2 \kappa_2 s_{22} & 2\kappa_1 r_{12} & 2\kappa_2 r_{22} \\ -2\delta_1 \kappa_1 s_{13} & -2\delta_2 \kappa_2 s_{23} & 2\kappa_1 r_{13} & 2\kappa_2 r_{23} \\ -2\delta_1 \kappa_1 s_{14} & -2\delta_2 \kappa_2 s_{24} & 2\kappa_1 r_{14} & 2\kappa_2 r_{24} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Luego calculando el producto de matrices $N^T J N$, encontramos condiciones para las constantes $\kappa_1, \kappa_2, \delta_1$ y δ_2 , esto es,

$$\begin{aligned}
N^T J N &= \begin{pmatrix} -2\delta_1 \kappa_1 s_{11} & -2\delta_1 \kappa_1 s_{12} & -2\delta_1 \kappa_1 s_{13} & -2\delta_1 \kappa_1 s_{14} \\ -2\delta_2 \kappa_2 s_{21} & -2\delta_2 \kappa_2 s_{22} & -2\delta_2 \kappa_2 s_{23} & -2\delta_2 \kappa_2 s_{24} \\ 2\kappa_1 r_{11} & 2\kappa_1 r_{12} & 2\kappa_1 r_{13} & 2\kappa_1 r_{14} \\ 2\kappa_2 r_{21} & 2\kappa_2 r_{22} & 2\kappa_2 r_{23} & 2\kappa_2 r_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\delta_1 \kappa_1 s_{11} & -2\delta_2 \kappa_2 s_{21} & 2\kappa_1 r_{11} & 2\kappa_2 r_{21} \\ -2\delta_1 \kappa_1 s_{12} & -2\delta_2 \kappa_2 s_{22} & 2\kappa_1 r_{12} & 2\kappa_2 r_{22} \\ -2\delta_1 \kappa_1 s_{13} & -2\delta_2 \kappa_2 s_{23} & 2\kappa_1 r_{13} & 2\kappa_2 r_{23} \\ -2\delta_1 \kappa_1 s_{14} & -2\delta_2 \kappa_2 s_{24} & 2\kappa_1 r_{14} & 2\kappa_2 r_{24} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 4\delta_1 \delta_2 \kappa_1 \kappa_2 \{s_1, s_2\} & 4\delta_1 \kappa_1^2 \{r_1, s_1\} & 4\delta_1 \kappa_1 \kappa_2 \{r_2, s_1\} \\ 4\delta_1 \delta_2 \kappa_1 \kappa_2 \{s_2, s_1\} & 0 & 4\delta_2 \kappa_1 \kappa_2 \{r_1, s_2\} & 4\delta_2 \kappa_2^2 \{r_2, s_2\} \\ 4\delta_1 \kappa_1^2 \{s_1, r_1\} & 4\delta_2 \kappa_1 \kappa_2 \{s_2, r_1\} & 0 & 4\kappa_1 \kappa_2 \{r_1, r_2\} \\ 4\delta_1 \kappa_1 \kappa_2 \{s_1, r_2\} & 4\delta_2 \kappa_2^2 \{s_2, r_2\} & 4\kappa_1 \kappa_2 \{r_2, r_1\} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, según la ecuación (2.31) tenemos que la matriz N está definida como

$$N = [-2\delta_1\kappa_1s_1 \quad -2\delta_2\kappa_2s_2 \quad 2\kappa_1r_1 \quad 2\kappa_2r_2].$$

Esta matriz es simpléctica con

$$\kappa_1 = \frac{1}{2\sqrt{|\{r_1, s_1\}|}}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{2\sqrt{|\{r_2, s_2\}|}}, \quad \delta_1 = \text{sgn}(\{r_1, s_1\}) \quad \text{y} \quad \delta_2 = \text{sgn}(\{r_2, s_2\}).$$

Además, sabemos que la matriz de normalización JS^* está dada por

$$JS^* = [A(-2s_1\delta_1\kappa_1) \quad A(-2s_2\delta_2\kappa_2) \quad A(2r_1\kappa_1) \quad A(2r_2\kappa_2)].$$

Usando (2.28) en esta última ecuación, se sigue que

$$JS^* = [-\delta_1\omega_1(2\kappa_1r_1) \quad -\delta_2\omega_2(2\kappa_2r_2) \quad \delta_1\omega_1(-2\delta_1\kappa_1s_1) \quad \delta_2\omega_2(-2\delta_2\kappa_2s_2)].$$

De donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_1\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2\omega_2 \\ -\delta_1\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_2\omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ así, } S^* = \begin{pmatrix} \delta_1\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2\omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2\omega_2 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (2.27) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} K_2(q, p) &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, p_1, p_2) \begin{pmatrix} \delta_1\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2\omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2\omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, p_1, p_2) \cdot (\delta_1\omega_1q_1, \delta_2\omega_2q_2, \delta_1\omega_1p_1, \delta_2\omega_2p_2) \\ &= \frac{\delta_1\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\delta_2\omega_2}{2}(q_2^2 + p_2^2), \quad \delta_1 = \pm 1, \quad \delta_2 = \pm 1. \end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración del teorema. ■

2.6. Forma normal en el caso de autovalores imaginários puros debida a N. Burgoyne y R. Cushman [2]

En esta sección mostraremos un algoritmo dado por N. Burgoyne y R. Cushman [2] para determinar la forma normal del sistema (2.17) cuando los valores propios son imaginarios puros.

Si los valores propios de A son todos imaginarios puros entonces el polinomio característico de A es de la forma $p(\lambda) = \prod_i (\lambda^2 + \omega_i^2)^{n_i}$, donde $\omega_i \neq \omega_j$ para $i \neq j$ y $\omega_i > 0$ para todo i . Inicialmente suponga que el polinomio característico de A es $P(\lambda) = (\lambda^2 + \omega^2)^n$, donde $\omega \in \mathbb{R}^+$. De esta forma tenemos que el polinomio minimal de A es $p_{min}(\lambda) = (\lambda^2 + \omega^2)^m$, para algún entero m , $1 \leq m \leq n$. Vamos a iniciar nuestro algoritmo haciendo una descomposición de A como la suma de una matriz semi-simple Hamiltoniana Σ y una matriz nilpotente M . Note que la siguiente matriz

$$\Sigma = A \left\{ I + \sum_{j=1}^{m-1} \binom{2j}{j} \left(\frac{A^2 + \omega^2 I}{4\omega^2} \right)^j \right\},$$

es una matriz semi-simples. También observe que la matriz

$$M = -A \sum_{j=1}^{m-1} \binom{2j}{j} \left(\frac{A^2 + \omega^2 I}{4\omega^2} \right)^j$$

satisface $M^m = 0$, por lo que tenemos que M es nilpotente. Notemos que las matrices Σ y M son matrices Hamiltonianas por ser combinación lineal de matrices Hamiltonianas, y como $A = \Sigma + M$ tenemos la descomposición deseada. Para mayores detalles sobre esta descomposición se pueden consultar varios libros de Álgebra Lineal, por ejemplo, en el capítulo 7 de Hoffman y Kunze [5].

Sean $K_i = \{x \in \mathbb{R}^{2n} / M^i x = 0\}$, $i = 0, \dots, m$. Note que $K_0 = \{0\}$ y $K_m = \mathbb{R}^{2n}$. Defina el corchete de Poisson entre vectores $\{x, y\} = x^T J y$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$. Nuestro próximo paso es construir ciertos subespacios convenientes de \mathbb{R}^{2n} . Sea $W_0 = \{0\}$ y construyamos subespacios W_j , $j > 0$, de \mathbb{R}^{2n} mediante un proceso recursivo que describiremos a continuación:

- a) Obtenga un entero $t = t_j$, $0 \leq t \leq m$, tal que

$$W_{j-1}^\perp \cap K_{t+1} = W_{j-1}^\perp, \text{ pero } W_{j-1}^\perp \cap K_t \neq W_{j-1}^\perp,$$

donde $W_{j-1}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^{2n} / \{x, w\} = 0, \forall w \in W_{j-1}\}$. Note que si $M = 0$ (ésto es, $m = 1$), entonces $t = 0$.

- b) Escoja $z \in W_{j-1}^\perp$ tal que $z \notin K_t$ y $\{z, N^t \Sigma^{(t+1) \bmod 2} z\} = \delta_j$, donde $\delta_j^2 = 1$.
- c) Defina Z_j como el espacio generado por $\Sigma^{(t+1) \bmod 2} z, M \Sigma^{(t+1) \bmod 2} z, \dots, M^t \Sigma^{(t+1) \bmod 2} z$.
- d) Defina W_j por $W_j = Z_j + W_{j-1}$. Si $W_j \neq \mathbb{R}^{2n}$ repita el proceso hasta obtener $W_l = \mathbb{R}^{2n}$ para algún entero l .

Ahora vamos a construir una base para el subespacio Z_j encontrado anteriormente. Existen dos casos: t par y t impar.

Si t es impar: Sea z el vector encontrado en b), con $\delta = \delta_j = \{z, M^t z\}$ y $r = \frac{1}{2}(t + 1)$. Considere $z_0 = z$ y forme z_i , $1 \leq i \leq r$, como sigue:

$$z_i = z_{i-1} + \frac{\delta}{2\omega^2} \{z_{i-1}, \Sigma M^{t+1-2i} z_{i-1}\} M^{2i-1} \Sigma z_{i-1}.$$

Tome $\tilde{z}_0 = z_r$ y construya \tilde{z}_i , $1 \leq i \leq r - 1$, usando

$$\tilde{z}_i = \tilde{z}_{i-1} - \frac{\delta}{2} \{\tilde{z}_{i-1}, M^{t-2i} \tilde{z}_{i-1}\} M^{2i} \tilde{z}_{i-1}.$$

En el caso $r = t = 1$ esta última construcción debe ser omitida. Tome

$$\tau = \tau_j = \begin{cases} 0, & \text{si } j = 1, \\ \sum_{i=1}^{j-1} (t_i + 1), & \text{si } j \neq 1. \end{cases}$$

Dado que $z^* = \tilde{z}_{r-1}$, la base deseada de Z_j es la base B cuyos elementos son

$$b_{\tau+2i-1} = M^{i-1} z^*, \quad b_{n+\tau+2i-1} = (-1)^{i-1} \delta M^{t+1-i} z^*,$$

$$b_{\tau+2i} = \frac{1}{\omega} \Sigma M^{i-1} z^*, \quad b_{n+\tau+2i} = (-1)^{i-1} \frac{\delta}{\omega} \Sigma M^{t+1-i} z^*,$$

para $i = 1, \dots, t + 1$. Tenemos que $\{b_i, b_j\} = J_{ij}$, $i, j = 1, \dots, 2t + 2$, luego esta es una base simpléctica de Z_j . En esta base, la matriz de la restricción de A al subespacio Z_j es

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & -X_1^T \end{pmatrix},$$

donde

$$X_1 = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & L & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & L \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \Delta \end{pmatrix},$$

$$\text{con } L = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \Delta = \begin{pmatrix} (-1)^{r-1} \delta & 0 \\ 0 & (-1)^{r-1} \delta \end{pmatrix}.$$

Si t es par: Sea z el vector encontrado anteriormente, con $\delta = \delta_j = \{z, M^t \Sigma z\}$ y $r = \frac{1}{2}t$. Considere $z_0 = z$ y forme z_i , $1 \leq i \leq r$, como sigue:

$$z_i = z_{i-1} - \frac{\delta}{2} \{z_{i-1}, M^{t+1-2i} z_{i-1}\} M^{2i-1} \Sigma z_0.$$

En el caso $r = t = 0$ esta construcción debe ser omitida. Tome $\tilde{z}_0 = z_r$ y construya \tilde{z}_i , $1 \leq i \leq r$ usando

$$\tilde{z}_i = \tilde{z}_{i-1} - \frac{\delta}{2} \{ \tilde{z}_{i-1}, M^{t-2i} \Sigma \tilde{z}_{i-1} \} M^{2i} \tilde{z}_{i-1}.$$

En el caso $r = t = 0$ esta última construcción debe ser omitida. Tome

$$\tau = \tau_j = \begin{cases} 0, & \text{se } j = 1 \\ \sum_{i=1}^{j-1} (t_i + 1), & \text{se } j \neq 1 \end{cases}$$

Siendo $z^* = \tilde{z}_r$, la base deseada de Z_j es la base B cuyos elementos son

$$b_{\tau+i} = \sqrt{\omega} M^{i-1} z^* \quad y \quad b_{n+\tau+i} = (-1)^{i-1} \frac{\delta}{\sqrt{\omega}} \Sigma M^{t+1-i} z^*,$$

para $i = 1, \dots, t+1$. Tenemos que $\{b_i, b_j\} = J_{ij}$, $i, j = 1, \dots, 2t+2$, luego ésta es una base simpléctica de Z_j . En esta base, la matriz de la restricción de A al subespacio Z_j es

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ -Y_2 & -Y_1^T \end{pmatrix},$$

donde

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\varepsilon\omega \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon\omega & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \varepsilon\omega & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\varepsilon\omega & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de A sobre \mathbb{R}^{2n} con respecto a la base $\{b_1, \dots, b_{2n}\}$ es

$$Z = \begin{pmatrix} E & F \\ G & -E^T \end{pmatrix},$$

con

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{pmatrix} E_j & F_j \\ G_j & -E_j^T \end{pmatrix},$$

es una matriz $(2t_j + 2) \times (2t_j + 2)$ tipo X o Y , definida anteriormente.

Vamos ahora al caso general en que el polinomio característico de A es de la forma $p(\lambda) = \prod_i (\lambda^2 + \omega_i^2)^{n_i}$, donde $\omega_i \neq \omega_j$ para $i \neq j$ y $\omega_i > 0$ para todo i . En este caso defina $L_i = \prod_{j \neq i} (A^2 + \omega_j^2)^{n_j}$. Entonces los espacios $V_i = L_i(\mathbb{R}^{2n})$ de dimensión $2n_i$, son subespacios invariantes por A ($A(V_i) \subset V_i$) y son dos a dos ortogonales, ésto es, $\{v_i, v_j\} = 0$ para todo $v_i \in V_i$ y $v_j \in V_j$, $i \neq j$. El algoritmo anterior puede ser aplicado a cada matriz A_i , obtenida restringiendo A al subespacio V_i . Como resultado final la matriz A en la nueva base asume la forma

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & -Q^T \end{pmatrix},$$

con

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{pmatrix} Q_j & R_j \\ S_j & -Q_j^T \end{pmatrix},$$

es una matriz $n_i \times n_i$ tipo Z , definida anteriormente.

A continuación, vamos a describir algunos resultados que serán de mucha importancia en nuestro análisis de formas normales de orden mayor o igual a tres que estudiaremos más adelante.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Una transformación lineal $\Sigma : V \rightarrow V$ es llamada semisimple si cada subespacio lineal Σ -invariante de V tiene un subespacio complementario Σ -invariante.

Lema 3 Si $\Sigma : V \rightarrow V$ es semisimple entonces $V = \text{im}\Sigma \oplus \text{ker}\Sigma$.

La descomposición Σ - M de una aplicación lineal $A : V \rightarrow V$ es la descomposición $A = \Sigma + M$ con Σ semisimple y M nilpotente y $\Sigma M = M \Sigma$.

Lema 4 Suponga que $\Sigma - M$ es la descomposición de una aplicación lineal $A : V \rightarrow V$ entonces

1. $\text{ker}A = \text{ker}\Sigma \cap \text{ker}M$.
2. $\text{im}A = \text{im}\Sigma \oplus \text{im}M \cap \text{ker}\Sigma$.

Corolario 1 *Suponga que Y es un complemento de $imM \cap ker\Sigma$ en $ker\Sigma$, es decir, $ker\Sigma = Y \oplus ker\Sigma \cap imM$. Entonces Y es un complemento de imA en V , es decir, $V = imA \oplus Y$.*

La demostración de estos resultados se encuentran en [21].

Por otro lado, sea $P_n(V, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios homogéneos a valores reales sobre V con grado n , y sea $\mathcal{F}P(V, \mathbb{R})$ el espacio vectorial formado por el conjunto de las series de potencias formales a valores reales sobre V . Además, suponga que $H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots$ es la serie de potencia formal a valores reales sobre V de una función Hamiltoniana H , $H_n \in P_n(V, \mathbb{R})$, $n \geq 2$. Suponiendo que H_2 ya está en su forma normal, es decir, la matriz del campo vectorial lineal X está en su forma normal simpléctica real. En otras palabras, supongamos que tenemos la descomposición Σ y M de X . Sean \mathcal{L} la derivada de Lie de elementos de $\mathcal{F}P(V, \mathbb{R})$ con respecto a X , \mathcal{S} la parte de X correspondiente a Σ y \mathcal{N} la parte de X correspondiente a M . Claramente $\mathcal{L} = \mathcal{S} + \mathcal{N}$ y \mathcal{L} , \mathcal{S} y \mathcal{N} son aplicaciones del conjunto $P_n(V, \mathbb{R})$ consigo mismo. Sea \mathcal{L}_n , \mathcal{S}_n y \mathcal{N}_n las restricciones de \mathcal{L} , \mathcal{S} y \mathcal{N} a $P_n(V, \mathbb{R})$. Entonces $\mathcal{L}_n = \mathcal{S}_n + \mathcal{N}_n$ es la descomposición $\Sigma - M$ de \mathcal{L}_n . Para $n \geq 2$ sea Y_n un complemento de $ker\mathcal{S}_n \cap im\mathcal{N}_n$ en el $ker\mathcal{S}_n$, esto es, $Y_n \oplus ker\mathcal{S}_n \cap im\mathcal{N}_n = ker\mathcal{S}_n$. Usando el Corolario 1 tenemos que $Y_n \oplus im\mathcal{L}_n = P_n(V, \mathbb{R})$. Ahora, podemos formular la siguiente definición.

Definición 6 *El Hamiltoniano H está en su forma normal hasta orden k si $H_n \in Y_n$ para $3 \leq n \leq k$. Note que para X semisimple $Y_n = ker\mathcal{L}_n$.*

Sea \mathcal{L}_H la derivada de Lie con respecto al campo vectorial Hamiltoniano X_H , con Hamiltoniano $H \in \mathcal{F}P(V, \mathbb{R})$. En otras palabras \mathcal{L}_H es la derivada de Lie generada por H . Es claro que \mathcal{L}_h es una aplicación del conjunto $\mathcal{F}P(V, \mathbb{R})$ consigo mismo. Defina el operador

$$exp\mathcal{L}_H = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \mathcal{L}_H^n.$$

Entonces la transformación $\phi_H : u \rightarrow v$ ($u, v \in V$, vectores con componentes en $\mathcal{F}P(V, \mathbb{R})$) definido por

$$v = \phi_H(u) = exp\mathcal{L}_H(u) \tag{2.32}$$

es una transformación simpléctica. Note que $\phi_H^t = expt\mathcal{L}_H(u)$ es el flujo del campo vectorial $X_H(u) = \mathcal{L}_H(u)$.

Corolario 2 *Suponga que $H \in \mathcal{F}P(V, \mathbb{R})$ está en su forma normal hasta términos de grado $n - 1 \geq 2$. Entonces podemos encontrar una función $F \in P_n(V, \mathbb{R})$ tal que la transformación*

simpléctica dada por (2.32) con generador F , lleva $H(v)$ a su forma normal hasta términos de grado n .

Demostración. Sea H_k el término homogéneo de grado k , en la evaluación de H . Tenemos que $\phi_F^t(u)$ es el flujo del campo vectorial X_F y así

$$\frac{d}{dt}H_k(\phi_F^t(u)) = \mathcal{L}_F H_k(\phi_F^t(u)).$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$H_k(\phi_F^t(u)) = \exp \mathcal{L}_F H_k(\phi_F^0(u)) = \exp t \mathcal{L}_F H_k(u),$$

donde para $t = 1$ resulta la siguiente expresión

$$H_k(\phi_F(u)) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \mathcal{L}_F^m H_k(u). \quad (2.33)$$

Así el primer término en $H_k(\phi_F(u))$ es de orden k , la segunda de orden $n + k - 2$ y las otras son de mayor orden. Por lo tanto,

$$(H \circ \phi_F)_k(u) = H_k(u) \quad \text{para } 2 \leq k \leq n - 1,$$

esto es, los términos de grado $k \leq n - 1$ no se ven afectados y permanecen en forma normal. Además, tenemos

$$(H \circ \phi_F)_n(u) = H_n(u) + \mathcal{L}_F H_2(u).$$

Descomponiendo $H_n(u) = G_n(u) + H'_n(u)$ con $G_n(u) \in im \mathcal{L}$ y $H'_n(u) \in T_n$, podemos escoger F tal que $G_n(u) = \mathcal{L}F(u) = -\mathcal{L}H_2(u)$. Entonces tenemos $(H \circ \phi_F)_n(u) = H'_n(u) \in Y_n$. Esto finaliza la demostración. \blacksquare

2.7. Forma normal para un Hamiltoniano con un grado de libertad hasta términos de quinto orden cuando la parte cuadrática es nula [11]

En esta sección generalizaremos la forma normal de Gustavson (ver [22]) para sistemas Hamiltonianos no lineales con un grado de libertad cuando el Hamiltoniano

$$H(q, p) = \sum_{s=m}^n H_s(q, p) + \tilde{H}(q, p), \quad H_s = \sum_{k+l=s} \tilde{h}_{kl} q^k p^l, \quad (2.34)$$

comienza con términos de grado tres o más, mediante la construcción de un cambio de coordenadas simpléctico $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ que simplifica el Hamiltoniano (2.34).

Es importante señalar que la transformación simpléctica que introduce las nuevas variables Q y P está asociada a la función generadora $S = S(q, P)$ de la forma

$$S = qP + \sum_{s=3}^{n-m+2} S_s(q, P), \quad S_s = \sum_{k+l=s} s_{kl} q^k P^l, \quad m \geq 3, \quad n \geq 4, \quad (2.35)$$

donde s_{kl} son coeficientes constantes. Estos valores serán determinados mediante el proceso de simplificación de la función H . Adicionalmente, del Teorema 2, adaptado a la actual situación (pues aquí no tenemos términos cuadráticos) se obtiene que la relación entre las antiguas y nuevas variables es dada por

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P}, \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}. \quad (2.36)$$

A partir de estas relaciones, encontramos las expresiones $q = q(Q, P)$, $p = p(Q, P)$, para las antiguas variables en términos de las nuevas variables como expansiones inclusive hasta términos de grado $n - m + 1$ con respecto a Q y P por

$$q = q(Q, P) = Q - \frac{\partial S_3(Q, P)}{\partial P} + \dots, \quad p = p(Q, P) = P + \frac{\partial S_3(Q, P)}{\partial Q} + \dots \quad (2.37)$$

Aquí los puntos suspensivos denotan los términos de grado mayor a dos con respecto a Q y P (inclusive hasta términos de grado $n - m + 1$).

Sustituyendo las expresiones (2.37) en (2.34), se produce la expansión en series de la función Hamiltoniana Γ definida por

$$\Gamma = \sum_{s=m}^n \Gamma_s(Q, P) + \tilde{\Gamma}(Q, P), \quad \Gamma_s = \sum_{k+l=s} \gamma_{kl} Q^k P^l,$$

donde $\tilde{\Gamma}(Q, P)$ es una función que contiene términos de grado mayor que n con respecto a Q y P . Siguiendo el enfoque que brinda el algoritmo de la forma normal de Gustavson como en [22], se obtiene que las funciones $\Gamma_s(Q, P)$ son encontradas utilizando las fórmulas o relaciones:

$$\Gamma_m = H_m(Q, P), \quad (2.38)$$

$$\Gamma_{m+1} = \{S_3, H_m\} + H_{m+1}(Q, P), \quad (2.39)$$

$$\Gamma_r = \{S_{r-m+2}, H_m\} + H_r(Q, P) + F_r(Q, P) \quad (r = m + 2, \dots, n), \quad (2.40)$$

de manera secuencial. Notemos que la relación entre el Hamiltoniano inicial H y el nuevo Hamiltoniano Γ , es

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = \Gamma\left(\frac{\partial S}{\partial P}, P\right),$$

es decir,

$$\begin{aligned} & H_m\left(q, P + \frac{\partial S_3}{\partial q} + \dots\right) + H_{m+1}\left(q, P + \frac{\partial S_3}{\partial q} + \dots\right) + \dots = \\ & \Gamma_m\left(q + \frac{\partial S_3}{\partial P} + \dots, P\right) + \Gamma_{m+1}\left(q + \frac{\partial S_3}{\partial P} + \dots, P\right) + \dots \end{aligned}$$

donde, $H_s = \sum_{k+l=s} \tilde{h}_{kl} q^k P^l$ y $\Gamma_s = \sum_{k+l=s} \gamma_{kl} q^k P^l$, y por lo tanto:

1. Los términos de grado m deben satisfacer la relación:

$$H_m(q, P) = \Gamma_m(q, P).$$

2. Los términos de grado $m + 1$ deben satisfacer la relación:

$$\sum_{k+l=m} \tilde{h}_{kl} l q^k P^{l-1} \frac{\partial S_3}{\partial q} + H_{m+1} = \sum_{k+l=m} \gamma_{kl} k q^{k-1} P^l \frac{\partial S_3}{\partial P} + \Gamma_{m+1}.$$

Como $\tilde{h}_{kl} = \gamma_{kl}$ cuando $k + l = m$, entonces

$$\begin{aligned} \Gamma_{m+1} &= \sum_{k+l=m} \tilde{h}_{kl} \left(l q^k P^{l-1} \frac{\partial S_3}{\partial q} - k q^{k-1} P^l \frac{\partial S_3}{\partial P} \right) + H_{m+1}^*, \\ \Gamma_{m+1} &= \{S_3, H_m\} + H_{m+1}. \end{aligned}$$

3. Los términos de grado $m + 2$ deben satisfacer la relación:

$$\begin{aligned} & \sum_{k+l=m} \tilde{h}_{kl} l q^k P^{l-1} \frac{\partial S_4}{\partial q} + \sum_{k+l=m} \tilde{h}_{kl} \binom{l}{2} q^k P^{l-2} \left(\frac{\partial S_3}{\partial q} \right)^2 + \sum_{k+l=m+1} \tilde{h}_{kl} l q^k P^{l-1} \frac{\partial S_3}{\partial q} + H_{m+2} = \\ & \sum_{k+l=m} \tilde{h}_{kl} k q^{k-1} P^l \frac{\partial S_4}{\partial P} + \sum_{k+l=m} \gamma_{kl} \binom{k}{2} q^{k-2} P^l \left(\frac{\partial S_3}{\partial P} \right)^2 + \sum_{k+l=m+1} \gamma_{kl} k q^{k-1} P^l \frac{\partial S_3}{\partial P} + \Gamma_{m+2}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \Gamma_{m+2} &= \sum_{k+l=m} \tilde{h}_{kl} \left(l q^k P^{l-1} \frac{\partial S_4}{\partial q} - k q^{k-1} P^l \frac{\partial S_3}{\partial P} \right) + F_{m+2} + H_{m+2}, \\ \Gamma_{m+2} &= \{S_4, H_m\} + F_{m+2} + H_{m+2}, \end{aligned}$$

donde

$$F_{m+2} = \sum_{k+l=m} \tilde{h}_{kl} \binom{l}{2} q^k P^{l-2} \left(\frac{\partial S_3}{\partial q} \right)^2 + \sum_{k+l=m+1} \tilde{h}_{kl} l q^k P^{l-1} \frac{\partial S_3}{\partial q} - \sum_{k+l=m} \gamma_{kl} \binom{k}{2} q^{k-2} P^l \left(\frac{\partial S_3}{\partial P} \right)^2 - \sum_{k+l=m+1} \gamma_{kl} k q^{k-1} P^l \frac{\partial S_3}{\partial P}.$$

Considerando la forma polinomial de S_3 ,

$$S_3(q, P) = s_{30} q^3 + s_{21} q^2 P + s_{12} q P^2 + s_{03} P^3,$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} F_{m+2} = & 9s_{30}^2 \sum_{\substack{k+l=m+2 \\ k \geq 4, l \geq 0}} \tilde{h}_{k-4, l+2} \binom{l+2}{2} q^k P^l + 12s_{21}s_{30} \sum_{\substack{k+l=m+2 \\ k \geq 3, l \geq 1}} \tilde{h}_{k-3, l+1} \binom{l+1}{2} q^k P^l + \\ & (4s_{21}^2 + 6s_{30}s_{12}) \sum_{\substack{k+l=m+2 \\ k \geq 2, l \geq 2}} \tilde{h}_{k-2, l} \binom{l}{2} q^k P^l + 4s_{21}s_{12} \sum_{\substack{k+l=m+2 \\ k \geq 1, l \geq 3}} \tilde{h}_{k-1, l-1} \binom{l-1}{2} q^k P^l + \\ & s_{12}^2 \sum_{\substack{k+l=m+2 \\ k \geq 0, l \geq 4}} \tilde{h}_{k, l-2} \binom{l-2}{2} q^k P^l + 3s_{30} \sum_{\substack{k+l=m+2 \\ k \geq 2, l \geq 0}} \tilde{h}_{k-2, l+1} (l+1) q^k P^l + \\ & 2s_{21} \sum_{\substack{k+l=m+2 \\ k \geq 1, l \geq 1}} \tilde{h}_{k-1, l} l q^k P^l + s_{12} \sum_{\substack{k+l=m+2 \\ k \geq 0, l \geq 2}} \tilde{h}_{k, l-1} (l-1) q^k P^l - \\ & s_{21}^2 \sum_{\substack{k+l=m+2 \\ k \geq 4, l \geq 0}} \gamma_{k-2, l} \binom{k-2}{2} q^k P^l - 4s_{21}s_{12} \sum_{\substack{k+l=m+2 \\ k \geq 3, l \geq 1}} \gamma_{k-1, l-1} \binom{k-1}{2} q^k P^l - \\ & (6s_{21}s_{03} + 4s_{12}^2) \sum_{\substack{k+l=m+2 \\ k \geq 2, l \geq 2}} \gamma_{k, l-2} \binom{k}{2} q^k P^l - 12s_{12}s_{03} \sum_{\substack{k+l=m+2 \\ k \geq 1, l \geq 3}} \gamma_{k+1, l-3} \binom{k+1}{2} q^k P^l - \\ & 9s_{03}^2 \sum_{\substack{k+l=m+2 \\ k \geq 0, l \geq 4}} \gamma_{k+2, k-4} \binom{k+2}{2} q^k P^l - s_{21} \sum_{\substack{k+l=m+2 \\ k \geq 2, l \geq 0}} \gamma_{k-1, l} (k-1) q^k P^l - \\ & 2s_{12} \sum_{\substack{k+l=m+2 \\ k \geq 1, l \geq 1}} \gamma_{k, l-1} k q^k P^l - 3s_{03} \sum_{\substack{k+l=m+2 \\ k \geq 0, l \geq 2}} \gamma_{k+1, l-2} (k+1) q^k P^l. \end{aligned}$$

Es importante señalar que las relaciones (2.38)–(2.40) son la esencia del algoritmo, donde las funciones F_r en (2.40) dependen de H_m, \dots, H_{r-1} obtenidas por la expansión del Hamiltoniano original (2.37), como también de S_s encontradas para $s = 3, 4, \dots, r - m + 1$, que definen la función generadora (2.40).

2.8. La forma normal de Lie o método de Deprit-Hori

Otro método matemático para simplificar el Hamiltoniano por medio de un cambio de variables es el método de Lie desarrollado por Deprit (1969) [3] y Hori [6] y posteriormente extendido por Kamel (1970) [7] y Henrard (1970) [4]. Es un procedimiento general de cambio de coordenadas en un sistema de ecuaciones el cual depende de un pequeño parámetro. El método de Deprit original era solamente para sistemas Hamiltonianos, pero las extensiones de Kamel y Henrard fueron para sistemas de ecuaciones no Hamiltonianas. Aquí, por razones obvias, trataremos sólo el caso Hamiltoniano.

2.9. Cambio de coordenadas simplécticas próxima de la identidad

La idea general de este método es generar una transformación de coordenadas simplécticas dependiendo de un pequeño parámetro como la solución general de un sistema Hamiltoniano.

Definición 7 *Se dice $X(y, \epsilon)$ es una transformación de coordenadas simplécticas próxima de la identidad si X es simpléctica para cada ϵ fijo y es de la forma $X(y, \epsilon) = y + O(\epsilon)$, i.e., $X(y, 0) = y$.*

Considerando $X(y, \epsilon)$ un cambio de coordenadas simplécticas próxima de la identidad y dado que $X(y, 0) = y$, $\frac{\partial X}{\partial y}(y, \epsilon)$ es no singular para ϵ pequeño, se sigue por el Teorema de la Función Inversa que la aplicación $y \rightarrow X(y, \epsilon)$ tiene una función inversa diferenciable para ϵ suficientemente pequeño. Ambas, X y su inversa, son simplécticas para cada ϵ fijo.

Consideremos el sistema Hamiltoniano autónomo

$$\frac{dx}{d\epsilon} = J\nabla W(x, \epsilon) \tag{2.41}$$

y la condición inicial

$$x(0) = y, \tag{2.42}$$

donde W es diferenciable. De la teoría básica de E.D.O. tenemos que la solución general del problema anterior es una función diferenciable $X(y, \epsilon)$, tal que $X(y, 0) = y$, y del Teorema 1 de la subsección 2.2.2 que es simpléctica para cada ϵ fijo. Ésto es, la ecuación diferencial

(2.41) y la condición inicial (2.42) definen una transformación de coordenadas simplécticas próxima de la identidad.

Recíprocamente, sea $X(y, \epsilon)$ una transformación de coordenadas simplécticas próxima de la identidad; así, existe una función inversa $Y(x, \epsilon)$ tal que $X(Y(x, \epsilon), \epsilon) = x$ y $Y(X(y, \epsilon), \epsilon) = y$, donde Y es simpléctica donde este definida. Derivando $Y(X(y, \epsilon), \epsilon) = y$ con respecto a ϵ tenemos

$$\frac{\partial Y(X(y, \epsilon), \epsilon)}{\partial x} \frac{\partial X(y, \epsilon)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial Y(X(y, \epsilon), \epsilon)}{\partial \epsilon} = 0,$$

o

$$\frac{\partial X(y, \epsilon)}{\partial \epsilon} = - \left[\frac{\partial Y(X(y, \epsilon), \epsilon)}{\partial x} \right]^{-1} \frac{\partial Y(X(y, \epsilon), \epsilon)}{\partial \epsilon}.$$

Ésto significa que $X(y, \epsilon)$ es la solución general de

$$\frac{dx}{d\epsilon} = U(x, \epsilon), \quad \text{donde} \quad U(x, \epsilon) = - \left[\frac{\partial Y(x, \epsilon)}{\partial x} \right]^{-1} \frac{\partial Y(x, \epsilon)}{\partial \epsilon}.$$

Por el Teorema 1 subsección 2.2.2 esta ecuación es Hamiltoniana; así, existe una función $W(x, \epsilon)$ tal que $U(x, \epsilon) = J\nabla W(x, \epsilon)$. Por lo tanto, hemos probado:

Lema 5 $X(y, \epsilon)$ es una transformación de coordenadas simpléctica próxima de la identidad, si y sólo si, es la solución general de una ecuación diferencial Hamiltoniana de la forma (2.41) satisfaciendo la condición inicial (2.42).

2.10. Algoritmo

Sean $X(x, \epsilon)$, $Y(x, \epsilon)$, y $W(x, \epsilon)$ como antes; así, $X(\epsilon, y)$ es la solución de (2.41) satisfaciendo (2.42). Consideremos $x = X(y, \epsilon)$ como un cambio de variables la cual depende de un parámetro. A través de este capítulo, cuando mudemos de variables no mudaremos de parámetro ϵ .

Sea $H(x, \epsilon)$ un Hamiltoniano y $G(y, \epsilon) := H(X(y, \epsilon), \epsilon)$; así, G es el Hamiltoniano H en las nuevas coordenadas.

Definición 8 Llamaremos al Hamiltoniano G la transformada de Lie de H generada por W .

Algunas veces H será denotada por H_\star , y G por H^\star , y otras veces G también será denotada por \mathcal{LH} , para mostrar que G es la transformada de Lie de H generada por W .

Sean las funciones $H = H_*$, $G = H^*$, y W expandidas en serie de Taylor con respecto al pequeño parámetro ϵ . El algoritmo del método de Lie es un conjunto de fórmulas recursivas que relacionan los términos de estas varias expansiones en serie. En particular, sea

$$H(x, \epsilon) = H_*(x, \epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon^i}{i!} \right) H_i^0(x), \quad (2.43)$$

$$G(y, \epsilon) = H^*(y, \epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon^i}{i!} \right) H_0^i(y), \quad (2.44)$$

$$W(x, \epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon^i}{i!} \right) W_{i+1}(x). \quad (2.45)$$

El método de la transformada de Lie introduce una ordenación indexada por dos índices $\{H_j^i\}$, $i, j = 0, 1, \dots$, el cual coincide con (2.43) y (2.44) cuando uno de los índices, i o j , es nulo. Los otros términos intermediarios son introducidos para facilitar los cálculos.

Denote por $\varphi(t, z)$ el flujo del sistema Hamiltoniano dado por (2.43) y defina (por abuso de notación) $F(t) = F(t, \varphi(t, z))$, entonces por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \varphi(t, t_0, z)) + \{F, H\}(t, \varphi(t, t_0, z)), \quad (2.46)$$

donde

$$\{F, H\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial F}{\partial q_j} \right).$$

Teorema 7 *Usando la notación anterior, las funciones $\{H_j^i\}$ $i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$ satisfacen las identidades recursivas*

$$H_j^i = H_{j+1}^{i-1} + \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \{H_{j-k}^{i-1}, W_{k+1}\}. \quad (2.47)$$

Demostración. Recordemos que $H^*(y, \epsilon) = G(y, \epsilon) = H(\epsilon, X(y, \epsilon), \epsilon)$, donde $X(y, \epsilon)$ es la solución general del sistema Hamiltoniano asociado a (2.43). Definiendo el operador diferencial $\mathcal{D} = \mathcal{D}_W$ por

$$\mathcal{D}F(x, \epsilon) = \frac{\partial F}{\partial \epsilon}(x, \epsilon) + \{F, W\}(x, \epsilon), \quad (2.48)$$

tenemos de (2.46),

$$\frac{d}{d\epsilon} (F(x, \epsilon)|_{x=X(\epsilon, y)}) = \mathcal{D}F(x, \epsilon)|_{x=X(y, \epsilon)}. \quad (2.49)$$

Defina nuevas funciones por $H^0 = H$, $H^i = \mathcal{D}H^{i-1}$, $i \geq 1$, cuya expansión en serie es

$$H^i(x, \epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon^k}{k!} \right) H_k^i(x). \quad (2.50)$$

Ya que el resultado obtenido aplicando \mathcal{D} al j -ésimo término de la expansión en serie de H^{i-1} es

$$\left(\frac{\epsilon^j}{j!} \right) \{H_j^{i-1}, W\}(x, \epsilon) + \frac{\epsilon^{j-1}}{(j-1)!} H_j^{i-1}(x),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} H^i(x, \epsilon) &= \mathcal{D}H^{i-1}(x, \epsilon) \\ &= \mathcal{D} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} H_j^{i-1}(x) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} \{H_j^{i-1}, W\} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\epsilon^{j-1}}{(j-1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon^j}{j!} \right) [H_{j+1}^{i-1} + \{H_j^{i-1}, W\}]. \end{aligned}$$

La suma que envuelve el corchete de Poisson puede ser analizada de la siguiente forma, donde hemos hecho $l = j + k$ y, subsecuentemente, escriba j en lugar de l :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} \{H_j^{i-1}, W\} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon^{j+k}}{j!k!} \right) \{H_j^{i-1}, W_{k+1}\} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l \frac{l!}{(l-k)!k!} \left(\frac{\epsilon^l}{l!} \right) \{H_{l-k}^{i-1}, W_{k+1}\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon^j}{j!} \right) \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \{H_{j-k}^{i-1}, W_{k+1}\}. \end{aligned}$$

Luego las funciones H_j^i se relacionan por (2.47). Falta mostrar que $H^* = G$ tiene la expansión dada por (2.44). Por el desarrollo en serie de Taylor y de (2.49) se tiene

$$\begin{aligned} G(y, \epsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon^n}{n!} \right) \frac{d^n}{d\epsilon^n} G(y, \epsilon)_{\epsilon=0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon^n}{n!} \right) \frac{d^n}{d\epsilon^n} (H(x, \epsilon)_{x=X(y, \epsilon)})_{\epsilon=0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon^n}{n!} \right) (\mathcal{D}^n H(x, \epsilon)_{x=X(y, \epsilon)})_{\epsilon=0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon^n}{n!} \right) H_0^n(x). \end{aligned}$$

Aquí hemos usado el hecho de que

$$\mathcal{D}^0 H(x, \epsilon)|_{x=X(y, \epsilon), \epsilon=0} = H(x, 0) = H_0^0,$$

$$\mathcal{D}^1 H(x, \epsilon)|_{x=X(y, \epsilon), \epsilon=0} = H^1|_{x=X(y, \epsilon), \epsilon=0} = H_0^1(x),$$

donde se verifica por inducción que

$$\mathcal{D}^n H(x, \epsilon)|_{x=X(y, \epsilon), \epsilon=0} = H_0^n(x).$$

■

Comentarios. Puesto que la transformación generada por la función W está próxima de la identidad, el primer término en H_\star y H^\star es el mismo, a saber, H_0^0 . También note que el primer término en la expansión para W comienza con W_1 . Esta convención transmite algunas propiedades agradables de las fórmulas en (2.47). Cada uno de los términos en (2.47) tiene índices sumando $i + j$, y cada término del lado derecho tiene índices superiores a $i - 1$.

Para construir la transformación de variables $X(y, \epsilon)$ note que X es la transformada de la aplicación identidad, es decir, $X(y, \epsilon) = \mathcal{L}(W)(Id)$, donde $Id(x) = x$.

La dependencia de las funciones $\{H_j^i\}$ puede ser fácilmente entendida considerando el triángulo de Lie:

$$\begin{array}{ccccccc} H_0^0 & & & & & & \\ \downarrow & & & & & & \\ H_1^0 & \rightarrow & H_0^1 & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ H_2^0 & \rightarrow & H_1^1 & \rightarrow & H_0^2 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H_3^0 & \rightarrow & H_2^1 & \rightarrow & H_1^2 & \rightarrow & H_0^3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

Los coeficientes de la expansión del Hamiltoniano antiguo H_\star están en la columna de la izquierda, y los del nuevo Hamiltoniano están sobre la diagonal. La fórmula dada en (2.47) establece que para calcular cualquier elemento en el triángulo de Lie es necesario tener las entradas en la columna en cada etapa a la izquierda y arriba. Por ejemplo, para calcular la expansión en serie para H^\star a través de los términos de orden ϵ^2 , primero calculamos H_0^1 por la fórmula

$$H_0^1 = H_1^0 + \{H_0^0, W_1\},$$

la cual nos da el término de orden ϵ , y entonces obtenemos

$$H_1^1 = H_2^0 + \{H_1^0, W_1\} + \{H_0^0, W_2\},$$

$$H_0^2 = H_1^1 + \{H_0^1, W_1\}.$$

Entonces,

$$H^*(x, \epsilon) = H_0^0(x) + \epsilon H_0^1(x) + \frac{\epsilon^2}{2} H_0^2 + \dots$$

Teorema 8 (Teorema de Perturbación General). Sean $\{\mathcal{P}_i\}_{i=0}^\infty$, $\{\mathcal{L}_i\}_{i=0}^\infty$, y $\{\mathcal{R}_i\}_{i=0}^\infty$ secuencias de espacios vectoriales de funciones diferenciables definidas sobre un dominio común O en \mathbb{R}^{2n} con las siguientes propiedades:

(i) $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$,

(ii) $H_i^0 \in \mathcal{P}_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$,

(iii) $\{\mathcal{P}_i, \mathcal{R}_j\} \subset \mathcal{P}_{i+j}$, $i, j = 0, 1, 2, \dots$,

(iv) Para cualquier $D \in \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, \dots$, existe $B \in \mathcal{L}_i$ y $C \in \mathcal{R}_i$ tal que

$$B = D + \{H^0, C\} \quad (\text{note que } H_0^0 = H_0 = H^0). \quad (2.51)$$

Entonces existe W , como en (2.45) con $W_i \in \mathcal{R}_i$, $i = 1, 2, \dots$, que genera una transformación de variables simplécticas próxima de la identidad $x \rightarrow y$ tal que el Hamiltoniano en las nuevas variables tiene una expansión en serie dada por la expresión de H^* (2.44), con $H_0^i \in \mathcal{L}_i$, $i = 1, 2, \dots$

Comentario: Siempre podemos suponer que $\mathcal{L}_0 = \emptyset$ y $\mathcal{R}_0 = \emptyset$.

Demostración. Usaremos inducción sobre los renglones del triángulo de Lie.

Hipótesis de inducción: I_n : $H_j^i \in \mathcal{P}_{i+j}$ para $0 \leq i + j \leq n$ y $W_i \in \mathcal{R}_i$, $H_0^i \in \mathcal{L}_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Tenemos que para $n = 0$, I_1 es válida ya que por hipótesis $H_0^0 \in \mathcal{P}_0$, \mathcal{L}_0 y \mathcal{R}_0 son vacíos.

Asumamos que la hipótesis es válida para I_{n-1} . Por la ecuación (2.47)

$$H_{n-1}^1 = H_n^0 + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} \{H_{n-1-k}^0, W_{k+1}\} + \{H_0^0, W_n\}. \quad (2.52)$$

De (ii) tenemos que $H_n^0 \in \mathcal{P}_n$, $H_{n-1-k}^0 \in \mathcal{P}_{n-1-k}$ ($k = 0, 1, \dots, n-2$) y $H_0^0 \in \mathcal{P}_0$. Por hipótesis de inducción se tiene $W_{k+1} \in \mathcal{R}_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, n-2$), y de (iii) tenemos que $\{H_{n-1-k}^0, W_{k+1}\} \in \mathcal{P}_n$. Así, de (2.52) tenemos

$$H_{n-1}^1 = L^1 + \{H_0^0, W_n\}, \quad (2.53)$$

donde $L^1 \in \mathcal{P}_n$ y es conocido. Nuevamente de (2.47) se tiene

$$\begin{aligned} H_{n-2}^2 &= H_{n-1}^1 + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \{H_{n-1-k}^0, W_{k+1}\} \\ &= L^1 + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \{H_{n-1-k}^0, W_{k+1}\} + \{H_0^0, W_n\}, \end{aligned}$$

y por lo tanto $H_{n-2}^2 = L^2 + \{H_0^0, W_n\}$, con $L^2 \in \mathcal{P}_n$. Análogamente de (iii) tenemos

$$H_{n-s}^s = L^s + \{H_0^0, W_n\}, \quad (2.54)$$

donde $L^s \in \mathcal{P}_n$, $s = 1, 2, \dots, n$, y así para $s = n$ se tiene

$$H_0^n = L^n + \{H_0^0, W_n\}. \quad (2.55)$$

De la relación (iv), podemos escoger una solución $H_0^n \in \mathcal{L}_n$ y $W_n \in \mathcal{R}_n$ de la ecuación (2.47). Se concluye de (2.54), hipótesis (ii) y (iii) del teorema que $H_{n-s}^s \in \mathcal{P}_n$, $s = 1, 2, \dots$. Así, I_n es verdadera y el teorema está demostrado. ■

Comentarios. La ecuación de Lie (2.51) es el corazón del problema de perturbación. H_0^0 define un sistema no perturbado cuando $\epsilon = 0$. $\mathcal{F} = \{H_0^0, \cdot\}$ es un operador lineal sobre funciones, que es llamado **operador de Lie**. La idea es analizar este operador para determinar en que espacio de funciones la ecuación (2.51) es soluble. Estrictamente hablando, el Hamiltoniano (2.44) tiene sus términos en los espacios \mathcal{P} 's ($H_i^0 \in \mathcal{P}_i$), y la ecuación en la forma normal tiene sus términos en los espacios \mathcal{L} 's ($H_i^0 \in \mathcal{L}_i$). Los espacios \mathcal{L} 's son menores que los espacios \mathcal{P} 's ($\mathcal{L}_i \subset \mathcal{P}_i$). La transformación es generada por una ecuación diferencial Hamiltoniana con función Hamiltoniano W en los espacios \mathcal{R} 's ($W_i \in \mathcal{R}_i$). D es un término antiguo, B es un nuevo término y C es un generador.

Este teorema es formal, es decir, la convergencia de la serie no es discutida. En algunos casos de interés la serie diverge, pero aún así, se pueden obtener informaciones valiosas analizando los primeros términos de la forma normal. El siguiente resultado muestra que podemos parar el proceso en cualquier orden, digamos N , para obtener una transformación simpléctica W la cual es un polinomio en ϵ , por lo que es convergente. De la demostración dada en el teorema anterior, es claro que los términos de orden superior a N en la serie H^* no son afectados por el truncamiento de H .

Corolario 3 Sea $N \geq 1$ dado, y sean $\{\mathcal{P}_i\}_{i=0}^N$, $\{\mathcal{L}_i\}_{i=1}^N$, y $\{\mathcal{R}_i\}_{i=1}^N$ secuencias de espacios vectoriales de funciones diferenciables definidas sobre un dominio común O en \mathbb{R}^{2n} con las siguientes propiedades:

(i) $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$,

(ii) $H_i^0 \in \mathcal{P}_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$,

(iii) $\{\mathcal{P}_i, \mathcal{R}_j\} \subset \mathcal{P}_{i+j}$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, N$,

(iv) Para cualquier $D \in \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, existe $B \in \mathcal{L}_i$ y $C \in \mathcal{R}_i$ tal que

$$B = D + \{H_0^0, C\}. \quad (2.56)$$

Entonces existe un polinomio W ,

$$W(x, \epsilon) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\epsilon^i}{i!} \right) W_{i+1}(x), \quad (2.57)$$

con $W_i \in \mathcal{R}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, tal que la transformación de variables $x = X(y, \epsilon)$, donde $X(y, \epsilon)$ es la solución general de $\frac{dx}{d\epsilon} = J\nabla W(x, \epsilon)$, $x(0) = y$, transforma el Hamiltoniano convergente

$$H(x, \epsilon) = H_*(x, \epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon^i}{i!} \right) H_i^0(x),$$

en el Hamiltoniano convergente

$$G(y, \epsilon) = H^*(y, \epsilon) = \sum_{i=0}^N \left(\frac{\epsilon^i}{i!} \right) H_0^i(x) + O(\epsilon^{N+1}), \quad (2.58)$$

donde $H_0^i \in \mathcal{L}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$.

2.11. Forma normal en un equilibrio

Consideremos un Hamiltoniano analítico H , el cual tiene una solución de equilibrio en el origen de \mathbb{R}^{2n} . Entonces H tiene un desarrollo en serie de Taylor de la forma

$$H(x) = H_*(x) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i(x), \quad (2.59)$$

donde H_i es un polinomio homogéneo en x de grado $i + 2$; así $H_0(x) = \frac{1}{2}x^T Sx$, donde $S \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ simétrica y $A = JS$ es una matriz Hamiltoniana. La ecuación linealizada alrededor del punto de equilibrio $x = 0$ es

$$\dot{x} = Ax = JSx = J\nabla H_0(x), \quad (2.60)$$

y la solución general de (2.60) es $\varphi(t, x) = e^{At}x$. Para el estudio de las soluciones de (2.59) próximas de la solución de equilibrio será importante colocar las ecuaciones de movimiento en la forma normal.

2.12. Caso donde la parte lineal es semisimple

Recordemos que una matrix $A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ es *semisimple* si ésta tiene $2n$ autovectores linealmente independientes los cuales pueden ser reales o complejos.

Teorema 9 *Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ semi simple. Entonces existe una mudanza formal de coordenadas simplécticas,*

$$x = X(y) = y + \dots, \quad (2.61)$$

la cual transforma el Hamiltoniano (2.59) a

$$H^*(y) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(y), \quad (2.62)$$

donde H^i es un polinomio homogéneo de grado $i + 2$ tal que

$$H^i(e^{tA}y) = H^i(y) \Leftrightarrow \{H^i, H^0\} = 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (2.63)$$

para todo $y \in \mathbb{R}^{2n}$, y para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para la demostración de este teorema, puede consultar [22].

Observación. La fórmula (2.63) dice que H^i es una integral primera del sistema lineal (2.60); es decir, $\{H^i, H^0\} = 0$ para todo i .

2.13. El caso general de una matriz Hamiltoniana

Veremos otro caso donde conseguimos una forma normal. Este método está basado en el siguiente lema de Álgebra Lineal, conocido como método alternativo de Fredholm, y en un producto interno definido sobre los polinomios homogéneos.

Lema 6 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita el cual posee un producto interno. Sea $A : V \rightarrow V$ una transformación lineal, A^* su adjunta. Entonces $V = R \oplus K^*$, donde R es la imagen de A y K^* es el kernel de A^* .*

Sea $\mathcal{P} = \mathcal{P}_i$ el espacio vectorial de los polinomios homogéneos (con coeficientes reales) de grado i en las variables $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Así, si $P \in \mathcal{P}$ se tiene

$$P(x) = \sum_{|k|=i} p_k x^k = \sum_{|k|=i} p_{k_1 k_2 \dots k_{2n}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{2n}^{k_{2n}}. \quad (2.64)$$

Defina el operador diferencial $P(\partial)$

$$P(\partial) = \sum_{|k|=i} p_k \frac{\partial^k}{\partial x^k}, \quad (2.65)$$

donde introducimos la notación

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} = \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial x_2^{k_2}} \cdots \frac{\partial^{k_{2n}}}{\partial x_{2n}^{k_{2n}}}. \quad (2.66)$$

Sea $Q \in \mathcal{P}$, $Q(x) = \sum q_h x^h$ otro polinomio homogéneo y defina el siguiente producto interno sobre \mathcal{P} :

$$\langle P, Q \rangle = P(\partial)Q. \quad (2.67)$$

Para verificar que (2.67) define un producto interno observamos que $\frac{\partial^k x^h}{\partial x^k} = 0$ si $k \neq h$ y $\frac{\partial^k x^h}{\partial x^k} = k! = k_1!k_2! \dots k_{2n}!$ si $k = h$; así

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{|k|=i} k! p_k q_k. \quad (2.68)$$

Sea $A = JS$ una matriz Hamiltoniana donde S es la matriz simétrica del Hamiltoniano cuadrático H^0 ; así, $H^0(x) = \frac{1}{2}x^T Sx$. Del Corolario 3 y de la demostración del Teorema 9, el operador que interesa es $L_A : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, donde

$$L_A(P)(x) = \{H^0, P\}(x) = -\frac{\partial P}{\partial x} Ax = -\frac{d}{dt} P(e^{At}x)_{t=0}. \quad (2.69)$$

Lema 7 *Sea $A : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ como antes. Entonces el adjunto de L_A con respecto al producto interno definido anteriormente en \mathcal{P} es L_{A^T} .*

Demostración. Debemos mostrar que

$$\langle P, L_A Q \rangle = \langle L_{A^T} P, Q \rangle, \quad (2.70)$$

para todo $P, Q \in \mathcal{P}$. Observe que si $y = Bx$ (con $B \in GL(n, \mathbb{R})$), entonces

$$\frac{\partial F(y)}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{\partial F(y)}{\partial y^i} \right) \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) = \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{\partial F(y)}{\partial y^i} \right) B_{ji},$$

donde se tiene que $\frac{\partial}{\partial x} = B^T \frac{\partial}{\partial y}$. De ésto se tiene,

$$\langle P, Q \circ B \rangle = P(\partial_x)Q(Bx) = P(B^T \partial_y)Q(y) = \langle P \circ B^T, Q \rangle.$$

En particular, haciendo $B = e^{At}$ tenemos que $\langle P, Q \circ e^{At} \rangle = \langle P \circ e^{A^T t}, Q \rangle$. Derivando esta relación con respecto a t y evaluando en $t = 0$ obtenemos el resultado deseado. ■

Teorema 10 *Sea A una matriz Hamiltoniana. Entonces existe una transformación formal de coordenadas simplécticas, $x = X(y) = y + \dots$, la cual transforma el Hamiltoniano (2.59) en*

$$H^*(y) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(y), \quad (2.71)$$

donde H^i es un polinomio homogéneo de grado $i + 2$ tal que

$$H^i(e^{A^T t} y) = H(y) \Leftrightarrow \{H_0^T, H^i\} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (2.72)$$

para todo $y \in \mathbb{R}^{2n}$, $t \in \mathbb{R}$, y H_0^T es la función Hamiltoniana del sistema $\dot{x} = A^T x$.

Demostración. Notemos primero que $H_0^T(x) = \frac{1}{2}x^T R x$ es la forma cuadrática para el Hamiltoniano de la ecuación lineal adjunta; así, $A^T = J R$ y entonces la ecuación (2.72) es equivalente a

$$\{H^i, H_0^T\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

A continuación daremos un esbozo de la demostración ya que los argumentos son similares a los de la prueba del Teorema 9. Sea $L_A : \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_i$ definida por $L_A(G) = \{H_0, G\}$, donde \mathcal{P}_i es el espacio vectorial de los polinomios homogéneos de grado $i + 2$. Por los Lemas 6 y 7 tenemos que $\mathcal{P}_i = \mathcal{U}_i \oplus \mathcal{V}_i$ donde, $\mathcal{U}_i = \ker L_{A^T}$ y $\mathcal{V}_i = \text{Im} L_A$. De donde, dado $D \in \mathcal{P}_i$, existen $B \in \mathcal{L}_i$ y $C \in \mathcal{P}_i$ tal que

$$D = B - L_A(C).$$

Luego, para poder aplicar Teorema 8, escogemos los espacios vectoriales polinomiales:

$$\mathcal{L}_i = \mathcal{U}_i, \quad \mathcal{R}_i = \mathcal{P}_i,$$

así, dado $D \in \mathcal{P}_i$, existen $B \in \mathcal{L}_i$ y $C \in \mathcal{R}_i$ tal que la ecuación

$$D = B + \{H^0, C\},$$

tiene solución. De esta forma la condición (2.51) en (iv) del Teorema 8 es satisfecha. La verificación de las demás condiciones es simple y por lo tanto (de forma análoga a la prueba del Teorema 9) existe una transformación formal de coordenadas simplécticas satisfaciendo todas las propiedades requeridas. ■

2.14. Teorema de la Curva Invariante de Moser

A continuación vamos a enunciar uno de los teoremas más famosos en la mecánica de Hamilton el cual afirma que existen suficientes curvas invariantes que rodean un determinado punto fijo que aseguran la estabilidad de dicho punto fijo. Este es el llamado *Teorema de la Curva Invariante*, resultado que será de gran importancia para probar la estabilidad de los puntos de equilibrio que estudiaremos más adelante.

Teorema 11 *Considere la aplicación $F : (r, \varphi) \rightarrow (r', \varphi')$ dada por*

$$\begin{aligned} r' &= r + \epsilon^{p+1}c(r, \varphi, \epsilon) \\ \varphi' &= \varphi + w + \epsilon^p h(r) + \epsilon^{p+1}d(r, \varphi, \epsilon), \end{aligned} \tag{2.73}$$

donde

- c y d son funciones diferenciables para $0 \leq a \leq r < b < \infty$, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$,
- Para todo φ , c y d son funciones 2π -periódicas en φ ,
- p y l son enteros $p \geq 0$, $l \geq 1$,
- h es una función diferenciable para $0 \leq a \leq r < b < \infty$,
- $\frac{dh}{dr} \neq 0$ para $0 \leq a \leq r < b < \infty$,
- Si E es cualquier curva cerrada continua de la forma

$$E = \{(r, \varphi)/r = \Theta(\varphi), \Theta : \mathbb{R} \rightarrow [a, b] \text{ continua y } 2\pi\text{-periódica}\},$$

entonces, $E \cap F(E) \neq \emptyset$.

Entonces para ϵ suficientemente pequeño, existe una curva Γ continua F -invariante de la forma

$$\Gamma = \{(r, \varphi)/r = \Phi(\varphi), \Phi : \mathbb{R} \rightarrow [a, b] \text{ continua y } 2\pi\text{-periódica}\}.$$

Para la demostración y mayor información sobre este teorema puede consultar [17].

2.15. Estabilidad de soluciones de equilibrio para sistemas Hamiltonianos con un grado de libertad

En esta sección estudiamos la estabilidad de una solución de equilibrio para un sistema Hamiltoniano con un grado de libertad.

Considere la función Hamiltoniana

$$H(q, p, t), \quad q, p \in \mathbb{R}, \quad (2.74)$$

donde $q = p = 0$ es una solución de equilibrio y H es 2π -periódica en t . Además, suponga mediante un cambio de coordenadas simpléctico conveniente, el Hamiltoniano (2.74) en las coordenadas acción-ángulo está dado por

$$K = K(r, \varphi, t) = \Psi(\varphi)r^n + \mathcal{O}(r^{n+\frac{1}{2}}), \quad (2.75)$$

donde $n = m/2$ con $m \geq 3$, entero. Supongamos que (2.75) es analítica en \sqrt{r} , φ , t , τ -periódica en φ y T -periódica en t .

Normalmente para escribir el Hamiltoniano (2.74) en la forma (2.75), primero obtenemos la forma normal de (2.74) y luego hacemos el cambio de coordenadas acción-ángulo.

Teorema 12 (*Teorema de Sokolskii–Cabral–Meyer*) *Si K es una función Hamiltoniana definida como en (2.75), entonces*

- i) Si $\Psi(\varphi) \neq 0$ para todo φ , entonces el origen $r = 0$ es un equilibrio estable en el sentido de Lyapunov.*
- ii) Si $\Psi(\varphi)$ tiene un cero simple, es decir, si el número φ^* existe tal que $\Psi(\varphi^*) = 0$ y $\Psi'(\varphi) \neq 0$, el origen $r = 0$ es un equilibrio inestable.*

Demostración. Para la demostración de la estabilidad, supongamos que $\Psi(\varphi) \neq 0$ para todo φ , sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\Psi(\varphi) > 0$. Considere el Hamiltoniano truncado $k = \Psi(\varphi)r^n$ y defina para cada $k > 0$, la variable $I = I(k)$ por

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^\tau r(k, \varphi) d\varphi,$$

donde

$$r(k, \varphi) = \frac{k^{1/n}}{\Psi(\varphi)^{1/n}}.$$

Considere la función generadora $S(I, \varphi)$ definida por

$$S(I, \varphi) = \int_0^\varphi r(k, \theta) d\theta = \int_0^\varphi \frac{k^{1/n}}{\Psi(\varphi)^{1/n}} d\theta.$$

Para eliminar el factor $k^{1/n}$, hacemos $S(I, \varphi) = \beta IG(\varphi)$ con

$$\beta = \frac{2\pi}{\int_0^\tau \frac{d\theta}{\Psi(\theta)^{1/n}}} \quad \text{y} \quad G(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\Psi(\theta)^{1/n}}.$$

Ahora, de acuerdo con el Teorema 2 descrito en la subsección 2.2.3, la función S define una transformación simpléctica $(r, \varphi) \rightarrow (I, W)$ por las relaciones

$$W = \frac{\partial S}{\partial I} = \beta G(\varphi) \quad \text{y} \quad r = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \beta IG'(\varphi).$$

Y el Hamiltoniano original (2.75) es transformado en el nuevo Hamiltoniano (analítico en \sqrt{I}, W, t)

$$K(I, W, t) = \beta^n I^n + \mathcal{O}(I^{n+1/2}),$$

desde que $G'(\varphi) = \Psi(\varphi)^{-1/n}$, tenemos que $\Psi(\varphi)G'(\varphi)^n = 1$. Note que $\Psi(\varphi)$ es τ -periódica, de hecho

$$W(r, \varphi + \tau) = \beta G(\varphi + \tau) = \beta \int_0^{\varphi + \tau} \frac{d\theta}{\Psi(\theta)^{1/n}} = \beta \int_0^\tau \frac{d\theta}{\Psi(\theta)^{1/n}} + \beta \int_\tau^{\varphi + \tau} \frac{d\theta}{\Psi(\theta)^{1/n}} = 2\pi + W(r, \varphi),$$

así, W es una variable angular verdadera, por lo tanto $K(I, W, t)$ es 2π -periódica en W , y claramente, T -periódica en t .

Considere el cambio de coordenadas $(I, W) \rightarrow (J, \psi)$ definida por

$$I = \epsilon\gamma J, \quad W = \psi,$$

donde $\epsilon > 0$ es un pequeño parámetro, $1 \leq J \leq 2$ y γ es escogido tal que $\beta^n \gamma^{n-1} = 1/n$. Esta es un cambio de coordenadas simplécticas con multiplicador $\epsilon\gamma$, así, el nuevo Hamiltoniano está dado por

$$\mathcal{K}(J, \psi, t) = \frac{1}{n} \epsilon^{n-1} J^n + \mathcal{O}(\epsilon^{n-1/2}),$$

y las correspondientes ecuaciones Hamiltonianas son

$$\frac{dJ}{dt} = \mathcal{O}(\epsilon^{n-1/2}), \quad \frac{d\psi}{dt} = -\epsilon^{n-1} J^{n-1} + \mathcal{O}(\epsilon^{n-1/2}),$$

con el lado derecho analítico en J, ψ, t , 2π -periódico en ψ y T -periódico en t , con $1 \leq J \leq 2$.

Integrando entre $t = 0$ y $t = T$, y denotado por J, ψ los valores iniciales y J_1, ψ_1 los valores finales, obtenemos la aplicación

$$\begin{aligned} J_1 &= J + \epsilon^{n-1/2} F_1(J, \psi, \epsilon), \\ \psi_1 &= \psi - \epsilon^{n-1} T J^{n-1} + \epsilon^{n-1/2} F_2(J, \psi, \epsilon), \end{aligned}$$

definida y analítica en la región $1 \leq J \leq 2$, $\psi \in \mathbb{R}$, $|\epsilon| < \epsilon_0$, con F_1, F_2 periódica en ψ . Esta aplicación preserva área en virtud del carácter Hamiltoniano de las ecuaciones diferenciales. Por lo tanto, por el Teorema de la curva invariante de Moser 11 existe, para ϵ pequeño, curvas invariantes $J = J(\psi) = J(\psi + 2\pi)$, próximas de círculos, esto es, con $J'(\psi) \sim 0$. Dado que $I = \epsilon\gamma J$, la correspondiente curva $I = I(\varphi)$ puede ser tomada interior en una vesindad suficientemente pequeña del origen (tomando ϵ suficientemente pequeño). En el espacio 3-dimensional (I, ψ, t) (considerando $\dot{t} = 1$), identificando las secciones $t = 0$ y $t = T$ obtenemos un toro formado por curvas soluciones que comienza sobre una curva cerrada $I = I(\psi)$. Por la unicidad de las soluciones, cualquier solución $(I(t), \psi(t))$ que comienza en un punto interior de la región acotada por la curva $I = I(\psi)$ no puede cruzar el toro y por lo tanto, $I(t)$ permanece pequeña. Por lo tanto, $I(t)$ permanecerá pequeña para todo t . Puesto que las soluciones están en el interior de un conjunto compacto éstas estarán definidas para todo tiempo. Esto prueba la estabilidad, en el sentido que dado $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $r(0) < \delta$ entonces $r(t) < \eta$ para todo t .

Ahora para demostrar la inestabilidad, asuma que $\Psi(\varphi^*) \neq 0$ y $\Psi'(\varphi^*) > 0$. Escoja $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\Psi(\varphi) \neq 0, \quad \text{y} \quad \Psi'(\varphi) > 0 \quad \text{para} \quad 0 < |\varphi - \varphi^*| \leq \delta,$$

así, $\Psi(\varphi) \neq 0$ si $-\delta < \varphi - \varphi^* < 0$ y $\Psi(\varphi) > 0$ si $0 < \varphi - \varphi^* < \delta$. Considere la función

$$V = r^n \sin \Psi,$$

donde $\Psi = \frac{\pi}{2\delta}(\varphi - \varphi^* + \delta)$.

Defina la región Ω como el conjunto de puntos (r, φ, t) tal que

$$\varphi^* - \delta < \varphi < \varphi^* + \delta.$$

Entonces, $V > 0$ en Ω y $V = 0$ sobre $\partial\Omega$, la frontera de Ω . La derivada de V a lo largo de las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial K}{\partial \varphi} = r^n \Psi'(\varphi) + \mathcal{O}(r^{n+1/2}), \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\partial K}{\partial r} = -nr^{n-1} \Psi(\varphi) + \mathcal{O}(r^{n-1/2}), \end{aligned}$$

es dada por

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial t} = nr^{2n-1}[\Psi'(\varphi) \sin \Psi - \frac{\psi}{2\delta} \Psi(\varphi) \cos \Psi] + \mathcal{O}(r^{2n-1/2}).$$

Para $0 < \varphi - \varphi^* < \delta$, tenemos $\pi/2 < (\pi/2\delta)(\varphi - \varphi^* + \delta) < \pi$, así $\cos \Psi < 0$. También para $-\delta < \varphi - \varphi^* < 0$, se tiene $\cos \Psi > 0$ y por lo tanto,

$$\Psi(\varphi) \cos \Psi < 0 \quad \text{para} \quad 0 < |\varphi - \varphi^*| < \delta.$$

Dado que $\Psi'(\varphi) > 0$ y $\sin \Psi > 0$ sobre $|\varphi - \varphi^*| < \delta$, tenemos $\Psi'(\varphi) \sin \Psi > 0$ en este intervalo. Como para la función en el interior de los corchetes tenemos que los dos sumandos no se anulan simultáneamente sobre el intervalo compacto $|\varphi - \varphi^*| \leq \delta$, se sigue que esta tiene un mínimo positivo, y por lo tanto, para r pequeño, concluimos que $dV/dt > 0$ sobre Ω , si r es suficientemente pequeño. Entonces por el teorema de Chetaev [22], se sigue que el equilibrio es inestable. \blacksquare

Consideremos ahora la siguiente variación del sistema Hamiltoniano (2.75)

$$K = K(r, \varphi, t, \epsilon) = \epsilon^k \Psi(\varphi) r^n + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}), \quad (2.76)$$

donde $2n$ y k son enteros positivos.

Teorema 13 *Suponga que K definida en (2.76) es analítica en r, φ, t , τ -periódica en φ y T -periódica en t para todo $1/2 \leq r \leq 3$ y todo $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Si $\Psi(\varphi) \neq 0$ para todo φ , entonces si ϵ_0 es suficientemente pequeño cualquier solución del sistema Hamiltoniano*

$$\dot{r} = \frac{\partial K}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{\partial K}{\partial r}, \quad (2.77)$$

la cual comienza con $|r(0)| \leq 1$ para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ satisface $|r(t)| \leq 2$ para todo t .

Demostración. Consideremos el Hamiltoniano truncado

$$k = \epsilon^k \Psi(\varphi) r^n, \quad \text{así,} \quad r = \left(\frac{k}{\epsilon^k \Psi(\varphi)} \right)^{\frac{1}{n}},$$

y defina, para cada $k > 0$, la variable $I = I(K)$ por

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^\tau r(k, \varphi) d\varphi,$$

donde

$$r(k, \varphi) = \left(\frac{k}{\epsilon^k \Psi(\varphi)} \right)^{1/n}.$$

Considere la función generadora $S(I, \varphi)$ definida por

$$S(I, \varphi) = \int_0^\varphi r(k, \theta) d\theta$$

Para eliminar el factor $(\frac{k}{e^k})^{1/n}$, hacemos $S(I, \varphi) = \beta IG(\varphi)$, donde

$$\beta = \frac{2\pi}{\int_0^\varphi \frac{d\theta}{\Phi(\theta)^{1/n}}} \quad \text{y} \quad G(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\Phi(\theta)^{1/n}}.$$

Observe que $S(I, \varphi)$, β y $G(\varphi)$ son como en el Teorema (2.75), por lo tanto, existe una curva invariante para la aplicación sección de Poincaré la cual separa $r = 1$ de $r = 2$ tal como se demostró en el Teorema (2.75). Así, el teorema queda demostrado. ■

Otra de las variaciones muy importantes de la función Hamiltoniana (2.75) es la siguiente.

$$K = K(r, \varphi, t) = \Psi(\varphi)r^\alpha + K^*(r, \varphi, t, H^0) \quad \text{con} \quad \alpha > 1, \quad K^* = \mathcal{O}(r^{\alpha+\alpha_1}), \quad \alpha_1 > 0, \quad (2.78)$$

donde la función Ψ y K^* son τ -periódicos en φ , además, K^* es 2π -periódico en t . En (2.78) H^0 es un valor suficientemente pequeño de la energía constante.

Teorema 14 *Si K es una función Hamiltoniana definida como en (2.78), entonces*

- i) Si $\Psi(\varphi)$ no tiene raíces reales cuando $0 \leq \varphi \leq \tau$, entonces el origen es un equilibrio estable en el sentido de Lyapunov.*
- ii) Si el número φ^* existe de modo que $\Psi(\varphi^*) = 0$ pero $\Psi'(\varphi^*) \neq 0$, entonces el origen es un equilibrio inestable.*

La demostración de este resultado se encuentra en [19].

2.16. Estabilidad de soluciones de equilibrio en sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad, en el caso autónomo

En esta sección recordaremos los principales teoremas de estabilidad para sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad. *El Teorema de la Curva Invariante de Moser* puede ser usado para establecer resultados de estabilidad de puntos de equilibrio en sistemas Hamiltonianos autónomos con dos grados de libertad. En particular, se tiene el *Teorema de Estabilidad de Arnold*, cuya primera formulación es la siguiente.

Teorema 15 (Teorema de Arnold, versión simplificada) Consideremos el Hamiltoniano con dos grados de libertad

$$H = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \frac{\beta_{11}}{4} r_1^2 + \frac{\beta_{12}}{2} r_1 r_2 + \frac{\beta_{22}}{4} r_2^2 + H^*(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2), \quad (2.79)$$

donde $H^*(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2) = \mathcal{O}(r_j^{5/2})$, luego:

1. Si $\omega_1 \omega_2 > 0$ la solución de equilibrio es estable.
2. Si $\omega_1 \omega_2 < 0$ y $D = \beta_{11} \omega_2^2 - 2\beta_{12} \omega_1 \omega_2 + \beta_{22} \omega_1^2 \neq 0$ entonces la solución de equilibrio es inestable.

Demostración. El incisi 1) es consecuencia del Teorema de Lyapunov. Para probar el inciso 2) consideremos inicialmente la siguiente transformación de coordenadas ϵ^{-2} -simpléctica

$$(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (I_1 = \epsilon^{-2} r_1, I_2 = \epsilon^{-2} r_2, \varphi_1, \varphi_2),$$

luego la función Hamiltoniana asociada a (2.79) es dada por

$$F = \epsilon^{-2} H(\epsilon^2 I_1, \epsilon^2 I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{\omega_1}{2} I_1 + \frac{\omega_2}{2} I_2 + \epsilon^2 \left[\frac{\beta_{11}}{4} I_1^2 + \frac{\beta_{12}}{2} I_1 I_2 + \frac{\beta_{22}}{4} I_2^2 \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (2.80)$$

y las ecuaciones diferenciales asumen la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{I}_j &= 2F_{\varphi_j} = \mathcal{O}(\epsilon^3), \\ \dot{\varphi}_j &= -2F_{I_j} = -(\omega_j + \epsilon^2 \sum_{i=1}^2 \beta_{ji} I_i) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (2.81)$$

La superficie de enregía $F = \text{constante}$ no es en general compacta. De hecho, $F = 0$ define una superficie tridimensional conteniendo el origen, vea la siguiente figura.

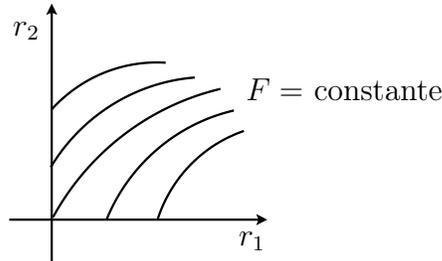


Figura 1: Superficie tridimensional.

Restringiremos nuestra atención a una superficie de enregía

$$F = c, \quad \text{donde} \quad |c| < \frac{\omega_1}{2}. \quad (2.82)$$

Nuestro objetivo será mostrar que las soluciones no pueden escapar sobre cualquiera de estas superficies. Usando

$$I_1 = I, \quad \varphi_1 = \varphi,$$

y φ_2 como variable independiente, eliminando I_2 de (2.82), y obtenemos

$$I_2 = \Phi(I, \varphi, \varphi_2) = -\frac{\omega_1}{\omega_2} \left(I - \frac{2c}{\omega_1} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.83)$$

que por (2.82) es positivo para ϵ suficientemente pequeño si restringimos $I = I_1$ a $1 \leq I \leq 2$, o equivalentemente en las variables originales

$$\epsilon^2 \leq I_1^2 \leq 2\epsilon^2.$$

Usando φ_2 como variable independiente, en vez de t encontramos de (2.81) que

$$\frac{dI}{d\varphi_2} = -\frac{F_\varphi}{F_{I_2}}, \quad \frac{d\varphi}{d\varphi_2} = \frac{F_{I_1}}{F_{I_2}}. \quad (2.84)$$

Se verifica que sobre la superficie $F = c$ estas ecuaciones asumen la forma

$$\frac{dI}{d\varphi_2} = \Phi_\varphi, \quad \frac{d\varphi}{d\varphi_2} = -\Phi_I, \quad (2.85)$$

donde Φ está definida por (2.83).

Este sistema (2.85) es también Hamiltoniano, con un grado de libertad, pero no autónomo. Para eliminar la variable independiente seguimos el flujo de $\varphi_2 = 0$ hasta la intersección con $\varphi_2 = 2\pi$. Esto define una aplicación, la cual por el Teorema de Liouville preserva área, y así, ahora trataremos de usar el Teorema de la curva invariante. En la figura 2 ilustramos la situación en análisis.

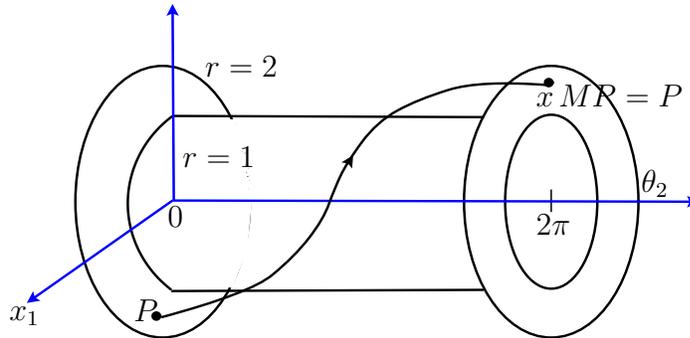


Figura 2: Aplicación de Poincaré.

Para determinar esta aplicación de forma aproximada, integramos el sistema (2.84) omitiendo el error $\mathcal{O}(\epsilon^3)$. Dado que $F_\varphi = \mathcal{O}(\epsilon^3)$ se tiene $I(2\pi) = I(0) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$. De donde encontramos

$$\begin{aligned} I(2\pi) &= I(0) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\ \varphi(2\pi) &= \varphi(0) + 2\pi \frac{F_{I_1}}{F_{I_2}} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= \varphi(0) + 2\pi \frac{\omega_1 + \epsilon^2(\beta_{11}I_1 + \beta_{12}I_2)}{\omega_2 + \epsilon^2(\beta_{12}I_1 + \beta_{22}I_2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Desarrollando en serie de Taylor la expresión anterior para $\epsilon = 0$ y recordando que $I_1 = I$ y la expresión (2.83) para I_2 encontramos que

$$\varphi(2\pi) = \varphi(0) + 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2} + \epsilon^2 \left[\frac{8\pi c}{\omega_2^3} (\omega_2 \beta_{12} - \omega_1 \beta_{22}) + \frac{4\pi D}{\omega_2^3} I \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

Así, nuestra aplicación es del tipo Teorema de Moser (twist) con

$$h(I) = \frac{8\pi c}{\omega_2^3} (\omega_2 \beta_{12} - \omega_1 \beta_{22}) + \frac{4\pi D}{\omega_2^3} I,$$

así, $h'(I) = \frac{4\pi D}{\omega_2^3} \neq 0$, pues por hipótesis $D \neq 0$. Por lo tanto, el Teorema de la curva invariante de Moser se aplica. Por lo que existe una curva invariante Γ separando $I = 1$ y $I = 2$. Es facil ver que las soluciones comenzando en el interior de esta curva Γ para $\varphi_2 = 0$ permanece en el interior de Γ para todo tiempo futuro.

Para probar que esto realmente establece la estabilidad de la solución nula, esbozamos el siguiente gráfico

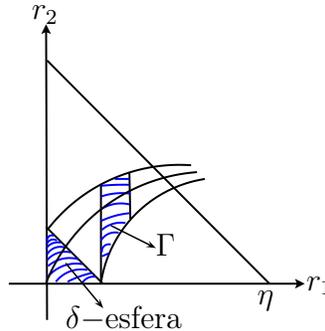


Figura 3: Descripción de la curva Γ .

el cual describe el dominio

$$|F| < \frac{|\omega_1|}{2}, \quad 1 \leq I_1 \leq 2, \quad (2.87)$$

de donde somos capaces de encontrar una curva Γ para cada nivel de F . Para mostrar la estabilidad debemos probar que las soluciones no pueden dejar una vecindad previamente determinada

$$I_1^2 + I_2^2 < \eta^2, \quad (2.88)$$

si la condición inicial está restringida a una vecindad determinada por $\delta = \delta(\eta)$. Para este propósito escogemos ϵ suficientemente pequeño tal que el dominio (2.87) está enteramente en (2.88). Luego escoja δ pequeño tal que para los valores sobre la esfera de radio δ y centrada en el origen se tenga $|F| < \frac{|\omega_1|}{2}$. Entonces las soluciones comenzando en esta δ -esfera permanecen sobre la superficie de energía $F = c$. Así las soluciones están restringidas al dominio

$$|F| \leq \frac{|\omega_1|}{2}, \quad I_1 \leq 2, \quad (2.89)$$

y luego no puede dejar la esfera de radio η y centrada en el origen. Esto prueba la estabilidad de la solución de equilibrio. ■

Teorema 16 (Teorema de Arnold, versión general) *Consideremos un sistema Hamiltoniano autónomo con dos grados de libertad con Hamiltoniano normalizado, H , que en coordenadas simplécticas x_1, x_2 y y_1, y_2 tiene la forma*

$$H = H_2 + H_4 + \cdots + H_{2N} + H^*, \quad (2.90)$$

donde

i) H es anático real en una vecindad del origen de \mathbb{R}^4 .

ii) H_{2k} , $1 \leq k \leq N$, es un polinomio homogéneo de grado k en r_1, r_2 , donde $r_i = (x_i^2 + y_i^2)/2$, $i = 1, 2$.

iii) H^* tiene una expansión en serie que comienza con términos de grado al menos $2N + 1$.

iv) $H_2 = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2$, con ω_i números reales positivos.

Si para algún k , $1 \leq k \leq N$, $D_{2k} = H_{2k}(\omega_2, \omega_1) \neq 0$, o equivalentemente, H_2 no divide H_{2k} , entonces el origen es un equilibrio estable en el sentido de Lyapunov para el sistema Hamiltoniano considerado.

Demostración. Asumamos que $D_2 = \cdots = D_{2N-2} = 0$ pero $D_{2N} \neq 0$, así, H_2 debe ser un factor de H_{2k} para $k = 1, \dots, N - 1$, luego existen polinomios homogéneos F_{2k} , $k = 1, \dots, N - 1$, de grado $2k$ tal que $H_{2k} = H_2 F_{2k-2}$. Así el Hamiltoniano (2.90) es

$$H = H_2(1 + F_2 + \cdots + F_{2N-2}) + H_{2N} + H^\#. \quad (2.91)$$

Introduciendo variables canónicas acción-ángulo $r_i = \frac{x_i^2 + y_i^2}{2}$, $\varphi_i = \arctan(\frac{y_i}{x_i})$, o sea, $x_i = \sqrt{2r_i} \cos(\varphi_i)$, $y_i = \sqrt{2r_i} \sin(\varphi_i)$ y reescalando las nuevas variables por $r_i = \epsilon^2 J_i$ y $\varphi_i = \varphi_i$, donde ϵ es un pequeño parámetro. De donde esta transformación de coordenadas es ϵ^{-2} -simpléctica; así el Hamiltoniano (por simplicidad usaremos la misma notación) está dado por

$$H = H_2 F + \epsilon^{2N-2} H_{2N-2} + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}), \quad (2.92)$$

donde $F = 1 + \epsilon^2 F_2 + \dots + \epsilon^{2N-2} F_{2N-2}$.

Fijemos una vecindad del origen, digamos $|J_i| \leq 4$, y llamemos ésta por W así que $\mathcal{O}(\epsilon^{2N-1})$ es uniformemente en W . De ahora en adelante nos restringiremos en nuestro análisis a las condiciones iniciales en esta vecindad. Sea $h \in [-1, 1]$ un nuevo parámetro. Dado que $F = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1})$, se tiene

$$H - \epsilon^{2N-1} h = KF, \quad (2.93)$$

donde

$$K = H_2 + \epsilon^{2N-2} H_{2N-2} + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}). \quad (2.94)$$

Puesto que $F = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1})$, se sigue que $F > 0$ para ϵ suficientemente pequeño, así el nivel de energía $H = \epsilon^{2N-1} h$ es el mismo nivel que $K = 0$. Sea $z = (J_1, J_2, \varphi_1, \varphi_2)$, y considere el sistema Hamiltoniano

$$\dot{z} = J\nabla H = (J\nabla K)F = K(J\nabla F). \quad (2.95)$$

Sobre el nivel $K = 0$, las ecuaciones de movimiento serán

$$\dot{z} = J\nabla H = (J\nabla K)F. \quad (2.96)$$

Para ϵ suficientemente pequeño la función F es positiva, luego podemos reparametrizar el tiempo por $d\tau = F dt$ y la ecuaciones (2.96) asumen la forma

$$z' = J\nabla K, \quad ' = \frac{d}{d\tau}. \quad (2.97)$$

Así, ha sido mostrado que en la vecindad W , para ϵ pequeño, el flujo definido por H sobre el conjunto de nivel donde $H = \epsilon^{2N-1} h$ es una reparametrización del flujo definido por K sobre el nivel $K = 0$. Así, es suficiente considerar el flujo definido por K sobre el conjunto $K = 0$. Se tiene que las ecuaciones de movimiento definidas por K son

$$\begin{aligned} J'_i &= \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}), \\ \varphi'_1 &= -\omega_1 - \epsilon^{2N-2} \frac{\partial H_{2N}}{\partial J_1} + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}), \\ \varphi'_2 &= \omega_2 - \epsilon^{2N-2} \frac{\partial H_{2N}}{\partial J_2} + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}). \end{aligned} \quad (2.98)$$

Donde consideremos las siguientes condiciones iniciales: $J_i(0) = J_i$ y $\varphi_i(0) = \varphi_0$. De estas ecuaciones la aplicacion de primer retorno o aplicación de Poincaré será calculada sobre la sección $\varphi_2 \equiv 0 \pmod{2\pi}$ en el conjunto de nivel $K = 0$, y luego el Teorema de la curva invariante será aplicado.

De la primera ecuación tenemos

$$J_i(\tau) = J_i + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}). \quad (2.99)$$

Por otro lado, llevando en cuenta que

$$H_{2N} = H_{2N}(J_1, J_2) = \sum_{k_1+k_2=N} a_{k_1, k_2} J_1^{k_1} J_2^{k_2},$$

entonces

$$\frac{\partial H_{2N}}{\partial J_2} = \sum_{k_1+k_2=2N} a_{k_1, k_2} J_1^{k_1} J_2^{k_2-1},$$

análogamente se tiene una fórmula para $\frac{\partial H_{2N}}{\partial J_1}$. Sustituyendo en la fórmula anterior los valores de $J_i(\tau)$ dados en (2.99) obtenemos

$$\frac{\partial H_{2N}}{\partial J_2}(J_1(\tau), J_2(\tau)) = \sum_{k_1+k_2=2N} a_{k_1, k_2} J_1^{k_1} J_2^{k_2-1} + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}) = \frac{\partial H_{2N}}{\partial J_2}(J_1, J_2) + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}), \quad (2.100)$$

y de forma análoga conseguimos

$$\frac{\partial H_{2N}}{\partial J_1}(J_1(\tau), J_2(\tau)) = \frac{\partial H_{2N}}{\partial J_1}(J_1, J_2) + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}). \quad (2.101)$$

De la última ecuación en (2.97) calculamos el tiempo T necesario para φ_2 crecer de 0 a 2π , es dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2} \left(1 + \frac{\epsilon^{2N-2}}{\omega_2} \frac{\partial H_{2N}}{\partial J_2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}). \quad (2.102)$$

Integrando ahora la segunda ecuación en (2.97) entre $\tau = 0$ y $\tau = T$ y denotando por $\varphi^* = \varphi_1(T)$ tenemos

$$\varphi^* = \varphi_1 + \left(-\omega_1 - \epsilon^{2N-2} \frac{\partial H_{2N}}{\partial J_1} \right) T + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}),$$

sustituyendo el valor de T obtenido en (2.102) se tiene

$$\varphi^* = \varphi_1 - 2\pi \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) - \epsilon^{2N-2} \left(\frac{2\pi}{\omega_2^2} \right) \left(\omega_2 \frac{\partial H_{2N}}{\partial J_1} + \omega_1 \frac{\partial H_{2N}}{\partial J_2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}), \quad (2.103)$$

las derivadas que aparecen en la fórmula anterior son evaluadas en (J_1, J_2) . De la relación

$$K = H_2 + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}) = \omega_1 J_1 - \omega_2 J_2 + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}) = 0,$$

tenemos que

$$J_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} J_1 + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}).$$

Sustituyendo este valor de J_2 en (2.103) y usando la identidad de Euler para funciones homogéneas obtenemos

$$\varphi^* = \varphi_1 + \alpha + \epsilon^{2N-2} \beta J_1^{N-1} + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}), \quad (2.104)$$

donde

$$\alpha = -2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad \beta = -2\pi \frac{N}{\omega_2^{N-1}} H_{2N}(\omega_2, \omega_1).$$

Por la hipótesis $D_{2N} = H_{2N}(\omega_2, \omega_1) \neq 0$ y así $\beta \neq 0$. con la ecuación

$$J_1 \rightarrow J_1 + \mathcal{O}(\epsilon^{2N-1}),$$

la ecuación (2.104) define una aplicación preservando área en una región definida por un anillo digamos $\frac{1}{2} \leq J_1 \leq 3$ para ϵ suficientemente pequeño. Por el Teorema de la curva invariante, existirá un $\epsilon_0 > 0$ tal que, cada ϵ satisfaciendo $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, existirá una curva invariante para esta aplicación dada por

$$J_1 = \rho(\varphi_1, \epsilon), \quad \text{donde} \quad \frac{1}{2} \leq \rho(\varphi_1, \epsilon) \leq 3, \quad \text{para todo} \quad \varphi_1.$$

Además, ρ es continua y 2π -periódica en φ_1 . Para todo ϵ , $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, toda las soluciones de (2.97) las cuales comienzan en $K = 0$ con condición inicial J_1 , $J_1 < \frac{1}{2}$ debe tener J_1 tal que $J_1 < 3$ para todo τ . Esto es verdad para $h \in [-1, 1]$ debido a la uniformidad en el error estimado. Dado que sobre $K = 0$ tenemos que $J_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} J_1 + \dots$, una cota sobre J_1 implica una cota sobre J_2 . Así existen constantes c y k tales que si $J_1(\tau)$, $J_2(\tau)$ satisfacen las ecuaciones en (2.97), comenzando sobre $K = 0$, y $|J_i(0)| \leq c$ entonces $|J_i(\tau)| \leq k$ para todo τ y para todo $h \in [-1, 1]$, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$.

Volviendo a las coordenadas originales, $(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2)$, y el Hamiltoniano original H , esto significa que para cada $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, toda las soluciones del sistema asociado a (2.90) las cuales comienzan sobre $H = \epsilon^{2N-1} h$ y satisfacen $|r_i(0)| \leq \epsilon^2 c$ debe satisfacer $|r_i(t)| \leq \epsilon^2 k$ para todo t y todo $h \in [-1, 1]$, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Puesto que h es arbitrario, los conjuntos donde $|r_i(t)| \leq \epsilon^2 k$ (o $\epsilon^2 k$) y $H = \epsilon^{2N-1} h$ representa una vecindad llena del origen y ella puede ser escogida arbitrariamente pequeña, basta tomar ϵ pequeño. Así, el origen es estable. Las curvas invariantes en la sección por el flujo forman un toro invariante. ■

Capítulo 3

Formas normales para Hamiltonianos con dos grados de libertad

El objetivo en este Capítulo es obtener una transformación simpléctica tal que el Hamiltoniano H en (2.17) asuma una forma particular, con menos factores que el Hamiltoniano original. Para ello tomaremos como base los trabajos de *Markeev* (ver [10]) y *Sokol'skii* (ver [18, 19, 20]).

El punto de partida es, dar algoritmos para normalizar el Hamiltoniano (2.17) en tres situaciones distintas, la primera es cuando todas las frecuencias son nulas, es decir, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0$, la segunda es cuando tenemos dos frecuencias nulas $\omega_1 = \omega_3 = 0$ y las otras dos no nulas $\omega_2 = \omega_4 \neq 0$, finalmente cuando las frecuencias son no nulas e iguales, es decir, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega$.

En general, al considerar el sistema Hamiltoniano lineal real definido en (2.17) y aplicar un cambio de coordenadas vía $z = Ny$ inducida por una matriz $N \in Sp(n, \mathbb{R})$, obtenemos

$$y = N^{-1}z \Rightarrow \dot{y} = N^{-1}\dot{z} = N^{-1}Az = N^{-1}ANy = By$$

con $B = N^{-1}AN$. Afirmamos que la matriz B es Hamiltoniana. De hecho,

$$\begin{aligned} B^T J + JB &= (N^{-1}AN)^T J + J(N^{-1}AN) \\ &= N^T A^T N^{-T} J + JN^{-1}AN \\ &= N^T A^T N^{-T} N^T JN + N^T JNN^{-1}AN \\ &= N^T (A^T J + JA)N \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esta forma probamos que un cambio de coordenadas inducida por una matriz simpléctica

lleva el sistema (2.17) en el sistema lineal real $\dot{y} = By$. Deseamos que la matriz B admita una forma particularmente más simple que A , llamada la forma normal.

Defina una relación \sim entre A y B perteneciente al conjunto de toda las matrices Hamiltonianas en $M^{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ de la siguiente forma

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists N \in Sp(n, \mathbb{R}) / B = N^{-1}AN. \quad (3.1)$$

Es fácil verificar que la relación definida en (3.1) es de equivalencia. Para encontrar una forma normal de $A \in sp(n, \mathbb{R})$ basta encontrar un elemento B de la clase de A que tenga una expresión más simple, de tal forma que el nuevo Hamiltoniano H_2 en (2.17) tenga menos términos.

Para la normalización de la parte cuadrática del Hamiltoniano H_2 en (2.17) hacemos un análisis de los valores propios de la matriz JS . Para esto, considere la ecuación característica

$$P(\lambda) = \det(JS - \lambda I_{2n}). \quad (3.2)$$

Es de nuestro interés, mostrar algunos resultados de estabilidad de soluciones de equilibrio en sistemas Hamiltonianos degenerados con dos grados de libertad ($n = 2$), para esto, vamos a describir los procesos de normalización de la parte cuadrática de la función Hamiltoniana H_2 en los tres casos mencionados anteriormente.

3.1. Análisis del caso donde todas las frecuencias son nulas y la matriz A no es diagonalizable

Suponga que la ecuación característica (3.2) tiene todas sus raíces nulas, la matriz $A = JS$ no es diagonalizable y además, sea $H_2 = H_2(x, y)$ la función cuadrática dada en (2.17), definida por

$$\begin{aligned} H_2 = & h_{2000}x_1^2 + h_{1100}x_1x_2 + h_{0200}x_2^2 + h_{1010}x_1y_1 + h_{1001}x_1y_2 + h_{0110}x_2y_1 + \\ & h_{0101}x_2y_2 + h_{0020}y_1^2 + h_{0011}y_1y_2 + h_{0002}y_2^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Analizaremos la normalización del sistema Hamiltoniano linealizado, correspondiente a la función Hamiltoniana H_2 definida en (3.3).

Para este fin, considere el sistema Hamiltoniano linealizado (2.17) con dos grados de libertad. El problema de normalización se reduce en encontrar una matriz simpléctica no degenerada y real N , tal que la transformación

$$z = Ny, \quad y^T = (q_1, q_2, p_1, p_2), \quad (3.4)$$

reduce al sistema lineal (2.17) a la forma

$$\dot{y} = By = JS^*y, \quad \text{con } B = JS^*. \quad (3.5)$$

En los tres siguientes teoremas, de acuerdo al rango de la matriz S , que denotaremos por $rg(S)$, vamos a describir el algoritmo de construcción basado en Sokol'skii [20] para la normalización de la función Hamiltoniana H_2 definida en (3.3).

Teorema 17 *Suponga que todos los valores propios de $A = JS$ son nulos y la matriz A no es diagonalizable. Si $rg(S) = 3$, entonces existe una matriz $N \in Sp(2, \mathbb{R})$ tal que la forma normal para el Hamiltoniano en (3.3) es*

$$K_2 = \frac{1}{2}\delta p_1^2 - q_1 q_2,$$

donde $\delta = \pm 1$.

Demostración. Dado que $rg(S) = 3$ existen vectores linealmente independientes a_1, a_2, a_3, a_4 en \mathbb{R}^4 tal que

$$Aa_1 = 0, \quad Aa_2 = a_1, \quad Aa_3 = a_2, \quad Aa_4 = a_3. \quad (3.6)$$

A continuación, construiremos una matriz $N \in Sp(2, \mathbb{R})$ que reduce a la matriz JS en la forma JS^* , esto es,

$$JSN = NJS^* \Leftrightarrow N^{-1}JSN = JS^*, \quad (3.7)$$

así, la ecuación (3.7) existe si y solo si, JS es semejante a JS^* y además N debe ser simpléctica, es decir, debe satisfacer

$$N^T J N = J. \quad (3.8)$$

Sea G una forma normal de Jordan para las matrices JS y JS^* . Claramente la matriz que reduce a la matriz JS en su forma normal de Jordan, en general, no es simpléctica. Sin embargo, el producto de matrices no simplécticas puede ser simpléctica, entonces la solución N de la ecuación (3.7) será buscada de la forma $N = A_1 B_1$.

Aquí, A_1 es una matriz arbitraria que reduce a la matriz JS a su forma normal de Jordan, es decir, es una solución no degenerada de la ecuación $JS A_1 = A_1 G$, cuyas columnas están compuestas por los vectores propios y vectores generalizados $a_j, j = 1, 2, 3, 4$ correspondientes al valor propio nulo de la matriz JS .

La matriz $B_1 = C^{-1}$, donde la matriz C reduce a la matriz JS^* en su forma normal de Jordan G , es decir,

$$JS^* C = C G \Leftrightarrow JS^* = C G C^{-1} = B_1^{-1} G B_1. \quad (3.9)$$

Denotemos por c_1 al vector propio y por c_2, c_3, c_4 a los vectores propios generalizados, correspondientes al valor propio nulo de la matriz JS^* , donde

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, la matriz C es de la forma $C = \text{col}(c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4)$, con $c_j, j = 1, 2, 3, 4$ linealmente independientes. Se puede verificar que la matriz C es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_{14} & c_{24} & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \delta c_{14} \\ 0 & 0 & \delta c_{14} & \delta c_{24} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

con $c_{14} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $c_{24}, c_{34}, c_{44} \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, como $B_1 = C^{-1}$ se obtiene que

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_4 & b_3 & b_1\delta & 0 \\ 0 & b_1\delta & b_4\delta & 0 \\ 0 & b_4\delta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

donde $b_1 = -\frac{c_{24}}{c_{14}^2}$, $b_2 = -\frac{\delta(c_{14}^2 c_{44} - 2c_{14}c_{24}c_{34} + c_{24}^3)}{c_{14}^4}$, $b_3 = \frac{\delta(c_{24} - c_{14}c_{34})}{c_{14}^3}$ y $b_4 = \frac{1}{c_{14}}$. Notemos que $b_j, j = 1, 2, 3, 4$ son números reales arbitrarios con $b_4 \neq 0$, pues $c_{14} \neq 0$.

Además, de la ecuación (3.8) obtenemos,

$$J = N^T J N = (A_1 B_1)^T J A_1 B_1 = B_1^T (A_1^T J A_1) B_1 = B_1^T F B_1, \quad (3.12)$$

donde $F = A_1^T J A_1$ es una matriz antisimétrica, cuyas entradas son de la forma $f_{kl} = \{a_k, a_l\}$.

De hecho, la matriz F satisface

$$F^T = (A_1^T J A_1)^T = A_1^T J^T A_1 = -A_1^T J A_1 = -F.$$

También observe de (3.12) que $F = (B^{-1})^T J B^{-1} = C^T J C$, es decir,

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{14} \\ c_{14} & 0 & 0 & c_{24} \\ c_{24} & 0 & \delta c_{14} & c_{34} \\ c_{34} & \delta c_{14} & \delta c_{24} & c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c_{14} & c_{24} & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \delta c_{14} \\ 0 & 0 & \delta c_{14} & \delta c_{24} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_{14} \\ 0 & 0 & -f_{14} & 0 \\ 0 & f_{14} & 0 & f_{34} \\ -f_{14} & 0 & -f_{34} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

con $f_{14} = -\delta c_{14}^2$ y $f_{34} = \delta(c_{24}^2 - 2c_{14}c_{34})$. Note que $f_{14} \neq 0$, dado que $c_{14} \neq 0$ y además $f_{14}^4 = \det(F) = \det(A_1^T J A_1) = \det^2(A_1) \neq 0$.

Además, como $A_1 = \text{col}(a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4)$, definamos la matriz A_1 como

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix},$$

y dado que $F = A_1^T J A_1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \{a_1, a_2\} & \{a_1, a_3\} & \{a_1, a_4\} \\ \{a_2, a_1\} & 0 & \{a_2, a_3\} & \{a_2, a_4\} \\ \{a_3, a_1\} & \{a_3, a_2\} & 0 & \{a_3, a_4\} \\ \{a_4, a_1\} & \{a_4, a_2\} & \{a_4, a_3\} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Comparando las ecuaciones (3.13) y (3.14), se obtiene las siguientes condiciones: $\{a_1, a_2\} = 0$, $\{a_1, a_3\} = 0$, $f_{14} = \{a_1, a_4\} = \{a_3, a_2\} \neq 0$, $\{a_2, a_4\} = 0$ y $f_{34} = \{a_3, a_4\}$.

Ahora, calculando la ecuación $J = B_1^T F B_1$ determinamos algunas condiciones para las constantes b_j , $j = 1, 2, 3, 4$, esto es,

$$B_1^T F B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b_4^2 f_{14} \delta & 0 \\ 0 & 0 & f_{14} b_1^2 - 2\delta b_3 b_4 f_{14} - b_4^2 f_{34} & -b_4^2 f_{14} \delta \\ b_4^2 f_{14} \delta & b_4^2 f_{34} - f_{14} b_1^2 + 2\delta b_3 b_4 f_{14} & 0 & 0 \\ 0 & b_4^2 f_{14} \delta & 0 & 0 \end{pmatrix} = J,$$

en donde, será suficiente considerar

$$b_4 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_4\}|}}, \quad \delta = -\text{sgn}(\{a_1, a_4\}), \quad (3.15)$$

y además se debe verificar que

$$f_{14} b_1^2 - 2\delta b_3 b_4 f_{14} - b_4^2 f_{34} = 0. \quad (3.16)$$

Como buscamos una forma lo más simple posible para la matriz B_1 , sin pérdida de generalidad, podemos considerar $c_{24} = c_{44} = 0$, así obtenemos que $b_1 = b_2 = 0$. Por lo tanto de (3.16) se tiene que

$$b_3 = -\frac{\delta b_4 f_{34}}{2f_{14}}. \quad (3.17)$$

A partir de las restricciones $b_1 = b_2 = 0$ y de las ecuaciones obtenidas en (3.15) y (3.17), obtenemos la expresión de la matriz N como

$$N = [b_4a_2 \quad b_3a_2 + \delta b_4a_4 \quad b_3a_1 + \delta b_4a_3 \quad b_4a_1]. \quad (3.18)$$

De manera equivalente a (3.18), la matriz N puede ser expresada como

$$N = \begin{pmatrix} b_4a_{21} & b_3a_{21} + \delta b_4a_{41} & b_3a_{11} + \delta b_4a_{31} & b_4a_{11} \\ b_4a_{22} & b_3a_{22} + \delta b_4a_{42} & b_3a_{12} + \delta b_4a_{32} & b_4a_{12} \\ b_4a_{23} & b_3a_{23} + \delta b_4a_{43} & b_3a_{13} + \delta b_4a_{33} & b_4a_{13} \\ b_4a_{24} & b_3a_{24} + \delta b_4a_{44} & b_3a_{14} + \delta b_4a_{34} & b_4a_{14} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es simpléctica con

$$b_3 = -\frac{\delta b_4 f_{34}}{2f_{14}}, \quad b_4 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_4\}|}} \quad \text{y} \quad \delta = -\text{sgn}(\{a_1, a_4\}).$$

Además, sabemos que la matriz de normalización JS^* está dada por

$$JS^* = [A(b_4a_2) \quad A(b_3a_2 + \delta b_4a_4) \quad A(b_3a_1 + \delta b_4a_3) \quad A(b_4a_1)].$$

Usando (3.6) en esta última ecuación, se sigue que

$$JS^* = [b_4a_1 \quad b_3a_1 + \delta b_4a_3 \quad \delta b_4a_2 \quad 0].$$

De donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ así, } S^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (3.3) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} K_2(q, p) &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, p_1, p_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, p_1, p_2) \cdot (-q_2, -q_1, \delta p_1, 0) \\ &= \frac{\delta}{2} p_1^2 - q_1 q_2, \quad \delta = \pm 1. \end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración del teorema. ■

Teorema 18 *Suponga que todos los valores propios de $A = JS$ son nulos y la matriz A no es diagonalizable. Si $rg(S) = 2$, entonces existe una matriz $N \in Sp(2, \mathbb{R})$ tal que la forma normal para el Hamiltoniano en (3.3) es*

$$K_2 = \frac{1}{2}\delta_1 p_1^2 + \frac{1}{2}\delta_2 p_2^2,$$

donde $\delta_1 = \pm 1$, $\delta_2 = \pm 1$.

Demostración. Análogamente al teorema anterior, supongamos que $rg(S) = 2$ y sean a_1, a_2, a_3, a_4 vectores en \mathbb{R}^4 linealmente independientes, entonces

$$Aa_1 = 0, \quad Aa_2 = a_1, \quad Aa_3 = 0, \quad Aa_4 = a_3. \quad (3.19)$$

Para la construcción de la matriz $N \in Sp(2, \mathbb{R})$, buscamos la solución N de la ecuación (3.7) de la forma $N = A_1 B_1$. En este caso, notemos que la matriz JS^* viene dada por

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, se verifica fácilmente que la matriz $C = col(c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4)$, con c_j , $j = 1, \dots, 4$ linealmente independientes, es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & 0 & c_{41} \\ 0 & c_{22} & c_{32} & c_{42} \\ 0 & \delta_1 c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 c_{32} \end{pmatrix},$$

con $c_{11}, c_{32} \neq 0$ y $c_{21}, c_{22}, c_{41}, c_{42} \in \mathbb{R}$.

Por otro lado como $B_1 = C^{-1}$, se tiene que

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & \delta_1 b_1 & 0 \\ 0 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 b_4 \end{pmatrix},$$

donde $b_1 = \frac{1}{c_{11}}$, $b_2 = -\frac{c_{21}\delta_1}{c_{11}^2}$, $b_3 = -\frac{c_{41}\delta_2}{c_{11}c_{32}}$, $b_4 = \frac{1}{c_{32}}$, $b_5 = -\frac{c_{22}\delta_1}{c_{11}c_{32}}$ y $b_6 = -\frac{c_{42}\delta_2}{c_{32}^2}$. Notemos que b_j , $j = 1, \dots, 6$ son números reales arbitrarios, con $b_1, b_4 \neq 0$, puesto que $c_{11}, c_{32} \neq 0$. Por consiguiente la matriz $F = (B_1^{-1})^T J B_1^{-1} = C^T J C$ tiene la siguiente forma

$$F = \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & 0 & 0 \\ -f_{12} & 0 & 0 & f_{24} \\ 0 & 0 & 0 & f_{34} \\ 0 & -f_{24} & -f_{34} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

con $f_{12} = \delta_1 c_{11}^2$, $f_{24} = c_{22}c_{32}\delta_2 - c_{11}c_{41}\delta_1$ y $f_{34} = \delta_2 c_{32}^2$. Notemos que $f_{12}, f_{34} \neq 0$, dado que $c_{11}, c_{32} \neq 0$ y además $f_{12}^2 f_{34}^2 = \det(F) = \det(A_1^T J A_1) = \det^2(A_1) \neq 0$.

De las ecuaciones (3.14) y (3.20), se tiene las siguientes condiciones: $\{a_1, a_2\} = f_{12} \neq 0$, $\{a_1, a_3\} = 0$, $\{a_1, a_4\} = 0$, $\{a_2, a_3\} = 0$, $\{a_2, a_4\} = f_{24}$ y $\{a_3, a_4\} = f_{34} \neq 0$.

Ahora, calculando la ecuación $J = B_1^T F B_1$ determinamos algunas condiciones para las constantes b_j , $j = 1, \dots, 6$, esto es,

$$B_1^T F B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_1 b_1^2 f_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 b_4^2 f_{34} \\ -\delta_1 b_1^2 f_{12} & 0 & 0 & \beta_{34} \\ 0 & -\delta_2 b_4^2 f_{34} & -\beta_{34} & 0 \end{pmatrix} = J,$$

donde $\beta_{34} = b_1 \delta_1 (b_4 \delta_2 f_{24} - b_3 f_{12}) + b_4 b_5 \delta_2 f_{34}$.

Note que la matriz $B_1^T F B_1$ debe ser J , por lo tanto, será suficiente considerar

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, \quad b_4 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_3, a_4\}|}}, \quad \delta_1 = \text{sign}(\{a_1, a_2\}), \quad \delta_2 = \text{sign}(\{a_3, a_4\}), \quad (3.21)$$

y además, se debe verificar que $\beta_{34} = 0$, es decir,

$$b_1 \delta_1 (b_4 \delta_2 f_{24} - b_3 f_{12}) + b_4 b_5 \delta_2 f_{34} = 0 \quad (3.22)$$

Como buscamos una forma lo más simple posible para la matriz B_1 , sin pérdida de generalidad podemos considerar $c_{21} = c_{22} = c_{41} = 0$, así, $b_2 = b_5 = b_6 = 0$. Por lo tanto de (3.22) se obtiene que

$$b_3 = \frac{b_4 \delta_2 f_{24}}{f_{12}}. \quad (3.23)$$

A partir de las restricciones $b_2 = b_5 = b_6 = 0$ y de las ecuaciones obtenidas en (3.21) y (3.23), por fin, obtenemos la expresión de la matriz N como

$$N = [b_1 a_1 \quad b_4 a_3 \quad \delta_1 b_1 a_2 \quad b_3 a_1 + \delta_2 b_4 a_4]. \quad (3.24)$$

De manera equivalente la matriz N en (3.24), puede ser escrita como

$$N = \begin{pmatrix} b_1 a_{11} & b_4 a_{31} & \delta_1 b_1 a_{21} & b_3 a_{11} + \delta_2 b_4 a_{41} \\ b_1 a_{12} & b_4 a_{32} & \delta_1 b_1 a_{22} & b_3 a_{12} + \delta_2 b_4 a_{42} \\ b_1 a_{13} & b_4 a_{33} & \delta_1 b_1 a_{23} & b_3 a_{13} + \delta_2 b_4 a_{43} \\ b_1 a_{14} & b_4 a_{34} & \delta_1 b_1 a_{24} & b_3 a_{14} + \delta_2 b_4 a_{44} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es simpléctica con

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, \quad b_4 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_3, a_4\}|}}, \quad b_3 = \frac{b_4 \delta_2 f_{24}}{f_{12}}, \\ \delta_1 = \text{sign}(\{a_1, a_2\}) \quad \text{y} \quad \delta_2 = \text{sign}(\{a_3, a_4\}).$$

Además, sabemos que la matriz de normalización JS^* está dada por

$$JS^* = [A(b_1a_1) \quad A(b_4a_3) \quad A(\delta_1b_1a_2) \quad A(b_3a_1 + \delta_2b_4a_4)].$$

Por lo tanto, usando (3.19) se sigue que

$$JS^* = [0 \quad 0 \quad \delta_1b_1a_1 \quad \delta_2b_4a_3].$$

De donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ así, } S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (3.3) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} K_2(q, p) &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, p_1, p_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, p_1, p_2) \cdot (0, 0, \delta_1 p_1, \delta_2 p_2) \\ &= \frac{\delta_1}{2} p_1^2 + \frac{\delta_2}{2} p_2^2, \quad \delta_1 = \pm 1, \quad \delta_2 = \pm 1. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Esto finaliza la demostración del teorema. ■

Teorema 19 *Suponga que todos los valores propios de $A = JS$ son nulos y la matriz A no es diagonalizable. Si $rg(S) = 1$, entonces existe una matriz $N \in Sp(2, \mathbb{R})$ tal que la forma normal para el Hamiltoniano en (3.3) es*

$$K_2 = \frac{1}{2} \delta p_1^2,$$

donde $\delta = \pm 1$.

Demostración. La demostración de este teorema se realiza de manera análoga a los Teoremas (17) y (18). Supongamos que $rg(S) = 1$ y sean a_1, a_2, a_3, a_4 vectores en \mathbb{R}^4 linealmente independientes, entonces

$$Aa_1 = 0, \quad Aa_2 = a_1, \quad Aa_3 = 0, \quad Aa_4 = 0. \tag{3.26}$$

Para la construcción de la matriz $N \in Sp(2, \mathbb{R})$, se precede de manera similar al caso anterior, es decir, buscamos la solución N de la ecuación (3.7) de la forma $N = A_1 B_1$. En este caso, notemos que la matriz JS^* viene dada por

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, se verifica fácilmente que la matriz $C = col(c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4)$, con $c_j, j = 1, \dots, 4$ linealmente independientes, es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{32} & 0 \\ 0 & \delta c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{24} & 0 & c_{41} \end{pmatrix},$$

con $c_{11}, c_{32}, c_{41} \neq 0$ y $c_{21}, c_{22}, c_{24} \in \mathbb{R}$.

Por otro lado como $B_1 = C^{-1}$, se tiene que

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta b_1 & 0 \\ 0 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_5 & b_6 \end{pmatrix},$$

donde $b_1 = \frac{1}{c_{11}}$, $b_2 = -\frac{c_{21}\delta}{c_{11}^2}$, $b_3 = \frac{1}{c_{32}}$, $b_4 = -\frac{c_{22}\delta}{c_{11}c_{32}}$, $b_5 = -\frac{c_{24}\delta}{c_{11}c_{41}}$ y $b_6 = \frac{1}{c_{41}}$. Notemos que $b_j, j = 1, \dots, 6$ son números reales arbitrarios, con $b_1, b_3, b_6 \neq 0$, puesto que $c_{11}, c_{32}, c_{41} \neq 0$. Por consiguiente, la matriz $F = (B_1^{-1})^T J B_1^{-1} = C^T J C$ tiene la siguiente forma

$$F = \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & 0 & 0 \\ -f_{12} & 0 & f_{23} & f_{24} \\ 0 & -f_{23} & 0 & f_{34} \\ 0 & -f_{34} & -f_{34} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

con $f_{12} = \delta c_{11}^2$, $f_{23} = -c_{24}c_{32}$, $f_{24} = c_{22}c_{41}$ y $f_{34} = c_{32}c_{41}$. Notemos que $f_{12}, f_{34} \neq 0$, dado que $c_{11}, c_{32}, c_{41} \neq 0$ y además $f_{12}^2 f_{34}^2 = \det(F) = \det(A_1^T J A_1) = \det^2(A_1) \neq 0$.

De las ecuaciones (3.14) y (3.27), se tiene las siguientes condiciones: $\{a_1, a_2\} = f_{12} \neq 0$, $\{a_1, a_3\} = 0$, $\{a_1, a_4\} = 0$, $\{a_2, a_3\} = f_{23}$, $\{a_2, a_4\} = f_{24}$ y $\{a_3, a_4\} = f_{34} \neq 0$.

Ahora, calculando la ecuación $J = B_1^T F B_1$ determinamos algunas condiciones para las constantes $b_j, j = 1, \dots, 6$, esto es,

$$B_1^T F B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta b_1^2 f_{12} & 0 \\ 0 & 0 & b_3(b_5 f_{34} - b_1 \delta f_{23}) & b_3 b_6 f_{34} \\ -\delta b_1^2 f_{12} & -b_3(b_5 f_{34} - b_1 \delta f_{23}) & 0 & b_6(b_1 \delta f_{24} + b_4 f_{34}) \\ 0 & -b_3 b_6 f_{34} & -b_6(b_1 \delta f_{24} + b_4 f_{34}) & 0 \end{pmatrix} = J.$$

En donde, será suficiente considerar

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, \quad b_3 b_6 = \frac{1}{\{a_3, a_4\}}, \quad \delta = \text{sign}(\{a_1, a_2\}), \quad (3.28)$$

y además, se debe verificar que

$$b_3(b_5 f_{34} - b_1 \delta f_{23}) = 0 \quad \text{y} \quad b_6(b_1 \delta f_{24} + b_4 f_{34}) = 0. \quad (3.29)$$

Como buscamos una forma lo más simple posible para la matriz B_1 , sin pérdida de generalidad podemos considerar $b_6 = 1$ y haciendo $c_{12} = 0$, se sigue que $b_2 = 0$, por lo tanto, de (3.28) se obtiene que

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, \quad b_3 = \frac{1}{\{a_3, a_4\}} \quad \text{y} \quad \delta = \text{sign}(\{a_1, a_2\}). \quad (3.30)$$

Por otro lado de (3.29), se obtiene que

$$b_4 = -\frac{b_1 \delta f_{24}}{f_{34}} \quad \text{y} \quad b_5 = \frac{b_1 \delta f_{23}}{f_{34}}. \quad (3.31)$$

A partir de las restricciones $b_2 = 0$, $b_6 = 1$ y de las ecuaciones obtenidas en (3.30) y (3.31), obtenemos la expresión de la matriz N como

$$N = [b_1 a_1 \quad b_3 a_3 \quad \delta b_1 a_2 + b_4 a_3 + b_5 a_4 \quad a_4]. \quad (3.32)$$

De manera equivalentemente, la matriz N en (3.32) puede ser escrita como

$$N = \begin{pmatrix} b_1 a_{11} & b_3 a_{31} & \delta b_1 a_{21} + b_4 a_{31} + b_5 a_{41} & a_{41} \\ b_1 a_{12} & b_3 a_{32} & \delta b_1 a_{22} + b_4 a_{32} + b_5 a_{42} & a_{42} \\ b_1 a_{13} & b_3 a_{33} & \delta b_1 a_{23} + b_4 a_{33} + b_5 a_{43} & a_{43} \\ b_1 a_{14} & b_3 a_{34} & \delta b_1 a_{24} + b_4 a_{34} + b_5 a_{44} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es simpléctica con

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, \quad b_3 = \frac{1}{\{a_3, a_4\}}, \quad \delta = \text{sign}(\{a_1, a_2\}), \\ b_4 = -\frac{b_1 \delta f_{24}}{f_{34}} \quad \text{y} \quad b_5 = \frac{b_1 \delta f_{23}}{f_{34}}.$$

Además, sabemos que la matriz de normalización JS^* está dada por

$$JS^* = [A(b_1 a_1) \quad A(b_3 a_3) \quad A(\delta b_1 a_2 + b_4 a_3 + b_5 a_4) \quad A(a_4)].$$

Por lo tanto, usando (3.26) se sigue que

$$JS^* = [0 \quad 0 \quad \delta b_1 a_1 \quad 0].$$

De donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ así, } S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (3.3) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} K_2(q, p) &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, p_1, p_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, p_1, p_2) \cdot (0, 0, \delta\omega p_1, 0) \\ &= \frac{\delta}{2}p_1^2, \quad \delta = \pm 1. \end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración del teorema. ■

3.2. Análisis del caso donde una frecuencia es nula, una no nula y la matriz A no es diagonalizable

Veremos que mediante un cambio de variable adecuado la función H_2 en (3.3) con diez parámetros se reduce a una forma más simple. Para lograr nuestro objetivo, supongamos que la ecuación característica (3.2) asociada a la parte cuadrática H_2 en (3.3) tiene dos raíces nulas y dos raíces imaginarias puras, es decir, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = -\lambda_4 = i\omega$, en este caso, vamos a describir el algoritmo de construcción para la normalización de la parte cuadrática del sistema Hamiltoniano H_2 , es decir, haremos un cambio de variable por medio de una matriz $N \in Sp(2, \mathbb{R})$, la cual garantice una forma particular más simple, esto se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 20 *Si los valores propios de A son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\lambda_4 = i\omega$ con $\omega \neq 0$ y A no es diagonalizable, entonces existe $N \in Sp(2, \mathbb{R})$,*

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) \xrightarrow{N} (q_1, q_2, p_1, p_2),$$

tal que el Hamiltoniano H_2 en (3.3) es de la forma

$$K_2(q, p) = \frac{\delta_1}{2}\omega(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\delta_2}{2}p_2^2,$$

donde $\delta_1 = \pm 1$, $\delta_2 = \pm 1$.

Demostración. Fijemos la notación $y^T = (q_1, q_2, p_1, p_2)$. Entonces veremos que la forma normal del sistema lineal

$$\dot{z} = Az \quad \text{con} \quad z = (x, y), \quad (3.33)$$

puede ser escrita en la siguiente forma

$$\dot{y} = JS^*y, \quad (3.34)$$

donde S^* es una matriz diagonal real, cuyos elementos de la diagonal son definidos por $h_{11}^* = h_{33}^* = \delta_1\omega$, $h_{22}^* = 0$ y $h_{44}^* = \delta_2$, esto es,

$$S^* = \begin{pmatrix} \delta_1\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}.$$

Proponemos un cambio de variable y determinada por medio de la matriz N vía $z \rightarrow y$

$$z = Ny. \quad (3.35)$$

De esta forma, $\dot{z} = N\dot{y}$, así, $JSz = NJS^*y$, de donde $JSNy = NJS^*y$. Por lo tanto,

$$JSN = NJS^*. \quad (3.36)$$

Así mismo, la transformación N que fijamos en (3.35), por ser simpléctica, debe satisfacer

$$N^T J N = J. \quad (3.37)$$

Notemos que la solución de (3.36) no es única. Con la finalidad de encontrar una transformación de normalización es preciso escoger, de las infinitas soluciones, aquella que satisface también (3.37). Sea G una forma normal de Jordan para las matrices JS y JS^* . Claramente la matriz que reduce a JS en su forma normal de Jordan, en general, no es simpléctica. Sin embargo, el producto de matrices no simplécticas puede ser simpléctica, entonces buscamos la matriz de normalización de la forma $N = A_1 B_1$ con $B_1 = C^{-1}$, donde la matriz C reduce a la matriz JS^* en su forma normal de Jordan G , es decir,

$$JS^*C = CG \Leftrightarrow JS^* = CGC^{-1} = B_1^{-1}GB_1.$$

Es fácil verificar que la matriz C es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & ic_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & c_{42} \\ ic_{11} & 0 & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 c_{22} \end{pmatrix},$$

con $c_{11}, c_{22} \neq 0$.

Luego, como $B_1 = C^{-1}$, obtenemos que

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & -ib_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ -ib_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 b_2 \end{pmatrix},$$

donde $b_1 = \frac{1}{2c_{11}}$, $b_2 = \frac{1}{c_{22}}$ y $b_3 = -\frac{\delta_2 c_{42}}{c_{22}^2}$. Notemos que b_j ($j = 1, 2, 3$) son números reales arbitrarios con $b_1, b_2 \neq 0$, puesto que $c_{11}, c_{22} \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar $c_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c_{22} = 1$ y $c_{42} = 0$, así, $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b_2 = 1$ y $b_3 = 0$. Por lo tanto, las matrices C y B_1 adquieren la siguiente forma

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \quad y \quad B_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Sustituyendo $N = A_1 B_1$ en (3.36) tenemos $A_1^{-1} J S A_1 = B_1 J S^* B_1^{-1} = G$, cuyos elementos de la diagonal principal satisfacen la ecuación

$$g_{kk} = -g_{2+k, 2+k} = i\delta_k \omega, \quad (k = 1, 2).$$

De donde concluimos que la matriz G es una forma canónica de Jordan de la matriz $J S$. De ahí obtenemos

$$G = B_1 J S^* B_1^{-1} = \begin{pmatrix} i\delta_1 \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i\delta_1 \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Además, sustituyendo $N = A_1 B_1$ en (3.37) obtenemos que

$$J = N^T J N = (A_1 B_1)^T J A_1 B_1 = B_1^T A_1^T J A_1 B_1 = B_1^T F B_1, \quad (3.40)$$

con $F = A_1^T J A_1$, así, de (3.40) se deduce que $F = (B_1^{-1})^T J B_1^{-1} = C^T J C$, es decir,

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

De donde, notamos que $\det(F) = \det^2(A_1) = \delta_2^2 = 1 \neq 0$.

Por otro lado, de acuerdo a (3.39), podemos construir la matriz A_1 de la siguiente manera: sus columnas deben ser los vectores propios y el vector generalizado de la matriz JS . La primera y la tercera columna son los vectores propios, a_1^* y a_3^* , correspondientes a los vectores propios $i\delta_1\omega$ y $-i\delta_1\omega$. La segunda y la cuarta columna son el vector propio a_2^* y el vector propio generalizado a_4^* correspondientes al valor propio nulo.

Sean $a_1 = r_1 + is_1$ un vector propio arbitrario de la matriz $A = JS$ correspondiente al valor propio $i\omega$ y a_2, a_4 el vector propio y el vector propio generalizado, respectivamente, correspondientes al vector propio nulo. Entonces,

$$\begin{aligned} Aa_1 &= i\omega a_1, & Aa_2 &= 0, & Aa_4 &= a_2 \\ \Leftrightarrow Ar_1 &= -\omega s_1, & As_1 &= \omega r_1, & Aa_2 &= -0, & Aa_4 &= 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

con

$$a_1^* = \nu_1(\delta_1 r_1 + is_1), \quad a_2^* = \nu_2 \delta_2 a_2, \quad a_3^* = i\nu_1(\delta_1 r_1 - is_1), \quad a_4^* = \delta_2 \nu_2 a_4 \quad (3.43)$$

donde ν_1 y ν_2 son números reales no nulos. De acuerdo con las ecuaciones (3.42) y (3.43) podemos construir la matriz A_1 la cual garantiza que la matriz N es real. Según (3.43), podemos definir la matriz A_1 como

$$A_1 = \begin{pmatrix} \nu_1(\delta_1 r_{11} + is_{11}) & \nu_2 \delta_2 a_{21} & i\nu_1(\delta_1 r_{11} - is_{11}) & \delta_2 \nu_2 a_{41} \\ \nu_1(\delta_1 r_{12} + is_{12}) & \nu_2 \delta_2 a_{22} & i\nu_1(\delta_1 r_{12} - is_{12}) & \delta_2 \nu_2 a_{42} \\ \nu_1(\delta_1 r_{13} + is_{13}) & \nu_2 \delta_2 a_{23} & i\nu_1(\delta_1 r_{13} - is_{13}) & \delta_2 \nu_2 a_{43} \\ \nu_1(\delta_1 r_{14} + is_{14}) & \nu_2 \delta_2 a_{24} & i\nu_1(\delta_1 r_{14} - is_{14}) & \delta_2 \nu_2 a_{44} \end{pmatrix}.$$

Multiplicando A_1 y B_1 obtenemos

$$N = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\nu_1 \delta_1 r_{11} & \nu_2 \delta_2 a_{21} & \sqrt{2}\nu_1 s_{11} & \nu_2 a_{41} \\ \sqrt{2}\nu_1 \delta_1 r_{12} & \nu_2 \delta_2 a_{22} & \sqrt{2}\nu_1 s_{12} & \nu_2 a_{42} \\ \sqrt{2}\nu_1 \delta_1 r_{13} & \nu_2 \delta_2 a_{23} & \sqrt{2}\nu_1 s_{13} & \nu_2 a_{43} \\ \sqrt{2}\nu_1 \delta_1 r_{14} & \nu_2 \delta_2 a_{24} & \sqrt{2}\nu_1 s_{14} & \nu_2 a_{44} \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

De manera equivalente a (3.44), las columnas de la matriz N vienen dadas por

$$n_1 = \sqrt{2}\nu_1 \delta_1 r_1, \quad n_2 = \nu_2 \delta_2 a_2, \quad n_3 = \sqrt{2}\nu_1 s_1, \quad n_4 = \nu_2 a_4. \quad (3.45)$$

Las constantes ν_i, δ_i ($i = 1, 2$) son definidas de la ecuación $N^T J N = J$. De hecho, usando (3.45) podemos mostrar que

$$N^T J N = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix},$$

donde D es una matriz diagonal de segundo orden, cuyas entradas son

$$d_{11} = 2\nu_1^2 \delta_1 \{r_1, s_1\} \quad \text{y} \quad d_{22} = 2\nu_2^2 \delta_2 \{a_2, a_4\}. \quad (3.46)$$

En efecto, notemos que

$$N^T J N = B_1^T F B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Esto muestra que D es diagonal y además que las cantidades en (3.46) son no nulas, esto implica que los determinantes de las matrices A_1 y B_1 son diferente de cero, en consecuencia la matriz N es no singular.

Por otro lado, de acuerdo a la definición de la matriz N en (3.44), obtenemos

$$N^T J N = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\nu_1\nu_2\delta_1\delta_2\{r_1, a_2\} & 2\nu_1^2\delta_1\{r_1, s_1\} & \sqrt{2}\nu_1\nu_2\delta_1\{r_1, a_4\} \\ -\sqrt{2}\nu_1\nu_2\delta_1\delta_2\{r_1, a_2\} & 0 & \sqrt{2}\nu_1\nu_2\delta_2\{a_2, s_1\} & \nu_2^2\delta_2\{a_2, a_4\} \\ -2\nu_1^2\delta_1\{r_1, s_1\} & -\sqrt{2}\nu_1\nu_2\delta_2\{a_2, s_1\} & 0 & \sqrt{2}\nu_1\nu_2\{s_1, a_4\} \\ -\sqrt{2}\nu_1\nu_2\delta_1\{r_1, a_4\} & -\nu_2^2\delta_2\{a_2, a_4\} & \sqrt{2}\nu_1\nu_2\{a_4, s_1\} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Luego, de las ecuaciones (3.47) y (3.48), se tiene las siguientes condiciones: $\{a_2, r_1\} = 0$, $\{a_2, s_1\} = 0$, $\{a_4, r_1\} = 0$, $\{a_4, s_1\} = 0$. Además,

$$2\nu_1^2\delta_1\{r_1, s_1\} = 1 \quad \text{y} \quad \nu_2^2\delta_2\{a_2, a_4\} = 1. \quad (3.49)$$

Para verificar (3.49), será suficiente considerar

$$\delta_1 = \text{sign}\{r_1, s_1\}; \quad \delta_2 = \text{sign}\{a_2, a_4\}, \quad (3.50)$$

y las constantes $\nu_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\kappa_1$ y $\nu_2 = \kappa_2$, con

$$\kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{r_1, s_1\}|}}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_2, a_4\}|}}. \quad (3.51)$$

A partir de las ecuaciones (3.50) y (3.51) tenemos la expresión para las entradas de la matriz N como

$$N = [\delta_1\kappa_1r_1 \quad \delta_2\kappa_2a_2 \quad \kappa_1s_1 \quad \kappa_2a_4].$$

De manera equivalente, la matriz N puede ser escrita como

$$N = \begin{pmatrix} \delta_1\kappa_1r_{11} & \delta_2\kappa_2a_{21} & \kappa_1s_{11} & \kappa_2a_{41} \\ \delta_1\kappa_1r_{12} & \delta_2\kappa_2a_{22} & \kappa_1s_{12} & \kappa_2a_{42} \\ \delta_1\kappa_1r_{13} & \delta_2\kappa_2a_{23} & \kappa_1s_{13} & \kappa_2a_{43} \\ \delta_1\kappa_1r_{14} & \delta_2\kappa_2a_{24} & \kappa_1s_{14} & \kappa_2a_{44} \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Esta matriz es simpléctica con

$$\kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{r_1, s_1\}|}}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_2, a_4\}|}}, \quad \delta_1 = \text{sign}\{r_1, s_1\} \quad \text{y} \quad \delta_2 = \text{sign}\{a_2, a_4\}.$$

Además, sabemos que la matriz de normalización JS^* está dada por

$$\begin{aligned} JS^* &= [A(\delta_1 \kappa_1 r_1) \quad A(\delta_2 \kappa_2 a_2) \quad A(\kappa_1 s_1) \quad A(\kappa_2 a_4)] \\ &= [\delta_1 \kappa_1 A(r_1) \quad \delta_2 \kappa_2 A(a_2) \quad \kappa_1 A(s_1) \quad \kappa_2 A(a_4)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando (3.42) se sigue que

$$\begin{aligned} JS^* &= [-\delta_1 \kappa_1 \omega s_1 \quad \delta_2 \kappa_2(0) \quad \kappa_1 \omega r_1 \quad \kappa_2 a_2] \\ &= [-\delta_1 \omega(\kappa_1 s_1) \quad 0 \quad \delta_1 \omega(\delta_1 \kappa_1 r_1) \quad \delta_2(\delta_2 \kappa_2 a_2)]. \end{aligned}$$

De donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_1 \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\ -\delta_1 \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{así,} \quad S^* = \begin{pmatrix} \delta_1 \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano en (3.3) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} K_2(q, p) &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, p_1, p_2) \begin{pmatrix} \delta_1 \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, p_1, p_2) \cdot (\delta_1 \omega q_1, 0, \delta_2 \omega p_1, \delta_2 p_2) \\ &= \frac{1}{2}(\delta_1 \omega q_1^2 + \delta_1 \omega p_1^2 + \delta_2 p_2^2) \\ &= \frac{1}{2} \delta_1 \omega (q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2} \delta_2 p_2^2, \quad \delta_1 = \pm 1, \quad \delta_2 = \pm 1. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Esto finaliza la demostración del teorema. ■

3.3. Análisis del caso donde las frecuencias son no nulas, iguales y la matriz A no es diagonalizable

Supongamos que la ecuación característica (3.2) tiene raíces imaginarias puras con multiplicidad doble $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_4 = i\omega$ y la matriz A no es diagonalizable. Describiremos el algoritmo para la normalización de la función cuadrática H_2 definida en la ecuación (3.3), según el siguiente teorema que fue extraído del artículo [18].

Teorema 21 Si los valores propios de A son imaginarios puros con multiplicidad doble, es decir, $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_4 = i\omega$, $\omega \neq 0$ y A no es diagonalizable, entonces existe una matriz $N \in Sp(2, \mathbb{R})$ tal que la forma normal del Hamiltoniano (3.3) es

$$K_2(q, p) = \frac{\delta}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \omega(q_1 p_2 - q_2 p_1),$$

donde $\delta = \pm 1$.

Demostración. Demostraremos este teorema, siguiendo las mismas ideas de la demostración en el Teorema 20, es decir, buscamos la solución de la ecuación (3.7) de la forma $N = A_1 B_1$ con $B_1 = C^{-1}$, donde la matriz C reduce a la matriz JS^* en su forma normal de Jordan G , es decir,

$$JS^*C = CG \Leftrightarrow JS^* = CGC^{-1} = B_1^{-1}GB_1.$$

Se puede verificar fácilmente que la matriz C es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & -ic_{11} & ic_{31} & -c_{31} \\ -ic_{11} & c_{11} & c_{31} & -ic_{31} \\ 0 & 0 & \delta c_{11} & -i\delta c_{11} \\ 0 & 0 & -i\delta c_{11} & \delta c_{11} \end{pmatrix},$$

con $c_{11}, c_{31} \neq 0$.

Luego, como $B_1 = C^{-1}$, obtenemos que

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & ib_1 & -\delta b_2 & -i\delta b_2 \\ ib_1 & b_1 & -i\delta b_2 & -\delta b_1 \\ 0 & 0 & \delta b_1 & i\delta b_1 \\ 0 & 0 & i\delta b_1 & \delta b_1 \end{pmatrix},$$

donde $b_1 = \frac{1}{2c_{11}}$ y $b_2 = \frac{c_{31}}{2c_{11}^2}$. Notemos que b_j ($j = 1, 2$) son números reales arbitrarios con $b_1, b_2 \neq 0$, puesto que $c_{11}, c_{31} \neq 0$. Sustituyendo $N = A_1 B_1$ en (3.9) tenemos $A_1^{-1} J S A_1 = B_1 J S^* B_1^{-1} = G$, cuyos elementos de la diagonal principal satisfacen la ecuación

$$g_{kk} = -g_{2+k, 2+k} = i\omega,$$

para $k = 1, 2$, respectivamente.

De donde concluimos que la matriz G es una forma canónica de Jordan de la matriz JS . De ahí obtenemos

$$G = B_1 J S^* B_1^{-1} = \begin{pmatrix} i\omega & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i\omega & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Ahora, sustituyendo $N = A_1 B_1$ en (3.37) obtenemos que

$$J = N^T J N = (A_1 B_1)^T J A_1 B_1 = B_1^T A_1^T J A_1 B_1 = B_1^T F B_1, \quad (3.55)$$

con $F = A_1^T J A_1$, así, de (3.55) se deduce que $F = (B_1^{-1})^T J B_1^{-1} = C^T J C$, es decir,

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} c_{11} & -ic_{11} & 0 & 0 \\ -ic_{11} & c_{11} & 0 & 0 \\ ic_{21} & c_{21} & \delta c_{11} & -i\delta c_{11} \\ -c_{21} & -ic_{21} & -i\delta c_{11} & \delta c_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & -ic_{11} & ic_{21} & -c_{21} \\ -ic_{11} & c_{11} & c_{21} & -ic_{21} \\ 0 & 0 & \delta c_{11} & -i\delta c_{11} \\ 0 & 0 & -i\delta c_{11} & \delta c_{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & if_{14} \\ 0 & 0 & if_{14} & 0 \\ 0 & -if_{14} & 0 & f_{36} \\ -if_{14} & 0 & -f_{36} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

con $f_{14} = -2\delta c_{11}^2$ y $f_{36} = 4\delta c_{11} c_{31}$. Notemos que $f_{14}, f_{36} \neq 0$, dado que $c_{11}, c_{31} \neq 0$ y además $f_{14}^4 = \det(F) = \det(A_1^T J A_1) = \det^2(A_1) \neq 0$.

Por otro lado, de acuerdo a (3.54), podemos construir la matriz A_1 de la siguiente manera: sus columnas deben ser los vectores propios y los vectores generalizados de la matriz JS . La primera y la tercera columna son el vector propio a_1 y el vector propio generalizado a_3 , correspondientes al valor propio $i\omega$, respectivamente. La segunda y la cuarta columna son el vector propio a_2 y el vector propio generalizado a_4 correspondientes al valor propio $-i\omega$.

Sean $a_1 = r_1 + is_1$ un vector propio arbitrario de la matriz JS correspondiente al valor propio $i\omega$ y $a_3 = r_2 + is_2$ el vector propio generalizado. Estos vectores satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} Aa_1 &= i\omega a_1, & Aa_3 &= i\omega a_3 + a_1 \\ \Leftrightarrow Ar_1 &= -\omega s_1, & As_1 &= \omega r_1, & Ar_2 &= -\omega s_2 + r_1, & Ar_2 &= \omega s_2 + s_1, \end{aligned} \quad (3.57)$$

con

$$a_1 = r_1 + is_1, \quad a_2 = -i(r_1 - is_1), \quad a_3 = r_2 + is_2, \quad a_4 = -i(r_2 - is_2), \quad (3.58)$$

De acuerdo con las ecuaciones (3.57) y (3.58) podemos construir la matriz A_1 la cual garantiza que la matriz N es real. Según (3.58), podemos definir la matriz A_1 como

$$A_1 = \begin{pmatrix} r_{11} + is_{11} & -i(r_{11} - is_{11}) & r_{21} + is_{21} & -i(r_{21} - is_{21}) \\ r_{12} + is_{12} & -i(r_{12} - is_{12}) & r_{22} + is_{22} & -i(r_{22} - is_{22}) \\ r_{13} + is_{13} & -i(r_{13} - is_{13}) & r_{23} + is_{23} & -i(r_{23} - is_{23}) \\ r_{14} + is_{14} & -i(r_{14} - is_{14}) & r_{24} + is_{24} & -i(r_{24} - is_{24}) \end{pmatrix}.$$

Así, de la ecuación $F = A_1^T J A_1$, obtenemos que

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \{a_1, a_2\} & \{a_1, a_3\} & \{a_1, a_4\} \\ \{a_2, a_1\} & 0 & \{a_2, a_3\} & \{a_2, a_4\} \\ \{a_3, a_1\} & \{a_3, a_2\} & 0 & \{a_3, a_4\} \\ \{a_4, a_1\} & \{a_4, a_2\} & \{a_4, a_3\} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

De (3.59) y de la definición de a_j , $j = 1, 2$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \{a_2, a_1\} &= 2\{r_1, s_1\}, \\ \{a_3, a_1\} &= \{r_2, r_1\} + i\{r_2, s_1\} + \{s_1, s_2\} + i\{s_2, r_1\}, \\ \{a_4, a_1\} &= \{a_3, a_2\} = i\{r_1, r_2\} + \{r_2, s_1\} + \{r_1, s_2\} + i\{s_1, s_2\}, \\ \{a_4, a_2\} &= \{r_1, r_2\} + i\{r_2, s_1\} + \{s_2, s_1\} + i\{s_2, r_1\}, \\ \{a_4, a_3\} &= 2\{r_2, s_2\}. \end{aligned}$$

De las ecuaciones (3.56) y (3.59), obtenemos las siguientes condiciones:

i) $\{r_1, s_1\} = 0$.

ii) $\{r_2, r_1\} + \{s_1, s_2\} + i(\{r_2, s_1\} + \{s_2, r_1\}) = 0$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \{r_2, r_1\} + \{s_1, s_2\} &= 0 \quad \text{y} \quad \{r_2, s_1\} + \{s_2, r_1\} = 0. \\ \Leftrightarrow \{r_2, r_1\} &= \{s_2, s_1\} \quad \text{y} \quad \{r_2, s_1\} = \{r_1, s_2\}. \end{aligned}$$

iii) $if_{14} = i\{r_1, r_2\} + \{r_2, s_1\} + \{r_1, s_2\} + i\{s_1, s_2\}$.

Usando *ii*), obtenemos que

$$f_{14} = \{r_1, r_2\} + \{s_1, s_2\} = 2\{r_1, r_2\} \neq 0.$$

iv) $f_{36} = 2\{r_2, s_2\} \neq 0$.

Ahora, calculando la ecuación $J = B_1^T F B_1$ determinamos algunas condiciones para las constantes b_j , $j = 1, 2$,

$$B_1^T F B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\delta b_1^2 f_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\delta b_1^2 f_{14} \\ -2\delta b_1^2 f_{14} & 0 & 0 & 2b_1(b_1 f_{36} - 2b_2 f_{14}) \\ 0 & -2\delta b_1^2 f_{14} & -2b_1(b_1 f_{36} - 2b_2 f_{14}) & 0 \end{pmatrix},$$

en donde, será suficiente considerar

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2|\{a_1, a_4\}|}}, \quad \delta = \text{sgn}(\{a_1, a_4\}), \quad (3.60)$$

y además se debe verificar que

$$2b_1(b_1f_{36} - 2b_2f_{14}) = 0. \quad (3.61)$$

en esta última ecuación, basta considerar

$$b_2 = \delta b_1^3 \{a_3, a_6\}, \quad (3.62)$$

así, se satisface (3.61). Luego, multiplicando A_1 y B_1 obtenemos la expresión para la matriz N como

$$N = \begin{pmatrix} 2b_1r_{11} & -2b_1s_{11} & \delta(2b_2s_{11} + 2b_1r_{21}) & \delta(2b_2r_{11} - 2b_1s_{21}) \\ 2b_1r_{12} & -2b_1s_{12} & \delta(2b_2s_{12} + 2b_1r_{22}) & \delta(2b_2r_{12} - 2b_1s_{22}) \\ 2b_1r_{13} & -2b_1s_{13} & \delta(2b_2s_{13} + 2b_1r_{23}) & \delta(2b_2r_{13} - 2b_1s_{23}) \\ 2b_1r_{14} & -2b_1s_{14} & \delta(2b_2s_{14} + 2b_1r_{24}) & \delta(2b_2r_{14} - 2b_1s_{24}) \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

De manera equivalente a (3.63), las columnas de la matriz N vienen dadas por

$$n_1 = 2b_1r_1, \quad n_2 = -2b_1s_1, \quad n_3 = \delta(2b_2s_1 + 2b_1r_2), \quad n_4 = \delta(2b_2r_1 - 2b_1s_2). \quad (3.64)$$

A partir de (3.64), hacemos $\kappa_1 = 2b_1$ y $\kappa_2 = 2b_2$ y tenemos otra expresión para las entradas de la matriz N como

$$N = [\kappa_1r_1 \quad -\kappa_1s_1 \quad \delta(\kappa_2s_1 + \kappa_1r_2) \quad \delta(\kappa_2r_1 - \kappa_1s_2)]. \quad (3.65)$$

Las constantes κ_i , δ ($i = 1, 2$) son definidas a partir de las ecuaciones (3.60) y (3.62). Por lo tanto, la matriz N es simpléctica.

Donde

$$\delta = \text{sgn}\{r_1, r_2\}, \quad \kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{r_1, r_2\}|}}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{2}\kappa_1^3\{s_2, Jr_2\}. \quad (3.66)$$

Además, la matriz de normalización JS^* está dada por

$$\begin{aligned} JS^* &= [A(\kappa_1r_1) \quad A(-\kappa_1s_1) \quad A(\delta(\kappa_2s_1 + \kappa_1r_2)) \quad A(\delta(\kappa_2r_1 - \kappa_1s_2))] \\ &= [\kappa_1A(r_1) \quad -\kappa_1A(s_1) \quad \delta(\kappa_2A(s_1) + \kappa_1A(r_2)) \quad \delta(\kappa_2A(r_1) - \kappa_1A(s_2))]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando (3.57) se sigue que

$$\begin{aligned} JS^* &= [-\kappa_1\omega s_1 \quad -\kappa_1\omega r_1 \quad \delta(\kappa_2\omega r_1 - \kappa_1\omega s_2 + \kappa_1r_1) \quad \delta(-\kappa_2\omega s_1 - \kappa_1(\omega r_2 + s_1))] \\ &= [\omega(-\kappa_1s_1) \quad -\omega(\kappa_1r_1) \quad \omega\delta(\kappa_2r_1 - \kappa_1s_2) + \delta(\kappa_1r_1) \quad -\omega\delta(\kappa_2s_1 + \kappa_1r_2) + \delta(-\kappa_1s_1)]. \end{aligned}$$

De donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & \delta & 0 \\ \omega & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{así,} \quad S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & -\omega & \delta & 0 \\ \omega & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (3.3) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned}
K_2(q, p) &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, p_1, p_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & -\omega & \delta & 0 \\ \omega & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(q_1, q_2, p_1, p_2) \cdot (\omega p_2, -\omega p_1, -\omega q_2 + \delta p_1, \omega q_1 + \delta p_2) \\
&= \frac{1}{2}(\omega q_1 p_2 - \omega q_2 p_1 - \omega q_2 p_1 + \delta p_1^2 + \omega q_1 p_2 + \delta p_2^2) \\
&= \frac{\delta}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \omega(q_1 p_2 - q_2 p_1), \quad \delta = \pm 1.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Esto finaliza la demostración del teorema. ■

3.4. Análisis del caso donde las frecuencias son no nulas, iguales y la matriz A no es diagonalizable debido a N. Burgoyne y R. Cushman para dos grados de libertad

A continuación, describiremos con detalle el algoritmo general de N. Burgoyne y R. Cushman en el caso $n = 2$, es decir, presentaremos una demostración alternativa del Teorema 21 para un Hamiltoniano con dos grados de libertad cuando los valores propios de A son $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_4 = i\omega$ con $\omega \neq 0$, y la matriz A no es diagonalizable.

Teorema 22 *Si los valores propios de A son imaginarios puros $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_4 = i\omega$, $\omega \neq 0$ y A no es diagonalizable, entonces existe una matriz $N \in Sp(2, \mathbb{R})$ tal que la forma normal del Hamiltoniano (3.3) es*

$$K_2(q, p) = \frac{\delta}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \omega(q_1 p_2 - q_2 p_1),$$

donde $\delta = \pm 1$.

Demostración. Supongamos que los valores propios de A son todos imaginarios puros y que la matriz A no es diagonalizable, entonces el polinomio característico de A es de la forma $p(\lambda) = (\lambda^2 + \omega^2)^2$, donde $\omega \in \mathbb{R}^+$. De esta forma tenemos que el polinomio minimal de A es

$$p_{min}(\lambda) = (\lambda^2 + \omega^2)^2.$$

Vamos a iniciar nuestro algoritmo haciendo una descomposición de A como la suma de una matriz Σ semi-simple y una matriz M nilpotente. Note que la siguiente matriz

$$\Sigma = A \left(I + \frac{(A^2 + \omega^2 I)}{2\omega^2} \right), \quad (3.68)$$

es una matriz semi-simple. También observe que la matriz

$$M = -A \frac{(A^2 + \omega^2 I)}{2\omega^2}, \quad (3.69)$$

satisface $M^2 = 0$, por lo que tenemos que M es nilpotente, y como $A = \Sigma + M$ tenemos la descomposición deseada. Notemos que las matrices Σ y M son ambas Hamiltonianas, la demostración se realizará más adelante, ver Lema 8.

Por otro lado, sean $K_i = \{x \in \mathbb{R}^4 / M^i x = 0\}$, $i = 0, 1, 2$. Note que $K_0 = \{0\}$, $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 : Mx = 0\}$ y $K_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : M^2 x = 0\} = \mathbb{R}^4$. Defina el corchete de Poisson $\{x, y\} = \langle x, Jy \rangle = x^T Jy$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^4$. Nuestro próximo paso es construir ciertos subespacios convenientes de \mathbb{R}^4 . La construcción es recursiva, así, supongamos que en el $(j - 1)$ -ésimo paso hemos encontrado un subespacio W_{j-1} , para $j = 1$ hacemos $W_0 = \{0\}$ y construyamos subespacios W_j , de \mathbb{R}^4 mediante un proceso recursivo que describiremos a continuación.

Obtenga un entero $t = t_j$, $0 \leq t \leq 2$, tal que

$$W_{j-1}^\perp \cap K_{t+1} = W_{j-1}^\perp, \text{ pero } W_{j-1}^\perp \cap K_t \neq W_{j-1}^\perp, \quad (3.70)$$

donde $W_{j-1}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 / \{x, w\} = 0, \forall w \in W_{j-1}\}$. Note que si $M = 0$ (ésto es, $m = 1$), entonces $t = 0$ (caso diagonalizable).

Ahora, de acuerdo a (3.70) y dado que $j = 1$ se tiene que

- Si $t_1 = t = 0$, entonces $W_0^\perp \cap K_1 = K_1 \neq W_0^\perp$, pero $W_0^\perp \cap K_0 = \{0\} \neq W_0^\perp$. Observe que la condición (3.70) no se satisface para este valor de t , por tanto pasamos al siguiente paso.
- Si $t_1 = t = 1 \Rightarrow W_0^\perp \cap K_2 = W_0^\perp$, pero $W_0^\perp \cap K_1 = K_1 \neq W_1^\perp$, así, vale la condición (3.70), por lo tanto, se tiene que para nuestro caso $t = 1$.

Ahora, vamos a construir una base para el subespacio Z_1 , de acuerdo a la sección (2.6), como $t = 1$ es impar, escoja $z \in W_0^\perp$ tal que $z \notin K_1$, es decir, $Mz \neq 0$ y $\delta = \{z, Mz\}$, donde

$\delta^2 = 1$. Defina Z_1 como el espacio generado por $z, \Sigma z, Mz, M\Sigma z$ y escaja $W_1 = Z_1 + W_0 = [z, \Sigma z, Mz, M\Sigma z]$. Además, notemos que $W_1 = \mathbb{R}^4$, es decir,

$$W_1 = [z, \Sigma z, Mz, M\Sigma z] = \mathbb{R}^4.$$

El conjunto de vectores

$$\mathcal{B} = \{z, \Sigma z, Mz, M\Sigma z\}, \quad (3.71)$$

son linealmente independientes, ver Lema 10.

Sea z el vector encontrado anteriormente, con $\delta = \{z, Mz\}$ y $r = \frac{1}{2}(t+1) = 1$, forme

$$z^* = z + \frac{\delta}{2\omega^2} \langle z, \Sigma z \rangle M\Sigma z. \quad (3.72)$$

Entonces la base deseada para Z_1 , es la base $\mathcal{B}_{Z_1} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ cuyos elementos son

$$v_1 = z^*, \quad v_2 = \frac{1}{\omega} \Sigma z^*, \quad v_3 = \delta Mz^*, \quad v_4 = \frac{\delta}{\omega} \Sigma Mz^*. \quad (3.73)$$

Por lo tanto, obtenemos la expresión de la matriz N como

$$N = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]. \quad (3.74)$$

De hecho, tenemos que $\{v_i, v_j\} = J_{ij}$, $i, j = 1, \dots, 4$, luego esta es una base simpléctica de Z_1 , ver Lemas (11)-(17). Además, con la finalidad de simplificar la notación hacemos $a = \frac{\delta}{2\omega^2} \{z_0, \Sigma z_0\}$ en (3.72), así, obtenemos que

$$z^* = z + aM\Sigma z. \quad (3.75)$$

Por lo tanto, la ecuación (3.73) se convierte en

$$v_1 = z + a\Sigma Mz, \quad v_2 = \frac{1}{\omega} (\Sigma z + aM\Sigma^2 z), \quad v_3 = \delta Mz, \quad v_4 = \frac{\delta}{\omega} \Sigma Mz. \quad (3.76)$$

En esta base, la matriz de la restricción de A al subespacio Z_1 es la matriz JS^* , que se obtiene mediante

$$JS^* = [A(v_1) \quad A(v_2) \quad A(v_3) \quad A(v_4)],$$

con

- $A(v_1) = (\Sigma + M)(z + a\Sigma Mz) = \Sigma z + Mz + aM\Sigma^2 z = \omega v_2 + \delta v_3.$
- $A(v_2) = \frac{1}{\omega} (\Sigma + M)\Sigma(z + a\Sigma Mz) = \frac{1}{\omega} [\Sigma^2 z + M\Sigma z + aM\Sigma^3 z] = \frac{1}{\omega} \Sigma^2(z + aM\Sigma z) + \frac{1}{\omega} M\Sigma z = -\omega v_1 + \delta v_4.$

- $A(v_3) = \delta(\Sigma + M)\Sigma Mz = \delta\Sigma Mz = \omega v_4.$
- $A(v_4) = \frac{\delta}{\omega}(\Sigma + M)\Sigma Mz = \frac{\delta}{\omega}(\Sigma^2 Mz) = -\delta\omega Mz = -\omega v_3.$

De donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \delta & \omega & 0 \end{pmatrix}, \text{ así, } S^* = \begin{pmatrix} -\delta & 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\delta & -\omega & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.77)$$

Por lo tanto, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 definido en (3.3) adquiere la siguiente forma.

$$\begin{aligned} K_2(q, p) &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, p_1, p_2) \begin{pmatrix} -\delta & 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\delta & -\omega & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, p_1, p_2) \cdot (-\delta q_1 + \omega p_2, -\delta q_2 - \omega p_1, -\omega q_2, \omega q_1) \\ &= -\frac{\delta}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \omega(q_1 p_2 - q_2 p_1). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Luego, haciendo el siguiente cambio de coordenadas simpléctico

$$q_1 = iq_1, \quad q_2 = iq_2, \quad p_1 = -ip_1, \quad p_2 = -ip_2,$$

se tiene que el Hamiltoniano H_2 en (3.78) queda expresado como

$$K_2 = \frac{\delta}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \omega(q_1 p_2 - q_2 p_1), \quad \delta = \pm 1.$$

Esto finaliza la demostración del teorema. ■

A continuación, demostraremos algunas propiedades importantes que satisfacen las matrices Σ y M definidas según las ecuaciones (3.68) y (3.69), respectivamente, en el Teorema 22. Estas propiedades se muestran en los dos lemas siguientes.

Lema 8 *Las matrices Σ y M definidas según (3.68) y (3.69), respectivamente, son Hamiltonianas.*

Demostración. Sabemos que una combinación lineal de matrices Hamiltonianas es una matriz Hamiltoniana, así, será suficiente demostrar que la matriz A^3 es Hamiltoniana. En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} (A^3)^T J + JA^3 &= A^T A^T A^T J + JAAA = -A^T A^T JA - A^T JAA \\ &= -A^T(A^T J + JA)A = 0. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Por tanto, de la ecuación (3.79) concluimos que A^3 es una matriz Hamiltoniana. Esto finaliza la demostración del lema. ■

Lema 9 *La matriz Σ definida en (3.68) satisface la siguiente propiedad $\Sigma^2 + \omega^2 I = 0$*

Demostración. De acuerdo a (3.68), la matriz Σ está dada por

$$\Sigma = A + \frac{1}{2\omega^2}A^3 + \frac{1}{2}A,$$

de donde se obtiene que

$$-M = \Sigma - A = \frac{1}{2\omega^2}A^3 + \frac{1}{2}A. \quad (3.80)$$

De (3.80) se tiene $-2\omega^2 M = A^3 + \omega^2 A$, multiplicando por A en ésta última, se obtiene

$$-2\omega^2 MA = A^4 + \omega^2 A^2. \quad (3.81)$$

Por otro lado, observe que $0 = (A^2 + \omega^2 I)^2 = A^4 + 2\omega^2 A^2 + \omega^4 I$, es decir,

$$A^4 = -2\omega^2 A^2 - \omega^4 I. \quad (3.82)$$

Luego reemplazando (3.82) en (3.81) se tiene $-2\omega^2 MA = -\omega^2 A^2 - \omega^4 I$, de donde obtenemos que $-2MA = -2M(\Sigma + M) = -(\Sigma + M)^2 - \omega^2 I$, por lo tanto $2M\Sigma = \Sigma^2 + 2M\Sigma + \omega^2 I$, esta última igualdad implica que

$$\Sigma^2 + \omega^2 I = 0.$$

Por lo tanto el lema queda demostrado. ■

En el siguiente lema demostraremos que el conjunto \mathcal{B} según la ecuación (3.71) del Teorema 22, es una base de \mathbb{R}^4 .

Lema 10 *El conjunto $\mathcal{B} = \{z, \Sigma z, Mz, M\Sigma z\}$ es una base de \mathbb{R}^4 .*

Demostración. Notemos que Σ es diagonalizable y M es nilpotente tal que $M^2 = 0$. Además, observe que $Av = i\omega v$ con $A = \Sigma + M$, $\Sigma M = M\Sigma$ y $Mz \neq 0$.

i) Primeramente veamos que z y Σz son linealmente independientes. Suponga que

$$az + b\Sigma z = 0 \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (3.83)$$

Demostremos que $a = b = 0$, esto es, aplicando M en la ecuación (3.83) se tiene que

$$aMz + bM\Sigma z = 0,$$

y como $M\Sigma = M(A - M) = AM - M^2 = AM$ obtenemos

$$aMz + bAMz = 0 \Leftrightarrow bAMz = -aMz.$$

En esta última ecuación tome $v = Mz$, entonces $bAv = -av$. Si $b \neq 0$, entonces $Av = -\frac{a}{b}v$, esto contradice el hecho de que $Av = i\omega v$, a menos que $a = b = 0$. Por lo tanto, z y Σz son linealmente independientes.

ii) Análogamente, se prueba que Mz y $M\Sigma z$ son linealmente independientes.

Ahora suponga que

$$\alpha_1 z + \alpha_2 Mz + \alpha_3 \Sigma z + \alpha_4 M\Sigma z = 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (3.84)$$

Aplicando M en la ecuación (3.84), resulta que

$$\alpha_1 Mz + \alpha_3 M\Sigma z = 0.$$

Luego de acuerdo a ii) se sigue que $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, así, de (3.84) se obtiene que

$$\alpha_2 Mz + \alpha_4 M\Sigma z = 0.$$

Nuevamente por ii) se sigue $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$.

Por lo tanto, de lo anterior $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, por consiguiente el conjunto $\{z, \Sigma z, Mz, M\Sigma z\}$ es linealmente independiente. ■

Finalmente, demostraremos que la base $\mathcal{B}_{Z_1} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ definida en el Teorema 22, cuyos elementos están definidos en (3.76) es simpléctica. Los siguientes lemas muestran que efectivamente \mathcal{B}_{Z_1} es una base simpléctica.

Lema 11 Si $b_j \in \mathcal{B}_{Z_1}$, entonces $\{b_j, b_j\} = 0$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Demostración. Sabemos que $\{b_j, b_j\} = 0$, $\forall b_j \in \mathbb{R}^{2n}$, dado que $b_j^T \perp Jb_j$, por lo tanto, el lema queda demostrado. ■

Comentario 1 Veamos una caso particular del Lema 11. Por ejemplo, de acuerdo al Lema 11 sabemos que se verifica la siguiente igualdad $\{b_1, b_1\} = 0$. Recuerde que $z^* = z + aM\Sigma z$ con $a = \frac{\delta}{2\omega^2} \{z_0, \Sigma z_0\}$. Luego, notemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \{b_1, b_1\} \\
&= (z + aM\Sigma z)^T J (z + aM\Sigma z) \\
&= (z^T + az^T \Sigma^T M^T) (Jz + aM\Sigma z) \\
&= z^T Jz + 2a \Sigma^T M^T J M z \\
&= 0 + 2az^T J M \Sigma z \\
&= z^T J M \Sigma z \\
&= \{z, M\Sigma z\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{z, M\Sigma z\} = 0$.

Lema 12 Si $b_1, b_2 \in \mathcal{B}_{Z_1}$, entonces $\{b_1, b_2\} = 0$.

Demostración. Para la demostración del lema, recordemos que las matrices Σ y M son Hamiltonianas, además, usaremos la definición de a y recordemos también que $\delta = \{z, Mz\}$.

$$\begin{aligned}
\{b_1, b_2\} &= z^* J \frac{1}{\omega} \Sigma z^* \\
&= \frac{1}{\omega} (z + aM\Sigma z)^T J \Sigma (z + aM\Sigma z) \\
&= \frac{1}{\omega} (z^T + az^T \Sigma^T M^T) (J \Sigma z + a J M \Sigma^2 z) \\
&= \frac{1}{\omega} (z^T J \Sigma z + az^T J M \Sigma^2 z + az^T \Sigma^T M^T J \Sigma z) \\
&= \frac{1}{\omega} (2\delta \omega^2 a + 2az^T J M \Sigma^2 z) \\
&= \frac{1}{\omega} (2\delta \omega^2 a + 2az^T J M (-\omega^2 I) z) \\
&= \frac{1}{\omega} (2\delta \omega^2 a - 2\omega^2 az^T J M z) \\
&= \frac{1}{\omega} (2\delta \omega^2 a - 2\delta \omega^2 a) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{b_1, b_2\} = 0$. Así, el lema queda demostrado. ■

Lema 13 Si $b_1, b_4 \in \mathcal{B}_{Z_1}$, entonces $\{b_1, b_4\} = 0$.

Demostración. Para la demostración del lema, debemos recordar que $\{z, M\Sigma z\} = 0$ según el Comentario 1. Así,

$$\begin{aligned}
\{b_1, b_4\} &= z^* J \frac{1}{\omega} \Sigma M z^* \\
&= \frac{\delta}{\omega} (z^T + az^T \Sigma^T M^T)^T J \Sigma M (z + aM\Sigma z) \\
&= \frac{\delta}{\omega} (z^T + az^T \Sigma^T M^T) J \Sigma M z \\
&= \frac{\delta}{\omega} (z^T J \Sigma M z) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{b_1, b_4\} = 0$. Así, el lema queda demostrado. ■

Lema 14 Si $b_2, b_3 \in \mathcal{B}_{Z_1}$, entonces $\{b_2, b_3\} = 0$.

Demostración. La demostración es similar al lema anterior, usaremos el hecho que $\{z, M\Sigma z\} = 0$ de acuerdo al Comentario 1.

$$\begin{aligned}
\{b_2, b_3\} &= \frac{1}{\omega} z^* J \delta M z^* \\
&= \frac{\delta}{\omega} (z^T + az^T \Sigma^T M^T)^T \Sigma^T J M (z + aM\Sigma z) \\
&= \frac{\delta}{\omega} (z^T + az^T \Sigma^T M^T) \Sigma^T J M z \\
&= \frac{\delta}{\omega} (z^T \Sigma^T J M z) \\
&= -\frac{\delta}{\omega} (z^T J \Sigma M z) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{b_2, b_3\} = 0$. Así, el lema queda demostrado. ■

Lema 15 Si $b_3, b_4 \in \mathcal{B}_{Z_1}$, entonces $\{b_3, b_4\} = 0$.

Demostración. Para demostrar este lema, recordemos que la matriz M es tal que $M^2 = 0$.

$$\begin{aligned}
\{b_3, b_4\} &= (\delta M z^*)^T J \frac{\delta}{\omega} \Sigma M z^* \\
&= \frac{1}{\omega} (z^T + az^T \Sigma^T M^T)^T M^T J \Sigma M (z + aM\Sigma z) \\
&= -\frac{1}{\omega} (z^T + az^T \Sigma^T M^T) J M^2 \Sigma (z + aM\Sigma z) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{b_3, b_4\} = 0$. Así, el lema queda demostrado. ■

Lema 16 Si $b_1, b_3 \in \mathcal{B}_{Z_1}$, entonces $\{b_1, b_3\} = 1$.

Demostración. Para la demostración del lema, recordar que $\delta = \{z, Mz\}$.

$$\begin{aligned}
\{b_1, b_3\} &= (z + aM\Sigma z)^T J \delta M (z + aM\Sigma z) \\
&= (z^T + az^T \Sigma^T M^T) J \delta (Mz + aM^2 \Sigma z) \\
&= z^T (I + a\Sigma^T M^T) J \delta M z \\
&= \delta z^T (JM + a\Sigma^T M^T JM) z \\
&= \delta z^T (JM - a\Sigma^T JM^2) z \\
&= \delta z^T JM z \\
&= \delta^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{b_1, b_3\} = 1$. Así, el lema queda demostrado. ■

Lema 17 Si $b_2, b_4 \in \mathcal{B}_{Z_1}$, entonces $\{b_2, b_4\} = 1$.

Demostración. La demostración de este lema es similar al lema anterior, es decir, usaremos la definición de δ .

$$\begin{aligned}
\{b_2, b_4\} &= \frac{1}{\omega} [\Sigma(z + aM\Sigma z)]^T J \frac{\delta}{\omega} \Sigma M (z + aM\Sigma z) \\
&= \frac{\delta}{\omega^2} (z^T + az^T \Sigma^T M^T) \Sigma^T J \Sigma (Mz + aM^2 \Sigma z) \\
&= \frac{\delta}{\omega^2} z^T (I + a\Sigma^T M^T) \Sigma^T J \Sigma M z \\
&= \frac{\delta}{\omega^2} z^T (\Sigma^T J \Sigma M + a\Sigma^T M^T \Sigma^T J \Sigma M) z \\
&= \frac{\delta}{\omega^2} z^T (-J \Sigma^2 M + a\Sigma^T \Sigma^T M^T J M \Sigma) z \\
&= \frac{\delta}{\omega^2} z^T (-J(-\omega^2 I) M - a\Sigma^T \Sigma^T J M^2 \Sigma) z \\
&= \delta z^T JM z \\
&= \delta^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{b_2, b_4\} = 1$. Así, el lema queda demostrado. ■

Luego, de acuerdo a los Lemas 11-17, concluimos que \mathcal{B}_{Z_1} es una base simpléctica.

3.5. Aplicaciones

En esta Sección, presentamos algunas aplicaciones en las que haremos uso de los resultados obtenidos en las secciones anteriores, referente a formas normales de la parte cuadrática de un sistema Hamiltoniano cuando la matriz asociada al sistema linealizado no es diagonalizable.

3.5.1. Aplicación para el caso donde las frecuencias son todas nulas y $rg(S) = 2$

Dado que en la literatura no existen problemas comunes con algún significado astronómico que presenten frecuencias todas nulas, presentamos un ejemplo puramente académico, el cual surgió del problema del satélite caso espacial (ver [10]) como producto de anular uno de sus ángulos, esta función viene dada por

$$H = \frac{1}{2}\Theta^2 \left[\frac{\nu_1}{\nu_2} + \cot^2 \phi (\nu_1 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \right] - \frac{1}{2}(1 - \nu_1)\Phi\Theta \cot \phi \sin(2\theta) + \frac{3(\nu_1 - 1) \cos^2 \theta}{2\nu_1} + \frac{1}{2}\Theta^2(\nu_1 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta), \quad (3.85)$$

donde ν_1, ν_2 son constantes reales positivas.

Usando el algoritmo descrito en el Teorema 18, vamos a obtener la forma normal de la parte cuadrática de la función (3.85).

Notemos que el sistema asociado a la función H en (3.85) viene dado por

$$\begin{aligned} H_\Phi &= (\nu_1 - 1)\Theta \cot \phi \sin \theta \cos \theta + \nu_1 \Phi \sin^2 \theta + \Phi \cos^2 \theta, \\ H_\Theta &= \Theta \left[\frac{\nu_1}{\nu_2} + \cot^2 \phi (\nu_1 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \right] + (\nu_1 - 1)\Phi \cot \phi \sin \theta \cos \theta, \\ H_\phi &= \frac{1}{2}\Theta \csc^2 \phi [2\Theta \cot \phi (\nu_1 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (\nu_1 - 1)\Phi \sin(2\theta)], \\ H_\theta &= -\frac{(\nu_1 - 1)[\sin \theta \cos \theta (-\nu_1 \Theta^2 \cot^2 \phi + \nu_1 \Phi^2 - 3) + \nu_1 \Phi \Theta \cot \phi \cos(2\theta)]}{\nu_1}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Considerando el dominio de los ángulos de Euler como $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$, el sistema (3.86) tiene como equilibrios $(\phi_0, \theta_0, \Phi_0, \Theta_0)$ a

$$\begin{aligned} e_1 &= \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0\right), & e_2 &= \left(\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0\right), & e_3 &= \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, 0\right), \\ e_4 &= \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, 0\right) & y & & e_5 &= \left(\frac{\pi}{2}, \pi, 0, 0\right). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Es de nuestro interés obtener un caso degenerado para algunos valores de los parámetros ν_1 y ν_2 , consideramos por ejemplo la solución de equilibrio $e_5 = (\frac{\pi}{2}, \pi, 0, 0)$, los otros casos generan resultados equivalentes.

Después de realizar una traslación al origen y una expansión en serie de Taylor, la función H en (3.85) admite la siguiente forma

$$H = H_0 + H_2 + H_4 + \dots \quad (3.88)$$

donde

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{3(\nu_1 - 1)}{2\nu_1}, \\ H_2 &= \frac{\nu_1 \Theta_1^2}{2\nu_2} + \frac{3\theta^2}{2\nu_1} + \frac{\Phi^2}{2} - \frac{3\theta^2}{2}, \\ H_4 &= \frac{1}{2}\nu_1 \phi^2 \Theta_1^2 - \nu_1 \phi \Phi \theta \Theta + \frac{1}{2}\nu_1 \Phi^2 \theta^2 - \frac{\theta^4}{2\nu_1} + \phi \Phi \theta \Theta - \frac{\Phi^2 \theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{2}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

De donde se tiene que la parte cuadrática de la función H en (3.88) está dado por

$$H_2 = \frac{\nu_1 \Theta_1^2}{2\nu_2} + \frac{3\theta^2}{2\nu_1} + \frac{\Phi^2}{2} - \frac{3\theta^2}{2}. \quad (3.90)$$

La matriz asociada al sistema de ecuaciones correspondiente a H_2 en (3.90) viene dada por

$$JS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu_1}{\nu_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \frac{3}{\nu_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\nu_1 = 1$ y $\nu_2 > 0$, los valores propios de la matriz JS del sistema linealizado son todos nulos. En este caso $rg(S) = 2$ y la matriz JS tiene como vectores propios asociados a los valores propios nulos a $a_1 = (1, 0, 0, 0)$ y $a_3 = (0, 1, 0, 0)$. Se puede verificar que los vectores $a_2 = (a_{21}, a_{22}, 1, 0)$ y $a_4 = (a_{41}, a_{42}, 0, \nu_2)$ son vectores propios generalizados de los vectores a_1 y a_2 , respectivamente, el conjunto de vectores $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ satisface la ecuación (3.19). Por lo tanto, de acuerdo a la notación del Teorema 18 se sigue que $f_{12} = \{a_1, a_2\} = 1$, $f_{24} = \{a_2, a_4\} = \nu_2 a_{22} - a_{41}$, $f_{34} = \{a_3, a_4\} = \nu_2$, por lo tanto, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $b_1 = 1$, $b_3 = \frac{\nu_2 a_{22} - a_{41}}{\sqrt{\nu_2}}$ y $b_4 = \frac{1}{\sqrt{\nu_2}}$. De acuerdo a la ecuación (3.24) se sigue que la matriz N viene dada por

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{21} & \sqrt{\nu_2} a_{22} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\nu_2}} & a_{22} & \frac{a_{42}}{\sqrt{\nu_2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\nu_2} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es simpléctica, pues

$$\begin{aligned}
N^T J N &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\nu_2}} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & 0 \\ \sqrt{\nu_2} a_{22} & \frac{a_{42}}{\sqrt{\nu_2}} & 0 & \sqrt{\nu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{21} & \sqrt{\nu_2} a_{22} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\nu_2}} & a_{22} & \frac{a_{42}}{\sqrt{\nu_2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\nu_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando la ecuación (3.25) en el Teorema 18, concluimos que la forma normal K_2 para H_2 en (3.90) es dada por

$$K_2(q, p) = \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2.$$

3.5.2. Aplicación al problema lunar de Hill en \mathbb{R}^2

En esta subsección, vamos a obtener la forma normal de la parte cuadrática de la función Hamiltoniana correspondiente al problema lunar de Hill en el caso planar, para este fin, utilizaremos el algoritmo descrito en el Teorema 20.

Consideremos el problema lunar de Hill en \mathbb{R}^2 definido por el Hamiltoniano (ver detalles en [13])

$$H = \frac{1}{2} \|p\|^2 - q^T K p - \frac{1}{\|q\|} + [3q_1^2 - \|q\|^2],$$

con $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, es decir,

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + p_1 q_2 - p_2 q_1 - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} + 2q_1^2 - q_2^2. \quad (3.91)$$

Notemos que el sistema Hamiltoniano asociado a la ecuación (3.91) es

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_1 + q_2, & \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} = p_2 - \frac{q_1}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}} - 4q_1, \\
\dot{q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2 - q_1, & \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -p_1 - \frac{q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}} + 2q_2.
\end{aligned} \quad (3.92)$$

Luego de algunos cálculos, obtenemos que las soluciones de equilibrio para el sistema (3.92) viene dado en el siguiente conjunto: $E_q = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, donde

$$e_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 0\right), \quad e_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 0\right),$$

$$e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right), \quad e_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right).$$

Después de realizar una traslación al origen y una expansión en serie de Taylor, en cada uno de los puntos del conjunto E_q , supongamos que el Hamiltoniano (3.92), admite la siguiente forma

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 + \dots \quad (3.93)$$

Se puede verificar que los puntos de equilibrio e_1 y e_2 generan el mismo Hamiltoniano H_2 en (3.93) y además, la matriz asociada al sistema Hamiltoniano correspondiente a H_2 en (3.93), tiene un valor propio imaginario puro y un valor propio real. Y los puntos de equilibrio e_3 y e_4 también generan el mismo Hamiltoniano H_2 en (3.93) y además, dicha matriz tiene un valor propio nulo y un valor propio imaginario puro. Dado que es de nuestro interés este último caso, consideramos el punto de equilibrio $e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)$, haciendo una traslación al origen y una expansión en serie de Taylor, vemos que

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 + \dots, \quad (3.94)$$

con

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, & H_1 &= -2\sqrt[3]{9}q_1, & H_2 &= \frac{1}{2}(p_1^2 + 2p_1q_2 + p_2^2 - 2p_2q_1 - 2q_1^2 + q_2^2), \\ H_3 &= -3\sqrt[3]{3}(q_1^3 - \frac{3}{2}q_1q_2^2), & H_4 &= 3\sqrt[3]{9}(-q_1^4 + 3q_1^2q_2^2 - \frac{3}{8}q_2^4), \\ H_5 &= -9(q_1^5 - 5q_1^3q_2^2 + \frac{15q_1q_2^4}{8}), & H_6 &= -\frac{9\sqrt[3]{3}}{16}(16q_1^6 - 120q_1^4q_2^2 + 90q_1^2q_2^4 - 5q_2^6). \end{aligned}$$

De donde se tiene que la parte cuadrática del Hamiltoniano H en (3.94) está dado por

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + 2p_1q_2 + p_2^2 - 2p_2q_1 - 2q_1^2 + q_2^2), \quad (3.95)$$

cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz A tiene como valores propios a $\{i, -i, 0, 0\}$ y como vectores propios a $(-1, -2i, i, 1)$ y $(0, -1, 1, 0)$ correspondientes a los valores propios i y 0 , respectivamente. Así, de acuerdo a la notación en el Teorema 20 se obtiene que $r_1 = (-1, 0, 0, 1)$, $s_1 = (0, -2, 1, 0)$, $a_2 = (0, -1, 1, 0)$ y $a_4 = \left(\frac{2}{3}, 0, 0, -\frac{1}{3} \right)$ es el vector propio generalizado correspondiente al valor propio nulo. Ahora notemos que $\{r_1, s_1\} = 1$ y $\{a_2, a_4\} = -\frac{1}{3}$. Por lo tanto, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 =$

$\sqrt{3}$, $\delta_1 = 1$ y $\delta_2 = -1$. Así, la matriz N en (3.52) viene dada como

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{3} & -2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

Ésta es simpléctica, pues

$$\begin{aligned} N^T J N &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{3} & -2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\sqrt{3} & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

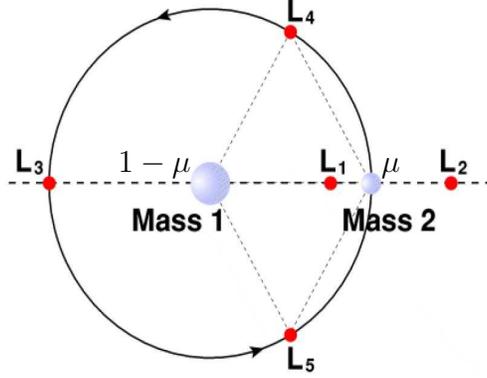
Finalmente, usando la ecuación (3.53) en el Teorema 20, concluimos que la forma normal K_2 para el Hamiltoniano H_2 en (3.95) es dada por

$$K_2(q, p) = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2}p_2^2.$$

3.5.3. Aplicación al problema planar restringido circular de tres cuerpos

En esta subsección, utilizando los métodos descritos en los Teoremas 20-22, vamos a obtener la forma normal de la parte cuadrática de la función Hamiltoniana correspondiente al problema restringido circular de los tres cuerpos en el caso planar en una vecindad de los puntos de libración Lagrangianos.

Consideremos el problema restringido circular de los tres cuerpos en el caso planar, en el consideramos dos cuerpos de masa m_1 y m_2 ($\mu \in (0, 1/2)$) que se mueve a lo largo de órbitas circulares y con la misma velocidad angular



La función Hamiltoniano que modela este problema (ver detalles en [13]) viene dada por

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 - \frac{\mu}{\sqrt{(\mu + q_1 - 1)^2 + q_2^2}} - \frac{1 - \mu}{\sqrt{(\mu + q_1)^2 + q_2^2}}. \quad (3.96)$$

Inicialmente escribiremos el Hamiltoniano de este problema dado en (3.96) en serie de Taylor al rededor del equilibrio L_4 , es decir, en el punto $(q_1 = \frac{1}{2} - \mu, q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, p_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, p_2 = \frac{1}{2} - \mu)$. Éstas son dadas por

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \quad (3.97)$$

con

$$\begin{aligned} H_0 &= -1, \\ H_1 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} p_1 + 2\mu p_2 - p_2 - 2\mu q_1 + q_1 + \sqrt{3} q_2 \right), \\ H_2 &= \frac{1}{8} q_1^2 - k q_1 q_2 - q_1 p_2 - \frac{5}{8} q_2^2 + q_2 p_1 + \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2, \\ H_3 &= -\frac{7\sqrt{3}}{36} k q_1^3 + \frac{3\sqrt{3}}{16} q_1^2 q_2 + \frac{11\sqrt{3}}{12} k q_1 q_2^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16} q_2^3, \\ H_4 &= \frac{37}{128} q_1^4 + \frac{25}{24} k q_1^3 q_2 - \frac{123}{64} q_1^2 q_2^2 - \frac{15}{8} k q_1 q_2^3 - \frac{3}{128} q_2^4, \end{aligned}$$

donde $k = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)$ es el valor crítico de Routh.

Por lo tanto, se tiene que la parte cuadrática del Hamiltoniano H en (3.97) está dado por

$$H_2 = \frac{1}{8} q_1^2 - k q_1 q_2 - q_1 p_2 - \frac{5}{8} q_2^2 + q_2 p_1 + \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2, \quad (3.98)$$

La matriz asociada a las ecuaciones Hamiltonianas correspondiente a H_2 viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}\mu}{2} & 0 & 1 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}\mu}{2} & \frac{5}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicación 1 *Aplicación al caso donde una frecuencia es nula, una no nula y la matriz A no diagonalizable.*

Si $\mu = 0$, los valores propios de la matriz A del sistema linealizado son

$$\lambda_1 = \pm i, \quad \lambda_2 = 0, \quad (3.99)$$

Se verifica que el vector $a_1 = \left(\frac{1}{4}(5 + 3i\sqrt{3}), \frac{1}{4}(-3\sqrt{3} + i), i, 1\right)$ es el vector propio correspondiente al valor propio i de la matriz A , el vector propio asociado al valor propio nulo es $a_2 = \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ y el correspondiente vector propio generalizado es $a_4 = \left(\frac{8}{3\sqrt{3}}, 0, 1, \frac{5}{3\sqrt{3}}\right)$. Así, de acuerdo a la notación en el Teorema 20 se obtiene que $r_1 = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}3\sqrt{3}, 0, 1\right)$ y $s_1 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0\right)$. De donde, se sigue que $\{r_1, s_1\} = 1$ y $\{a_2, a_4\} = -\frac{9}{4}$, por lo tanto, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 3/2$, $\delta_1 = 1$ y $\delta_2 = -1$. Así, la matriz N en (3.52) viene dada como

$$N = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{4}(3\sqrt{3}) & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

Ésta es simpléctica, pues

$$\begin{aligned} N^T J N &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, usando la ecuación (3.53) en el Teorema 20, concluimos que la forma normal K_2 para H_2 en (3.98) es dada por

$$K_2(q, p) = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2}p_2^2.$$

Aplicación 2 *Aplicación al caso donde las frecuencias son no nulas, iguales y la matriz A no diagonalizable debido a Markeev.*

Si $\mu = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{69}}{9})$, los valores propios de la matriz A del sistema linealizado son

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}i}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}i}{2}, \quad (3.100)$$

cada uno con multiplicidad dos. La matriz A tiene como vector propio asociado al valor propio $i\omega$ a $a_1 = (\sqrt{2}, -i(\sqrt{2} - 2), i(\sqrt{2} - 1), 1)$ y el correspondiente vector generalizado es $a_2 = (0, 2 - \sqrt{2}, 2(\sqrt{2} - 1), i)$. Así, de acuerdo a la notación en el Teorema 21 se obtiene que

$$\begin{aligned} r_1 &= (\sqrt{2}, 0, 0, 1), & r_2 &= (0, 2 - \sqrt{2}, 2(\sqrt{2} - 1), 0), \\ s_1 &= (0, 2 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1, 0), & s_2 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Ahora notemos que $\{r_1, r_2\} = 2 - \sqrt{2}$ y $\{s_2, r_2\} = -2 + \sqrt{2}$. Por lo tanto, $\kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$, $\kappa_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \right)^3 (\sqrt{2} - 2)$ y $\delta = 1$. Así, la matriz N en (3.65) viene dada como

$$N = \begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ 0 & -\sqrt{2-\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & \frac{3(-1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & 0 & 0 & -\frac{3}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \end{pmatrix},$$

Ésta es simpléctica, pues

$$\begin{aligned} N^T J N &= \begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ 0 & -\sqrt{2-\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & \frac{3(-1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & 0 & 0 & -\frac{3}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ 0 & -\sqrt{2-\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & \frac{3(-1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & 0 & 0 & -\frac{3}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, usando la ecuación (3.67) en el Teorema 21, concluimos que la forma normal K_2 para H_2 en (3.98) es dada por

$$K_2(q, p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(q_1 p_2 - q_2 p_1).$$

Aplicación 3 *Aplicación al caso donde las frecuencias son no nulas, iguales y la matriz A no diagonalizable debido a N. Burgoyne y R. Cushman.*

Recordemos que la matriz asociada a las ecuaciones Hamiltonianas correspondiente a H_2 viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}\mu}{2} & 0 & 1 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}\mu}{2} & \frac{5}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\mu = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{69}}{9})$, los valores propios de la matriz A del sistema linealizado son

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}i}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}i}{2}, \quad (3.101)$$

cada uno con multiplicidad dos. De aquí tenemos que el polinomio característico tiene la forma

$$P(\lambda) = \left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (3.102)$$

Cálculos simples muestran que el polinomio minimal $p_{min}(\lambda)$ es igual al polinomio característico.

Para la descomposición de la matriz del sistema linealizado A como suma de una matriz simple Σ con una matriz nilpotente M , siguiendo el algoritmo dado en el Teorema 22, tenemos que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 2 + \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} & 0 \\ -2 + \sqrt{2} & 0 & 0 & -1 - \sqrt{2} \\ \frac{3}{2}(-2 + \sqrt{2}) & 0 & 0 & 2 - \sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}(-2 - \sqrt{2}) & 1 + \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

y

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & 0 \\ 1 - \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 - \sqrt{2} \\ \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{2}) & 0 & 0 & -1 + \sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}(-2 - \sqrt{2}) & 1 + \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.104)$$

Como $M \neq 0$ y $M^2 = 0$ tenemos que $t = 1$. Ahora vamos a obtener $z \in W_0^\perp = \mathbb{R}^4$ tal que $Mz \neq 0$ y $\{z, Mz\} = \delta$, donde $\delta^2 = 1$. Si $z = (\sigma, 0, 0, 0)$ para tener $\{z, Mz\} = -1$, podemos escoger $\sigma = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})^{-1/2}$. Luego, la forma normal de A es

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.105)$$

La función Hamiltoniana cuadrática asociada a la matriz JS^* está dada por

$$K_2(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(q_1 p_2 - q_2 p_1). \quad (3.106)$$

Usando la ecuación (3.76) tenemos que la matriz N es dada como $JS^* = N^{-1}AN$ es dada por

$$N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sigma} & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}\sigma}{2} & \sqrt{2}\sigma & 0 \\ 0 & -\frac{3\sigma}{2} & \sigma & 0 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{4\sigma} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2\sigma} \end{pmatrix}, \quad (3.107)$$

donde $\sigma = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})^{-1/2}$.

Capítulo 4

Formas normales para sistema Hamiltonianos no lineales

En este Capítulo estudiamos formas normales para sistemas Hamiltonianos no lineales. En particular, estudiaremos la forma normal para un Hamiltoniano con dos grados de libertad hasta términos de quinto orden cuando la parte cuadrática es nula, y la forma normal hasta cuarto orden para un Hamiltoniano con dos grados de libertad cuando la parte cuadrática no es diagonalizable. Para este fin, centramos nuestro análisis en los tres casos estudiados en el Capítulo 2, pues es de nuestro interés normalizar los términos de orden mayor o igual a tres, ya que en muchos casos la parte lineal de un sistema Hamiltoniano no nos brinda información sobre la estabilidad no lineal del sistema. Por esta razón necesitamos analizar términos de mayor orden en el Hamiltoniano, lo cual puede resultar complicado por la cantidad de términos que pueden aparecer. Los métodos que utilizamos son la forma normal de Gustavson, la forma normal de Birkhoff (según [15]) y el método de Lie o Deprit-Hori (de acuerdo a [13]) para calcular la forma normal de sistemas Hamiltonianos no lineales.

4.1. Forma normal para un Hamiltoniano con dos grados de libertad hasta términos de quinto orden cuando la parte cuadrática es nula

En esta sección generalizaremos la forma normal de Gustavson para sistemas Hamiltonianos no lineales con dos grados de libertad expuesta en la subsección 2.7. Este resultado es completamente original, debido a que en la literatura aún no ha sido estudiado por otros

autores.

El análisis de este caso es cuando el Hamiltoniano

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \sum_{s=m}^n H_s(q_1, q_2, p_1, p_2) + \tilde{H}(q_1, q_2, p_1, p_2), \quad (4.1)$$

$$H_s(q_1, q_2, p_1, p_2) = \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} p_1^{l_1} p_2^{l_2},$$

comienza con términos de grado tres o más, mediante la construcción de un cambio de coordenadas simpléctico $(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ que simplifica el Hamiltoniano (4.1).

Es importante señalar que la transformación simpléctica que introduce las nuevas variables $Q = (Q_1, Q_2)$ y $P = (P_1, P_2)$ está asociada a la función generadora $S = S(q_1, q_2, P_1, P_2)$ de la forma

$$S = q_1 P_1 + q_2 P_2 + \sum_{s=3}^{n-m+2} S_s(q_1, q_2, P_1, P_2), \quad (4.2)$$

$$S_s = \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} s_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2}, \quad m \geq 3, \quad n \geq 4,$$

donde $s_{k_1 k_2 l_1 l_2}$ son coeficientes constantes. Estos valores serán determinados mediante el proceso de simplificación de la función H . Adicionalmente, al caso un grado de libertad descrito en la sección 2.7, adaptado a la actual situación, es decir, para Hamiltonianos con dos grados de libertad, se obtiene que la relación entre las antiguas y nuevas variables es dada por

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2. \quad (4.3)$$

A partir de estas relaciones, encontramos las expresiones $q_i = q_i(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$, $p_i = p_i(P_1, P_2, Q_1, Q_2)$ $i = 1, 2$, para las antiguas variables en términos de las nuevas variables como expansiones inclusive hasta términos de grado $n - m + 1$ con respecto a Q_i y P_i por

$$q_i = q_i(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = Q_i - \frac{\partial S_3(Q_1, Q_2, P_1, P_2)}{\partial P_i} + \dots \quad (4.4)$$

$$p_i = p_i(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = P_i + \frac{\partial S_3(Q_1, Q_2, P_1, P_2)}{\partial Q_i} + \dots$$

$i = 1, 2$. Aquí los puntos suspensivos denotan los términos de grado mayor a dos con respecto a Q_i y P_i (inclusive hasta términos de grado $n - m + 1$).

Sustituyendo las expresiones (4.4) en (4.1), se produce la expansión en series de la función Hamiltoniana Γ definida por

$$\Gamma = \sum_{s=m}^l \Gamma_s(Q_1, Q_2, P_1, P_2) + \tilde{\Gamma}(Q_1, Q_2, P_1, P_2), \quad \Gamma_s = \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} Q_1^{k_1} Q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2},$$

donde $\tilde{\Gamma}(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ es una función que contiene términos de grado mayor que n con respecto a Q_i y P_i . Siguiendo el enfoque que brinda el algoritmo de la forma normal de Gustavson como en [22], se obtiene que las funciones $\Gamma_s(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ son encontradas utilizando las fórmulas o relaciones:

$$\Gamma_m = H_m(Q_1, Q_2, P_1, P_2), \quad (4.5)$$

$$\Gamma_{m+1} = \{S_3, H_m\} + H_{m+1}(Q_1, Q_2, P_1, P_2), \quad (4.6)$$

$$\Gamma_r = \{S_{r-m+2}, H_m\} + H_r(Q_1, Q_2, P_1, P_2) + F_r(Q_1, Q_2, P_1, P_2) \quad (r = m + 2, \dots, n), \quad (4.7)$$

de manera secuencial. En efecto, usando las mismas ideas que en el caso de un grado de libertad, obtenemos que la relación entre el Hamiltoniano inicial H y el nuevo Hamiltoniano Γ , es

$$H \left(q_1, q_2, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \right) = \Gamma \left(\frac{\partial S}{\partial P_1}, \frac{\partial S}{\partial P_2}, P_1, P_2 \right),$$

es decir,

$$H_m \left(q_1, q_2, P_1 + \frac{\partial S_3}{\partial q_1} + \dots, P_2 + \frac{\partial S_3}{\partial q_2} + \dots \right) + H_{m+1} \left(q_1, q_2, P_1 + \frac{\partial S_3}{\partial q_1} + \dots, P_2 + \frac{\partial S_3}{\partial q_2} + \dots \right) + \dots =$$

$$\Gamma_m \left(q_1 + \frac{\partial S_3}{\partial P_1} + \dots, q_2 + \frac{\partial S_3}{\partial P_2} + \dots, P_1, P_2 \right) + \Gamma_{m+1} \left(q_1 + \frac{\partial S_3}{\partial P_1} + \dots, q_2 + \frac{\partial S_3}{\partial P_2} + \dots, P_1, P_2 \right) + \dots$$

donde, $H_s = \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2}$ y $\Gamma_s = \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2}$, y por lo tanto:

1. Los términos de grado m deben satisfacer la relación:

$$H_m(q_1, q_2, P_1, P_2) = \Gamma_m(q_1, q_2, P_1, P_2).$$

2. Los términos de grado $m + 1$ deben satisfacer la relación:

$$\sum_{|k|+|l|=m} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} l_1 q_1^{k_1} q_2^{l_2} P_1^{l_1-1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial q_1} + \sum_{|k|+|l|=m} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} l_2 q_1^{k_1} q_2^{l_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2-1} \frac{\partial S_3}{\partial q_2} + H_{m+1} =$$

$$\sum_{|k|+|l|=m} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} k_1 q_1^{k_1-1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial P_1} + \sum_{|k|+|l|=m} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} k_2 q_1^{k_1} q_2^{k_2-1} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial P_2} + \Gamma_{m+1}$$

Como $\tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} = \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2}$ cuando $|k| + |l| = m$, entonces

$$\Gamma_{m+1} = \sum_{|k|+|l|=m} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} \left(l_1 q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1-1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial q_1} + l_2 q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2-1} \frac{\partial S_3}{\partial q_2} \right.$$

$$\left. - k_1 q_1^{k_1-1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial P_1} - k_2 q_1^{k_1} q_2^{k_2-1} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial P_2} \right) + H_{m+1}$$

$$\Gamma_{m+1} = \{S_3, H_m\} + H_{m+1}.$$

3. Los términos de grado $m + 2$ deben satisfacer la relación:

$$\begin{aligned}
& \sum_{|k|+|l|=m} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} l_1 q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1-1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_4}{\partial q_1} + \sum_{|k|+|l|=m} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} l_2 q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2-1} \frac{\partial S_4}{\partial q_2} + \\
& \sum_{|k|+|l|=m} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{l_1}{2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1-2} P_2^{l_2} \left(\frac{\partial S_3}{\partial q_1} \right)^2 + \sum_{|k|+|l|=m} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{l_2}{2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2-2} \left(\frac{\partial S_3}{\partial q_2} \right)^2 + \\
& \sum_{|k|+|l|=m+1} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} l_1 q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1-1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial q_1} + \sum_{|k|+|l|=m+1} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} l_2 q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2-1} \frac{\partial S_3}{\partial q_2} + H_{m+2} = \\
& \sum_{|k|+|l|=m} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} k_1 q_1^{k_1-1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_4}{\partial P_1} + \sum_{|k|+|l|=m} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} k_2 q_1^{k_1} q_2^{k_2-1} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_4}{\partial P_2} + \\
& \sum_{|k|+|l|=m} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{k_1}{2} q_1^{k_1-2} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \left(\frac{\partial S_3}{\partial P_1} \right)^2 + \sum_{|k|+|l|=m} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{k_2}{2} q_1^{k_1} q_2^{k_2-2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \left(\frac{\partial S_3}{\partial P_2} \right)^2 + \\
& \sum_{|k|+|l|=m+1} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} k_1 q_1^{k_1-1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial P_1} + \sum_{|k|+|l|=m+1} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} k_2 q_1^{k_1} q_2^{k_2-1} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial P_2} + \Gamma_{m+2}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{m+2} &= \sum_{|k|+|l|=m} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} \left(l_1 q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1-1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_4}{\partial q_1} + l_2 q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2-1} \frac{\partial S_4}{\partial q_2} - \right. \\
& \quad \left. k_1 q_1^{k_1-1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial P_1} - k_2 q_1^{k_1} q_2^{k_2-1} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial P_2} \right) + F_{m+2} + H_{m+2} \\
\Gamma_{m+2} &= \{S_4, H_m\} + F_{m+2} + H_{m+2}.
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
F_{m+2} &= \sum_{|k|+|l|=m} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{l_1}{2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1-2} P_2^{l_2} \left(\frac{\partial S_3}{\partial q_1} \right)^2 + \sum_{|k|+|l|=m} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{l_2}{2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2-2} \left(\frac{\partial S_3}{\partial q_2} \right)^2 + \\
& \sum_{|k|+|l|=m+1} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} l_1 q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1-1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial q_1} + \sum_{|k|+|l|=m+1} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} l_2 q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2-1} \frac{\partial S_3}{\partial q_2} - \\
& \sum_{|k|+|l|=m} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{k_1}{2} q_1^{k_1-2} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \left(\frac{\partial S_3}{\partial P_1} \right)^2 - \sum_{|k|+|l|=m} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{k_2}{2} q_1^{k_1} q_2^{k_2-2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \left(\frac{\partial S_3}{\partial P_2} \right)^2 - \\
& \sum_{|k|+|l|=m+1} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} k_1 q_1^{k_1-1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial P_1} - \sum_{|k|+|l|=m+1} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} k_2 q_1^{k_1} q_2^{k_2-1} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial P_2}.
\end{aligned}$$

Considerando la forma polinomial de S_3 ,

$$\begin{aligned}
S_3(q_1, q_2, P_1, P_2) &= s_{3000} q_1^3 + s_{0300} q_2^3 + s_{0030} P_1^3 + s_{0003} P_2^3 + s_{2100} q_1^2 q_2 + s_{2010} q_1^2 P_1 \\
& + s_{2002} q_1^2 P_2 + s_{1200} q_1 q_2^2 + s_{0210} q_2^2 P_1 + s_{0201} q_2^2 P_2 + s_{1020} q_1 P_1^2 \\
& + s_{0120} q_2 P_1^2 + s_{0021} P_1^2 P_2 + s_{1002} q_1 P_2^2 + s_{0102} q_2 P_2^2 + s_{0012} P_1 P_2^2 \\
& + s_{1110} q_1 q_2 P_1 + s_{1101} q_1 q_2 P_2 + s_{1011} q_1 P_1 P_2 + s_{0111} q_2 P_1 P_2,
\end{aligned}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
F_{m+2} = & \alpha_1^2 \sum_{|k|+|l|=m} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{l_1}{2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1-2} P_2^{l_2} + \alpha_2^2 \sum_{|k|+|l|=m} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{l_2}{2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2-2} + \\
& \alpha_1 \sum_{|k|+|l|=m+1} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} l_1 q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1-1} P_2^{l_2} + \alpha_2 \sum_{|k|+|l|=m+1} \tilde{h}_{k_1 k_2 l_1 l_2} l_2 q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2-1} - \\
& \beta_1^2 \sum_{|k|+|l|=m} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{k_1}{2} q_1^{k_1-2} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} - \beta_2^2 \sum_{|k|+|l|=m} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{k_2}{2} q_1^{k_1} q_2^{k_2-2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} - \\
& \beta_1 \sum_{|k|+|l|=m+1} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} k_1 q_1^{k_1-1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} - \beta_2 \sum_{|k|+|l|=m+1} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} k_2 q_1^{k_1} q_2^{k_2-1} P_1^{l_1} P_2^{l_2}.
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = & P_1 P_2 s_{1011} + 2P_1 q_1 s_{2010} + P_1 q_2 s_{1110} + P_1^2 s_{1020} + P_2^2 s_{1002} + 2P_2 q_1 s_{2001} + P_2 q_2 s_{1101} + \\
& 3q_1^2 s_{3000} + 2q_1 q_2 s_{2100} + q_2^2 s_{1200}, \\
\alpha_2 = & h_{0111} P_1 P_2 + P_1 q_1 s_{1110} + 2P_1 q_2 s_{0210} + P_1^2 s_{0120} + P_2^2 s_{0102} + P_2 q_1 s_{1101} + 2P_2 q_2 s_{0201} + \\
& q_1^2 s_{2100} + 2q_1 q_2 s_{1200} + 3q_2^2 s_{0300}, \\
\beta_1 = & h_{0111} P_2 q_2 + 3P_1^2 s_{0030} + 2P_1 P_2 s_{0021} + P_2^2 s_{0012} + P_2 q_1 s_{1011} + q_1^2 s_{2010} + q_1 q_2 s_{1110} + \\
& 2P_1 q_1 s_{1020} + q_2^2 s_{0210} + 2P_1 q_2 s_{0120}, \\
\beta_1 = & h_{0111} P_1 q_2 + P_1^2 s_{0021} + 2P_1 P_2 s_{0012} + P_1 q_1 s_{1011} + 3P_2^2 s_{0003} + 2P_2 q_1 s_{1002} + 2P_2 q_2 s_{0102} + \\
& q_1^2 s_{2001} + q_1 q_2 s_{1101} + q_2^2 s_{0201}.
\end{aligned}$$

Es importante señalar que las relaciones (4.5)-(4.7) son la esencia del algoritmo, donde las funciones F_r en (4.7) dependen de H_m, \dots, H_{r-1} obtenidas por la expansión del Hamiltoniano original (4.4), como también de S_s encontradas para $s = 3, 4, \dots, r - m + 1$, que definen la función generadora (4.7).

4.2. Forma normal hasta cuarto orden para un Hamiltoniano con dos grados de libertad cuando la parte cuadrática no es diagonalizable

A continuación determinamos la forma normal hasta términos de cuarto orden para los Hamiltonianos con parte cuadrática obtenidos en los Teoremas 19 y 20, respectivamente. Para la normalización, hacemos uso del algoritmo de Gustavson descrito anteriormente en la sección 4.1, siendo en algunas situaciones un requisito en nuestro tipo de argumentos para el estudio de la estabilidad o inestabilidad en el sentido de Liapunov de la solución de equilibrio $(0, 0, 0, 0)$.

Comenzamos la normalización de los términos de orden tres de un Hamiltoniano cuando los valores propios de la parte lineal son todos nulos en el caso de $rg(S) = 1$, esto se muestra en el teorema que presentamos a continuación.

Teorema 23 *Existe una transformación simpléctica $(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ asociada a la función generadora*

$$S = q_1 P_1 + q_2 P_2 + \sum_{s=3} S_s, \quad S_s = \sum_{|k|+|l|=s} s_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2},$$

donde $|k| + |l| = k_1 + k_2 + l_1 + l_2$ y satisfaciendo

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}, \quad Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2},$$

que transforma el Hamiltoniano

$$H = H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{\delta}{2} P_1^2 + H_3 + H_4 + \dots \quad (4.8)$$

en el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} K = & \frac{\delta}{2} P_1^2 + k_{3000} Q_1^3 + k_{0300} Q_2^3 + k_{0003} P_2^3 + k_{2100} Q_1^2 Q_2 + k_{2001} Q_1^2 P_2 + k_{1200} Q_1 Q_2^2 + k_{0201} Q_2^2 P_2 \\ & + k_{1002} Q_1 P_2^2 + k_{0102} Q_2 P_2^2 + k_{1101} Q_1 Q_2 P_2 + K_4 + \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde $k_{3000} = h_{3000}$, $k_{0300} = h_{0300}$, $k_{0003} = k_{0003}$, $k_{2100} = h_{2100}$, $k_{2001} = h_{2001}$, $k_{1200} = h_{1200}$, $k_{0201} = k_{0201}$, $k_{1002} = h_{1002}$, $k_{0102} = h_{0102}$ y $k_{1101} = k_{1101}$.

Demostración. Sabemos que la relación entre el Hamiltoniano inicial H y el nuevo Hamiltoniano K (o normalizado) es

$$H \left(q_1, q_2, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \right) = K \left(\frac{\partial S}{\partial P_1}, \frac{\partial S}{\partial P_2}, P_1, P_2 \right),$$

si y solamente si,

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial q_1} \right)^2 + H_3 \left(q_1, q_1, P_1 + \frac{\partial S_3}{\partial q_1} + \dots, P_2 + \frac{\partial S_3}{\partial q_2} \right) + \dots = \\ & \frac{\delta}{2} P_1^2 + K_3 \left(q_1 + \frac{\partial S_3}{\partial P_1} + \dots, q_2 + \frac{\partial S_3}{\partial P_2} + \dots, P_1, P_2 \right) + \dots \end{aligned}$$

Entonces, los términos de grado tres deben satisfacer la relación

$$K_3 = H_3 + \delta P_1 \frac{\partial S_3}{\partial q_1},$$

si y solamente si,

$$K_3 = H_3 + \sum_{\substack{|k|+|l|=3 \\ l_1 \geq 1}} \delta(k_1 + 1) s_{k_1+1, k_2, l_1-1, l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_1} P_1^{l_1} P_2^{l_2},$$

para todo $|k| + |l| = 3$. De esta última igualdad polinomial, tenemos la siguiente relación entre los coeficientes de las formas cúbicas de los Hamiltonianos H y K , y de la función generadora S ,

$$k_{k_1 k_2 l_1 l_2} = h_{k_1 k_2 l_1 l_2} + \delta(k_1 + 1) s_{k_1+1, k_2, l_1-1, l_2}, \quad (4.10)$$

para todo $|k| + |l| = 3$. A continuación, procedemos a normalizar los términos cúbicos del Hamiltoniano (4.8). Entonces, considerando las posibilidades para $|k| + |l| = 3$ con $k_j \geq 0$ y $l_j \geq 0$ ($j = 1, 2$), dadas por el siguiente Cuadro 4.1.

k_1	3	0	0	0	2	2	2	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
k_2	0	3	0	0	1	0	0	2	2	2	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
l_1	0	0	3	0	0	1	0	0	1	0	2	2	2	0	0	1	1	0	1	1
l_2	0	0	0	3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	2	2	2	0	1	1	1

Cuadro 4.1: Relaciones para $|k| + |l| = 3$ con $k_j \geq 0$ y $l_j \geq 0$ ($j = 1, 2$).

A partir de la ecuación (4.10) tenemos las siguientes relaciones entre coeficientes:

$$\begin{array}{lll} k_{3000} = h_{3000}, & k_{1200} = h_{1200}, & k_{0102} = h_{0102}, \\ k_{0300} = h_{0300}, & k_{0210} = h_{0210} + \delta s_{1200}, & k_{0012} = h_{0012} + \delta s_{1002}, \\ k_{0030} = h_{0030} + \delta s_{1020}, & k_{0201} = h_{0201}, & k_{1110} = h_{1110} + 2\delta s_{2100}, \\ k_{0003} = h_{0003}, & k_{1020} = h_{1020} + 2\delta s_{2010}, & k_{1101} = h_{1101}, \\ k_{2100} = h_{2100}, & k_{0120} = h_{0120} + \delta s_{1110}, & k_{1011} = h_{1011} + 2\delta s_{2001}, \\ k_{2010} = h_{2010} + 3\delta s_{3000}, & k_{0021} = h_{0021} + \delta s_{1011}, & k_{0111} = h_{0111} + \delta s_{1101}, \\ k_{2001} = h_{2001}, & k_{1002} = h_{1002}. & \end{array}$$

Con el objetivo de obtener un Hamiltoniano K con la menor cantidad de coeficientes en su forma cúbica, elegimos convenientemente los coeficientes de S_3 de la función generadora S , vía las relaciones

$$\begin{array}{llll} s_{3000} = -\frac{\delta}{3} h_{2010}, & s_{2010} = -\frac{\delta}{2} h_{1020}, & s_{1200} = -\delta h_{0210}, & s_{0012} = 0, \\ s_{0300} = 0, & s_{2001} = -\frac{\delta}{2} h_{1011}, & s_{0210} = 0, & s_{1110} = -\delta h_{0120}, \\ s_{0030} = 0, & s_{0201} = 0, & s_{0021} = 0, & s_{1101} = -\delta h_{0111}, \\ s_{0003} = 0, & s_{1020} = -\delta h_{0030}, & s_{1002} = -\delta h_{0012}, & s_{1011} = -\delta h_{0021}, \\ s_{2100} = -\frac{\delta}{2} h_{1110}, & s_{0120} = 0, & s_{0102} = 0, & s_{0111} = 0. \end{array}$$

En virtud de la elección realizada, se tiene que: $k_{0030} = k_{2010} = k_{0210} = k_{1020} = k_{0120} = k_{0021} = k_{0012} = k_{1110} = k_{1011} = k_{0111} = 0$, $k_{3000} = h_{3000}$, $k_{0300} = h_{0300}$, $k_{0003} = h_{0003}$,

$k_{2100} = h_{2100}$, $k_{2001} = h_{2001}$, $k_{1200} = h_{1200}$, $k_{0201} = h_{0201}$, $k_{1002} = h_{1002}$, $k_{0102} = h_{0102}$ y $k_{1101} = h_{1101}$.

De este modo, hemos normalizado los términos cúbicos del Hamiltoniano (4.8) y por lo tanto, su forma normal de términos cúbicos viene dada por

$$K_3 = k_{3000}Q_1^3 + k_{0300}Q_2^3 + k_{0003}P_2^3 + k_{2100}Q_1^2Q_2 + k_{2001}Q_1^2P_2 + k_{1200}Q_1Q_2^2 + k_{0201}Q_2^2P_2 + k_{1002}Q_1P_2^2 + k_{0102}Q_2P_2^2 + k_{1101}Q_1Q_2P_2.$$

Por lo tanto la forma normal del Hamiltoniano (4.8) es como en (4.9). ■

A continuación, vamos a normalizar los términos de orden cuatro del Hamiltoniano definido en la ecuación (4.8) del Teorema 23.

Teorema 24 *Existe transformación simpléctica $(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ asociada a la función generadora*

$$S = q_1P_1 + q_2P_2 + \sum_{s=3} S_s, \quad S_s = \sum_{|k|+|l|=s} s_{k_1k_2l_1l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2},$$

donde $|k| + |l| = k_1 + k_2 + l_1 + l_2$ y satisfaciendo

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}, \quad Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2},$$

que transforma el Hamiltoniano (4.8) en el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} K = & \frac{\delta}{2}P_1^2 + k_{3000}Q_1^3 + k_{0300}Q_2^3 + k_{0003}P_2^3 + k_{2100}Q_1^2Q_2 + k_{2001}Q_1^2P_2 + k_{1200}Q_1Q_2^2 + k_{0201}Q_2^2P_2 \\ & + k_{1002}Q_1P_2^2 + k_{0102}Q_2P_2^2 + k_{1101}Q_1Q_2P_2 + k_{4000}q_1^4 + k_{0400}q_2^4 + k_{0004}P_2^4 + k_{3100}q_1^3q_2 + \\ & k_{3001}q_1^3P_2 + k_{1300}q_1q_2^3 + k_{0301}q_2^3P_2 + k_{1003}q_1P_2^3 + k_{0103}q_2P_2^3 + k_{2200}q_1^2q_2^2 + k_{2002}q_1^2P_2^2 + \\ & k_{0202}q_2^2P_2^2 + k_{2101}q_1^2q_2P_2 + k_{1201}q_1q_2^2P_2 + k_{1102}q_1q_2P_2^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

Demostración. Debido al Teorema 23, los términos cúbicos del Hamiltoniano (4.8) ya han sido normalizados. Por lo tanto, debemos normalizar los términos de grado cuatro, los cuales deben satisfacer la relación

$$K_4 = H_4 + \delta P_1 \frac{\partial S_4}{\partial q_1} + F_4, \quad (4.12)$$

donde

$$\begin{aligned}
F_4 &= \sum_{|k|+|l|=4} f_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} = \frac{\delta}{2} \left(\frac{\partial S_3}{\partial q_1} \right)^2 + \sum_{|k|+|l|=3} h_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{l_1}{1} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1-1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial q_1} + \\
&\sum_{|k|+|l|=3} h_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{l_2}{1} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2-1} \frac{\partial S_3}{\partial q_2} - \sum_{|k|+|l|=3} k_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{k_1}{1} q_1^{k_1-1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial P_1} - \\
&\sum_{|k|+|l|=3} k_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{k_2}{1} q_1^{k_1} q_2^{k_2-1} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial P_2}.
\end{aligned}$$

y como por el teorema anterior se conoce explícitamente S_3 , la cual está definida por:

$$\begin{aligned}
S_3(q_1, q_2, P_1, P_2) &= s_{3000} q_1^3 + s_{2100} q_1^2 + s_{2010} q_1^2 P_1 + s_{2001} q_1^2 P_2 + s_{1200} q_1 q_2^2 + s_{1020} q_1 P_1^2 + \\
&s_{1002} q_1 P_2^2 + s_{1110} q_1 q_2 P_1 + s_{1101} q_1 q_2 P_2 + s_{1011} q_1 P_1 P_2.
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
F_4 &= \sum_{|k|+|l|=4} f_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} = \frac{\delta}{2} A_1^2 + A_1 \sum_{|k|+|l|=3} h_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{l_1}{1} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1-1} P_2^{l_2} + \\
&A_2 \sum_{|k|+|l|=3} h_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{l_2}{1} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2-1} - B_1 \sum_{|k|+|l|=3} k_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{k_1}{1} q_1^{k_1-1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} - \\
&B_2 \sum_{|k|+|l|=3} k_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{k_2}{1} q_1^{k_1} q_2^{k_2-1} P_1^{l_1} P_2^{l_2},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_1 &= P_1 P_2 s_{1011} + 2P_1 q_1 s_{2010} + P_1 q_2 s_{1110} + q_1 P_1 s_{1020} + P_2^2 s_{1002} + 2P_2 q_1 s_{2001} + P_2 q_2 s_{1101} \\
&+ 3q_1^2 s_{3000} + 2q_1 q_2 s_{2100} + q_2^2 s_{1200}, \\
A_2 &= 2s_{2100} q_1 q_2 + s_{1200} q_2^2 + s_{1110} q_2 P_1 + s_{1101} q_2 P_2, \\
B_1 &= s_{2010} q_1^2 + 2s_{1020} q_1 P_1 + s_{1110} q_1 q_2 + s_{1011} P_1 P_2, \\
B_2 &= s_{2001} q_1^2 + 2s_{1002} q_1 P_2 + s_{1001} q_1 q_2 + s_{1011} q_1 P_1.
\end{aligned}$$

Considerando la igualdad polinomial (4.12), tenemos la siguiente relación entre los coeficientes de las formas cuárticas de los Hamiltonianos H y K , y de la función generadora S ,

$$k_{k_1 k_2 l_1 l_2} = h_{k_1 k_2 l_1 l_2} + \delta(k_1 + 1) s_{k_1+1, k_2, l_1-1, l_2} + f_{k_1 k_2 l_1 l_2} \quad (4.13)$$

para todo $|k| + |l| = 4$. A continuación, procedemos a normalizar los términos cuárticos del Hamiltoniano (4.8). Entonces, considerando las posibilidades para $|k| + |l| = 4$ con $k_j \geq 0$ y $l_j \geq 0$ ($j = 1, 2$), de acuerdo a los siguientes Cuadros 4.2 y 4.3.

k_1	4	0	0	0	3	3	3	1	0	0	1	0	0	1	0	0	2	2	2	0	0	0
k_2	0	4	0	0	1	0	0	3	3	3	0	1	0	0	1	0	2	0	0	2	2	0
l_1	0	0	4	0	0	1	0	0	1	0	3	3	3	0	0	1	0	2	0	2	0	2
l_2	0	0	0	4	0	0	1	0	0	1	0	0	1	3	3	3	0	0	2	0	2	2

Cuadro 4.2: Relaciones para $|k| + |l| = 4$ con $k_j \geq 0$ y $l_j \geq 0$ ($j = 1, 2$).

k_1	2	2	2	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
k_2	1	1	0	2	2	2	1	0	1	1	0	1	1
l_1	1	0	1	1	0	1	2	2	2	0	1	1	1
l_2	0	1	1	0	1	1	0	1	1	2	2	2	1

Cuadro 4.3: Continuación relaciones para $|k| + |l| = 4$ con $k_j \geq 0$ y $l_j \geq 0$ ($j = 1, 2$).

A partir de la ecuación (4.13) tenemos las siguientes relaciones entre coeficientes:

$$\begin{aligned}
k_{4000} &= h_{4000} + f_{4000}, & k_{2002} &= h_{2002} + f_{2002}, \\
k_{0400} &= h_{0400} + f_{0400}, & k_{0220} &= h_{0220} + \delta s_{1210} + f_{0220}, \\
k_{0040} &= h_{0040} + \delta s_{1030} + f_{0040}, & k_{0202} &= h_{0202} + f_{0202}, \\
k_{0004} &= h_{0004} + f_{0004}, & k_{0022} &= h_{0022} + \delta s_{1012} + f_{0022}, \\
k_{3100} &= h_{3100} + f_{3100}, & k_{2110} &= h_{2110} + 3\delta s_{3100} + f_{2110}, \\
k_{3010} &= h_{3010} + 4\delta s_{4000} + f_{3010}, & k_{2101} &= h_{2101} + f_{2101}, \\
k_{3001} &= h_{3001} + f_{3001}, & k_{2011} &= h_{2011} + 3\delta s_{3001} + f_{2011}, \\
k_{1300} &= h_{1300} + f_{1300}, & k_{1210} &= h_{1210} + 2\delta s_{2200} + f_{1210}, \\
k_{0310} &= h_{0310} + \delta s_{1300} + f_{0310}, & k_{1201} &= h_{1201} + f_{1201}, \\
k_{0301} &= h_{0301} + f_{0301}, & k_{0211} &= h_{0211} + \delta s_{1201} + f_{0211}, \\
k_{1030} &= h_{1030} + 2\delta s_{2020} + f_{1030}, & k_{1120} &= h_{1120} + 2\delta s_{2110} + f_{1120}, \\
k_{0130} &= h_{0130} + \delta s_{1120} + f_{0130}, & k_{1021} &= h_{1021} + 2\delta s_{2011} + f_{1021}, \\
k_{0031} &= h_{0031} + \delta s_{1021} + f_{0031}, & k_{0121} &= h_{0121} + \delta s_{1111} + f_{0121}, \\
k_{1003} &= h_{1003} + f_{1003}, & k_{1102} &= h_{1102} + f_{1102}, \\
k_{0103} &= h_{0103} + f_{0103}, & k_{1012} &= h_{1012} + 2\delta s_{2002} + f_{1012}, \\
k_{0013} &= h_{0013} + \delta s_{1003} + f_{0013}, & k_{0112} &= h_{0112} + \delta s_{1102} + f_{0112}, \\
k_{2200} &= h_{2200} + f_{2200}, & k_{1111} &= h_{1111} + 2\delta s_{2101} + f_{1111}, \\
k_{2020} &= h_{2020} + 3\delta s_{3010} + f_{2020}.
\end{aligned}$$

Con el objetivo de obtener un Hamiltoniano K con la menor cantidad de coeficientes en su forma cuártica, elegimos convenientemente los coeficientes de S_4 de la función generadora S , vía las relaciones

$$\begin{aligned}
s_{4000} &= -\frac{\delta}{4}(h_{3010} + f_{3010}), & s_{0031} &= 0, & s_{2011} &= -\frac{\delta}{2}(h_{1021} + f_{1021}), \\
s_{0400} &= 0, & s_{1003} &= -\delta(h_{0013} + f_{0013}), & s_{1210} &= -\delta(h_{0220} + f_{0220}), \\
s_{0040} &= 0, & s_{0103} &= 0, & s_{1201} &= -\delta(h_{0211} + f_{0211}), \\
s_{0004} &= 0, & s_{0013} &= 0, & s_{0211} &= 0, \\
s_{3100} &= -\frac{\delta}{3}(h_{2110} + f_{2110}), & s_{2200} &= -\frac{\delta}{2}(h_{1210} + f_{1210}), & s_{1120} &= -\delta(h_{0130} + f_{0130}), \\
s_{3010} &= -\frac{\delta}{3}(h_{2020} + f_{2020}), & s_{2020} &= -\frac{\delta}{2}(h_{1030} + f_{1030}), & s_{1021} &= -\delta(h_{0031} + f_{0031}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{3001} &= -\frac{\delta}{3}(h_{2011} + f_{2011}), & s_{2002} &= -\frac{\delta}{2}(h_{1012} + f_{1012}), & s_{0121} &= 0, \\
s_{1300} &= -\delta(h_{0310} + f_{0310}), & s_{0220} &= 0, & s_{1102} &= -\delta(h_{0112} + f_{0112}), \\
s_{0310} &= 0, & s_{0202} &= 0, & s_{1012} &= -\delta(h_{0022} + f_{0022}), \\
s_{0301} &= 0, & s_{0022} &= 0, & s_{0112} &= 0, \\
s_{1030} &= -\delta(h_{0040} + f_{0040}), & s_{2110} &= -\frac{\delta}{2}(h_{1120} + f_{1120}), & s_{1111} &= -\delta(h_{0121} + f_{0121}), \\
s_{0130} &= 0, & s_{2101} &= -\delta(h_{1111} + f_{1111}).
\end{aligned}$$

En virtud de la elecci3n realizada, se tiene que $k_{0040} = k_{3010} = k_{0310} = k_{1030} = k_{0130} = k_{0031} = k_{0013} = k_{2020} = k_{0220} = k_{0022} = k_{2110} = k_{2011} = k_{1210} = k_{0211} = k_{1120} = k_{1021} = k_{0121} = k_{1012} = k_{0112} = k_{1111} = 0$ y

$$k_{0004} = h_{0004} + \frac{\delta h_{1011} h_{2100}}{2} + \frac{3\delta h_{1020} h_{3000}}{2} - \frac{\delta h_{1110} h_{2001}}{2} + \frac{\delta h_{2010}^2}{2} - \delta h_{2010}^2.$$

$$k_{0400} = h_{0400} - \frac{\delta h_{0210}^2}{2}.$$

$$k_{0004} = h_{0004} - \frac{\delta h_{0012}^2}{2}.$$

$$k_{3100} = h_{3100} + \delta h_{0111} h_{2100} + 3\delta h_{0120} h_{3000} - 2\delta h_{0210} h_{2001} + \delta h_{1011} h_{1200} + \delta h_{1020} h_{2100} - \frac{\delta h_{1101} h_{1110}}{2} + \delta h_{1110} h_{2010} - 2\delta h_{1110} h_{2010}.$$

$$k_{3001} = h_{3001} + 2\delta h_{0012} h_{2100} + 3\delta h_{0021} h_{3000} - \delta h_{0111} h_{2001} - \delta h_{1002} h_{1110} + \frac{\delta h_{1011} h_{1101}}{2} + \delta h_{1011} h_{2010} - 2\delta h_{1011} h_{2010} + \delta h_{1020} h_{2001}.$$

$$k_{1300} = h_{1300} + 3\delta h_{0111} h_{0300} + \delta h_{0120} h_{1200} - 2\delta h_{0201} h_{0210} + \delta h_{0210} h_{1110} - 2\delta h_{0210} h_{1110}.$$

$$k_{0301} = h_{0301} + \delta^3 h_{0111} h_{0210} - 2\delta h_{0111} h_{0210}.$$

$$k_{1003} = h_{1003} + -3\delta h_{0003} h_{0111} + 2\delta h_{0012} h_{0102} + \delta h_{0012} h_{1011} - 2\delta h_{0012} h_{1011} + \delta h_{0021} h_{1002}.$$

$$k_{0103} = h_{0103} + \delta^3 h_{0012} h_{0111} - 2\delta h_{0012} h_{0111}.$$

$$k_{2200} = h_{2200} + 2\delta h_{0111} h_{1200} + 2\delta h_{0120} h_{2100} - \frac{\delta h_{0201} h_{1110}}{2} - 2\delta h_{0210} h_{1101} + \delta h_{0210} h_{2010} - 2\delta h_{0210} h_{2010} + \frac{3\delta h_{0300} h_{1011}}{2} + \frac{\delta h_{1020} h_{1200}}{2} + \frac{\delta h_{1110}^2}{2} - \delta h_{1110}^2.$$

$$k_{2002} = h_{2002} - \frac{3\delta h_{0003} h_{1110}}{2} + 2\delta h_{0012} h_{1101} + \delta h_{0012} h_{2010} - 2\delta h_{0012} h_{2010} + 2\delta h_{0021} h_{2001} + \frac{\delta h_{0102} h_{1011}}{2} - 2\delta h_{0111} h_{1002} + \frac{\delta h_{1002} h_{1020}}{2} + \frac{\delta h_{1011}^2}{2} - \delta h_{1011}^2.$$

$$k_{0202} = h_{0202} + \delta h_{0012} h_{0210} - 2\delta h_{0012} h_{0210} + \frac{\delta h_{0111}^2}{2} - \delta h_{0111}^2$$

$$k_{2101} = h_{2101} + 4\delta h_{0012} h_{1200} + 2\delta h_{0021} h_{2100} - \delta h_{0102} h_{1110} + \delta h_{0111} h_{2010} - 2\delta h_{0111} h_{2010} + 2\delta h_{0120} h_{2001} - 4\delta h_{0210} h_{1002} + \delta h_{1011} h_{1110} - 2\delta h_{1011} h_{1110} + \frac{\delta h_{1020} h_{1101}}{2}.$$

$$k_{1201} = h_{1201} + 6\delta h_{0012} h_{0300} + \delta h_{0021} h_{1200} - 4\delta h_{0102} h_{0210} - \delta h_{0111} h_{0201} + \delta h_{0111} h_{1110} - 2\delta h_{0111} h_{1110} + \delta h_{0120} h_{1101} + \delta h_{0210} h_{1011} - 2\delta h_{0210} h_{1011}.$$

$$k_{1102} = h_{1102} - 6\delta h_{0003}h_{0210} + \delta h_{0012}h_{1110} - 2\delta h_{0012}h_{1110} + \delta h_{0021}h_{1101} - \delta h_{0102}h_{0111} + \delta h_{0111}h_{1011} - 2\delta h_{0111}h_{1011} + \delta h_{0120}h_{1002}.$$

De este modo, hemos normalizado los términos cuárticos del Hamiltoniano (4.8) y por lo tanto, su forma normal de los términos cuárticos está dado por:

$$K_4 = k_{4000}q_1^4 + k_{0400}q_2^4 + k_{0004}P_2^4 + k_{3100}q_1^3q_2 + k_{3001}q_1^3P_2 + k_{1300}q_1q_2^3 + k_{0301}q_2^3P_2 + k_{1003}q_1P_2^3 + k_{0103}q_2P_2^3 + k_{2200}q_1^2q_2^2 + k_{2002}q_1^2P_2^2 + k_{0202}q_2^2P_2^2 + k_{2101}q_1^2q_2P_2 + k_{1201}q_1q_2^2P_2 + k_{1102}q_1q_2P_2^2.$$

Pot lo tanto la forma normal hasta términos de orden cuatro del Hamiltoniano (4.8) es como en 4.11. ■

A continuación normalizaremos los términos de orden tres de un Hamiltoniano cuando una de las frecuencias de la parte lineal es nula, esto se muestra en el teorema que presentamos a continuación.

Teorema 25 *Existe transformación simpléctica $(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ asociada a la función generadora*

$$S = q_1P_1 + q_2P_2 + \sum_{s=3}^{n-1} S_s(q_1, q_2, P_1, P_2),$$

$$S_s = \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} s_{k_1k_2l_1l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2}, \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad n \geq 4, i = 1, 2$$

que transforma el Hamiltoniano

$$H(q, p) = \frac{1}{2}\delta_1q_1^2 + \frac{1}{2}\delta_2\omega(q_2^2 + p_2^2) + H_3 + H_4 + H_5 + \tilde{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) \quad (4.14)$$

en el Hamiltoniano

$$K(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = \frac{1}{2}\delta_1Q_1^2 + \frac{1}{2}\delta_2(Q_2^2 + P_2^2) + k_{0030}P_1^3 + k_{0210}P_1(Q_2^2 + P_2^2) + K_4 + K_5 + \dots \quad (4.15)$$

donde $k_{0030} = h_{0030}$ y $k_{0210} = k_{0012} = \frac{1}{2}(h_{0210} + h_{0012})$.

Demostración. La demostración lo realizaremos usando el algoritmo de Gustavson descrito anteriormente en la sección 4.1. Sabemos que la relación entre el Hamiltoniano inicial H y el nuevo Hamiltoniano K (o normalizado) es

$$H\left(q_1, q_2, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}\right) = K\left(\frac{\partial S}{\partial P_1}, \frac{\partial S}{\partial P_2}, P_1, P_2\right),$$

si y solamente si,

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_1}{2} q_1^2 + \frac{\delta_2}{2} \omega \left[q_2^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_2} \right)^2 \right] + H_3 \left(q_1, q_2, P_1 + \frac{\partial S_3}{\partial q_1} + \dots, P_2 + \frac{\partial S_3}{\partial q_2} \right) + \dots = \\ & \frac{\delta_1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial P_1} \right)^2 + \frac{\delta_2}{2} \omega \left[\left(\frac{\partial S}{\partial P_2} \right)^2 + P_2^2 \right] + K_3 \left(q_1 + \frac{\partial S_3}{\partial P_1} + \dots, q_2 + \frac{\partial S_3}{\partial P_2} + \dots, P_1, P_2 \right) + \dots \end{aligned}$$

si y solo si

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_1}{2} q_1^2 + \frac{\delta_2}{2} \omega \left[q_2^2 + \left(P_2 + \frac{\partial S_3}{\partial q_2} + \frac{\partial S_4}{\partial q_2} + \dots \right)^2 \right] + H_3 \left(q_1, q_2, P_1 + \frac{\partial S_3}{\partial q_1} + \dots, P_2 + \frac{\partial S_3}{\partial q_2} \right) + \dots = \\ & \frac{\delta_1}{2} \left(q_1 + \frac{\partial S_3}{\partial P_1} + \frac{\partial S_4}{\partial P_1} + \dots \right)^2 + \frac{\delta_2}{2} \omega \left[\left(q_2 + \frac{\partial S_3}{\partial P_2} + \frac{\partial S_4}{\partial P_2} + \dots \right)^2 + P_2^2 \right] + K_3 + \dots \end{aligned}$$

Entonces, los términos de grado tres deben satisfacer la relación

$$K_3 = H_3 + \delta_2 \omega P_2 \frac{\partial S_3}{\partial q_2} - \delta_1 q_1 \frac{\partial S_3}{\partial P_1} - \delta_2 \omega q_2 \frac{\partial S_3}{\partial P_2},$$

si y solamente si,

$$\begin{aligned} K_3 = H_3 + \sum_{\substack{|k|+|l|=3 \\ l_2 \geq 1}} \delta_2 \omega (k_2 + 1) s_{k_1 k_2 + 1 l_1 l_2 - 1} q_1^{k_1} q_2^{k_1} P_1^{l_1} P_2^{l_2} - \\ \sum_{\substack{|k|+|l|=3 \\ k_1 \geq 1}} \delta_1 (l_1 + 1) s_{k_1 - 1 k_2 l_1 + 1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} - \sum_{\substack{|k|+|l|=3 \\ k_2 \geq 1}} \delta_2 \omega (l_2 + 1) s_{k_1 k_2 - 1 l_1 l_2 + 1} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2}, \end{aligned}$$

para todo $|k| + |l| = 3$. De esta última igualdad polinomial, tenemos la siguiente relación entre los coeficientes de las formas cúbicas de los Hamiltonianos H y K , y de la función generadora S ,

$$k_{k_1 k_2 l_1 l_2} = h_{k_1 k_2 l_1 l_2} + \delta_2 \omega (k_2 + 1) s_{k_1 k_2 + 1 l_1 l_2 - 1} - \delta_1 (l_1 + 1) s_{k_1 - 1 k_2 l_1 + 1 l_2} - \delta_2 \omega (l_2 + 1) s_{k_1 k_2 - 1 l_1 l_2 + 1}, \quad (4.16)$$

para todo $|k| + |l| = 3$. A continuación, procedemos a normalizar los términos cúbicos del Hamiltoniano (4.14). Entonces, considerando las posibilidades para $|k| + |l| = 3$ con $k_j \geq 0$ y $l_j \geq 0$ ($j = 1, 2$), dadas por el siguiente Cuadro 4.4.

k_1	3	0	0	0	2	2	2	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
k_2	0	3	0	0	1	0	0	2	2	2	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
l_1	0	0	3	0	0	1	0	0	1	0	2	2	2	0	0	1	1	0	1	1
l_2	0	0	0	3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	2	2	2	0	1	1	1

Cuadro 4.4: Relaciones para $|k| + |l| = 3$ con $k_j \geq 0$ y $l_j \geq 0$ ($j = 1, 2$).

A partir de la ecuación (4.16) tenemos las siguientes relaciones entre coeficientes.

$$\begin{aligned}
k_{3000} &= h_{3000} - \delta_1 s_{2010}, & k_{1020} &= h_{1020} - 3\delta_1 s_{0030}, \\
k_{0300} &= h_{0300} - \delta_2 \omega s_{0201}, & k_{0120} &= h_{0120} - \delta_2 \omega s_{0021}, \\
k_{0030} &= h_{0030}, & k_{0021} &= h_{0021} + \delta_2 \omega s_{0120}, \\
k_{0003} &= h_{0003} + \delta_2 \omega s_{0102}, & k_{1002} &= h_{1002} + \delta_2 \omega s_{1101} - \delta_1 s_{0012}, \\
k_{2100} &= h_{2100} - \delta_1 s_{1110} - \delta_2 \omega s_{2001}, & k_{0102} &= h_{0102} + 2\delta_2 \omega s_{0201} - 3\delta_2 \omega s_{0003}, \\
k_{2010} &= h_{2010} - 2\delta_1 s_{1020}, & k_{0012} &= h_{0012} + \delta_2 \omega s_{0111}, \\
k_{2001} &= h_{2001} + \delta_2 \omega s_{2100} - \delta_1 s_{1011}, & k_{1110} &= h_{1110} - 2\delta_1 s_{0120} - \delta_2 \omega s_{1011}, \\
k_{1200} &= h_{1200} - \delta_1 s_{0210} - \delta_2 \omega s_{1101}, & k_{1101} &= h_{1101} + 2\delta_2 \omega s_{1200} - \delta_1 s_{0111} - 2\delta_2 \omega s_{1002}, \\
k_{0210} &= h_{0210} - \delta_2 \omega s_{0111}, & k_{1011} &= h_{1011} + \delta_2 \omega s_{1110} - 2\delta_1 s_{0021}, \\
k_{0201} &= h_{0201} + 3\delta_2 \omega s_{0300} - 2\delta_2 \omega s_{0102}, & k_{0111} &= h_{0111} + 2\delta_2 \omega s_{0210} - 2\delta_2 \omega s_{0012}.
\end{aligned}$$

Con el objetivo de obtener un Hamiltoniano K con la menor cantidad de coeficientes en su forma cúbica, elegimos convenientemente los coeficientes de S_3 de la función generadora S , vía las relaciones

$$\begin{aligned}
s_{3000} &= 0, & s_{1020} &= \frac{\delta_1}{2} h_{2010}, \\
s_{0300} &= -\frac{\delta_2}{3\omega} (2h_{0003} + h_{0201}), & s_{0120} &= -\frac{\delta_2}{\omega} h_{0021}, \\
s_{0030} &= \frac{\delta_1}{3} h_{1020}, & s_{0021} &= \frac{\delta_2}{\omega} h_{0120}, \\
s_{0003} &= \frac{\delta_2}{3\omega} (h_{0102} + 2h_{0300}), & s_{1002} &= 0, \\
s_{2100} &= \frac{1}{\omega^3} (\delta_1 \omega h_{1110} + 2\delta_2 h_{0021} - \delta_2 \omega^2 h_{2001}), & s_{0102} &= -\frac{\delta_2}{\omega} h_{0003}, \\
s_{2010} &= \delta_1 h_{3000}, & s_{0012} &= \frac{1}{4\omega} (\delta_2 h_{0111} + 2\delta_1 \omega h_{1002} + 2\delta_1 \omega h_{1200}), \\
s_{2001} &= \frac{1}{\omega^3} (\delta_2 \omega^2 h_{2100} - 2\delta_2 h_{0120} + \delta_1 \omega h_{1011}), & s_{1110} &= \frac{1}{\omega^2} (2\delta_1 h_{0120} - \delta_2 \omega h_{1011}), \\
s_{1200} &= \frac{1}{4\omega^2} (\delta_1 h_{0210} - \delta_1 h_{0012} - 2\delta_2 \omega h_{1101}), & s_{1101} &= \frac{1}{4\omega^2} (\delta_1 h_{0111} - 2\delta_2 \omega h_{1002} + 2\delta_2 \omega h_{1200}), \\
s_{0210} &= \frac{1}{4\omega} (2\delta_1 \omega h_{1200} + 2\delta_1 \omega h_{1002} - \delta_2 h_{0111}), & s_{1011} &= \frac{1}{\omega^2} (\delta_2 \omega h_{1110} + 2\delta_1 h_{0021}), \\
s_{0201} &= \frac{\delta_2}{\omega} h_{0300}, & s_{0111} &= \frac{\delta_2}{2\omega} (h_{0210} - h_{0012}).
\end{aligned}$$

En virtud de la elección realizada, se tiene que $k_{3000} = k_{0300} = k_{0003} = k_{2100} = k_{2010} = k_{2001} = k_{1200} = k_{0201} = k_{1020} = k_{0120} = k_{0021} = k_{1002} = k_{0102} = k_{1110} = k_{1101} = k_{1011} = k_{0111} = 0$, $k_{0030} = h_{0030}$ y $k_{0210} = k_{0012} = \frac{1}{2}(h_{0210} + h_{0012})$. De este modo, hemos normalizado los términos cúbicos del Hamiltoniano (4.14) y por lo tanto, su forma normal hasta términos cúbicos está dado como en 4.15. ■

En el siguiente teorema, vamos a normalizar los términos de grado cuatro del Hamiltoniano definido en la ecuación (4.14) del Teorema 26.

Teorema 26 Existe transformación simpléctica $(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ asociada a la función generadora

$$S = q_1 P_1 + q_2 P_2 + \sum_{s=3}^{n-1} S_s(q_1, q_2, P_1, P_2),$$

$$S_s = \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} s_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2}, \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad n \geq 4, i = 1, 2$$

que transforma el Hamiltoniano

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \delta_1 q_1^2 + \frac{1}{2} \delta_2 \omega (q_2^2 + p_2^2) + k_{0030} p_1^3 + k_{0210} p_1 (q_2^2 + p_2^2) + H_4 + H_5 + \tilde{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) \quad (4.17)$$

en el Hamiltoniano

$$K(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = \frac{1}{2} \delta_1 Q_1^2 + \frac{1}{2} \delta_2 (Q_2^2 + P_2^2) + k_{0030} P_1^3 + k_{0210} P_1 (Q_2^2 + P_2^2) + k_{0040} P_1^4 + k_{0220} P_1^2 (Q_2^2 + P_2^2) + k_{0400} (Q_2^2 + P_2^2)^2 + K_5 + \dots \quad (4.18)$$

donde $k_{0030} = h_{0030}$ y $k_{0210}, k_{0040}, k_{0220}, k_{0400}$ son constantes que determinaremos.

Demostración. Debido al Teorema 25, los términos cúbicos del Hamiltoniano (4.17) ya han sido normalizados. Por lo tanto, debemos normalizar los términos de grado cuatro, los cuales en virtud de la sección 4.1 deben satisfacer la relación

$$K_4 = H_4 + \delta_2 \omega P_2 \frac{\partial S_4}{\partial q_2} - \delta_1 q_1 \frac{\partial S_4}{\partial P_1} - \delta_2 \omega q_2 \frac{\partial S_4}{\partial P_2} + F_4, \quad (4.19)$$

donde

$$F_4 = \sum_{|k|+|l|=4} f_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} = \frac{\delta_2}{2} \omega \left(\frac{\partial S_3}{\partial q_2} \right)^2 - \frac{\delta_1}{2} \left(\frac{\partial S_3}{\partial P_1} \right)^2 - \frac{\delta_2}{2} \omega \left(\frac{\partial S_3}{\partial P_2} \right)^2 +$$

$$\sum_{|k|+|l|=3} h_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{l_1}{1} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1-1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial q_1} + \sum_{|k|+|l|=3} h_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{l_2}{1} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2-1} \frac{\partial S_3}{\partial q_2} -$$

$$\sum_{|k|+|l|=3} k_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{k_2}{1} q_1^{k_1} q_2^{k_2-1} P_1^{l_1} P_2^{l_2} \frac{\partial S_3}{\partial P_2}.$$

Luego, de acuerdo al Hamiltoniano definido en (4.17), se tiene que

$$F_4 = \sum_{|k|+|l|=4} f_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} = \frac{\delta_2}{2} \omega \left(\frac{\partial S_3}{\partial q_2} \right)^2 - \frac{\delta_1}{2} \left(\frac{\partial S_3}{\partial P_1} \right)^2 - \frac{\delta_2}{2} \omega \left(\frac{\partial S_3}{\partial P_2} \right)^2 +$$

$$3h_{0030} P_1^2 \frac{\partial S_3}{\partial q_1} - 3/2(h_{0210} + h_{0012}) \left[2P_1 P_2 \frac{\partial S_3}{\partial q_2} + q_2^2 \frac{\partial S_3}{\partial q_1} + P_2^2 \frac{\partial S_3}{\partial q_1} \right] -$$

$$(h_{0210} + h_{0012}) q_2 P_1 \frac{\partial S_3}{\partial P_2}.$$

Además, de acuerdo con el Teorema 25 anterior se conoce explícitamente S_3 , la cual está definida por

$$\begin{aligned} S_3(q_1, q_2, P_1, P_2) = & P_1^3 s_{0030} + P_1^2 P_2 s_{0021} + P_1^2 q_1 s_{1020} + P_1^2 q_2 s_{0120} + P_1 P_2^2 s_{0012} + \\ & P_1 P_2 q_1 s_{1011} + P_1 P_2 q_2 s_{0111} + P_1 q_1^2 s_{2010} + P_1 q_1 q_2 s_{1110} + P_1 q_2^2 s_{0210} + \\ & P_2^3 s_{0003} + P_2^2 q_2 s_{0102} + P_2 q_1^2 s_{2001} + P_2 q_1 q_2 s_{1101} + P_2 q_2^2 s_{0201} + \\ & q_1^2 q_2 s_{2100} + q_1 q_2^2 s_{1200} + q_2^3 s_{0300}. \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} F_4 = \sum_{|k|+|l|=4} f_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2} &= \frac{\delta_2}{2} \omega A_1^2 - \frac{\delta_1}{2} A_2^2 - \frac{\delta_2}{2} \omega A_3^2 + \\ A \sum_{|k|+|l|=3} h_{k_1 k_2 l_1 l_2} \binom{l_1}{1} q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1-1} P_2^{l_2} &+ 3h_{0030} P_1^2 A + \\ 1/2(h_{0210} + h_{0012})[2P_1 P_2 A_1 + q_2^2 A + P_2^2 A] &- (h_{0210} + h_{0012}) q_2 P_1 A_3. \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial S_3}{\partial q_1} = P_1^2 s_{1020} + P_1 P_2 s_{1011} + 2P_1 q_1 s_{2010} + P_1 q_2 s_{1110} + 2P_2 q_1 s_{2001} + P_2 q_2 s_{1101} + \\ & 2q_1 q_2 s_{2100} + q_2^2 s_{1200}. \\ A_1 &= \frac{\partial S_3}{\partial q_2} = P_1^2 s_{0120} + P_1 P_2 s_{0111} + P_1 q_1 s_{1110} + 2P_1 q_2 s_{0210} + P_2^2 s_{0102} + P_2 q_1 s_{1101} + \\ & 2P_2 q_2 s_{0201} + q_1^2 s_{2100} + 2q_1 q_2 s_{1200} + 3q_2^2 s_{0300}. \\ A_2 &= \frac{\partial S_3}{\partial P_1} = 3P_1^2 s_{0030} + 2P_1 P_2 s_{0021} + 2P_1 q_1 s_{1020} + 2P_1 q_2 s_{0120} + P_2^2 s_{0012} + P_2 q_1 s_{1011} + \\ & P_2 q_2 s_{0111} + q_1^2 s_{2010} + q_1 q_2 s_{1110} + q_2^2 s_{0210}. \\ A_3 &= \frac{\partial S_3}{\partial P_2} = P_1^2 s_{0021} + 2P_1 P_2 s_{0012} + P_1 q_1 s_{1011} + P_1 q_2 s_{0111} + 3P_2^2 s_{0003} + 2P_2 q_2 s_{0102} + \\ & q_1^2 s_{2001} + q_1 q_2 s_{1101} + q_2^2 s_{0201}. \end{aligned}$$

Considerando la igualdad polinomial (4.19), tenemos la siguiente relación entre los coeficientes de las formas cuárticas de los Hamiltonianos H y K , y de la función generadora S ,

$$\begin{aligned} k_{k_1 k_2 l_1 l_2} &= h_{k_1 k_2 l_1 l_2} + \delta_2 \omega (k_2 + 1) s_{k_1, k_2+1, l_1, l_2-1} - \delta_1 (l_1 + 1) s_{k_1-1, k_2, l_1+1, l_2} - \\ & \delta_2 \omega (l_2 + 1) s_{k_1, k_2-1, l_1, l_2+1} + f_{k_1 k_2 l_1 l_2}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

para todo $|k| + |l| = 4$. A continuación, procedemos a normalizar los términos cuárticos del Hamiltoniano (4.17). Entonces, considerando las posibilidades para $|k| + |l| = 4$ con $k_j \geq 0$ y $l_j \geq 0$ ($j = 1, 2$), de acuerdo a los Cuadros 4.5 y 4.6.

k_1	4	0	0	0	3	3	3	1	0	0	1	0	0	1	0	0	2	2	2	0	0	0
k_2	0	4	0	0	1	0	0	3	3	3	0	1	0	0	1	0	2	0	0	2	2	0
l_1	0	0	4	0	0	1	0	0	1	0	3	3	3	0	0	1	0	2	0	2	0	2
l_2	0	0	0	4	0	0	1	0	0	1	0	0	1	3	3	3	0	0	2	0	2	2

Cuadro 4.5: Relaciones para $|k| + |l| = 4$ con $k_j \geq 0$ y $l_j \geq 0$ ($j = 1, 2$).

k_1	2	2	2	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
k_2	1	1	0	2	2	2	1	0	1	1	0	1	1
l_1	1	0	1	1	0	1	2	2	2	0	1	1	1
l_2	0	1	1	0	1	1	0	1	1	2	2	2	1

Cuadro 4.6: Continuación relaciones para $|k| + |l| = 4$ con $k_j \geq 0$ y $l_j \geq 0$ ($j = 1, 2$).

A partir de la ecuación (4.20) tenemos las siguientes relaciones entre los coeficientes:

$$\begin{aligned}
k_{4000} &= h_{4000} - \delta_1 s_{3010} + f_{4000}, & k_{2002} &= h_{2002} + \delta_2 \omega s_{2101} - \delta_1 s_{1012} + f_{2002}, \\
k_{0400} &= h_{0400} - \delta_2 \omega s_{0301} + f_{0400}, & k_{0301} &= h_{0301} + 4\delta_2 \omega s_{0400} - 2\delta_2 \omega s_{0202} + f_{0301}, \\
k_{0040} &= h_{0040} + f_{0040}, & k_{0202} &= h_{0202} + 3\delta_2 \omega s_{0301} - 3\delta_2 \omega s_{0103} + f_{0202}, \\
k_{0004} &= h_{0004} + \delta_2 \omega s_{0103} + f_{0004}, & k_{0103} &= h_{0103} + 2\delta_2 \omega s_{0202} - 4\delta_2 \omega s_{0004} + f_{0103}, \\
k_{3010} &= h_{3010} - 2\delta_1 s_{2020} + f_{3010}, & k_{3100} &= h_{3100} - \delta_1 s_{2110} - \delta_2 \omega s_{3001} + f_{3100}, \\
k_{3001} &= h_{3001} + \delta_2 \omega s_{3100} - \delta_1 s_{2011} + f_{3001}, & k_{2011} &= h_{2011} + \delta_2 \omega s_{2110} - 2\delta_1 s_{1021} + f_{2011}, \\
k_{1300} &= h_{1300} - \delta_1 s_{0310} - \delta_2 \omega s_{1201} + f_{1300}, & k_{1210} &= h_{1210} - 2\delta_1 s_{0220} - \delta_2 \omega s_{1111} + f_{1210}, \\
k_{0220} &= h_{0220} - \delta_2 \omega s_{0121} + f_{0220}, & k_{0211} &= h_{0211} + 3\delta_2 \omega s_{0310} - 2\delta_2 \omega s_{0112} + f_{0211}, \\
k_{1030} &= h_{1030} - 4\delta_1 s_{0040} + f_{1030}, & k_{1120} &= h_{1120} - 3\delta_1 s_{0130} - \delta_2 \omega s_{1021} + f_{1120}, \\
k_{0130} &= h_{0130} - \delta_2 \omega s_{0031} + f_{0130}, & k_{1021} &= h_{1021} + \delta_2 \omega s_{1120} - 3\delta_1 s_{0031} + f_{1021}, \\
k_{0031} &= h_{0031} + \delta_2 \omega s_{0130} + f_{0031}, & k_{0121} &= h_{0121} + 2\delta_2 \omega s_{0220} - 2\delta_2 \omega s_{0022} + f_{0121}, \\
k_{1003} &= h_{1003} + \delta_2 \omega s_{1102} - \delta_1 s_{0013} + f_{1003}, & k_{0310} &= h_{0310} + \delta_2 \omega s_{0211} + f_{0310}, \\
k_{0022} &= h_{0022} + \delta_2 \omega s_{0121} + f_{0022}, & k_{1012} &= h_{1012} + \delta_2 \omega s_{1111} - 2\delta_1 s_{0022} + f_{1012}, \\
k_{0013} &= h_{0013} + \delta_2 \omega s_{0112} + f_{0013}, & k_{0112} &= h_{0112} + 2\delta_2 \omega s_{0211} - 3\delta_2 \omega s_{0013} + f_{0112}, \\
k_{2200} &= h_{2200} - \delta_1 s_{1210} - \delta_2 \omega s_{2101} + f_{2200}, & k_{2020} &= h_{2020} - 3\delta_1 s_{1030} + f_{2020},
\end{aligned}$$

$$k_{2110} = h_{2110} - 2\delta_1 s_{1120} - \delta_2 \omega s_{2011} + 3\delta s_{3100} + f_{2110},$$

$$k_{2101} = h_{2101} + 2\delta_2 \omega s_{2200} - \delta_1 s_{1111} - 2\delta_2 \omega s_{2002} + f_{2101},$$

$$k_{1201} = h_{1201} + 3\delta_2 \omega s_{1300} - \delta_1 s_{0211} - 2\delta_2 \omega s_{1102} + f_{1201},$$

$$k_{1102} = h_{1102} + 2\delta_2 \omega s_{1201} - \delta_1 s_{0112} - 3\delta_2 \omega s_{1003} + f_{1102},$$

$$k_{1111} = h_{1111} + 2\delta_2 \omega s_{1210} - 2\delta_1 s_{0121} - 2\delta_2 \omega s_{1012} + f_{1111}.$$

Con el objetivo de obtener un Hamiltoniano K con la menor cantidad de coeficientes en su forma cuártica, elegimos convenientemente los coeficientes de S_4 de la función generadora S , vía las relaciones

$$\begin{aligned}
s_{4000} &= 0, & \delta_1 s_{1012} - \delta_2 \omega s_{2101} &= h_{2002} + f_{2002}, \\
\delta_1 s_{2110} + \delta_2 \omega s_{3001} &= h_{3100} + f_{3100}, & 2\delta_1 s_{1120} + \delta_2 \omega s_{2011} &= h_{2110} + f_{2110},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{2020} &= \frac{\delta_1}{2}(h_{3010} + f_{3010}), & \delta_1 s_{1111} + 2\delta_2 \omega s_{2002} - 2\delta_2 \omega s_{2200} &= h_{2101} + f_{2101}, \\
\delta_1 s_{2011} - \delta_2 \omega s_{3100} &= h_{3001} + f_{3001}, & 2\delta_1 s_{1020} - \delta_2 \omega s_{2110} &= h_{2011} + f_{2011}, \\
\delta_1 s_{0310} + \delta_2 \omega s_{1201} &= h_{1300} + f_{1300}, & 2\delta_1 s_{0220} + \delta_2 \omega s_{1111} &= h_{1210} + f_{1210}, \\
s_{0211} &= \frac{\delta_2}{\omega}(h_{0310} + f_{0310}), & s_{3010} &= 0, \\
2\delta_2 \omega s_{0202} - 4\delta_2 \omega s_{0400} &= h_{0301} + f_{0301}, & \delta_1 s_{0211} + 2\delta_2 \omega s_{1102} - 3\delta_2 \omega s_{1300} &= h_{1201} + f_{1201}, \\
s_{0040} &= \frac{\delta_1}{4}(h_{1030} + f_{1030}), & 2\delta_2 \omega s_{0112} - 3\delta_2 \omega s_{0310} &= h_{0211} + f_{0211}, \\
s_{0031} &= \frac{\delta_2}{\omega}(h_{0130} + f_{0130}), & 3\delta_1 s_{0130} + \delta_2 \omega s_{1021} &= h_{1120} + f_{1120}, \\
s_{0130} &= -\frac{\delta_2}{\omega}(h_{0031} + f_{0031}), & 3\delta_1 s_{0031} - \delta_2 \omega s_{1120} &= h_{1021} + f_{1021}, \\
\delta_1 s_{0013} - \delta_2 \omega s_{1102} &= h_{1003} + f_{1003}, & 2\delta_2 \omega s_{0022} - 2\delta_2 \omega s_{0220} &= h_{0121} + f_{0121}, \\
4\delta_2 \omega s_{0004} - 2\delta_2 \omega s_{0202} &= h_{0103} + f_{0103}, & \delta_1 s_{0112} + 3\delta_2 \omega s_{1003} - 2\delta_2 \omega s_{1201} &= h_{1102} + f_{1102}, \\
s_{0112} &= -\frac{\delta_2}{\omega}(h_{1003} + f_{1003}), & 2\delta_1 s_{0022} - \delta_2 \omega s_{1111} &= h_{1012} + f_{1012}, \\
\delta_1 s_{1210} + \delta_2 \omega s_{2101} &= h_{2200} + f_{2200}, & 3\delta_2 \omega s_{00013} - 2\delta_2 \omega s_{0211} &= h_{0112} + f_{0112}, \\
s_{1030} &= \frac{\delta_1}{3}(h_{2020} + f_{2020}), & 2\delta_1 s_{0121} + 2\delta_2 \omega s_{1012} - 2\delta_2 \omega s_{1210} &= h_{1111} + f_{1111}.
\end{aligned}$$

Además, considerando

$$\begin{aligned}
s_{0121} &= \frac{\delta_2}{2\omega}(h_{0220} + f_{0220} - h_{0022} - f_{0022}), \\
s_{0301} &= \frac{\delta_2}{8\omega}(5h_{0400} - h_{0022} - 3h_{0004} + 5f_{0400} - 3f_{0004} - f_{0202}), \\
s_{0103} &= \frac{\delta_2}{8\omega}(3h_{0400} + h_{0022} - 5h_{0004} + 3f_{0400} - 5f_{0004} + f_{0202}).
\end{aligned}$$

En virtud de la elección realizada, se tiene que $k_{4000} = k_{3100} = k_{3010} = k_{3001} = k_{1300} = k_{0310} = k_{0301} = k_{1030} = k_{0130} = k_{0031} = k_{1003} = k_{0013} = k_{2200} = k_{2020} = k_{2002} = k_{2110} = k_{2101} = k_{2011} = k_{1210} = k_{1201} = k_{0211} = k_{1120} = k_{1021} = k_{0121} = k_{1102} = k_{1012} = k_{0112} = k_{1111} = 0$ y

$$\begin{aligned}
k_{0040} &= h_{0040} + f_{0040}, \\
k_{0220} &= k_{0022} = \frac{1}{2}(h_{0220} + h_{0022} + f_{0220} + f_{0022}), \\
k_{0400} &= \frac{1}{2}k_{0202} = k_{0004}, \\
k_{0400} &= \frac{1}{8}(3h_{0400} + h_{0202} + 3h_{0004} + 3f_{0400} + 3f_{0004} + f_{0202}),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
f_{0040} &= \frac{\delta_2 h_{0021}^2}{2\omega} + \frac{3\delta_1 h_{0030} h_{2010}}{2} - \frac{\delta_2 h_{0120}^2}{2\omega} - \frac{1}{2} \delta_1 h_{1020}^2, \\
f_{0220} &= \frac{\delta_1}{2}(-2h_{0111} h_{1002} - 2h_{0111} h_{1200} + h_{0210} h_{2010} - 2h_{1002} h_{1020} - 2h_{1020} h_{1200} + h_{0012} h_{2010}) + \\
&\quad \frac{\delta_2 \omega}{2}(h_{1002} + h_{1200})^2 + \frac{\delta_2}{\omega}(2h_{0003} h_{0021} + h_{0021} h_{0201} - h_{0120} h_{0300}) + \\
&\quad \frac{\delta_2}{4\omega}(h_{0012} h_{0210} + h_{0111} h_{1020}) + \frac{\delta_2}{8\omega}(3h_{0012}^2 + h_{0111}^2 - 5h_{0210}^2) + \\
&\quad \frac{\delta_1}{4\omega^2}(3h_{0030} h_{0210} - 3h_{0012} h_{0030} - 8h_{0021}^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{0022} &= \frac{\delta_1}{4}(h_{0012}h_{2010} + h_{0210}h_{2010} - 2h_{0111}h_{1002} - 2h_{0111}h_{1200} - 2h_{1002}h_{1020} - 2h_{1020}h_{1200}) - \\
&\quad \frac{2\delta_1}{\omega^2}h_{0120}^2 - \frac{\delta_2}{8\omega}(2h_{0012}h_{0210} - 8h_{0003}h_{0021} - 3h_{0012}^2 + 8h_{0102}h_{0120} + h_{0111}^2 + 2h_{0111}h_{1020} + \\
&\quad 16h_{0120}h_{0300} - 5h_{0210}^2) - \frac{\delta_2\omega}{2}(h_{1002} + h_{1200})^2, \\
f_{0400} &= \frac{\delta_2}{8\omega}(16h_{0003}^2 + 16h_{0003}h_{0201} + h_{0111}h_{1002} + h_{0111}h_{1200} + 4h_{0201}^2 - 2h_{0012}h_{1101} - \\
&\quad 2h_{0210}h_{1101} - 4h_{0300}^2) - \frac{\delta_1}{32\omega^2}(4h_{0012}^2 + h_{0111}^2 - 4h_{0210}^2) - \frac{\delta_1}{8}(h_{1002} + h_{1200})^2, \\
f_{0004} &= -\frac{\delta_1}{8}(h_{1002} + h_{1200})^2 + \frac{\delta_2}{8\omega}(4h_{0003}^2 - 4h_{0102}^2 - 16h_{0102}h_{0300} - h_{0111}h_{1002} + h_{0111}h_{1200} - \\
&\quad 16h_{0300}^2) - \frac{\delta_1}{32\omega^2}h_{0111}^2, \\
f_{0202} &= -\frac{\delta_1}{4}(h_{1002} + h_{1200})^2 + \frac{\delta_2}{16\omega^2}(-4h_{0012}^2 + h_{0111}^2 + 4h_{0012}h_{0210}) + \\
&\quad \frac{\delta_2}{4\omega}(4h_{0003}h_{0201} - 4h_{0102}h_{0300} - h_{0012}h_{1101} - h_{0012}h_{0210}).
\end{aligned}$$

De este modo, hemos normalizado los términos cuárticos del Hamiltoniano (4.17) y por lo tanto, su forma normal hasta términos cuárticos es como en (4.18). \blacksquare

4.3. Forma normal de un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad con parte lineal no diagonalizable vía el método de Lie

En esta sección, usaremos el método de Lie o Deprit- Hori para encontrar ciertas restricciones a cerca de los coeficientes del Hamiltoniano original con dos grados de libertad.

Para esto, considere la función Hamiltoniana (2.15) vista en el capítulo 2, definida como

$$H = H_2(q, p) + H_3(q, p) + H_4(q, p) + \cdots + H_s(q, p) + \cdots, \quad (4.21)$$

donde H_s es un polinomio homogéneo de grado s , cuya expresión en las coordenadas $q = (q_1, q_2)$ y $p = (p_1, p_2)$ es dado por (2.16).

4.3.1. Normalización de los términos de orden tres en caso donde todas las frecuencias son nulas y $\text{rg}(\mathbf{S})=1$

Consideremos un Hamiltoniano autónomo con dos grados de libertad y supongamos que todos sus valores propios son nulos. Estudiaremos el caso donde la matriz de la parte lineal tiene rango 1, así, de acuerdo al Teorema 19 la parte cuadrática tiene la forma

$$H_2 = \frac{\delta}{2}p_1^2, \quad (4.22)$$

donde $\delta = \pm 1$.

Teorema 27 *Existe una transformación simpléctica $x = E(X) + \dots$, que transforma el Hamiltoniano*

$$H = \frac{\delta}{2}p_1^2 + H_3 + H_4 + \dots, \quad (4.23)$$

en el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} K = & h_{3000}Q_1^3 + h_{0300}Q_2^3 + h_{0003}P_2^3 + h_{2100}Q_1^2Q_2 + h_{2001}Q_1^2P_2 + h_{1200}Q_1Q_2^2 + h_{0201}Q_2^2P_2 \\ & + h_{1002}Q_1P_2^2 + h_{0102}Q_2P_2^2 + h_{1101}Q_1Q_2P_2 + K_4 + \dots. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Demostración. Sabemos que la forma polinomial de H_3 es dado por

$$\begin{aligned} H_3(q_1, q_2, p_1, p_2) = & h_{3000}q_1^3 + h_{0300}q_2^3 + h_{0003}p_1^3 + h_{0003}p_2^3 + h_{2100}q_1^2q_2 + h_{2010}q_1^2p_1 \\ & + h_{2001}q_1^2p_2 + h_{1200}q_1q_2^2 + h_{0210}q_2^2p_1 + h_{0201}q_2^2p_2 + h_{1020}q_1p_1^2 \\ & + h_{0120}q_2p_1^2 + h_{0021}p_1^2p_2 + h_{1002}q_1p_2^2 + h_{0102}q_2p_2^2 + h_{0012}p_1p_2^2 \\ & + h_{1110}q_1q_2p_1 + h_{1101}q_1q_2p_2 + h_{1011}q_1p_1p_2 + h_{0111}q_2p_1p_2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Luego, considerando $H_2 = \frac{\delta}{2}p_1^2$, tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, se tiene que $H_2^T = -\delta_1q_1^2$. Por otro lado, considerando la ecuación de Lie $\{H_2^T, H_3\} = 0$, entonces los términos cúbicos deben satisfacer la siguiente relación

$$-\delta q_1 \frac{\partial H_3}{\partial p_1} = 0. \quad (4.26)$$

De donde, se debe verificar la siguiente ecuación

$$-\delta(l_1 + 1)h_{k_1-1k_2l_1+1}l_2 = 0, \quad (4.27)$$

para todo $|k| + |l| = 3$, a continuación procedemos a normalizar los términos cúbicos del Hamiltoniano (4.23). Entonces considerando las posibilidades para $|k| + |l| = 3$ con $k_1 > 0$ y $k_2, l_1, l_2 \leq 0$, dadas en el siguiente cuadro

k_1	3	0	0	0	2	2	2	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
k_2	0	3	0	0	1	0	0	2	2	2	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
l_1	0	0	3	0	0	1	0	0	1	0	2	2	2	0	0	1	1	0	1	1
l_2	0	0	0	3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	2	2	2	0	1	1	1

Cuadro 4.7: Relaciones para $|k| + |l| = 3$ con $k_j \geq 0$ y $l_j \geq 0$ ($j = 1, 2$).

Y a partir de las ecuaciones (4.25) y (4.27) tenemos las siguientes restricciones sobre los coeficientes

$$h_{0030} = h_{2010} = h_{0210} = h_{1020} = h_{0120} = h_{0021} = h_{0012} = h_{1110} = h_{1011} = h_{0111} = 0.$$

De modo que, hemos normalizado los términos cúbicos del Hamiltoniano (4.23) y por lo tanto, el nuevo Hamiltoniano es como en (4.24). \blacksquare

4.3.2. Normalización del caso donde una frecuencia es nula

Sea la función Hamiltoniana

$$H = \frac{\delta_1}{2} q_1^2 + \frac{\delta_2 \omega}{2} (q_2^2 + p_2^2) + H_3(q, p) + H_4(q, p) + \dots \quad (4.28)$$

Suponga también que dos de sus valores propios de la matriz del sistema linealizado asociado a H en (4.28) son nulos y los demás imaginarios puros.

Por el Teorema 10, existe un cambio de coordenadas simpléctica tal que

$$\{H_2^T, H_s\} = 0, \quad s \geq 3, \quad (4.29)$$

de donde obtenemos que la ecuación de Lie es dada por

$$\frac{\partial H_2^T}{\partial q_1} \frac{\partial H_s}{\partial p_1} + \frac{\partial H_2^T}{\partial q_2} \frac{\partial H_s}{\partial p_2} - \frac{\partial H_2^T}{\partial p_1} \frac{\partial H_s}{\partial q_1} - \frac{\partial H_2^T}{\partial p_2} \frac{\partial H_s}{\partial q_2} = 0 \quad (4.30)$$

Teorema 28 *Existe una transformación simpléctica $x = E(X) + \dots$, que transforma el Hamiltoniano (4.28) en el Hamiltoniano*

$$K = \frac{\delta_1}{2} q_1^2 + \frac{\delta_2 \omega}{2} (q_2^2 + p_2^2) + \sum_{s=3}^M \sum_{j=0}^{[s/2]} a_{s-2j,j} P_1^{s-2j} (q_2^2 + P_2^2)^j + K^{M+1} + \dots \quad (4.31)$$

donde a_{s-2j} son constantes reales. La normalización debe ser hasta orden M tal que $a_{M,0}$ es distinto de cero.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que H_2 en (4.31) es dado por

$$H_2 = \frac{\delta_1}{2}q_1^2 + \frac{\delta_2\omega}{2}(q_2^2 + p_2^2),$$

con $\delta_1 = \pm 1$ y $\delta_2 = \pm 1$. Con el objetivo de simplificar los términos, hacemos un cambio de coordenadas simpléctica.

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{i\delta_1}y_1, & q_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i\delta_2x_2 + y_2) \\ q_1 &= \sqrt{-i\delta_1}x_1, & p_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + i\delta_2y_2) \end{aligned} \tag{4.32}$$

Luego se tiene

$$\begin{aligned} H_2(x_1, x_2, y_1, y_2) &= -\frac{\delta_1}{2}i\delta_1x_1^2 + \frac{\delta_2\omega}{4}(x_2^2 + 2i\delta_2x_2y_2 - y_2^2 - x_2^2 + 2i\delta_2x_2y_2 + y_2^2) \\ &= -\frac{1}{2}ix_1^2 + i\omega x_2y_2, \end{aligned} \tag{4.33}$$

de donde, es fácil ver que

$$R = -JA^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$H_2^T = \frac{1}{2}x^T R x = \frac{1}{2}iy_1^2 + i\omega x_2y_2.$$

Así, de (4.29) tenemos $\nabla H_2^T J \nabla H_s = 0$, con $s \geq 3$. Por lo tanto, la ecuación de Lie (4.30) se reduce a

$$i\omega y_2 \frac{\partial H_s}{\partial y_2} - iy_1 \frac{\partial H_s}{\partial x_1} - i\omega x_2 \frac{\partial H_s}{\partial x_2} = 0,$$

o equivalentemente,

$$y_1 \frac{\partial H_s}{\partial x_1} + \omega \left[x_2 \frac{\partial H_s}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial H_s}{\partial y_2} \right] = 0. \tag{4.34}$$

Además, dado que

$$H_s = \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} h_{k_1k_2l_1l_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2} y_1^{l_1} y_2^{l_2}. \tag{4.35}$$

Entonces de (4.34) y (4.35) se tiene que

$$\begin{aligned}
& k_1 y_1 \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} h_{k_1 k_2 l_1 l_2} x_1^{k_1-1} x_2^{k_2} y_1^{l_1} y_2^{l_2} + (k_2 + l_2) \omega x_1 \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} h_{k_1 k_2 l_1 l_2} x_1^{k_1-1} x_2^{k_2} y_1^{l_1} y_2^{l_2} = 0 \\
\Leftrightarrow & [k_1 y_1 + (k_2 - l_2) \omega x_1] \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} h_{k_1 k_2 l_1 l_2} x_1^{k_1-1} x_2^{k_2} y_1^{l_1} y_2^{l_2} = 0 \\
\Leftrightarrow & k_1 y_1 + (k_2 - l_2) \omega x_1 \Leftrightarrow k_1 = 0 \quad \text{y} \quad k_2 = l_2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, haciendo $k_2 = l_2 = k$ y $l_1 = l$, obtenemos la siguiente expresión para H_s

$$H_s = \sum_{2k+l=s} h_{0klk} x_2^k y_1^l y_2^k = \sum_{2k+l=s} h_{0klk} y_1^l (x_2 y_2)^k. \quad (4.36)$$

Luego, haciendo $k = j$ en (4.36) se sigue que $l = s - 2j$, además, $s - 2j \geq 0$, así, $j \leq s/2$.

En consecuencia H_s en (4.36) se transforma en

$$H_s = \sum_{2k+l=s} h_{0klk} P_1^l (q_2^2 + P_2^2)^k = \sum_{j=0} h_{0,j,s-2j,j} P_1^{s-2j} (q_2^2 + P_2^2)^j, \quad s \geq 3.$$

Por lo tanto, se tiene que la forma normal del Hamiltoniano (4.28) adquiere la siguiente forma

$$K = \frac{\delta_1}{2} q_1^2 + \frac{\delta_2 \omega}{2} (q_2^2 + p_2^2) + \sum_{s=3}^M \sum_{j=0}^{[s/2]} a_{s-2j,j} P_1^{s-2j} (q_2^2 + P_2^2)^j + K^{M+1} + \dots$$

donde a_{s-2j} son constantes reales. La normalización debe ser hasta orden M tal que $a_{M,0}$ es distinto de cero. Así, el teorema queda demostrado. \blacksquare

Observación 2 *Los coeficientes de la forma normal son expresados fácilmente en términos de los coeficientes de la función Hamiltoniana original (4.28). Por ejemplo, mediante cálculos simples se verifica que*

$$\begin{aligned}
a_{3,0} &= h_{0030}, \\
a_{4,0} &= h_{0040} - \frac{1}{2} \delta_1 h_{1020}^2 + \frac{3}{2} \delta_1 h_{2010} h_{0030} - \frac{1}{\omega} \delta_2 h_{0120} h_{0021}.
\end{aligned} \quad (4.37)$$

4.3.3. Normalización del caso donde las frecuencias son no nulas e iguales

En esta subsección vamos a normalizar hasta términos de orden cuatro el Hamiltoniano obtenido en la ecuación (3.78) Teorema 22. Para lograr nuestro objetivo, hacemos uso de la teoría descrita en la sección 2.6 que se encuentra inmediatamente después del algoritmo de N. Burgoyne y R. Cushman.

Teorema 29 *Existe una transformación simpléctica $x = E(X) + \dots$, que transforma el Hamiltoniano*

$$H(q, p) = \frac{1}{2}\delta(q_1^2 + q_2^2) + \omega(q_1p_2 - q_2p_1) + H_3 + H_4 + H_5 + \dots, \quad (4.38)$$

en el Hamiltoniano

$$K(q, p) = \frac{1}{2}\delta(q_1^2 + q_2^2) + \omega(q_1p_2 - q_2p_1) + (p_1^2 + p_2^2)[k_{0202}(p_1^2 + p_2^2) + k_{0211}(q_1p_2 - q_2p_1) + k_{1111}(q_1^2 + q_2^2)] + K_5 + \dots. \quad (4.39)$$

Demostración. Considere la función Hamiltoniana $H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots$ en \mathbb{R}^4 comenzando con el polinomio cuadrático H_2 , que según la ecuación (3.78) viene definido como

$$H_2 = -\frac{1}{2}\delta(q_1^2 + q_2^2) + \omega(q_1p_2 - q_2p_1); \quad \omega > 0, \delta = \pm 1. \quad (4.40)$$

De acuerdo al Teorema 22, sabemos que la función Hamiltoniana (4.40) es equivalente a la parte cuadrática del Hamiltoniano definido en (4.38) vía un cambio de coordenadas simpléctico, además, recordemos que la matriz $A = JS$ asociada al sistema Hamiltoniano correspondiente a la función Hamiltoniana (4.40), según la ecuación (3.77) Teorema 22 tiene la siguiente forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \delta & \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta = \pm 1. \quad (4.41)$$

Por lo tanto, podemos hacer una descomposición de la matriz A como $A = \Sigma + M$ con

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, calculamos la derivada de Lie

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\partial H_2}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial H_2}{\partial p_2} \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial p_2} \\ &= -\omega q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + \omega q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - (-\delta q_1 + \omega p_2) \frac{\partial}{\partial p_1} - (-\delta q_2 - \omega p_1) \frac{\partial}{\partial p_2} \\ &= \left(-\omega q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + \omega q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - \omega p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + \omega p_1 \frac{\partial}{\partial p_2} \right) + \left(\delta q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + \delta q_2 \frac{\partial}{\partial p_2} \right) \\ &= \mathcal{S} + \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Así, obtenemos que

$$\mathcal{S} = -\omega q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + \omega q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - \omega p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + \omega p_1 \frac{\partial}{\partial p_2}, \quad (4.42)$$

$$\mathcal{N} = \delta q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + \delta q_2 \frac{\partial}{\partial p_2}. \quad (4.43)$$

Ahora con la finalidad de simplificar las ecuaciones (4.42) y (4.43), introducimos las coordenadas complejas $(z, \bar{z}) = (z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ dadas por

$$z_1 = q_1 + iq_2, \quad z_2 = p_1 + ip_2, \quad \bar{z}_1 = q_1 - iq_2, \quad \bar{z}_2 = p_1 - ip_2. \quad (4.44)$$

Esto define un isomorfismo lineal complejo $(q, p) \mapsto (z, \bar{z})$ de \mathbb{C}^4 con signo mismo, que transforma cualquier polinomio H_n en (q, p) a un polinomio \bar{H}_n en (z, \bar{z}) . En estas coordenadas (z, \bar{z}) se verifica que \mathcal{S} y \mathcal{N} se transforma en

$$\tilde{\mathcal{S}} = i\omega \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right), \quad (4.45)$$

$$\tilde{\mathcal{N}} = \delta \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} + \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right). \quad (4.46)$$

Usando la notación $(k, l) = (k_1, k_2, l_1, l_2)$ para el monomio $z_1^{k_1} z_2^{k_2} \bar{z}_1^{l_1} \bar{z}_2^{l_2}$ cada polinomio real homogéneo de grado m sobre \mathbb{R}^4 en las coordenadas complejas conjugadas (z, \bar{z}) puede ser escrito como

$$\sum_m c_{kl}(k, l) \quad \text{con} \quad c_{kl} = \bar{c}_{lk}.$$

Aquí, \sum_m denota la sumatoria sobre toda las posibles combinaciones k_1, k_2, l_1, l_2 con $k_i \geq 0$, $l_i \geq 0$ donde $i = 1, 2$ y $k_1 + k_2 + l_1 + l_2 = m$. Por consiguiente, tenemos

$$\tilde{\mathcal{S}}(k, l) = i\omega(k_1 + k_2 + l_1 + l_2)(k, l). \quad (4.47)$$

Por lo tanto, el kernel de $\tilde{\mathcal{S}}$ que actúa sobre el espacio de polinomios reales homogéneos de grado n en las coordenadas complejas conjugadas, es generado por los monomios (k, l) con $k_1 + k_2 + l_1 + l_2 = n$ y $k_1 + k_2 = l_1 + l_2$, dado que en este caso tenemos resonancia 1 : 1, pues $\omega_1 = \omega_2$. En consecuencia, se tiene que $2(k_1 + k_2) = 2(l_1 + l_2) = n$. En particular, notemos que cuando n es impar se tiene que $\ker(\tilde{\mathcal{S}}_n) = \{0\}$. Por lo tanto, el subespacio digamos Y_3 generado por $\tilde{\mathcal{S}}_n$ para n impar es $Y_3 = \{0\}$, es decir, la forma normal de H es nula para términos de orden tres. Para $n = 4$ de acuerdo con [22] el núcleo de $\tilde{\mathcal{S}}_n$ es generado por los siguientes monomios

$$(2, 0, 2, 0), (0, 2, 0, 2), (1, 1, 1, 1), (2, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 2), (2, 0, 0, 2), \\ (1, 1, 2, 0), (0, 2, 1, 1), (0, 2, 2, 0).$$

Esto implica que el kernel de \mathcal{S}_4 es generado por los siguientes polinomios reales de grado cuatro

$$\begin{aligned}
e_1 &= (2, 0, 2, 0) = (q_1^2 + q_2^2)^2, & e_4 &= Re(1, 1, 2, 0) = (q_1^2 + q_2^2)(q_1p_1 + q_2p_2), \\
e_2 &= (0, 2, 0, 2) = (p_1^2 + p_2^2)^2, & e_5 &= Im(1, 1, 2, 0) = (q_1^2 + q_2^2)(q_1p_2 - q_2p_1), \\
e_3 &= (1, 1, 1, 1) = (q_1^2 + q_2^2)(p_1^2 + p_2^2), & e_6 &= Re(0, 2, 1, 1) = (p_1^2 + p_2^2)(q_1p_1 + q_2p_2), \\
e_7 &= Im(0, 2, 1, 1) = (p_1^2 + p_2^2)(q_1p_2 - q_2p_1), \\
e_8 &= Re(0, 2, 2, 0) = (q_1p_1 + q_2p_2)^2 - (q_1p_2 - q_2p_1)^2, \\
e_9 &= Im(0, 2, 2, 0) = 2(q_1p_1 + q_2p_2)(q_1p_2 - q_2p_1).
\end{aligned}$$

Ahora, usando (4.46) encontramos la imagen de $\tilde{\mathcal{N}}|_{ker(\tilde{\mathcal{S}}_4)}$, esto es,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{N}}(2, 0, 2, 0) &= 0, & \tilde{\mathcal{N}}(1, 1, 1, 1) &= \delta(2, 0, 1, 1) + \delta(1, 1, 2, 0), \\
\tilde{\mathcal{N}}(0, 2, 0, 2) &= 2\delta(1, 1, 0, 2) + 2\delta(0, 2, 1, 1), & \tilde{\mathcal{N}}(1, 1, 2, 0) &= \delta(2, 0, 2, 0) = \overline{\tilde{\mathcal{N}}(2, 0, 1, 1)}, \\
\tilde{\mathcal{N}}(0, 2, 2, 0) &= 2\delta(1, 1, 2, 0) = \overline{\tilde{\mathcal{N}}(2, 0, 0, 2)}, \\
\tilde{\mathcal{N}}(0, 2, 1, 1) &= 2\delta(1, 1, 1, 1) + \delta(0, 2, 2, 0) = \overline{\tilde{\mathcal{N}}(1, 1, 0, 2)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la acción de \mathcal{N} sobre la base $\{e_1, \dots, e_9\}$ de $ker(\mathcal{S})$ en $P_4(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ es

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}e_1 &= 0, & \mathcal{N}e_4 &= \delta e_1, & \mathcal{N}e_7 &= \delta e_9, \\
\mathcal{N}e_2 &= 4\delta e_6, & \mathcal{N}e_5 &= 0, & \mathcal{N}e_8 &= 2\delta e_4, \\
\mathcal{N}e_3 &= 2\delta e_4, & \mathcal{N}e_6 &= \delta e_8 + 2\delta e_3, & \mathcal{N}e_9 &= 2\delta e_5,
\end{aligned}$$

esto implica que la imagen de $\mathcal{N}|_{ker(\mathcal{S}_4)}$ en $P_4(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ es generado por $\{e_1, e_4, e_5, e_6, e_8 + 2e_3, e_9\}$. Por lo tanto una elección del subespacio digamos Y_4 de \mathbb{R}^4 es el generado por $\{e_2, e_3, e_7\}$. Notemos que Y_4 no es único, por lo tanto, la forma normal de H para términos de orden cuatro no es única. Debido a la elección que hemos considerado tenemos los términos de cuarto orden en nuestro Hamiltoniano normalizado dado como

$$\begin{aligned}
H_4 &= k_{0202}(p_1^2 + p_2^2)^2 + k_{0211}(p_1^2 + p_2^2)(q_1p_2 - q_2p_1) + k_{1111}(q_1^2 + q_2^2)(p_1^2 + p_2^2) \\
&= (p_1^2 + p_2^2)[k_{0202}(p_1^2 + p_2^2) + k_{0211}(q_1p_2 - q_2p_1) + k_{1111}(q_1^2 + q_2^2)].
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Por lo tanto, la forma normal para el Hamiltoniano (4.38) es como en (4.39) ■

Nuestro próximo paso es calcular el valor del coeficiente k_{0202} en (4.48) correspondiente al monomio $(0, 2, 0, 2)$ que en coordenadas reales es $(p_1^2 + p_2^2)^2$. Antes de comenzar con nuestro objetivo, con el afán de reducir nuestros cálculos veamos algunas nociones importantes que nos permiten obtener el valor de k_{0202} .

Primeramente calcularemos la función $F \in P_3(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ que genera la transformación ϕ_F cuando normalizamos el Hamiltoniano 4.38 hasta orden tres (ver Corolario 2). Esta transformación es determinada única, pues en el Teorema 29 encontramos que $\ker \mathcal{S}_3 = \{0\}$. Por lo tanto, por el Lema 4 \mathcal{L}_3^{-1} existe en $P_n(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ y así $F = \mathcal{L}^{-1}H_3$. Además, el efecto de la transformación H por ϕ_F es que agrega un término de cuarto orden a H . La colección de términos de la forma deseada conduce a k_{0202} .

Teorema 30 *La transformación simpléctica ϕ_F definida por (2.32) con generador $F \in P_3(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ tal que $\mathcal{L}F = H_3$ implica*

$$i) (H \circ \phi_F)_3(q, p) = 0,$$

$$ii) (H \circ \phi_F)_4(q, p) = H_4(q, p) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_F H_3(q, p).$$

Demostración. La demostración de *i)* se sigue inmediatamente del Corolario 2 y el hecho que $Y_3 = \{0\}$. Usando (2.33) tenemos

$$(H \circ \phi_F)_4(q, p) = H_4(q, p) + \mathcal{L}_F H_3(q, p) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_F^2 h_2(q, p).$$

Además, tenemos

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_F^2 H_2(q, p) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_F(\mathcal{L}_F(q, p)) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_F(\mathcal{L}F(q, p)) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_F H_3(q, p)$$

usando el hecho de que hemos elegido F de modo que $\mathcal{L}F = H_3$. Recuerde que \mathcal{L} es la derivada de Lie generada por H_2 . Esto prueba *ii)*. \blacksquare

De acuerdo a las coordenadas complejas conjugadas definidas en (4.44) Teorema 29. Denote por $\tilde{H}(z, \bar{z})$ a la función Hamiltoniana $H(q, p)$ en coordenadas complejas conjugadas. Entonces las ecuaciones Hamiltonianas en estas coordenadas son

$$\frac{d}{dz}(z, \bar{z}) = X_{\tilde{H}}(z, \bar{z}),$$

donde

$$X_{\tilde{H}}(z, \bar{z}) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\tilde{H}(z, \bar{z}).$$

Note que el factor 2 aparece porque nuestras coordenadas complejas conjugadas no son complejas simplécticas. De hecho, se puede introducir coordenadas complejas que sean simplécticas, por ejemplo

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_2, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_1, \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{z}_1, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{z}_2.$$

Sin embargo, trabajar con estas coordenadas en este caso muy especial no es conveniente.

Ahora, defina la derivada de Lie de $f(z, \bar{z})$ con respecto a $X_{\tilde{H}}(z, \bar{z})$ por

$$\begin{aligned} L_{\tilde{H}}f(z, \bar{z}) &= df(z, \bar{z})X_{\tilde{H}}(z, \bar{z}) \\ &= 2 \left[\frac{\partial \tilde{H}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}_2} \frac{\partial f(z, \bar{z})}{\partial z_1} - \frac{\partial \tilde{H}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}_1} \frac{\partial f(z, \bar{z})}{\partial z_2} + \frac{\partial \tilde{H}(z, \bar{z})}{\partial z_2} \frac{\partial f(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}_1} - \frac{\partial \tilde{H}(z, \bar{z})}{\partial z_1} \frac{\partial f(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}_2} \right]. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Además, sea $P_n((z, \bar{z}), \mathbb{C})$ el espacio de polinomios homogéneos en las coordenadas (z, \bar{z}) con coeficientes complejos. Una base compleja de $P_n((z, \bar{z}), \mathbb{C})$ es

$$M_n = \{(k, l); k_1 + k_2 + l_1 + l_2 = n, k_i \geq 0, l_i \geq 0, i = 1, 2\}.$$

De donde se verifican las siguientes propiedades.

Propiedad 1 Sea $\tilde{H}_k(z, \bar{z})$ el polinomio real homogéneo $H(q, p)$ en coordenadas complejas conjugadas. Si (k, l) es un monomio de \tilde{H}_k entonces (l, k) es también un monomio de \tilde{H}_k y $c_{kl} = \bar{c}_{lk}$.

Propiedad 2 Si $G(z, \bar{z}) \in P_n((z, \bar{z}), \mathbb{C})$ entonces $\overline{[\partial G(z, \bar{z})]/\partial z_i} = [\overline{\partial G(z, \bar{z})}]/\partial \bar{z}_i$. Además, si $G(z, \bar{z})$ es algún polinomio real homogéneo en coordenadas complejas conjugadas entonces $\overline{[\partial G(z, \bar{z})]/\partial z_i} = [\overline{\partial G(z, \bar{z})}]/\partial \bar{z}_i$.

Propiedad 3 $\mathcal{L}_{\tilde{H}} = \tilde{\mathcal{L}}_H$.

Propiedad 4 $\mathcal{L}_{\tilde{H}(z, \bar{z})}\tilde{G}(z, \bar{z}) = (\widetilde{\mathcal{L}_H G})(z, \bar{z}) = \mathcal{L}_{H(q, p)}G(q, p)$.

Usando las Propiedades 3 y 4 se sigue que

$$\tilde{F}(z, \bar{z}) = \tilde{\mathcal{L}}^{-1}\tilde{H}_3(z, \bar{z}), \quad (4.50)$$

$$\tilde{\phi}_F = \exp(\tilde{\mathcal{L}}_F) = \exp(\mathcal{L}_{\tilde{F}}) = \phi_{\tilde{F}}, \quad (4.51)$$

$$(\tilde{H} \circ \phi_{\tilde{F}})_4(z, \bar{z}) = \tilde{H}_4(z, \bar{z}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\tilde{F}}\tilde{H}_3(z, \bar{z}). \quad (4.52)$$

De la Propiedad 2 se deduce directamente que en M_n los operadores con conjugación compleja $\tilde{\mathcal{S}}$ y $\tilde{\mathcal{N}}$ y por lo tanto $\tilde{\mathcal{L}}$ y $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}$ conmutan, es decir,

$$\overline{\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(k, l)} = \tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\overline{k}, \overline{l}) = \tilde{\mathcal{L}}^{-1}(l, k).$$

Entonces para encontrar $\tilde{F} \in P_3((z, \bar{z}), \mathbb{C})$ solo tenemos que determinar la imagen del conjunto $M_3^* = \{(k, l); k_1 + k_2 + l_1 + l_2 = 3; k_i \geq 0; l_i \geq 0, k_1 + k_2 > l_1 + l_2\}$ bajo $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}$. Esto lo hacemos de la siguiente manera. Usando (4.45) y (4.46) tenemos

$$\tilde{\mathcal{F}}(k, l) = i\omega\rho_{kl}(k, l) \quad \text{donde} \quad \rho_{kl} = (k_1 + k_2 - l_1 - l_2), \quad (4.53)$$

$$\tilde{\mathcal{N}}(k, l) = \delta k_2(k_1 + 1, k_2 - 1, l_1, l_2) + \delta l_2(k_1, k_2, l_1 + 1, l_2 - 1). \quad (4.54)$$

Considerando la descomposición $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{F}} + \tilde{\mathcal{N}}$. Dado que $\tilde{\mathcal{F}}\tilde{\mathcal{N}} = \tilde{\mathcal{N}}\tilde{\mathcal{F}}$ tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}^{-1} &= (I + \tilde{\mathcal{F}}^{-1}\tilde{\mathcal{N}})^{-1}\tilde{\mathcal{F}}^{-1} \\ &= [I - \tilde{\mathcal{F}}^{-1}\tilde{\mathcal{N}} + (\tilde{\mathcal{F}}^{-1}\tilde{\mathcal{N}})^2 - (\tilde{\mathcal{F}}^{-1}\tilde{\mathcal{N}})^3]^{-1}\tilde{\mathcal{F}}^{-1}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

usando el hecho que $\tilde{\mathcal{N}}^4 = 0$ en $P_3((z, \bar{z}), \mathbb{C})$.

Usamos la expresión (4.55) juntos con las fórmulas (4.53) y (4.54) para encontrar la imagen del conjunto M_3^* bajo $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}$. Así, también conocemos la imagen de M_3 bajo $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}$, esto es, la imagen de elementos básicos de $P_3((z, \bar{z}), \mathbb{C})$. Podemos expresar $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}$ como la matriz dada en el siguiente cuadro.

Cuadro 4.8: Matriz de transformación para $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}$

	3000	2100	1200	0300	0030	0021	0012	0003	...
3000	$-\frac{i}{3\omega}$								
2100	$\frac{\delta}{9\omega^2}$	$-\frac{i}{3\omega}$							
1200	$\frac{2i}{27\omega^3}$	$\frac{2\delta}{9\omega^2}$	$-\frac{i}{3\omega}$						
0300	$-\frac{2\delta}{27\omega^4}$	$\frac{2i}{9\omega^3}$	$\frac{\delta}{3\omega^2}$	$-\frac{i}{3\omega}$					
0030					$\frac{i}{3\omega}$				
0021					$\frac{\delta}{9\omega^2}$	$\frac{i}{3\omega}$			
0012					$-\frac{2i}{27\omega^3}$	$\frac{2\delta}{9\omega^2}$	$\frac{i}{3\omega}$		
0003					$-\frac{2\delta}{27\omega^4}$	$-\frac{2i}{9\omega^3}$	$\frac{\delta}{3\omega^2}$	$\frac{i}{3\omega}$	
⋮									

Cuadro 4.9: Continuación de la matriz de transformación para $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}$

	2010	2001	1110	1101	0210	0201	1020	0120	1011	0111	1002	0102
2010	$-\frac{i}{\omega}$											
2001	$\frac{\delta}{\omega^2}$	$-\frac{i}{\omega}$										
1110	$\frac{\delta}{\omega^2}$		$-\frac{i}{\omega}$									
1101	$\frac{2i}{\omega^3}$	$\frac{\delta}{\omega^2}$	$\frac{\delta}{\omega^2}$	$-\frac{i}{\omega}$								
0210	$\frac{2i}{\omega^3}$		$\frac{2\delta}{\omega^2}$		$-\frac{i}{\omega}$							
0201	$-\frac{6\delta}{\omega^4}$	$\frac{2i}{\omega^3}$	$\frac{4i}{\omega^3}$	$\frac{2\delta}{\omega^2}$	$\frac{\delta}{\omega^2}$	$-\frac{i}{\omega}$						
1020							$\frac{i}{\omega}$					
0120							$\frac{\delta}{\omega^2}$	$\frac{i}{\omega}$				
1011							$\frac{\delta}{\omega^2}$		$\frac{i}{\omega}$			
0111							$-\frac{2i}{\omega^3}$	$\frac{\delta}{\omega^2}$	$\frac{\delta}{\omega^2}$	$\frac{i}{\omega}$		
1002							$-\frac{2i}{\omega^3}$		$\frac{2\delta}{\omega^2}$		$\frac{i}{\omega}$	
0102							$-\frac{6\delta}{\omega^4}$	$-\frac{2i}{\omega^3}$	$-\frac{4i}{\omega^3}$	$\frac{2\delta}{\omega^2}$	$\frac{\delta}{\omega^2}$	$\frac{i}{\omega}$

Uno puede encontrar la imagen del i -ésimo monomio en la columna delantera agregando los monomios en la fila superior, dando a cada monomio el coeficiente que se encuentra en el i -ésimo lugar de la columna correspondiente.

Sea

$$\tilde{H}_3(z, \bar{z}) = \sum_3 h_{kl}(k, l), \quad \tilde{F}(z, \bar{z}) = \sum_3 f_{kl}(k, l)$$

el polinomio $H_3(q, p)$ y $F(q, p)$ en coordenadas complejas conjugadas. Dado que $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}\tilde{H}_3 = \tilde{F}$ podemos usar los Cuadros 4.8 y 4.9 para expresar los coeficientes de \tilde{F} en función de los coeficientes de \tilde{H}_3 . Sea (k, l) el monomio en el j -ésimo lugar en la fila superior. Entonces el correspondiente coeficiente f_{kl} es la suma de los correspondientes h_{kl} de los monomios en la columna delantera, con los coeficientes encontrados en la j -ésima columna.

Ahora, estamos en condiciones de calcular el coeficiente k_{0202} del monomio $(0, 2, 0, 2)$, que en coordenadas reales es $(p_1^2 + p_2^2)^2$, en la expresión dada por (4.48).

Lema 18 *El coeficiente k_{0202} de $(p_1^2 + p_2^2)^2$ en (4.48) viene dado por $k_{0202} = h_{0202} + c_{0202}$, donde*

$$\begin{aligned} c_{0202} = & \frac{4}{\omega} [Re(h_{1002})Im(h_{0201}) + Im(h_{1002})Re(h_{0201})] - \frac{4}{\omega} Re(h_{1200})Im(h_{0003}) - \\ & \frac{4}{\omega} Im(h_{1200})Re(h_{0003}) - \frac{8}{\omega} [Re(h_{1101})Im(h_{0102}) + Im(h_{1101})Re(h_{0102})] - \\ & 10 \frac{\delta}{\omega^2} [Re(h_{0201})]^2 - 10 \frac{\delta}{\omega^2} [Im(h_{0201})]^2 - 2 \frac{\delta}{\omega^2} [Re(h_{0300})]^2 - 2 \frac{\delta}{\omega^2} [Im(h_{0300})]^2. \end{aligned}$$

Demostración. Usando la Propiedad 2 y la ecuación (4.49) obtenemos que

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\tilde{F}} \tilde{H}_3(z, \bar{z}) = 2Re \left(\frac{\partial \tilde{H}_3(z, \bar{z})}{\partial z_1} \frac{\partial \tilde{F}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}_2} \right) - 2Re \left(\frac{\partial \tilde{H}_3(z, \bar{z})}{\partial z_2} \frac{\partial \tilde{F}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}_1} \right), \quad (4.56)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}_3(z, \bar{z})}{\partial z_1} = & 3h_{3000}(2, 0, 0, 0) + 2h_{2100}(1, 1, 0, 0) + 2h_{2010}(1, 0, 1, 0) + h_{1020}(0, 0, 2, 0) + \\ & 2h_{2001}(1, 0, 0, 1) + h_{1110}(0, 1, 1, 0) + h_{1011}(0, 0, 1, 1) + h_{1200}(0, 2, 0, 0) + \\ & h_{1002}(0, 0, 0, 2) + h_{1101}(0, 1, 0, 1) \\ = & \sum_2 (i+1) h_{(i+1)jkl}(i, j, k, l) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}_3(z, \bar{z})}{\partial z_2} &= \sum_2 (j+1) h_{i(j+1)kl}(i, j, k, l), \\ \frac{\partial \tilde{F}_3(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}_1} &= \overline{\frac{\partial \tilde{F}_3(z, \bar{z})}{\partial z_1}} + \sum_2 (i+1) \bar{f}_{(i+1)jkl}(k, l, i, j), \\ \frac{\partial \tilde{F}_3(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}_2} &= \overline{\frac{\partial \tilde{F}_3(z, \bar{z})}{\partial z_2}} + \sum_2 (j+1) \bar{f}_{i(j+1)kl}(k, l, i, j). \end{aligned}$$

Dado que $(0, 2, 0, 2)$ es el producto de los monomios $(0, 2, 0, 0)$ y $(0, 0, 0, 2)$, $(0, 0, 0, 2)$ y $(0, 2, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$ y $(0, 1, 0, 1)$, los coeficientes de $(0, 2, 0, 2)$ en (4.56) es

$$\begin{aligned} c_{0202} = & 2Re(3h_{1200}\bar{f}_{0300} + h_{1002}\bar{f}_{0102} + 2h_{1101}\bar{f}_{0201} - 3h_{0300}\bar{f}_{1200} - h_{0102}\bar{f}_{1002} - 2h_{0201}\bar{f}_{1101}) \\ = & 2Re\left(-\frac{i}{\omega}h_{1002}h_{0201} + \frac{i}{\omega}h_{1200}h_{0300} + 2\frac{i}{\omega}h_{1101}h_{0102} + \frac{i}{\omega}h_{0102}h_{0210} - \frac{\delta}{\omega^2}h_{0102}h_{0201} - \right. \\ & \left. \frac{i}{\omega}h_{0300}h_{0012} - \frac{\delta}{\omega^2}h_{0300}h_{0003} - 2\frac{i}{\omega}h_{0201}h_{0111} - 4\frac{\delta}{\omega^2}h_{0201}h_{0102}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{\omega} [Re(h_{1002})Im(h_{0201}) + Im(h_{1002})Re(h_{0201})] - \frac{4}{\omega} Re(h_{1200})Im(h_{0003}) - \\
&\quad \frac{4}{\omega} Im(h_{1200})Re(h_{0003}) - \frac{8}{\omega} [Re(h_{1101})Im(h_{0102}) + Im(h_{1101})Re(h_{0102})] - \\
&\quad 10 \frac{\delta}{\omega^2} [Re(h_{0201})]^2 - 10 \frac{\delta}{\omega^2} [Im(h_{0201})]^2 - 2 \frac{\delta}{\omega^2} [Re(h_{0300})]^2 - 2 \frac{\delta}{\omega^2} [Im(h_{0300})]^2.
\end{aligned}$$

Así, el coeficiente k_{0202} de $(0, 2, 0, 2)$ es (4.47) es

$$k_{0202} = h_{0202} + c_{0202}. \quad (4.57)$$

De este modo hemos demostrado dicho lema. ■

Capítulo 5

Estabilidad de soluciones de equilibrio de un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad con parte lineal no diagonalizable

En este capítulo, nuestro objetivo es el estudio de la estabilidad de una solución de equilibrio en el sentido de Lyapunov para un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad cuando la parte lineal es no diagonalizable, en los siguientes casos: cuando una frecuencia de las ecuaciones Hamiltonianas del sistema linealizado es nula y cuando las frecuencias son no nulas e imaginarias puras. La estabilidad de equilibrio será estudiada a partir de los coeficientes de la función Hamiltoniana. Para esto, tenemos como principal referencia los trabajos realizados por Sokol'skii ([18, 19]).

Sea H una función Hamiltoniana analítica en una vecindad del origen, la cual corresponde al equilibrio del sistema Hamiltoniano asociado a la función H ,

$$H = H_2(q, p) + H_3(q, p) + H_4(q, p) + \cdots + H_s(q, p) + \cdots, \quad (5.1)$$

donde H_s es un polinomio homogéneo de grado $s \in \mathbb{N}$ cuya expresión en las coordenadas $q = (q_1, q_2)$ y $p = (p_1, p_2)$ es

$$H_s(q, p) = \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} h_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} p_1^{l_1} p_2^{l_2}. \quad (5.2)$$

Sin pérdida de generalidad, supondremos que la solución de equilibrio es el origen $(0, 0, 0, 0)$. Vamos a exhibir algunos resultados importantes en la literatura, tomando como referencia los trabajos de Sokol'skii ([18, 19]).

5.1. Análisis del caso donde una frecuencia es nula

Sea la función Hamiltoniana

$$H = \frac{\delta_1}{2}q_1^2 + \frac{\delta_2\omega}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \sum_{v=3}^{\infty} h_{v_1 v_2 v_3 v_4} q_1^{v_1} q_2^{v_2} p_1^{v_3} p_2^{v_4} \quad (5.3)$$

Según el Teorema 28, la forma normal de (5.3) está dada por

$$H = \frac{\delta_1}{2}q_1^2 + \frac{\delta_2\omega}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \sum_{s=3}^M \sum_{j=0}^{[s/2]} a_{s-2j,j} p_1^{s-2j} (q_2^2 + p_2^2)^j + H^{M+1} + \dots \quad (5.4)$$

donde a_{s-2j} son constantes reales. La normalización debe ser hasta orden M tal que $a_{M,0}$ es distinto de cero.

Teorema 31 (*A.G. Sokol'skii, 1977*) *Si M es impar, entonces el origen es una solución de equilibrio inestable para el sistema asociado a H . Si M es par, tenemos que el equilibrio es estable si $\delta_1 a_{M,0} > 0$ e inestable si $\delta_1 a_{M,0} < 0$.*

Demostración. Considere la ecuación (5.4), introducimos el cambio de coordenadas simplectico acción-ángulo en las variables r_2 y φ_2 dadas por

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1, & p_1 &= p_1, \\ q_2 &= \sqrt{2r_2} \sin(\varphi_2), & p_2 &= \sqrt{2r_2} \cos(\varphi_2), \end{aligned}$$

y así obtenemos que (5.4) se transforma en (por simplicidad usamos la misma notación)

$$H(q_1, p_1, r_2) = \frac{\delta_1}{2}q_1^2 + \delta_2\omega r_2 + \sum_{s=3}^M \sum_{j=0}^{[s/2]} a_{s-2j,j} p_1^{s-2j} (2r_2)^j + \dots \quad (5.5)$$

Notemos que (5.5) no depende de φ_2 y por lo tanto $\dot{r}_2 = 0$. Osea, r_2 es una integral primera del sistema asociado a H . Podemos reducir el sistema asociado a H a un sistema con un grado de libertad, tomando φ_2 como la nueva variable independiente. Para la nueva función Hamiltoniana K se obtiene la expresión

$$K(q_1, p_1) = \frac{1}{\delta_2\omega_2} \left[\frac{\delta_1}{2}q_1^2 + a_{M,0}p_1^M + K^M + K^{M+1} \right], \quad (5.6)$$

donde

$$K^M = K^M(q_1, p_1) = \sum_{m=3}^M \sum_{k=1}^{[m/2]} a_{m-2k,k}^* q_1^{2k} p_1^{m-2k} \quad (5.7)$$

$$K^{M+1}(q_1, p_1, \varphi_2, H^0) = \mathcal{O}((q_1^2 + p_1^2)^{\frac{M+1}{2}}).$$

En (5.7) las cantidades reales $a_{m-2k,k}^*$ son obtenidas mediante cálculos simples a partir de las cantidades $a_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$).

Por ejemplo, para $M = 3$ en (5.6) afirmamos que K viene dada por

$$K(q_1, p_1) = \frac{1}{\delta_2 \omega_2} \left[\frac{\delta_1}{2} q_1^2 + a_{3,0} p_1^3 + a_{1,1}^* p_1 q_1^2 + \mathcal{O}[(q_1^2 + p_1^2)^2] \right]. \quad (5.8)$$

En efecto, notemos que en la ecuación Hamiltoniana (5.5) una primera aproximación para r_2 es

$$r_2 = -\frac{\delta_1}{\delta_2 \omega_2} q_1^2. \quad (5.9)$$

Luego, haciendo $-\frac{\delta_1}{\delta_2 \omega_2} = \gamma$ se sigue que $r_2 = \gamma q_1^2$, además, para $M = 3$ la ecuación (5.5) tiene la siguiente forma

$$H^* = \frac{\delta_1}{2} q_1^2 + \delta_2 \omega_2 r_2 + a_{3,0} p_1^3 + a_{1,1} p_1 (2r_2) + H^4 + \dots, \quad (5.10)$$

donde $H^4 = a_{4,0} p_1^4 + a_{2,1} p_1^2 (2r_2) + a_{0,2} (2r_2)^2$.

Por lo tanto, de (5.10) se tiene una segunda aproximación para r_2 dada por

$$-r_2 = K = \frac{1}{\delta_2 \omega_2} \left[\frac{\delta_1}{2} q_1^2 + a_{3,0} p_1^3 + a_{1,1} p_1 (2r_2) + H^4 \right]. \quad (5.11)$$

Luego, reemplazando (5.10) en (5.23) obtenemos que

$$K = \frac{1}{\delta_2 \omega_2} \left[\frac{\delta_1}{2} q_1^2 + a_{3,0} p_1^3 + a_{1,1} p_1 (2\gamma q_1^2) + a_{4,0} p_1^4 + a_{2,1} p_1^2 (2\gamma q_1^2) + a_{0,2} (2\gamma q_1^2)^2 \right]. \quad (5.12)$$

De donde, se obtiene que

$$K = \frac{1}{\delta_2 \omega_2} \left[\frac{\delta_1}{2} q_1^2 + a_{3,0} p_1^3 + 2a_{1,1} \gamma p_1 q_1^2 + a_{4,0} p_1^4 + 2\gamma a_{2,1} p_1^2 q_1^2 + 2\gamma^2 a_{0,2} q_1^4 \right]. \quad (5.13)$$

Ahora, haciendo $2a_{1,1} \gamma = a_{1,1}^*$, $a_{4,0} = 1$, $a_{2,1} = \gamma^{-1}$ y $a_{0,2} = \frac{1}{2} \gamma^{-2}$ se sigue que

$$K = \frac{1}{\delta_2 \omega_2} \left[\frac{\delta_1}{2} q_1^2 + a_{3,0} p_1^3 + a_{1,1}^* p_1 q_1^2 + (q_1^2 + p_1^2)^2 \right], \quad (5.14)$$

es decir,

$$K = \frac{1}{\delta_2 \omega_2} \left[\frac{\delta_1}{2} q_1^2 + a_{3,0} p_1^3 + a_{1,1}^* p_1 q_1^2 + \mathcal{O}[(q_1^2 + p_1^2)^2] \right]. \quad (5.15)$$

A continuación, demostraremos la primera afirmación del teorema, usando el Teorema de inestabilidad de Lyapunov. Como función de Lyapunov tomamos la función de signo variable

$$V = \delta_2 \omega_2 (q_1 - M \delta_1 a_{M,0} q_1 p_1).$$

La derivada de la función V tomada en relación con las ecuaciones de movimiento con la función Hamiltoniana (5.6) es

$$\frac{dV}{d\varphi_2} = Ma_{M,0}(q_1^2 + p_1^{M-1}) + V^*. \quad (5.16)$$

donde V^* denota términos de orden superior en q_1 y p_1 o términos de la forma $q_1^m p_1^k$, donde $3 \leq m + k \leq M - 1$, pero $m \neq 0$.

Por ejemplo, para $M = 3$ se tiene que si $V = \delta_2 \omega_2 (q_1 - 3\delta_2 a_{3,0} q_1 p_1)$, entonces $\frac{dV}{d\varphi_2} = 3a_{3,0}(q_1^2 + p_1^2) + V^*$. En efecto, derivando V respecto a φ_2 obtenemos que

$$\dot{V} = \delta_2 \omega_2 [\dot{q}_1 - 3\delta_1 a_{3,0} (\dot{q}_1 p_1 + q_1 \dot{p}_1)]. \quad (5.17)$$

Por otro lado, considerando la ecuación (5.15) se sigue que las ecuaciones de movimiento del sistema Hamiltoniano asociado a K están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{1}{\delta_2 \omega_2} [3a_{3,0} p_1^2 + a_{1,1}^* q_1^2 + \dots] \\ \dot{p}_1 &= -\frac{1}{\delta_2 \omega_2} [\delta_1 q_1 + 2a_{1,1}^* p_1 q_1 + \dots] \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ahora, reemplazando (5.18) en (5.17) obtenemos que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 3a_{3,0} p_1^2 + a_{1,1}^* q_1^2 + \dots - 3\delta_1 a_{3,0} [(3a_{3,0} p_1^2 + a_{1,1}^* q_1^2 + \dots) p_1 - q_1 (\delta_1 q_1 + 2a_{1,1}^* p_1 q_1 + \dots)] \\ &= 3a_{3,0} p_1^2 + a_{1,1}^* q_1^2 - 9\delta_1 a_{3,0}^2 p_1^3 - 3\delta_1 a_{3,0} a_{1,1}^* q_1^2 p_1 + 3a_{3,0} q_1^2 + 6\delta_1 a_{3,0} a_{1,1}^* p_1 q_1^2 + \dots \\ &= 3a_{3,0} (q_1^2 + p_1^2) + a_{1,1}^* q_1^2 - 9\delta_1 a_{3,0}^2 p_1^3 - 3\delta_1 a_{3,0} a_{1,1}^* q_1^2 p_1 + 6\delta_1 a_{3,0} a_{1,1}^* p_1 q_1^2 + \dots \\ &= 3a_{3,0} (q_1^2 + p_1^2) + V^*. \end{aligned}$$

Continuando con la demostración del teorema, note que en una vecindad pequeña del origen la función (5.16) es de signo definido. Esto es claro, dado que si cambiamos $q_1 \rightarrow \epsilon^{M-1} q$ y $p_1 \rightarrow \epsilon^2 p$, donde ϵ es un número suficientemente pequeño. Entonces todo los términos de orden superior en ϵ y el signo de la función (5.16) coincide con el signo de $a_{M,0}$. Por lo tanto, el origen es inestable en el sentido de Lyapunov. Así, la primera afirmación del teorema está demostrada.

Para probar las dos últimas afirmaciones del teorema hacemos el cambio de variable canónica.

$$q_1 = \sqrt{2} r^{\frac{M}{M+2}} Sn(\varphi), \quad p_1 = \frac{M+2}{2\sqrt{2}} r^{\frac{2}{M+2}} Cs(\varphi), \quad (5.19)$$

donde φ y r son las nuevas coordenadas y momento, respectivamente, mientras que $Sn(\varphi)$ y $Cs(\varphi)$ son funciones de Lyapunov definidas por las fórmulas

$$\frac{dCs(\varphi)}{d\varphi} = -Sn(\varphi), \quad \frac{dSn(\varphi)}{d\varphi} = Cs^{M-1}(\varphi), \quad Cs(0) = 1, \quad Sn(0) = 0. \quad (5.20)$$

$$Cs^M(\varphi) + \frac{1}{2}MSn^2(\varphi) = 1. \quad (5.21)$$

El cambio de coordenadas en (5.19) es simpléctico, debido a que

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}r^{-\frac{M}{M+2}}Cs(\varphi) & -\left(\frac{M+2}{2\sqrt{2}}\right)r^{\frac{2}{M+2}}Sn(\varphi) \\ \left(\frac{\sqrt{2}M}{M+2}\right)r^{-\frac{2}{M+2}}Sn(\varphi) & \frac{1}{\sqrt{2}}r^{-\frac{M}{M+2}}Cs(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}r^{-\frac{M}{M+2}}Cs(\varphi) & \left(\frac{\sqrt{2}M}{M+2}\right)r^{-\frac{2}{M+2}}Sn(\varphi) \\ -\left(\frac{M+2}{2\sqrt{2}}\right)r^{\frac{2}{M+2}}Sn(\varphi) & \frac{1}{\sqrt{2}}r^{-\frac{M}{M+2}}Cs(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\left(\frac{M+2}{2}\right)rSn(\varphi)Cs^{M-1}(\varphi) + \left(\frac{M+2}{2}\right)rSn(\varphi)Cs^{M-1}(\varphi) & Cs^M(\varphi) + \frac{M}{2}Sn^2(\varphi) \\ -Cs^M(\varphi) - \frac{M}{2}Sn^2(\varphi) & -\frac{M}{2}r^{-1}Sn(\varphi)Cs(\varphi) + \frac{M}{2}r^{-1}Sn(\varphi)Cs(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora, note que cuando $M = 4$ tenemos $Cs(\varphi) = cs(\varphi)$ y $Sn(\varphi) = sn(\varphi)dn(\varphi)$, donde $cs(\varphi)$, $sn(\varphi)$ y $dn(\varphi)$ son funciones elípticas con módulo $1/\sqrt{2}$ definidas en la Sección (2.1). Las funciones $Sn(\varphi)$ y $Cs(\varphi)$ son periódicas con un período común expresado en términos de la función Γ como sigue

$$T_M = \frac{2\sqrt{\frac{2\pi}{M}}\Gamma\left(\frac{1}{M}\right)}{\frac{M+2}{2M}}.$$

La función Hamiltoniana (5.6), escrita en variables r y φ , viene dada por

$$\begin{aligned} K_* &= \frac{\delta_1 r^{\frac{2M}{M+2}}}{\delta_2 \omega_2} \left[Sn^2(\varphi) + \delta_1 a_{M,0} \left(\frac{M+2}{2\sqrt{2}} \right)^M Cs^2(\varphi) \right] + \mathcal{O}(r^{\alpha+\alpha_1}); \quad \alpha = \frac{2M}{M+2}, \quad \alpha_1 = \frac{2}{M+2} \\ &= r^{\frac{2M}{M+2}} \Phi(\varphi) + \mathcal{O}(r^{\alpha+\alpha_1}); \quad \alpha > 1, \quad \alpha_1 > 0, \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\text{donde, } \Phi(\varphi) = \frac{\delta_1}{\delta_2 \omega_2} \left[Sn^2(\varphi) + \delta_1 a_{M,0} \left(\frac{M+2}{2\sqrt{2}} \right)^M Cs^2(\varphi) \right].$$

Por lo tanto, la función Hamiltoniana K_* adquiere la siguiente forma

$$K = r^\alpha \Phi(\varphi) + K^*(r, \varphi, t, H^0), \quad \alpha > 1, \quad K^* = \mathcal{O}(r^{\alpha+\alpha_1}), \quad (\alpha_1 > 0).$$

donde

$$\alpha = \frac{2M}{M+2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{M+2}, \quad \tau = T_M, \quad (5.23)$$

$$\Phi(\varphi) = \frac{\delta_1}{\delta_2 \omega_2} [Sn^2(\varphi) + ACs^4(\varphi)], \quad A = \delta_1 a_{M,0} \left(\frac{M+2}{2\sqrt{2}} \right)^M. \quad (5.24)$$

Si se compara la expresión (5.10) con la expresión entre paréntesis en (5.24) vemos que la función $\Phi(\varphi)$ no tiene ceros cuando $\delta_1 a_{M,0} > 0$. Para $\delta_1 a_{M,0} < 0$ obtenemos $\Phi(\varphi^*) = 0$, cuando

$$Sn(\varphi^*) = -\delta_1 \delta_2 \left[-\left(1 - \frac{AM}{2}\right)/A \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad Cs(\varphi^*) = \left(1 - \frac{AM}{2}\right)^{-\frac{1}{M}},$$

$$\Phi'(\varphi^*) = -\frac{2}{\omega} \sqrt{-A} \left(1 - \frac{AM}{2}\right)^{\frac{2-M}{2M}} \neq 0.$$

Ahora haciendo uso del Teorema 14, obtenemos de inmediato las dos últimas afirmaciones del teorema. ■

5.2. Cuando las frecuencias del sistema lineal son no nulas e iguales

Sea la función Hamiltoniana

$$H = \frac{\delta}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \omega(q_1 p_2 - q_2 p_1) + \sum_{v=3}^{\infty} h_{v_1 v_2 v_3 v_4} q_1^{v_1} q_2^{v_2} p_1^{v_3} p_2^{v_4}. \quad (5.25)$$

La forma H_3 en (5.25) se anula completamente y la forma H_4 según el Teorema 29 (que denotaremos por H) se reduce a

$$H = \frac{\delta}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \omega(q_1 p_2 - q_2 p_1) + (p_1^2 + p_2^2)[k_{0202}(p_1^2 + p_2^2) + k_{0211}(q_1 p_2 - q_2 p_1) + k_{1111}(q_1^2 + q_2^2)] + H_5 + \dots \quad (5.26)$$

Teorema 32 (*A. G. Sokol'skii, 1974*) Si $k_{0202} > 0$, la posición de equilibrio es formalmente estable. Si $k_{0202} < 0$, la posición de equilibrio es inestable en el sentido de Liapunov.

Demostración. Para probar la estabilidad formal notamos que por medio de un número infinito de etapas de la transformación de Birkhoff (posiblemente divergente) se puede reducir la función de Hamilton a

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_1^2) + \omega(q_1 p_2 - q_2 p_1) + (p_1^2 + p_2^2)[k_{0202}(p_1^2 + p_2^2) + k_{0211}(q_1 p_2 - q_2 p_1) + k_{1111}(q_1^2 + q_2^2)] + \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3} h_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} (q_1^2 + q_2^2)^{\alpha_1} (p_1^2 + p_2^2)^{\alpha_2} (q_1 p_2 - q_2 p_1)^{\alpha_3} \quad (5.27)$$

Un sistema canónico con Hamiltoniano (5.27) tiene dos integrales formales $H = cte$ y $q_1 p_2 - q_2 p_1 = cte$. Consecuentemente la expresión $G \equiv H - \omega(q_1 p_2 - q_2 p_1)$ también será una integral formal del sistema Hamiltoniano. Pero desde que la función

$$G_2 + G_4 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_1^2) + (p_1^2 + p_2^2) [k_{0202}(p_1^2 + p_2^2) + k_{0211}(q_1 p_2 - q_2 p_1) + k_{1111}(q_1^2 + q_2^2)],$$

en la expansión

$$G = G_2 + G_4 + G_6 + \cdots + G_{2m} + \cdots ,$$

es una función definida positiva en las variables q_1, q_2, p_1, p_2 cuando $k_{0202} > 0$ ver Lema 19, por lo tanto, se sigue la estabilidad formal de la posición de equilibrio.

Para probar la inestabilidad hacemos uso teorema de inestabilidad de Liapunov. Como la función Liapunov tomamos la función signo variable

$$V = q_1 p_1 + q_2 p_2,$$

la cual verifica

$$\begin{aligned} \dot{V} &= V_{q_1} \dot{q}_1 + V_{q_2} \dot{q}_2 + V_{p_1} \dot{p}_1 + V_{p_2} \dot{p}_2 \\ &= p_1 H p_1 + p_2 H p_2 - q_1 H q_1 + q_2 H q_2 \\ &= -(q_1^2 + q_2^2) + 4k_{0202}(p_1^2 + p_2^2)^2 + 2k_{0211}(q_1 p_2 - q_2 p_1)(p_1^2 + p_2^2) + \mathcal{O}(q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2)^{5/2}. \end{aligned}$$

Así, la derivada de la función V , tomado con relación a las ecuaciones de movimiento con Hamiltoniano (5.26) está dada mediante la siguiente ecuación.

$$\frac{dV}{dt} = -(q_1^2 + q_2^2) + 4k_{0202}(p_1^2 + p_2^2)^2 + 2k_{0211}(q_1 p_2 - q_2 p_1)(p_1^2 + p_2^2) + \mathcal{O}(q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2)^{5/2},$$

es una función definida negativa en estas variables cuando $k_{0202} < 0$, ver Lema 19. La función V satisface toda la hipótesis del teorema de inestabilidad de Liapunov. Así el teorema queda demostrado. ■

Lema 19 *En el Teorema 32, se verifica*

1. Si $k_{0202} > 0$, entonces la función

$$V = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + (p_1^2 + p_2^2) [k_{0202}(p_1^2 + p_2^2) + k_{0211}(q_1 p_2 - q_2 p_1) + k_{1111}(q_1^2 + q_2^2)],$$

es definida positiva en una vecindad del origen.

2. Si $k_{0202} < 0$, entonces la función

$$\frac{dV}{dt} = -(q_1^2 + q_2^2) + 4k_{0202}(p_1^2 + p_2^2)^2 + 2k_{0211}(p_1^2 + p_2^2)(q_1 p_2 - q_2 p_1) + \cdots ,$$

es definida negativa en una vecindad del origen.

Demostración. Comenzamos por el item (1). Para una demostración de este hecho, considere los vectores $u = (q_1, q_2)$ y $v = (p_2, -p_1)$. Con esta notación la expresión $\frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + (p_1^2 + p_2^2) [k_{0202}(p_1^2 + p_2^2) + k_{0211}(q_1 p_2 - q_2 p_1) + k_{1111}(q_1^2 + q_2^2)]$, asume la forma $-\frac{1}{2}\|u\|^2 + k_{0202}\|v\|^4 + k_{0211}\|v\|^2 u.v + k_{1111}\|u\|^2\|v\|^2$. Sabemos que $-||u||\|v\| \leq u.v \leq ||u||\|v\|$. También notemos que $(\frac{1}{\sqrt{2}}\|u\| - \sqrt{k_{0202}}\|v\|)^2 \geq 0$. De esta última desigualdad se sigue que $\frac{1}{2}\|u\|^2 + k_{0202}\|v\|^4 \geq \sqrt{2k_{0202}}\|u\|\|v\|^2$. Para el caso $k_{0211} > 0$, $k_{1111} < 0$ (caso contrario es trivial), tenemos de estas desigualdades que:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + k_{0202}\|v\|^4 + k_{0211}\|v\|^2 u.v + k_{1111}\|u\|^2\|v\|^2 \\ &\geq \sqrt{2k_{0202}}\|u\|\|v\|^2 - k_{0211}\|u\|\|v\|^3 + k_{1111}\|u\|^2\|v\|^2 \\ &= \|u\|\|v\|^2(\sqrt{2k_{0202}} - k_{0211}\|v\| + k_{1111}\|u\|) \\ &> 0. \end{aligned}$$

en una vecindad del origen.

Para una demostración del item (2), considere los vectores $u = (q_1, q_2)$ y $v = (p_2, -p_1)$. Con esta notación la expresión $-(q_1^2 + q_2^2) + 4k_{0202}(p_1^2 + p_2^2)^2 + 2k_{0211}(p_1^2 + p_2^2)(q_1 p_2 - q_2 p_1)$ asume la forma $-\|u\|^2 + 4k_{0202}\|v\|^4 + 2k_{0211}\|v\|^2 u.v$. Sabemos que $-||u||\|v\| \leq u.v \leq ||u||\|v\|$. También notemos que $(\|u\| - \sqrt{-4k_{0202}}\|v\|)^2 \geq 0$. De esta última desigualdad se sigue que $\|u\|^2 - 4k_{0202}\|v\|^4 \geq 2\sqrt{-4k_{0202}}\|u\|\|v\|^2$. Para el caso $k_{0211} > 0$ (caso $k_{0211} < 0$ es análogo), tenemos de estas desigualdades que:

$$\begin{aligned} -\|u\|^2 + 4k_{0202}\|v\|^4 + 2k_{0211}\|v\|^2 u.v &= -\|u\|^2 + 4k_{0202}\|v\|^4 + 2k_{0211}\|v\|^2 u.v \\ &\leq -\|u\|^2 + 4k_{0202}\|v\|^4 + 2k_{0211}\|u\|\|v\|^3 \\ &\leq -2\|u\|\|v\|^2(\sqrt{-4k_{0202}} - k_{0211}\|v\|) \\ &< 0. \end{aligned}$$

en una vecindad del origen.

5.3. Estabilidad de un sistema Hamiltoniano caso límite

Debemos precisar que en el Teorema 32, se muestra solo la estabilidad formal para una solución de equilibrio de un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad. En esta sección de acuerdo a [16] presentamos una versión mejorada del Teorema 32 para la estabilidad de una solución de equilibrio en el sentido de Lyapunov.

Para este fin, introducimos los cuatro invariantes usuales (ver [13]) asociados con este

Hamiltoniano H , estos son:

$$\Gamma_1 = q_2 p_1 - q_1 p_2, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2), \quad \Gamma_3 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2), \quad \Gamma_4 = q_1 p_1 + q_2 p_2. \quad (5.28)$$

Luego, considere que el sistema Hamiltoniano no lineal tiene H_2 como parte cuadrática y según el Teorema 29 ha sido normalizado hasta términos de cuarto orden. Por lo tanto, de acuerdo a (5.28) el Hamiltoniano (5.26) se reduce a

$$H = \omega \Gamma_1 + \delta \Gamma_2 + \frac{1}{2}(a \Gamma_1 \Gamma_2 + 2b \Gamma_1 \Gamma_2 + c \Gamma_3^2) + \dots, \quad (5.29)$$

donde $a = 2k_{0211}$, $b = 2k_{1111}$, $c = 4k_{0202}$ y los puntos suspensivos representan términos que son al menos de quinto orden. Con el objetivo de reducir aún más el Hamiltoniano (5.29), use el cambio de coordenadas simpléctico con multiplicador ϵ^{-3} , introducido por Meyer y Schmidt en [14].

$$\begin{aligned} q_1 &\rightarrow \epsilon^2 q_1, & q_2 &\rightarrow \epsilon^2 q_2, \\ p_1 &\rightarrow \epsilon p_1, & p_2 &\rightarrow \epsilon p_2, \end{aligned} \quad (5.30)$$

así, el Hamiltoniano (5.29) resulta

$$H = \omega \Gamma_1 + \epsilon(\delta \Gamma_2 + \frac{1}{2}c \Gamma_3^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (5.31)$$

Debemos tener en cuenta que nuestro problema es una pequeña perturbación del Hamiltoniano Γ_1 que el lector reconocerá como el momento angular, donde $q \in \mathbb{R}^2$ representa las coordenadas y $p \in \mathbb{R}^2$ representa su momento conjugado. En lo que sigue se denotará por Γ , es decir,

$$\Gamma \equiv \Gamma_1 = q_2 p_1 - q_1 p_2. \quad (5.32)$$

No obstante, como estamos considerando una perturbación de Γ , introducimos el siguiente cambio lineal simpléctico de coordenadas

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 - v_2), & p_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u_2 + v_1), \\ q_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u_2 - v_1), & p_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + v_2), \end{aligned} \quad (5.33)$$

de modo que el Hamiltoniano (5.32) resulta

$$\Gamma \equiv \Gamma(u, v) = \frac{1}{2}(-u_1^2 + u_2^2 - v_1^2 + v_2^2), \quad (5.34)$$

así, obtenemos que el Hamiltoniano (5.32) es equivalente a la parte cuadrática de un Hamiltoniano con resonancia semisimple $1 : -1$.

Notemos que las ecuaciones de movimiento del Hamiltoniano (5.34) en el espacio uv vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= -v_1, & \dot{u}_2 &= v_2, \\ \dot{v}_1 &= u_1, & \dot{v}_2 &= -u_2,\end{aligned}$$

que representa las ecuaciones de dos osciladores armónicos de periodo 2π .

En nuestro afán de analizar la estabilidad del Hamiltoniano en estudio, vamos a construir una aplicación sección de Poincaré para el flujo. Comenzamos por transformar el Hamiltoniano (5.31) usando el cambio de coordenada definidas en la ecuación (5.33) con la finalidad de enfatizar la resonancia subyacente $1 : -1$. Después de algunos cálculos, obtenemos como resultado el siguiente Hamiltoniano

$$\begin{aligned}H &= \frac{\omega}{2}(-u_1^2 + u_2^2 - v_1^2 + v_2^2) \\ &+ \frac{\epsilon}{32}(8\delta(u_2 - v_1)^2 + (u_1 - v_2)^2 + c((u_2 + v_1)^2 + (u_1 + v_2)^2)^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}\tag{5.35}$$

Luego se introduce las coordenadas estándar de acción-ángulo dadas por

$$\begin{aligned}u_1 &= \sqrt{2r_1} \cos \tilde{\theta}_1, & v_1 &= \sqrt{2r_1} \sin \tilde{\theta}_1, \\ u_2 &= \sqrt{2r_2} \cos \tilde{\theta}_2, & v_2 &= \sqrt{2r_2} \sin \tilde{\theta}_2,\end{aligned}$$

(note que $du_1 \wedge dv_1 + du_2 \wedge dv_2 = dr_1 \wedge d\tilde{\theta}_1 + dr_2 \wedge d\tilde{\theta}_2$) para llegar a

$$\begin{aligned}H &= \omega(r_2 - r_1) \\ &+ \frac{\epsilon}{8}(4\delta(r_1 + r_2) + c(r_1^2 + 4r_1r_2 + r_2^2) - 2cr_1r_2 \cos(2(\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2))) \\ &+ 4\sqrt{r_1r_2}(-2\delta + c(r_1 + r_2)) \sin(\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}\tag{5.36}$$

Luego hacemos el siguiente cambio de coordenadas simpléticas:

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{1}{2}(I_1 + I_2), & r_2 &= \frac{1}{2}(-I_1 + I_2), \\ \tilde{\theta}_1 &= \theta_1 + \theta_2, & \tilde{\theta}_2 &= -\theta_1 + \theta_2,\end{aligned}$$

de modo que obtenemos el siguiente Hamiltoniano

$$H = -\omega I_1 + \frac{\epsilon}{16} H_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2),\tag{5.37}$$

donde

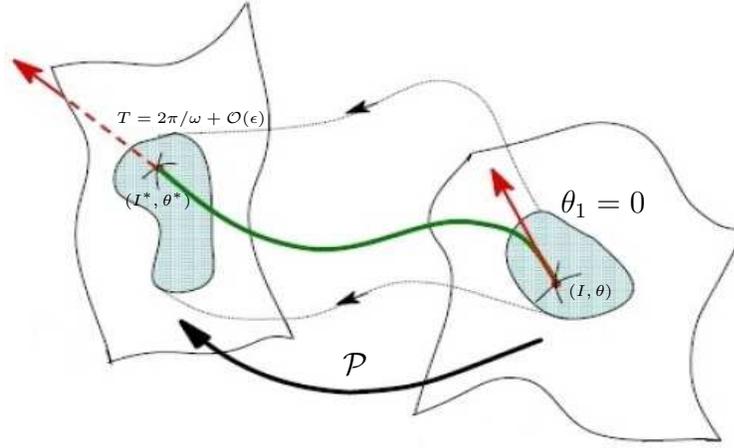
$$H_1 = -cI_1^2 + 8\delta I_2 + 3cI_2^2 + c(I_1^2 - I_2^2) \cos 4\theta_2 + 4(cI_2 - 2\delta)\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin 2\theta_2.\tag{5.38}$$

Note que $I_1 = -\Gamma$ y $I_2 \geq 0$.

Así, las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{I}_2 &= \frac{\epsilon}{16} \frac{\partial H_1}{\partial \theta_2} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{\theta}_1 &= \omega - \frac{\epsilon}{16} \frac{\partial H_1}{\partial I_1} + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{\theta}_2 &= -\frac{\epsilon}{16} \frac{\partial H_1}{\partial I_2} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Y por fin, ahora calculemos la aplicación sección de Poincaré en el nivel de energía $H = -\omega g$ donde g es un parámetro. En este nivel $I_1 = g + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.



Tome la sección transversal para $\theta_1 = 0$ y use I_2, θ_2 como coordenadas en esta sección. Por razones éticas dejamos el subíndice 2 en lo que sigue. El tiempo de primer retorno es $T = 2\pi/\omega + \mathcal{O}(\epsilon)$, por lo tanto, la aplicación sección es $\mathcal{P} : (I, \theta) \rightarrow (I^*, \theta^*)$ con

$$\begin{aligned} I^* &= I + \nu \frac{\partial L}{\partial \theta} + \mathcal{O}(\nu^2), \\ \theta^* &= \theta - \nu \frac{\partial L}{\partial I} + \mathcal{O}(\nu^2), \end{aligned} \quad (5.40)$$

donde $\nu = \epsilon\pi/(8\omega)$ y

$$L = 8\delta I + 3cI^2 + c(g^2 - I^2) \cos 4\theta + 4(cI - 2\delta)\sqrt{I^2 - g^2} \sin 2\theta. \quad (5.41)$$

En este contexto, trataremos a L como una función generadora para \mathcal{P} . Note que L es π -periódica en θ . Tratamos a ν muy pequeño es equivalente a tratar a ϵ pequeño.

La aplicación \mathcal{P} es un difeomorfismo simpléctico (simplectomorfismo) de una forma especial, ver [16] Apéndice A. Hemos escrito este difeomorfismo en esta forma para ilustrar su conexión con la siguiente ecuación diferencial Hamiltoniana

$$\frac{dI}{d\nu} = \frac{\partial L}{\partial \theta}, \quad \frac{d\theta}{d\nu} = -\frac{\partial L}{\partial I}. \quad (5.42)$$

Para ν fija las soluciones de estas ecuaciones tienen la forma (5.40) con posibles términos $\mathcal{O}(\nu^2)$ diferentes. Dado que, en general, es más fácil cambiar variables en una ecuación diferencial que en un difeomorfismo, explotaremos esta forma de ecuaciones.

En el siguiente teorema, por fin presentamos el resultado principal de esta sección para la estabilidad.

Teorema 33 *Si $\delta c > 0$ el origen es estable en el sentido de Lyapunov para el sistema cuyo Hamiltoniano es (5.29).*

Demostración. La demostración del teorema tiene dos etapas, comenzamos el análisis de la estabilidad en el nivel de energía $H = 0$. Considerando el flujo sobre el nivel de energía $H = 0$ y haciendo $g = 0$ se tiene que L en (5.41) se reduce a

$$L_0 = 8\delta I(1 - \sin 2\theta) + cI^2(3 - \cos 4\theta + 4 \sin 2\theta). \quad (5.43)$$

En este caso $I = 0$ es un punto fijo del difeomorfismo \mathcal{P} en (5.40) y un punto de equilibrio para (5.41).

Se verifica que L_0 en (5.43) puede ser escrito como

$$L_0 = 16\delta I \sin^2(\theta - \pi/4) + 8cI^2 \sin^4(\theta + \pi/4), \quad (5.44)$$

entonces introducimos coordenadas q y p de modo que

$$16\delta I \sin^2(\theta - \pi/4) = Aq^2, \quad 8cI^2 \sin^4(\theta + \pi/4) = Bp^4,$$

donde $A = 8\delta$ y $B = 2c$. Es decir, definamos el cambio de coordenadas simpléctico:

$$I = \frac{1}{2}(q^2 + p^2), \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{p + q}{p - q} \right),$$

cuya inversa es

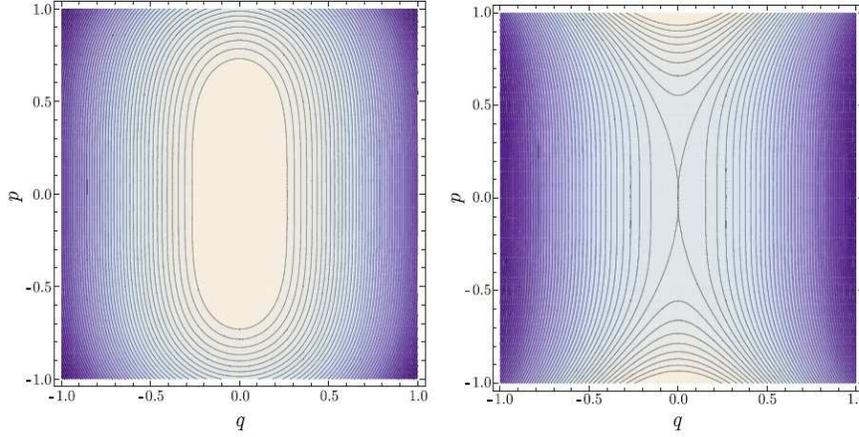
$$q = \pm\sqrt{I}(\cos \theta - \sin \theta), \quad p = \pm\sqrt{I}(\cos \theta + \sin \theta).$$

Aplicando este cambio a L_0 resulta que

$$L_0 = 8\delta q^2 + 2cp^4. \quad (5.45)$$

Los términos dentro de $\mathcal{O}(\nu^2)$ de (5.40) son funciones analíticas en q y p ; de hecho, son polinomios en las dos coordenadas.

Además, para δc positivo aparece un centro no lineal y la gráfica para δc negativo parece una silla de montar no lineal ver la siguiente figura.



Nos concentramos en el caso $\delta c > 0$ para demostrar la estabilidad del punto fijo en el origen en \mathbb{R}^2 cuando L_0 es (5.43). Escalamos q y p de la siguiente manera:

$$q \rightarrow \frac{q}{32\delta\sqrt{\delta c}}, \quad p \rightarrow \frac{p}{4\sqrt{\delta c}},$$

que es un cambio sinplético con multiplicador $(128c)^{-1}$ así que

$$L_0 = q^2 + p^4. \quad (5.46)$$

Introduzca un tipo de coordenadas polares (ρ, α) como en [12]. En particular, define

$$q = \rho^2 \eta(\alpha), \quad p = \rho \xi(\alpha), \quad (5.47)$$

donde $\xi(\alpha)$ es la función lemniscata sinusoidal y $\eta = d\xi/(d\alpha)$ ver [16] Apéndice B.

Como ρ y α no son canónicamente conjugados cambiamos las variables usando las ideas en [16] Apéndice A, es decir, considerando la ecuación diferencial asociada. Comienza con

$$\frac{dq}{d\nu} = 4p^3, \quad \frac{dp}{d\nu} = -2q, \quad \frac{d\xi}{d\alpha} = \eta, \quad \frac{d\eta}{d\alpha} = -2\xi^3.$$

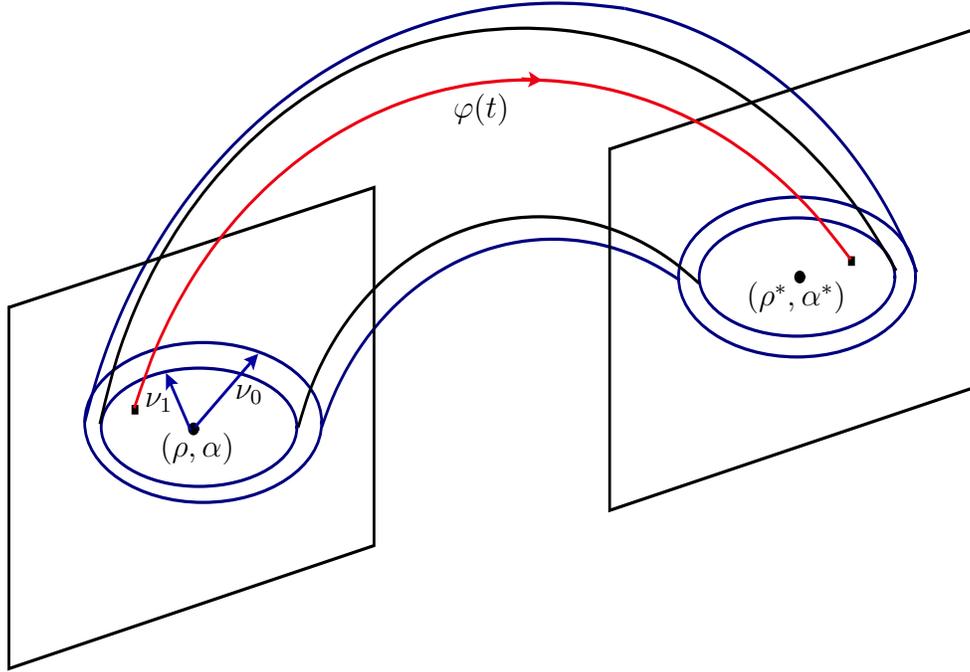
Sustituyendo el cambio (5.47) en las ecuaciones por las derivadas de q y p anteriores se obtiene:

$$2\rho \frac{d\rho}{d\nu} \eta - 2\rho^2 \xi^3 \frac{d\alpha}{d\nu} = 4\rho^3 \xi^3, \quad \frac{d\rho}{d\nu} \xi + \rho \eta \frac{d\alpha}{d\nu} = -2\rho^2 \eta.$$

Multiplicando la primera ecuación por η y la segunda por $2\rho\xi^3$ y sumando las ecuaciones resultantes $d\rho/(d\nu) = 0$. Esto implica $d\alpha/(d\nu) = -2\rho$. Al integrar estas ecuaciones, se obtiene que la aplicación sección $\mathcal{P} : (\rho, \alpha) \rightarrow (\rho^*, \alpha^*)$ es:

$$\begin{aligned} \rho^* &= \rho + \mathcal{O}(\nu^2), \\ \alpha^* &= \alpha - 2\nu\rho + \mathcal{O}(\nu^2). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Esta aplicación periódica en α con el período 2κ (ya que L era periódica en θ con período π). Además, está definido en $\{(\rho, \alpha) | \rho \geq 0, \alpha \in [0, 2\kappa)\}$ y es analítica en este dominio. La aplicación es una aplicación twist ya que el coeficiente de ρ en α^* no se anula. Como esta aplicación proviene de una aplicación que preserva área, también satisface la hipótesis de intersección del círculo, por lo que se aplica el Teorema 11, correspondiente al teorema de la curva invariante de Moser. Para fijar ideas, veamos la siguiente figura.



En particular, existe $\nu_0 > 0$ tal que cuando $\nu = \nu_0$ para cualquier $\beta > 0$ la aplicación \mathcal{P} tiene una curva invariante de la forma $\rho = \tilde{\rho}(\alpha) = \tilde{\rho}(\alpha + 2\kappa) > 0$ con $\tilde{\rho}(\alpha) \leq \beta$. (De hecho, hay infinitas curvas invariantes). Esto muestra que el punto fijo en el origen de \mathbb{R}^2 para \mathcal{P} es estable cuando $\nu = \nu_0$. Sea ϵ_0 corresponde a ν_0 , es decir, $\nu_0 = \epsilon_0\pi/(8\omega)$. La estabilidad para \mathcal{P} a su vez implica que el origen de \mathbb{R}^4 es estable para las ecuaciones de movimiento (5.39), cuando $\epsilon = \epsilon_0$ y $H = 0$ o $g = 0$. Para ϵ_0 fijo la escala (5.30) es invertible. Entonces todas las transformaciones hasta este punto son invertibles y así el origen de \mathbb{R}^4 es estable para (5.29) en el nivel de energía $H = 0$ y además está rodeado por 2-toros invariantes que se reconstruyen a partir de las curvas invariantes de la aplicación de Poincaré dado en (5.40).

Finalmente, en la segunda etapa demostraremos la estabilidad cuando $H \neq 0$, en este caso (5.29) tienen dos familias de soluciones periódicas elípticas, una para H positivo y una para H negativo, que están cerca del origen para ν pequeña. Estas son las soluciones Buchanan [1] que aparecen como puntos fijos de la aplicación \mathcal{P} periódica dado en (5.40). En [16] Apéndice C incluye una prueba de su existencia que ha sido adaptada de la prueba de la bifurcación Hamiltoniana-Hopf que se encuentra en [13, 14]. Eso significa que la aplicación que cambia

el origen de nuestro sistema de coordenadas al punto fijo analítico. Por lo tanto, la aplicación periódica será analítica en coordenadas rectangulares o tiene el carácter d'Alembert [13] en variables acción-ángulo.

Para todo g , la aplicación sección de Poincaré \mathcal{P} tiene la forma (5.40) donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -4c(I^2 - g^2) \sin(4\theta) + 8(2\delta - cI)(I^2 - g^2)^{1/2} \cos(2\theta), \\ \frac{\partial L}{\partial I} &= 8\delta + 2cI(3 - \cos(4\theta)) + 4(c(I^2 - g^2)^{1/2} + I(cI - 2\delta)(I^2 - g^2)^{-1/2}) \sin(2\theta),\end{aligned}\tag{5.49}$$

de donde se deduce que \mathcal{P} tiene un punto fijo, (I_0, θ_0) , de la forma

$$I_0 = \frac{((2|\delta|)^{2/3} + |gc|(2/3))|g|^{2/3}}{2^{4/3}(\delta c)^{1/3}} + \mathcal{O}(\nu), \quad \theta_0 = \frac{\pi}{4} + \mathcal{O}(\nu),\tag{5.50}$$

siempre que $\delta c > 0$ y $0 < |g| < 2(\delta/c)$. Como $g \rightarrow 0$, el punto (I_0, θ_0) tiende al origen de \mathbb{R}^2 . Según [16] Proposición 1 Apéndice C, este punto fijo es linealmente estable y mostramos aquí que hay curvas invariantes que lo rodean, al menos para g muy pequeño. Para ese fin, $g = \nu^{3/2}d$ entonces $L = L_0$ e $I_0 = \mathcal{O}(\nu)$ cuando $|d| \leq 1$. Esto nos coloca en el caso $H = 0$ y uno repite la prueba realizada en la primera etapa. De ahí, para todo $|d| \leq 1$ y un ν_0 fijo, el punto (I_0, θ_0) está rodeado por curvas invariantes, por lo que es un punto fijo estable para la aplicación sección. Tenga en cuenta que el caso $g = 0$ o $H = 0$ está incluido. Reconstruyendo el flujo de la ecuación (5.39) y fijándose $\epsilon = \epsilon_0$, las soluciones periódicas Buchanan [1] están rodeadas por 2- toros invariantes para ϵ_0 pequeño, por lo tanto son soluciones periódicas estables orbitalmente para (5.29) en el nivel de energía $H = -\omega g$, con g pequeño. Como estas soluciones periódicas rodean el origen de \mathbb{R}^4 , esto proporciona una vecindad completa del origen llena de 2- toros invariantes, por lo que este es un punto estable para el Hamiltoniano (5.29). Esto completa la demostración del teorema. ■

5.4. Aplicaciones

A continuación presentamos algunas aplicaciones a nuestros resultados obtenidos con respecto a la estabilidad de soluciones de equilibrio de un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad.

5.4.1. Aplicación al problema restringido circular de los tres cuerpos

En esta sección, damos condiciones de estabilidad para el equilibrio L_4 de la función Hamiltoniana correspondiente al problema restringido circular de los tres cuerpos, caso planar.

Aplicación 4 *Caso donde una frecuencia es nula y una no nula.*

De acuerdo a la observación 2 se obtiene que

$$\begin{aligned} a_{3,0} &= h_{0030}, \\ a_{4,0} &= h_{0040} - \frac{1}{2}\delta_1 h_{1020}^2 + \frac{3}{2}\delta_1 h_{2010} h_{0030} - \frac{1}{\omega}\delta_2 h_{0120} h_{0021} \\ &= \frac{81}{104}(13 - 4\sqrt{3}) > 0. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Además, de acuerdo a la aplicación 1 tenemos que $\delta_2 = 1$ y $\delta_1 = -1$. Así, se obtiene que $\delta_1 a_{4,0} < 0$. Por lo tanto, según el Teorema 31 se sigue que la solución de equilibrio L_4 es inestable cuando $\mu = 0$.

Aplicación 5 *Caso donde las frecuencias son no nulas e iguales.*

De acuerdo al Lema 18 se verifica $k_{0202} = \frac{59}{864}$ y además, según el Teorema 21 tenemos que $\delta = 1$. De donde se sigue que $k_{0202} > 0$ y $\delta c = 4\delta k_{0202} > 0$. Entonces se tiene las condiciones de estabilidad para la solución de equilibrio L_4 , cuando $\mu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{69}}{9}\right)$.

1. Según Sokol'skii, como $k_{0202} > 0$, se sigue que la solución de equilibrio L_4 es formalmente estable.
2. Según Meyer - Palacián - Yanguas, como $\delta c = 4\delta k_{0202} > 0$, se sigue que la solución de equilibrio L_4 es estable en el sentido de Lyapunov.

Capítulo 6

Formas normales para sistemas Hamiltonianos con tres grados de libertad cuando la parte lineal es no diagonalizable

En este capítulo, el objetivo es extender los resultados obtenidos en el Capítulo 2 al caso $n = 3$ en algunas situaciones. Debido a que en la literatura no hay evidencias de formas normales para sistemas Hamiltonianos con tres grados de libertad, cuando la matriz asociada al sistema linealizado no es diagonalizable. En esta tesis presentamos algoritmos para obtener las formas normales en tal situación, la mayoría de nuestros resultados obtenidos son completamente originales.

Aquí, vamos a obtener una transformación simpléctica tal que el Hamiltoniano H_2 descrito en la ecuación (2.17) asuma una forma particular, con menos factores que el Hamiltoniano original. Para lograr nuestro objetivo usamos las mismas ideas que en el caso dos grados de libertad Capítulo 2, así, vamos a dar algoritmos para normalizar el Hamiltoniano (2.17) con tres grados de libertad. Comenzamos nuestro análisis en el caso donde todas las frecuencias son nulas, es decir, cuando $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$, luego hacemos el análisis del caso donde dos frecuencias son nulas, esto es, cuando $\omega_1 = \omega_2 = 0$ y $\omega_3 \neq 0$, seguidamente analizamos el caso donde una frecuencia es nula, es decir, cuando $\omega_1 = 0$ y $\omega = \omega_2 = \omega_3$ (o $\omega_2 \neq \omega_3 \neq 0$), y finalmente analizamos el caso donde las frecuencias son no nulas y con multiplicidad, esto es, $\omega_1 \neq 0$ y $\omega = \omega_2 = \omega_3$ con $\omega \neq \omega_1$. En este último caso, estudiamos también la estabilidad de soluciones de equilibrio en un nivel de energía fijo.

6.1. Análisis del caso donde todas las frecuencias son nulas y la matriz no es diagonalizable

Veremos que mediante un cambio de variable adecuado, la función Hamiltoniana H_2 definido en (2.17) se reduce a una forma más simple. Para lograr nuestro objetivo, suponga que la ecuación característica (3.2) tiene todas sus raíces nulas, la matriz no es diagonalizable y sea $H_2 = H_2(x, y)$ la función cuadrática dada en (2.17), definida por

$$\begin{aligned}
 H_2 = & h_{200000}x_1^2 + h_{020000}x_2^2 + h_{002000}x_3^2 + h_{000200}y_1^2 + h_{000020}y_2^2 + h_{000002}y_3^2 + \\
 & h_{110000}x_1x_2 + h_{101000}x_1x_3 + h_{100100}x_1y_1 + h_{100010}x_1y_2 + h_{100001}x_1y_3 + \\
 & h_{011000}x_2x_3 + h_{010100}x_2y_1 + h_{010010}x_2y_2 + h_{010001}x_2y_3 + h_{001100}x_3y_1 + \\
 & h_{001010}x_3y_2 + h_{001001}x_3y_3 + h_{000110}y_1y_2 + h_{000101}y_1y_3 + h_{000011}y_2y_3.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Analizaremos la normalización del sistema Hamiltoniano, correspondiente a la función Hamiltoniana H_2 definida en (6.1).

Para este fin, considere el sistema linealizado (2.18) con tres grados de libertad. El problema de normalización se reduce en encontrar una matriz simpléctica no degenerada y real N , tal que la transformación

$$z = Ny, \quad y^T = (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3), \tag{6.2}$$

reduce al sistema lineal a la forma

$$\dot{y} = JS^*y. \tag{6.3}$$

A continuación, veremos que en este caso el Hamiltoniano (6.1) admite siete posibles formas particulares, este hecho depende del rango de la matriz S , que denotaremos por $rg(S)$ y de la cantidad de formas canónicas de Jordan que la matriz S admite. En los siguientes siete teoremas, vamos a describir el algoritmo de construcción para la normalización de la función Hamiltoniana H_2 en (6.1), para cada caso, seguimos las mismas ideas usadas en los Teoremas 17-19, caso dos grados de libertad. Comenzamos nuestro análisis con el caso $rg(S) = 1$ el cual es original, dado que no ha sido estudiado anteriormente por otros autores, los detalles se muestran en el siguiente teorema.

Teorema 34 *Suponga que todo los valores propios de $A = JS$ son nulos y la matriz A no es diagonalizable. Si $rg(S) = 1$, entonces la forma normal para el Hamiltoniano en (6.1) es*

$$K_2 = \frac{1}{2}\delta p_1^2,$$

donde $\delta = \pm 1$.

Demostración. Dado que $rg(S) = 1$ existen vectores linealmente independientes $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ en \mathbb{R}^6 tal que

$$Aa_1 = 0, \quad Aa_2 = a_1, \quad Aa_3 = 0, \quad Aa_4 = 0, \quad Aa_5 = 0, \quad Aa_6 = 0. \quad (6.4)$$

A continuación, construiremos una matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$ que reduce a la matriz JS en la forma JS^* , esto es,

$$JSN = NJS^* \Leftrightarrow N^{-1}JSN = JS^*, \quad (6.5)$$

así, la ecuación (6.5) existe, si y solo si, JS es semejante a JS^* y además, N debe ser simpléctica, es decir, debe satisfacer

$$N^T JN = J. \quad (6.6)$$

Sea G una forma normal de Jordan para las matrices JS y JS^* . Claramente la matriz que reduce a JS en su forma normal de Jordan, en general, no es simpléctica. Sin embargo, el producto de matrices no simplécticas puede ser simpléctica, entonces buscamos la matriz de normalización de la forma $N = A_1 B_1$.

Aquí, A_1 es una matriz arbitraria que reduce a la matriz JS a su forma normal de Jordan, es decir, es una solución no degenerada de la ecuación $JS A_1 = A_1 G$, cuyas columnas están compuestas por los vectores propios y vectores generalizados $a_j, j = 1, \dots, 6$ correspondientes al valor propio nulo de la matriz JS .

La matriz $B_1 = C^{-1}$, donde la matriz C reduce a la matriz JS^* en su forma normal de Jordan G , es decir,

$$JS^* C = C G \Leftrightarrow JS^* = C G C^{-1} = B_1^{-1} G B_1. \quad (6.7)$$

Denotemos por c_1 al vector propio correspondiente al valor propio nulo de la matriz JS^* y por c_2, \dots, c_6 a los vectores propios generalizados, donde

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, la matriz C es de la forma $C = col(c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6)$, con $c_j, j = 1, \dots, 6$

linealmente independientes. Se puede verificar que la matriz C es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & 0 & c_{43} & 0 & 0 \\ 0 & \delta c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{25} & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & c_{26} & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

con $c_{11}, c_{32}, c_{43}, c_{55}, c_{66} \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{25}, c_{26} \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, como $B_1 = C^{-1}$ se tiene que

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 \delta & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_5 & b_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_7 & b_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_9 & 0 & b_{10} \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

donde $b_1 = \frac{1}{c_{11}}, b_2 = -\frac{c_{21}\delta}{c_{11}^2}, b_3 = \frac{1}{c_{32}}, b_4 = -\frac{\delta c_{22}}{c_{11}c_{32}}, b_5 = \frac{1}{c_{43}}, b_6 = -\frac{c_{23}\delta}{c_{11}c_{43}}, b_7 = -\frac{c_{24}\delta}{c_{11}c_{55}}, b_8 = \frac{1}{c_{55}}, b_9 = -\frac{c_{25}}{c_{11}c_{66}}$ y $b_{10} = \frac{1}{c_{66}}$. Notemos que $b_j, j = 1, \dots, 10$ son número reales arbitrarios con $b_1, b_3, b_5, b_8, b_{10} \neq 0$, debido a que $c_{11}, c_{32}, c_{43}, c_{55}, c_{66} \neq 0$.

Además, de la ecuación (6.6) obtenemos,

$$J = N^T J N = (A_1 B_1)^T J A_1 B_1 = B_1^T (A_1^T J A_1) B_1 = B_1^T F B_1, \quad (6.10)$$

donde $F = A_1^T J A_1$ es una matriz antisimétrica, cuyas entradas son de la forma $f_{kl} = \{a_k, a_l\}$. De hecho, la matriz F satisface

$$F^T = (A_1^T J A_1)^T = A_1^T J^T A_1 = -A_1^T J A_1 = -F.$$

También observe de (6.10) que $F = (B_1^{-1})^T J B_1^{-1} = C^T J C$, es decir,

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{11}\delta & c_{24} & c_{25} \\ 0 & c_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & 0 & c_{43} & 0 & 0 \\ 0 & c_{11}\delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{24} & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & c_{25} & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_{12} & 0 & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ 0 & -f_{23} & 0 & 0 & f_{35} & 0 \\ 0 & -f_{24} & 0 & 0 & 0 & f_{46} \\ 0 & -f_{25} & -f_{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_{26} & 0 & -f_{46} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

con $f_{12} = \delta c_{11}^2$, $f_{23} = -c_{32}c_{24}$, $f_{24} = -c_{43}c_{25}$, $f_{25} = c_{55}c_{22}$, $f_{26} = c_{66}c_{23}$, $f_{35} = c_{32}c_{55}$ y $f_{46} = c_{43}c_{66}$. Note que $f_{12}, f_{35}, f_{46} \neq 0$, dado que $c_{11}, c_{32}, c_{43}, c_{55}, c_{66} \neq 0$ y además, $f_{12}^2 f_{35}^2 f_{46}^2 = \det(F) = \det(A_1^T J A_1) = \det^2(A_1) \neq 0$.

Luego, como $A_1 = \text{col}(a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6)$, definamos la matriz A_1 como

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{63} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{64} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{65} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{pmatrix},$$

y dado que $F = A_1^T J A_1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{63} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{64} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{65} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \{a_1, a_2\} & \{a_1, a_3\} & \{a_1, a_4\} & \{a_1, a_5\} & \{a_1, a_6\} \\ \{a_2, a_1\} & 0 & \{a_2, a_3\} & \{a_2, a_4\} & \{a_2, a_5\} & \{a_2, a_6\} \\ \{a_3, a_1\} & \{a_3, a_2\} & 0 & \{a_3, a_4\} & \{a_3, a_5\} & \{a_3, a_6\} \\ \{a_4, a_1\} & \{a_4, a_2\} & \{a_4, a_3\} & 0 & \{a_4, a_5\} & \{a_4, a_6\} \\ \{a_5, a_1\} & \{a_5, a_2\} & \{a_5, a_3\} & \{a_5, a_4\} & 0 & \{a_5, a_6\} \\ \{a_6, a_1\} & \{a_6, a_2\} & \{a_6, a_3\} & \{a_6, a_4\} & \{a_6, a_5\} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Comparando (6.11) y (6.12), para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, se tiene las siguientes condiciones: $\{a_i, a_1\} = 0$, $i \neq 2$; $\{a_i, a_2\} = 0$, $i = 2$; $\{a_i, a_3\} = 0$, $i = 1, 3, 4, 6$; $\{a_i, a_4\} = 0$, $i = 1, 3, 4, 5$; $\{a_i, a_5\} = 0$, $i = 1, 4, 5, 6$; $\{a_i, a_6\} = 0$, $i = 1, 3, 5, 6$; $\{a_1, a_2\} = f_{12} \neq 0$; $\{a_2, a_3\} = f_{23}$; $\{a_2, a_4\} = f_{24}$; $\{a_2, a_5\} = f_{25}$; $\{a_2, a_6\} = f_{26}$; $\{a_3, a_5\} = f_{35} \neq 0$ y $\{a_4, a_6\} = f_{46} \neq 0$.

Ahora, calculando la ecuación $J = B_1^T F B_1$, determinamos algunas condiciones para las constantes b_j , $j = 1, \dots, 10$, esto es,

$$B_1^T F B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_1^2 f_{12} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{24} & b_3 b_8 f_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{34} & 0 & b_{10} b_5 f_{46} \\ -b_1^2 f_{12} \delta & -\beta_{24} & -\beta_{34} & 0 & \beta_{45} & \beta_{46} \\ 0 & -b_3 b_8 f_{35} & 0 & -\beta_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{10} b_5 f_{46} & -\beta_{46} & 0 & 0 \end{pmatrix} = J,$$

con $\beta_{24} = b_3(b_7 f_{35} - b_1 f_{23} \delta)$, $\beta_{34} = b_5(b_9 f_{46} - b_1 f_{24} \delta)$, $\beta_{45} = b_8(b_4 f_{35} + b_1 f_{25} \delta)$ y $\beta_{46} = b_{10}(b_6 f_{46} + b_1 f_{26} \delta)$.

Note que la matriz $B_1^T F B_1$ debe ser J , así, basta considerar

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, \quad b_3 b_8 = \frac{1}{\{a_3, a_5\}}, \quad b_5 b_{10} = \frac{1}{\{a_4, a_6\}}, \quad \delta = \text{sgn}(\{a_1, a_2\}), \tag{6.13}$$

y además, se debe verificar que $\beta_{24} = \beta_{34} = \beta_{45} = \beta_{46} = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} b_3(b_7 f_{35} - b_1 f_{23} \delta) &= 0, & b_5(b_9 f_{46} - b_1 f_{24} \delta) &= 0, \\ b_8(b_4 f_{35} + b_1 f_{25} \delta) &= 0, & b_{10}(b_6 f_{46} + b_1 f_{26} \delta) &= 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Como buscamos una forma lo más simple posible para la matriz B_1 , sin pérdida de generalidad, hacemos $b_2 = 0$ y en (6.13) podemos considerar $b_8 = b_{10} = 1$, así obtenemos

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, \quad b_3 = \frac{1}{\{a_3, a_5\}}, \quad b_5 = \frac{1}{\{a_4, a_6\}}, \quad \delta = \text{sgn}(\{a_1, a_2\}). \quad (6.15)$$

Además, como $b_3, b_5 \neq 0$ de (6.14), se sigue que

$$b_4 = -\frac{b_1 \delta f_{25}}{f_{35}}, \quad b_6 = -\frac{b_1 \delta f_{26}}{f_{46}}, \quad b_7 = \frac{b_1 \delta f_{23}}{f_{35}} \quad \text{y} \quad b_9 = \frac{b_1 \delta f_{24}}{f_{46}}. \quad (6.16)$$

A partir de las restricciones $b_2 = 0$, $b_8 = b_{10} = 1$ y de las ecuaciones obtenidas en (6.15) y (6.16), tenemos la expresión para la matriz N como

$$N = [b_1 a_1 \quad b_3 a_3 \quad b_5 a_4 \quad \delta b_1 a_2 + b_4 a_3 + b_6 a_4 + b_7 a_5 + b_9 a_6 \quad a_5 \quad a_6]. \quad (6.17)$$

De manera equivalente a (6.17), la matriz N puede ser expresada como

$$N = \begin{pmatrix} b_1 a_{11} & b_3 a_{31} & b_5 a_{41} & \delta b_1 a_{21} + b_4 a_{31} + b_6 a_{41} + b_7 a_{51} + b_9 a_{61} & a_{51} & a_{61} \\ b_1 a_{12} & b_3 a_{32} & b_5 a_{42} & \delta b_1 a_{22} + b_4 a_{32} + b_6 a_{42} + b_7 a_{52} + b_9 a_{62} & a_{52} & a_{62} \\ b_1 a_{13} & b_3 a_{33} & b_5 a_{43} & \delta b_1 a_{23} + b_4 a_{33} + b_6 a_{43} + b_7 a_{53} + b_9 a_{63} & a_{53} & a_{63} \\ b_1 a_{14} & b_3 a_{34} & b_5 a_{44} & \delta b_1 a_{24} + b_4 a_{34} + b_6 a_{44} + b_7 a_{54} + b_9 a_{64} & a_{54} & a_{64} \\ b_1 a_{15} & b_3 a_{35} & b_5 a_{45} & \delta b_1 a_{25} + b_4 a_{35} + b_6 a_{45} + b_7 a_{55} + b_9 a_{65} & a_{55} & a_{65} \\ b_1 a_{16} & b_3 a_{36} & b_5 a_{46} & \delta b_1 a_{26} + b_4 a_{36} + b_6 a_{46} + b_7 a_{56} + b_9 a_{66} & a_{56} & a_{66} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es simpléctica con

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, & b_3 &= \frac{1}{\{a_3, a_5\}}, & b_5 &= \frac{1}{\{a_4, a_6\}}, & \delta &= \text{sgn}(\{a_1, a_2\}), \\ b_4 &= -\frac{b_1 \delta f_{25}}{f_{35}}, & b_6 &= -\frac{b_1 \delta f_{26}}{f_{46}}, & b_7 &= \frac{b_1 \delta f_{23}}{f_{35}} & \text{y} & b_9 = \frac{b_1 \delta f_{24}}{f_{46}}. \end{aligned}$$

Además, usando el hecho de que $rg(S) = 2$ en la ecuación (6.4), sabemos que la matriz de normalización JS^* está dada por

$$\begin{aligned} JS^* &= [A(b_1 a_1) \quad A(b_3 a_3) \quad A(b_5 a_4) \quad A(\delta b_1 a_2 + b_4 a_3 + b_6 a_4 + b_7 a_5 + b_9 a_6) \quad A(a_5) \quad A(a_6)] \\ &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad \delta b_1 a_1 \quad 0 \quad 0], \end{aligned}$$

de donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{así,} \quad S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (6.1) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned}
K_2(q, p) &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \cdot (0, 0, 0, \delta p_1, 0, 0) \\
&= \frac{\delta}{2} p_1^2, \quad \delta = \pm 1.
\end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración del teorema. ■

En el siguiente teorema, analizamos el caso $rg(S) = 2$, este resultado es original, pues en la literatura aún no hay evidencias de la construcción del algoritmo para la forma normal. La demostración de este caso se realiza, usando las mismas ideas que en el caso $rg(S) = 1$.

Teorema 35 *Suponga que todo los valores propios de $A = JS$ son nulos y la matriz A no es diagonalizable. Si $rg(S) = 2$, entonces la forma normal para el Hamiltoniano en (6.1) es*

$$K_2 = \frac{1}{2}\delta_1 p_1^2 + \frac{1}{2}\delta_2 p_2^2,$$

donde $\delta_1 = \pm 1$, $\delta_2 = \pm 1$.

Demostración. Supongamos que $rg(S) = 2$ y sean $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ vectores en \mathbb{R}^6 linealmente independientes, entonces

$$Aa_1 = 0, \quad Aa_2 = a_1, \quad Aa_3 = 0, \quad Aa_4 = a_3, \quad Aa_5 = 0, \quad Aa_6 = 0. \quad (6.18)$$

Para la construcción de la matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$, se procede de manera similar al Teorema 34, es decir, buscamos una matriz de normalización de la forma $N = A_1 B_1$. En este caso, notemos que la matriz JS^* viene dada por

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, se verifica fácilmente que la matriz $C = col(c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6)$, con c_j , $j = 1, \dots, 6$ linealmente independientes, es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & 0 & c_{41} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{32} & c_{42} & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & 0 & c_{43} & c_{53} & 0 \\ 0 & c_{11}\delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{32}\delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{26} & 0 & c_{46} & 0 & c_{66} \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

con $c_{11}, c_{32}, c_{53}, c_{66} \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{26}, c_{41}, c_{42}, c_{43}, c_{46} \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, como $B_1 = C^{-1}$ se tiene que

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1\delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & b_5 & b_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_7 & b_8 & b_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

donde $b_1 = \frac{1}{c_{11}}$, $b_2 = -\frac{\delta_1 c_{21}}{c_{11}^2}$, $b_3 = -\frac{\delta_2 c_{41}}{c_{11} c_{32}}$, $b_4 = \frac{1}{c_{32}}$, $b_5 = -\frac{\delta_1 c_{22}}{c_{11} c_{32}}$, $b_6 = -\frac{\delta_2 c_{42}}{c_{32}^2}$, $b_7 = \frac{1}{c_{53}}$, $b_8 = -\frac{\delta_1 c_{23}}{c_{11} c_{53}}$, $b_9 = -\frac{\delta_2 c_{43}}{c_{32} c_{53}}$, $b_{10} = -\frac{\delta_1 c_{26}}{c_{11} c_{66}}$, $b_{11} = -\frac{\delta_2 c_{46}}{c_{32} c_{66}}$ y $b_{12} = \frac{1}{c_{66}}$. Notemos que b_j , $j = 1, \dots, 12$ son número reales arbitrarios, con $b_1, b_4, b_7, b_{12} \neq 0$, puesto que $c_{11}, c_{32}, c_{53}, c_{66} \neq 0$. Por consiguiente, la matriz $F = (B_1^{-1})^T J B_1^{-1} = C^T J C$ tiene la siguiente forma

$$F = \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_{12} & 0 & 0 & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ 0 & 0 & 0 & f_{34} & 0 & 0 \\ 0 & -f_{24} & -f_{34} & 0 & f_{45} & f_{46} \\ 0 & -f_{25} & 0 & -f_{45} & 0 & f_{56} \\ 0 & -f_{26} & 0 & -f_{46} & -f_{56} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

con $f_{12} = \delta_1 c_{11}^2$, $f_{24} = -c_{26} c_{43} + c_{23} c_{46} - c_{11} c_{41} \delta_1 + c_{32} c_{22} \delta_2$, $f_{25} = -c_{53} c_{26}$, $f_{26} = c_{66} c_{23}$, $f_{34} = c_{32}^2 \delta_2$, $f_{45} = -c_{53} c_{46}$, $f_{46} = c_{66} c_{43}$ y $f_{56} = c_{53} c_{66}$. Note que $f_{12}, f_{34}, f_{56} \neq 0$, dado que $c_{11}, c_{32}, c_{53}, c_{66} \neq 0$ y además, $f_{12}^2 f_{34}^2 f_{56}^2 = \det(F) = \det(A_1^T J A_1) = \det^2(A_1) \neq 0$.

De las ecuaciones (6.21) y (6.12), para $i = 1, \dots, 6$ se tiene las siguientes condiciones: $\{a_i, a_1\} = 0$, $i \neq 2$; $\{a_i, a_2\} = 0$, $i = 2, 3$; $\{a_i, a_3\} = 0$, $i \neq 4$; $\{a_i, a_4\} = 0$, $i = 1, 4$; $\{a_i, a_5\} = 0$, $i = 1, 3, 5$; $\{a_i, a_6\} = 0$, $i = 1, 3, 6$; $\{a_1, a_2\} = f_{12} \neq 0$; $\{a_2, a_4\} = f_{24}$; $\{a_2, a_5\} = f_{25}$; $\{a_2, a_6\} = f_{26}$; $\{a_3, a_4\} = f_{34} \neq 0$; $\{a_4, a_5\} = f_{45}$; $\{a_4, a_6\} = f_{46}$ y $\{a_5, a_6\} = f_{56} \neq 0$.

Ahora, calculando la ecuación $J = B_1^T F B_1$, determinamos algunas condiciones para las

constantes b_j , $j = 1, \dots, 12$, esto es,

$$B_1^T F B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_1^2 f_{12} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4^2 f_{34} \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{34} & \beta_{35} & b_{12} b_7 f_{56} \\ -b_1^2 f_{12} \delta_1 & 0 & -\beta_{34} & 0 & \beta_{45} & \beta_{46} \\ 0 & -b_4^2 f_{34} \delta_2 & -\beta_{35} & -\beta_{45} & 0 & \beta_{56} \\ 0 & 0 & -b_{12} b_7 f_{56} & -\beta_{46} & -\beta_{56} & 0 \end{pmatrix} = J.$$

con $\beta_{34} = b_{10} b_7 f_{56} - b_1 b_7 f_{25} \delta_1$, $\beta_{35} = b_{11} b_7 f_{56} - b_4 b_7 f_{45} \delta_2$, $\beta_{45} = b_{11} b_8 f_{56} - b_{10} b_9 f_{56} - b_1 b_3 f_{12} \delta_1 + b_1 b_9 f_{25} \delta_1 + b_1 b_{11} f_{26} \delta_1 + b_4 b_5 f_{34} \delta_2 - b_4 b_8 f_{45} \delta_2 - b_{10} b_4 f_{46} \delta_2 + b_1 b_4 f_{24} \delta_1 \delta_2$, $\beta_{46} = b_{12} b_8 f_{56} + b_1 b_{12} f_{26} \delta_1$, $\beta_{56} = b_{12} b_9 f_{56} + b_{12} b_4 f_{46} \delta_2$.

Note que la matriz $B_1^T F B_1$ debe ser J , así, basta considerar

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, \quad b_4 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_3, a_4\}|}}, \quad b_7 b_{12} = \frac{1}{\{a_5, a_6\}}, \quad \delta_1 = \text{sgn}(\{a_1, a_2\}), \quad (6.22)$$

$$\delta_2 = \text{sgn}(\{a_3, a_4\}),$$

y además, se debe verificar que $\beta_{34} = \beta_{35} = \beta_{45} = \beta_{46} = \beta_{56} = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= b_{10} b_7 f_{56} - b_1 b_7 f_{25} \delta_1, & 0 &= b_{11} b_7 f_{56} - b_4 b_7 f_{45} \delta_2, \\ 0 &= b_{11} b_8 f_{56} - b_{10} b_9 f_{56} - b_1 b_3 f_{12} \delta_1 + b_1 b_9 f_{25} \delta_1 + b_1 b_{11} f_{26} \delta_1 + b_4 b_5 f_{34} \delta_2 - \\ & \quad b_4 b_8 f_{45} \delta_2 - b_{10} b_4 f_{46} \delta_2 + b_1 b_4 f_{24} \delta_1 \delta_2, & (6.23) \\ 0 &= b_{12} b_8 f_{56} + b_1 b_{12} f_{26} \delta_1, & 0 &= b_{12} b_9 f_{56} + b_{12} b_4 f_{46} \delta_2. \end{aligned}$$

Como buscamos una forma lo más simple posible para la matriz B_1 , sin pérdida de generalidad, hacemos $b_2 = b_5 = b_6 = 0$ y en (6.22) podemos tomar $b_{12} = 1$. Así, la ecuación (6.22) queda expresada como

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, \quad b_4 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_3, a_4\}|}}, \quad b_7 = \frac{1}{\{a_5, a_6\}}, \quad \delta_1 = \text{sgn}(\{a_1, a_2\}), \quad (6.24)$$

$$\delta_2 = \text{sgn}(\{a_3, a_4\}).$$

Además, de (6.23) se obtiene que

$$b_3 = \frac{b_4 \delta_2 (f_{24} f_{56} - f_{25} f_{46} + f_{26} f_{45})}{f_{12} f_{56}}, \quad b_8 = -\frac{b_1 \delta_1 f_{26}}{f_{56}}, \quad b_9 = -\frac{b_4 \delta_2 f_{46}}{f_{56}}, \quad (6.25)$$

$$b_{10} = \frac{b_1 \delta_1 f_{25}}{f_{56}} \quad \text{y} \quad b_{11} = \frac{b_4 \delta_2 f_{45}}{f_{56}}.$$

Finalmente, a partir de las restricciones $b_2 = b_5 = b_6 = 0$, $b_{12} = 1$ y de las ecuaciones obtenidas en (6.24) y (6.25), tenemos la expresión para la matriz N como

$$N = [b_1 a_1 \quad b_4 a_3 \quad b_7 a_5 \quad \delta_1 b_1 a_2 + b_8 a_5 + b_{10} a_6 \quad b_3 a_1 + \delta_2 b_4 a_4 + b_9 a_5 + b_{11} a_6 \quad a_6]. \quad (6.26)$$

De manera equivalente a (6.26), la matriz N se puede expresar como

$$N = \begin{pmatrix} b_1 a_{11} & b_4 a_{31} & b_7 a_{51} & \delta_1 b_1 a_{21} + b_8 a_{51} + b_{10} a_{61} & b_3 a_{11} + \delta_2 b_4 a_{41} + b_9 a_{51} + b_{11} a_{61} & a_{61} \\ b_1 a_{12} & b_4 a_{32} & b_7 a_{52} & \delta_1 b_1 a_{22} + b_8 a_{52} + b_{10} a_{62} & b_3 a_{12} + \delta_2 b_4 a_{42} + b_9 a_{52} + b_{11} a_{62} & a_{62} \\ b_1 a_{13} & b_4 a_{33} & b_7 a_{53} & \delta_1 b_1 a_{23} + b_8 a_{53} + b_{10} a_{63} & b_3 a_{13} + \delta_2 b_4 a_{43} + b_9 a_{53} + b_{11} a_{63} & a_{63} \\ b_1 a_{14} & b_4 a_{34} & b_7 a_{54} & \delta_1 b_1 a_{24} + b_8 a_{54} + b_{10} a_{64} & b_3 a_{14} + \delta_2 b_4 a_{44} + b_9 a_{54} + b_{11} a_{64} & a_{64} \\ b_1 a_{15} & b_4 a_{35} & b_7 a_{55} & \delta_1 b_1 a_{25} + b_8 a_{55} + b_{10} a_{65} & b_3 a_{15} + \delta_2 b_4 a_{45} + b_9 a_{55} + b_{11} a_{65} & a_{65} \\ b_1 a_{16} & b_4 a_{36} & b_7 a_{56} & \delta_1 b_1 a_{26} + b_8 a_{56} + b_{10} a_{66} & b_3 a_{16} + \delta_2 b_4 a_{46} + b_9 a_{56} + b_{11} a_{66} & a_{66} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es simpléctica con

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, & b_4 &= \frac{1}{\sqrt{|\{a_3, a_4\}|}}, & b_7 &= \frac{1}{\{a_5, a_6\}}, & \delta_1 &= \text{sgn}(\{a_1, a_2\}), \\ \delta_2 &= \text{sgn}(\{a_3, a_4\}), \\ b_3 &= \frac{b_4 \delta_2 (f_{24} f_{56} - f_{25} f_{46} + f_{26} f_{45})}{f_{12} f_{56}}, & b_8 &= -\frac{b_1 \delta_1 f_{26}}{f_{56}}, & b_9 &= -\frac{b_4 \delta_2 f_{46}}{f_{56}}, \\ b_{10} &= \frac{b_1 \delta_1 f_{25}}{f_{56}} & \text{y} & & b_{11} &= \frac{b_4 \delta_2 f_{45}}{f_{56}}. \end{aligned}$$

Además, usando el hecho de que $rg(S) = 3$ en la ecuación (6.18), sabemos que la matriz de normalización JS^* está dada por

$$\begin{aligned} JS^* &= [A(b_1 a_1) \ A(b_4 a_3) \ A(b_7 a_5) \ A(\delta_1 b_1 a_2 + b_8 a_5 + b_{10} a_6) \ A(b_3 a_1 + \delta_2 b_4 a_4 + b_9 a_5 + b_{11} a_6) \ A(a_6)] \\ &= [0 \ 0 \ 0 \ \delta_1 b_1 a_1 \ \delta_2 b_4 a_3 \ 0]. \end{aligned}$$

de donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{así,} \quad S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (6.1) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} K_2(q, p) &= \frac{1}{2} (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \cdot (0, 0, 0, \delta_1 p_1, \delta_2 p_2, 0) \\ &= \frac{\delta_1}{2} p_1^2 + \frac{\delta_2}{2} p_2^2, \quad \delta_1 = \pm 1, \quad \delta_2 = \pm 1. \end{aligned}$$

Así, el teorema queda demostrado. ■

A continuación, analizamos el caso $rg(S) = 3$ el cual es un resultado original. En este caso tenemos dos posibilidades, el primer caso es cuando la forma normal de Jordan de la matriz $A = JS$ tiene dos bloques, uno de orden 4×4 y otro de orden 2×2 , y el segundo caso es cuando la forma normal de Jordan de la matriz JS tiene tres bloques de orden 2×2 cada uno. Los detalles se muestran en el siguiente teorema.

Teorema 36 *Suponga que la matriz G es una forma normal de Jordan de la matriz $A = JS$. Además, suponga que todos los valores propios de A son nulos y la matriz A no es diagonalizable. Si $rg(S) = 3$, entonces las formas normales para el Hamiltoniano en (6.1) están caracterizadas por:*

1. *Cuando la matriz G tiene dos bloques, uno de orden 4×4 y otro de orden 2×2 , la forma normal es $K_2 = \frac{1}{2}\delta p_1^2 + q_1 p_2$, donde $\delta = \pm 1$.*
2. *Cuando la matriz G tiene tres bloques de orden 2×2 cada uno, la forma normal es $K_2 = \frac{1}{2}\delta_1 p_1^2 + \frac{1}{2}\delta_2 p_2^2 + \frac{1}{2}\delta_3 p_3^2$, donde $\delta_1 = \pm 1$, $\delta_2 = \pm 1$, $\delta_3 = \pm 1$.*

Demostración. Comenzamos la demostración con el ítem (1), en este caso existe base de \mathbb{R}^6 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ tal que

$$Aa_1 = 0, \quad Aa_2 = a_1, \quad Aa_3 = a_2, \quad Aa_4 = a_3, \quad Aa_5 = 0, \quad Aa_6 = 0. \quad (6.27)$$

Para la construcción de la matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$, se sigue las mismas que en el Teorema 35, es decir, buscamos una matriz de normalización de la forma $N = A_1 B_1$. En este caso, notemos que la matriz JS^* viene dada por

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, se puede verificar fácilmente que la matriz $C = col(c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6)$, con $c_j, j =$

$1, \dots, 6$ linealmente independientes, es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{22} & c_{32} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & c_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{43} & c_{53} & 0 \\ 0 & 0 & c_{12}\delta & c_{22}\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{12}\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{46} & 0 & c_{66} \end{pmatrix}, \quad (6.28)$$

con $c_{12}, c_{53}, c_{66} \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $c_{22}, c_{32}, c_{42}, c_{43}, c_{46} \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, como $B_1 = C^{-1}$ se tiene que

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & 0 & b_3 & b_4 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & b_1\delta & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2\delta & -b_1\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2\delta & 0 \\ 0 & 0 & b_5 & 0 & b_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_7 & b_8 \end{pmatrix}, \quad (6.29)$$

con $b_1 = -\frac{c_{22}}{c_{12}^2}$, $b_2 = \frac{1}{c_{12}}$, $b_3 = \frac{\delta(c_{22}^2 - c_{12}c_{32})}{c_{12}^3}$, $b_4 = \frac{\delta(c_{22}^3 - 2c_{12}c_{32}c_{22} + c_{12}^2c_{42})}{c_{12}^4}$, $b_5 = \frac{1}{c_{53}}$, $b_6 = \frac{\delta c_{43}}{c_{12}c_{53}}$, $b_7 = \frac{\delta c_{46}}{c_{12}c_{66}}$ y $b_8 = \frac{1}{c_{66}}$. Notemos que b_j , $j = 1, \dots, 8$ son números reales arbitrarios con $b_2, b_5, b_8 \neq 0$, debido a que $c_{12}, c_{53}, c_{66} \neq 0$. Por consiguiente, la matriz $F = (B_1^{-1})^T J B_1^{-1} = C^T J C$ tiene la siguiente forma

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{24} & 0 & f_{34} & 0 & 0 \\ -f_{24} & 0 & -f_{34} & 0 & f_{45} & f_{46} \\ 0 & 0 & 0 & -f_{45} & 0 & f_{56} \\ 0 & 0 & 0 & -f_{46} & -f_{56} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.30)$$

con $f_{14} = -\delta c_{12}^2$, $f_{34} = \delta(c_{22}^2 - 2c_{12}c_{32})$, $f_{45} = -c_{46}c_{53}$, $f_{46} = c_{43}c_{66}$ y $f_{56} = c_{53}c_{66}$. Note que $f_{24}, f_{56} \neq 0$, dado que $c_{12}, c_{53}, c_{66} \neq 0$ y además, $f_{24}^4 f_{56}^2 = \det(F) = \det(A_1^T J A_1) = \det^2(A_1) \neq 0$.

De las ecuaciones (6.30) y (6.12), para $i = 1, \dots, 6$, se tiene las siguientes condiciones: $\{a_i, a_1\} = 0$, $i \neq 4$; $\{a_i, a_2\} = 0$, $i \neq 3$; $\{a_i, a_3\} = 0$, $i = 1, 3, 5, 6$; $\{a_i, a_4\} = 0$, $i = 2, 4$; $\{a_i, a_5\} = 0$, $i = 1, 2, 3, 5$; $\{a_i, a_6\} = 0$, $i = 1, 2, 3, 6$; $\{a_4, a_1\} = \{a_2, a_3\} = f_{24} \neq 0$; $\{a_3, a_4\} = f_{34}$; $\{a_4, a_5\} = f_{45}$; $\{a_4, a_6\} = f_{46}$ y $\{a_5, a_6\} = f_{56} \neq 0$.

Ahora, calculando la ecuación $J = B_1^T F B_1$, determinamos algunas condiciones para las

constantes b_j , $j = 1, \dots, 8$, esto es,

$$B_1^T F B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -b_2^2 f_{24} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2^2 f_{24} \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{35} & b_5 b_8 f_{56} \\ b_2^2 f_{24} \delta & 0 & 0 & 0 & \beta_{45} & 0 \\ 0 & b_2^2 f_{24} \delta & -\beta_{35} & -\beta_{45} & 0 & \beta_{56} \\ 0 & 0 & -b_5 b_8 f_{56} & 0 & -\beta_{56} & 0 \end{pmatrix} = J.$$

donde $\beta_{35} = b_5(b_7 f_{56} + b_2 f_{45} \delta)$, $\beta_{45} = b_1^2 f_{24} - b_2^2 f_{34} - 2b_2 b_3 f_{24} \delta$ y $\beta_{56} = b_8(b_6 f_{56} - b_2 f_{46} \delta)$.

Note que la matriz $B_1^T F B_1$ debe ser J , así, basta considerar

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_2, a_4\}|}}, \quad b_5 b_8 = \frac{1}{\{a_5, a_6\}}, \quad \delta = -\text{sgn}(\{a_2, a_4\}), \quad (6.31)$$

y además, se debe verificar que $b_{35} = b_{45} = b_{56} = 0$, es decir,

$$b_5(b_7 f_{56} + b_2 f_{45} \delta) = 0, \quad b_1^2 f_{24} - b_2^2 f_{34} - 2b_2 b_3 f_{24} \delta = 0, \quad b_8(b_6 f_{56} - b_2 f_{46} \delta) = 0 \quad (6.32)$$

Como buscamos una forma lo más simple posible para la matriz B_1 , sin pérdida de generalidad, hacemos $b_1 = b_4 = 0$ y en la ecuación (6.31) podemos considerar $b_8 = 1$, así, obtenemos

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_2, a_4\}|}}, \quad b_5 = \frac{1}{\{a_5, a_6\}}, \quad \delta = -\text{sgn}(\{a_1, a_4\}). \quad (6.33)$$

Además, como $b_5, b_8 \neq 0$ de (6.32), se sigue que

$$b_3 = -\frac{b_2 \delta f_{34}}{2f_{24}}, \quad b_6 = \frac{b_2 \delta f_{46}}{f_{56}} \quad \text{y} \quad b_7 = -\frac{b_2 \delta f_{45}}{f_{56}}. \quad (6.34)$$

A partir de las restricciones $b_1 = b_4 = 0$, $b_8 = 1$ y de las ecuaciones obtenidas en (6.33) y (6.34), tenemos la expresión para la matriz N como

$$N = [b_2 a_2 \quad b_2 a_1 \quad b_5 a_5 \quad b_3 a_1 + \delta b_2 a_3 \quad -b_3 a_2 - \delta b_2 a_4 + b_6 a_5 + b_7 a_6 \quad a_6]. \quad (6.35)$$

De manera equivalente a (6.35), la matriz N puede ser expresada como

$$N = \begin{pmatrix} b_2 a_{21} & b_2 a_{11} & b_5 a_{51} & b_3 a_{11} + \delta b_2 a_{31} & -b_3 a_{21} - \delta b_2 a_{41} + b_6 a_{51} + b_7 a_{61} & a_{61} \\ b_2 a_{22} & b_2 a_{12} & b_5 a_{52} & b_3 a_{12} + \delta b_2 a_{32} & -b_3 a_{22} - \delta b_2 a_{42} + b_6 a_{52} + b_7 a_{62} & a_{62} \\ b_2 a_{23} & b_2 a_{13} & b_5 a_{53} & b_3 a_{13} + \delta b_2 a_{33} & -b_3 a_{23} - \delta b_2 a_{43} + b_6 a_{53} + b_7 a_{63} & a_{63} \\ b_2 a_{24} & b_2 a_{14} & b_5 a_{54} & b_3 a_{14} + \delta b_2 a_{34} & -b_3 a_{24} - \delta b_2 a_{44} + b_6 a_{54} + b_7 a_{64} & a_{64} \\ b_2 a_{25} & b_2 a_{15} & b_5 a_{55} & b_3 a_{15} + \delta b_2 a_{35} & -b_3 a_{25} - \delta b_2 a_{45} + b_6 a_{55} + b_7 a_{65} & a_{65} \\ b_2 a_{26} & b_2 a_{16} & b_5 a_{56} & b_3 a_{16} + \delta b_2 a_{36} & -b_3 a_{26} - \delta b_2 a_{46} + b_6 a_{56} + b_7 a_{66} & a_{66} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es simpléctica con

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_2, a_4\}|}}, \quad b_5 = \frac{1}{\{a_5, a_6\}}, \quad \delta = -\text{sgn}(\{a_1, a_4\}),$$

$$b_3 = -\frac{b_2 \delta f_{34}}{2f_{24}}, \quad b_6 = \frac{b_2 \delta f_{46}}{f_{56}} \quad \text{y} \quad b_7 = -\frac{b_2 \delta f_{45}}{f_{56}}.$$

Además, usando el hecho de que $rg(S) = 3$ en la ecuación (6.27), sabemos que la matriz de normalización JS^* está dada por

$$JS^* = [A(b_2 a_2) \quad A(b_2 a_1) \quad A(b_5 a_5) \quad A(b_3 a_1 + \delta b_2 a_3) \quad A(-b_3 a_2 - \delta b_2 a_4 + b_6 a_5 + b_7 a_6) \quad A(a_6)]$$

$$= [b_2 a_1 \quad 0 \quad 0 \quad \delta(b_2 a_2) \quad -(b_3 a_1 + \delta b_2 a_3) \quad 0],$$

de donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{así,} \quad S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (6.1) adquiere la siguiente forma

$$K_2(q, p) = \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \cdot (0, 0, 0, \delta_1 p_1, \delta_2 p_2, 0)$$

$$= \frac{\delta}{2} p_1^2 + q_1 p_2, \quad \delta = \pm 1.$$

Esto finaliza la demostración de la primera parte del teorema.

Ahora, vamos a demostrar el segundo ítem, en este caso existe base $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ tal que

$$Aa_1 = 0, \quad Aa_2 = a_1, \quad Aa_3 = 0, \quad Aa_4 = a_3, \quad Aa_5 = 0, \quad Aa_6 = a_5. \quad (6.36)$$

Construiremos la matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$, análogamente al caso anterior, es decir, buscamos una matriz de normalización de la forma $N = A_1 B_1$. En este caso, notemos que la matriz

JS^* viene dada por

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, se verifica que la matriz C es de la forma $C = col(c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6)$, con c_j , $j = 1, \dots, 6$ linealmente independientes, es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & 0 & c_{41} & 0 & c_{61} \\ 0 & c_{22} & c_{32} & c_{42} & 0 & c_{62} \\ 0 & c_{23} & 0 & c_{43} & c_{53} & c_{63} \\ 0 & c_{11}\delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{32}\delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{53}\delta_3 \end{pmatrix}, \quad (6.37)$$

con $c_{11}, c_{32}, c_{53} \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{41}, c_{42}, c_{43}, c_{61}, c_{63}, c_{63} \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, como $B_1 = C^{-1}$ se tiene que

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_1\delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_5 & 0 & b_6 & b_7 & b_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_9\delta_3 \end{pmatrix}, \quad (6.38)$$

donde $b_1 = \frac{1}{c_{11}}$, $b_2 = -\frac{\delta_1 c_{21}}{c_{11}^2}$, $b_3 = -\frac{\delta_2 c_{41}}{c_{11} c_{32}}$, $b_4 = -\frac{\delta_3 c_{61}}{c_{11} c_{53}}$, $b_5 = \frac{1}{c_{32}}$, $b_6 = \frac{1}{c_{53}}$, $b_7 = -\frac{\delta_1 c_{21}}{c_{11}^2}$, $b_8 = -\frac{\delta_2 c_{42}}{c_{32}^2}$, $b_9 = -\frac{\delta_1 c_{22}}{c_{11} c_{32}}$, $b_{10} = -\frac{\delta_2 c_{42}}{c_{32}^2}$, $b_{11} = -\frac{\delta_3 c_{62}}{c_{32} c_{53}}$, $b_{12} = -\frac{\delta_3 c_{63}}{c_{53}^2}$. Notemos que b_j , $j = 1, \dots, 12$ son número reales arbitrarios, con $b_1, b_5, b_9 \neq 0$, puesto que $c_{11}, c_{32}, c_{53} \neq 0$. Por consiguiente, la matriz $F = (B_1^{-1})^T J B_1^{-1} = C^T J C$ tiene la siguiente forma

$$F = \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_{12} & 0 & 0 & f_{24} & 0 & f_{26} \\ 0 & 0 & 0 & f_{34} & 0 & 0 \\ 0 & -f_{24} & -f_{34} & 0 & 0 & f_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{56} \\ 0 & -f_{26} & 0 & -f_{46} & -f_{56} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

con $f_{12} = \delta_1 c_{11}^2$, $f_{24} = c_{32} c_{22} \delta_2 - c_{11} c_{41} \delta_1$, $f_{26} = c_{53} c_{23} \delta_3 - c_{11} c_{61} \delta_1$, $f_{34} = \delta_2 c_{32}^2$, $f_{46} = c_{53} c_{43} \delta_3 - c_{32} c_{62} \delta_2$, $f_{56} = c_{53}^2 \delta_3$. Note que $f_{12}, f_{34}, f_{56} \neq 0$, dado que $c_{11}, c_{32}, c_{53} \neq 0$ y además, $f_{12}^2 f_{34}^2 f_{56}^2 = \det(F) = \det(A_1^T J A_1) = \det^2(A_1) \neq 0$.

De las ecuaciones (6.39) y (6.12), para $i = 1, \dots, 6$ se tiene las siguientes condiciones:
 $\{a_i, a_1\} = 0, i \neq 2$; $\{a_i, a_2\} = 0, i = 2, 3, 5$; $\{a_i, a_3\} = 0, i \neq 4$; $\{a_i, a_4\} = 0, i = 1, 4, 5$;
 $\{a_i, a_5\} = 0, i \neq 6$; $\{a_i, a_6\} = 0, i = 1, 3, 6$; $\{a_1, a_2\} = f_{12} \neq 0$; $\{a_2, a_4\} = f_{24}$; $\{a_2, a_6\} = f_{26}$;
 $\{a_3, a_4\} = f_{34}$; $\{a_4, a_6\} = f_{46}$ y $\{a_5, a_6\} = f_{56}$.

Ahora, calculando la ecuación $J = B_1^T F B_1$ determinamos algunas condiciones para las constantes $b_j, j = 1, \dots, 12$, esto es,

$$B_1^T F B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_1^2 f_{12} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5^2 f_{34} \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_9^2 f_{56} \delta_3 \\ -b_1^2 f_{12} \delta_1 & 0 & 0 & 0 & \beta_{45} & \beta_{46} \\ 0 & -b_5^2 f_{34} \delta_2 & 0 & -\beta_{45} & 0 & \beta_{56} \\ 0 & 0 & -b_9^2 f_{56} \delta_3 & -\beta_{46} & -\beta_{56} & 0 \end{pmatrix} = J,$$

donde $\beta_{45} = -b_1 b_3 f_{12} \delta_1 + b_1 b_5 f_{24} \delta_2 \delta_1 + b_5 b_6 f_{34} \delta_2$, $\beta_{46} = -b_1 b_4 f_{12} \delta_1 + b_1 b_9 f_{26} \delta_3 \delta_1 + b_{10} b_9 f_{56} \delta_3$,
 $\beta_{56} = -b_5 b_8 f_{34} \delta_2 + b_5 b_9 f_{46} \delta_3 \delta_2 + b_{11} b_9 f_{56} \delta_3$.

Note que la matriz $B_1^T F B_1$ debe ser J , así, basta considerar

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, \quad b_5 = \frac{1}{\sqrt{\{a_3, a_4\}}}, \quad b_9 = \frac{1}{\sqrt{\{a_5, a_6\}}}, \quad (6.40)$$

$$\delta_1 = \text{sgn}(\{a_1, a_2\}), \quad \delta_2 = \text{sgn}(\{a_3, a_4\}), \quad \delta_3 = \text{sgn}(\{a_5, a_6\}),$$

y además, se debe verificar que $\beta_{45} = \beta_{46} = \beta_{56} = 0$, es decir,

$$0 = -b_1 b_3 f_{12} \delta_1 + b_1 b_5 f_{24} \delta_2 \delta_1 + b_5 b_6 f_{34} \delta_2, \quad 0 = -b_1 b_4 f_{12} \delta_1 + b_1 b_9 f_{26} \delta_3 \delta_1 + b_{10} b_9 f_{56} \delta_3,$$

$$0 = -b_5 b_8 f_{34} \delta_2 + b_5 b_9 f_{46} \delta_3 \delta_2 + b_{11} b_9 f_{56} \delta_3. \quad (6.41)$$

Como buscamos una forma lo más simple posible para la matriz B_1 , sin pérdida de generalidad, hacemos $b_4 = b_6 = b_8 = b_{12} = 0$. Con estas restricciones, de (6.41) se obtiene

$$b_3 = \frac{b_5 \delta_2 f_{24}}{f_{12}}, \quad b_{10} = -\frac{b_1 \delta_1 f_{26}}{f_{56}}, \quad \text{y} \quad b_{11} = -\frac{b_5 \delta_2 f_{46}}{f_{56}}. \quad (6.42)$$

A partir de las restricciones $b_4 = b_6 = b_8 = b_{12} = 0$ y de las ecuaciones obtenidas en (6.40) y (6.42), tenemos la expresión para la matriz N como

$$N = [b_1 a_1 \quad b_5 a_3 \quad b_9 a_5 \quad b_2 a_1 + \delta_1 b_1 a_2 + b_{10} a_5 \quad b_3 a_1 + \delta_2 b_5 a_4 + b_{11} a_5 \quad b_9 \delta_3 a_6]. \quad (6.43)$$

De manera equivalente a (6.42), la matriz N puede ser escrita como

$$N = \begin{pmatrix} b_1 a_{11} & b_5 a_{31} & b_9 a_{51} & b_2 a_{11} + \delta_1 b_1 a_{21} + b_{10} a_{51} & b_3 a_{11} + \delta_2 b_5 a_{41} + b_{11} a_{51} & b_9 \delta_3 a_{61} \\ b_1 a_{12} & b_5 a_{32} & b_9 a_{52} & b_2 a_{12} + \delta_1 b_1 a_{22} + b_{10} a_{52} & b_3 a_{12} + \delta_2 b_5 a_{42} + b_{11} a_{52} & b_9 \delta_3 a_{62} \\ b_1 a_{13} & b_5 a_{33} & b_9 a_{53} & b_2 a_{13} + \delta_1 b_1 a_{23} + b_{10} a_{53} & b_3 a_{13} + \delta_2 b_5 a_{43} + b_{11} a_{53} & b_9 \delta_3 a_{63} \\ b_1 a_{14} & b_5 a_{34} & b_9 a_{54} & b_2 a_{14} + \delta_1 b_1 a_{24} + b_{10} a_{54} & b_3 a_{14} + \delta_2 b_5 a_{44} + b_{11} a_{54} & b_9 \delta_3 a_{64} \\ b_1 a_{15} & b_5 a_{35} & b_9 a_{55} & b_2 a_{15} + \delta_1 b_1 a_{25} + b_{10} a_{55} & b_3 a_{15} + \delta_2 b_5 a_{45} + b_{11} a_{55} & b_9 \delta_3 a_{65} \\ b_1 a_{16} & b_5 a_{36} & b_9 a_{56} & b_2 a_{16} + \delta_1 b_1 a_{26} + b_{10} a_{56} & b_3 a_{16} + \delta_2 b_5 a_{46} + b_{11} a_{56} & b_9 \delta_3 a_{66} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es simpléctica con

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, & b_5 &= \frac{1}{\sqrt{\{a_3, a_4\}}}, & b_9 &= \frac{1}{\sqrt{\{a_5, a_6\}}}, \\ \delta_1 &= \operatorname{sgn}(\{a_1, a_2\}), & \delta_2 &= \operatorname{sgn}(\{a_3, a_4\}), & \delta_3 &= \operatorname{sgn}(\{a_5, a_6\}), \\ b_3 &= \frac{b_5 \delta_2 f_{24}}{f_{12}}, & b_{10} &= -\frac{b_1 \delta_1 f_{26}}{f_{56}}, & \text{y } b_{11} &= -\frac{b_5 \delta_2 f_{46}}{f_{56}}. \end{aligned}$$

Además, usando el hecho de que $rg(S) = 3$ en la ecuación (6.36), sabemos que la matriz de normalización JS^* está dada por

$$\begin{aligned} JS^* &= [A(b_1 a_1) \ A(b_5 a_3) \ A(b_9 a_5) \ A(b_2 a_1 + \delta_1 b_1 a_2 + b_{10} a_5) \ A(b_3 a_1 + \delta_2 b_5 a_4 + b_{11} a_5) \ A(b_9 \delta_3 a_6)] \\ &= [0 \ 0 \ 0 \ \delta_1 b_1 a_1 \ \delta_2 b_5 a_3 \ \delta_3 b_9 a_5], \end{aligned}$$

de donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ así, } S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (6.1) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} K_2(q, p) &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \cdot (0, 0, 0, \delta_1 p_1, \delta_2 p_2, \delta_3 p_3) \\ &= \frac{\delta_1}{2} p_1^2 + \frac{\delta_2}{2} p_2^2 + \frac{\delta_3}{2} p_3^2, \quad \delta_1 = \pm 1, \quad \delta_2 = \pm 1, \quad \delta_3 = \pm 1 \end{aligned}$$

Así, el teorema queda demostrado. ■

A continuación, analizamos el caso $rg(S) = 4$, del mismo modo que en el caso rango tres, en este caso también tenemos dos posibilidades, el primer caso es cuando la forma normal de Jordan de la matriz $A = JS$ tiene dos bloques de orden 3×3 cada uno (estudiado por Waz en [23]), y el segundo caso es cuando la forma normal de Jordan de la matriz JS tiene dos bloques uno de orden 4×4 y el otro de orden 2×2 , este resultado es original dado que no a sido estudiado anteriormente. Los detalles se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 37 *Suponga que la matriz G es una forma normal de Jordan de la matriz $A = JS$. Además, suponga que todos los valores propios de A son nulos y que la matriz A no es diagonalizable. Si $\text{rg}(S) = 4$, entonces las formas normales para el Hamiltoniano en (6.1) están caracterizadas por:*

1. *Cuando la matriz G tiene dos bloques de orden 3×3 cada uno, la forma normal es $K_2 = q_1 p_2 + q_2 p_3$.*
2. *Cuando la matriz G tiene dos bloques uno de orden 4×4 y el otro de orden 2×2 , la forma normal es $K_2 = \frac{1}{2} \delta_1 p_1^2 + q_2 p_3 + \frac{1}{2} \delta_2 p_2^2$, donde $\delta_1 = \pm 1$, $\delta_2 = \pm 1$.*

Demostración. Comenzamos la demostración con el apartado 1, en este caso existen vectores linealmente independientes $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ de \mathbb{R}^6 tal que

$$Aa_1 = 0, \quad Aa_2 = a_1, \quad Aa_3 = a_2, \quad Aa_4 = 0, \quad Aa_5 = a_4, \quad Aa_6 = a_5. \quad (6.44)$$

Construiremos la matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$, siguiendo las mismas ideas que en los teoremas anteriores, es decir, buscamos una matriz de normalización de la forma $N = A_1 B_1$. En este caso, notemos que la matriz JS^* viene dada por

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, se verifica que la matriz $C = \text{col}(c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6)$, con $c_j, j = 1, \dots, 6$ linealmente independientes, es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{13} & c_{23} & 0 & 0 & c_{53} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & c_{53} & c_{63} \\ 0 & c_{24} & c_{34} & c_{14} & c_{54} & c_{64} \\ 0 & 0 & -c_{24} & 0 & -c_{14} & -c_{54} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} \end{pmatrix}, \quad (6.45)$$

con $c_{13}, c_{14} \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $c_{23}, c_{24}, c_{33}, c_{34}, c_{53}, c_{54}, c_{63}, c_{64} \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, como $B_1 = C^{-1}$ se tiene que

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 & b_4 & b_5 \\ b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & -b_4 \\ b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_6 & b_7 & 0 & b_8 & b_9 & b_{10} \\ b_7 & 0 & 0 & 0 & -b_8 & -b_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_8 \end{pmatrix}, \quad (6.46)$$

donde $b_1 = \frac{c_{23}^2 c_{14} - c_{13} c_{33} c_{14} + c_{13} c_{24} c_{53}}{c_{13}^2 c_{14}}$, $b_2 = -\frac{c_{23}}{c_{13}}$, $b_3 = \frac{1}{c_{13}}$, $b_4 = \frac{c_{53}}{c_{13} c_{14}}$, $b_5 = \frac{c_{14} c_{23} c_{53} + c_{13} c_{53} c_{54} - c_{13} c_{14} c_{63}}{c_{13}^2 c_{14}}$, $b_6 = \frac{c_{14} c_{23} c_{24} - c_{13} c_{14} c_{34} + c_{13} c_{24} c_{54}}{c_{13}^2 c_{14}}$, $b_7 = -\frac{c_{24}}{c_{13} c_{14}}$, $b_8 = \frac{1}{c_{14}}$, $b_9 = \frac{c_{54}}{c_{14}}$ y $b_{10} = -\frac{c_{54}}{c_{14}}$. Notemos que b_j , $j = 1, \dots, 10$ son número reales arbitrarios, con $b_3, b_8 \neq 0$, puesto que $c_{13}, c_{14} \neq 0$. Por consiguiente, la matriz $F = (B_1^{-1})^T J B_1^{-1} = C^T J C$ tiene la siguiente forma

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{16} \\ 0 & 0 & f_{23} & 0 & -f_{16} & f_{26} \\ 0 & -f_{23} & 0 & f_{16} & -f_{26} & f_{36} \\ 0 & 0 & -f_{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{16} & f_{26} & 0 & 0 & f_{56} \\ -f_{16} & -f_{26} & -f_{36} & 0 & -f_{56} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.47)$$

con $f_{16} = c_{13} c_{14}$, $f_{23} = -2c_{13} c_{24}$, $f_{26} = c_{14} c_{23} - c_{13} c_{54}$, $f_{36} = c_{14} c_{33} + c_{24} c_{53} - c_{23} c_{54} + c_{13} c_{64}$, $f_{56} = 2c_{14} c_{53}$. Note que $f_{16} \neq 0$, dado que $c_{13}, c_{14} \neq 0$ y además, $f_{16}^6 = \det(F) = \det(A_1^T J A_1) = \det^2(A_1) \neq 0$.

De las ecuaciones (6.47) y (6.12), para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ se tiene las siguientes condiciones: $\{a_i, a_1\} = 0$, $i \neq 6$; $\{a_i, a_2\} = 0$, $i = 1, 2, 4$; $\{a_i, a_3\} = 0$, $i = 1, 3$; $\{a_i, a_4\} = 0$, $i \neq 3$; $\{a_i, a_5\} = 0$, $i = 1, 4, 5$; $\{a_i, a_6\} = 0$, $i = 4, 6$; $\{a_1, a_6\} = \{a_5, a_2\} = \{a_3, a_4\} = f_{16} \neq 0$; $\{a_2, a_3\} = f_{23}$; $\{a_2, a_6\} = \{a_5, a_3\} = f_{26}$; $\{a_3, a_6\} = f_{46}$ y $\{a_5, a_6\} = f_{56}$.

Ahora, calculando la ecuación $J = B_1^T F B_1$, determinamos algunas condiciones para las constantes b_j , $j = 1, \dots, 10$, esto es,

$$B_1^T F B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{12} & 0 & b_3 b_8 f_{16} & \beta_{15} & \beta_{16} \\ -\beta_{12} & 0 & 0 & 0 & b_3 b_8 f_{16} & \beta_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 b_8 f_{16} \\ -b_3 b_8 f_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{15} & -b_3 b_8 f_{16} & 0 & 0 & 0 & \beta_{56} \\ -\beta_{16} & -\beta_{15} & -b_3 b_8 f_{16} & 0 & -\beta_{56} & 0 \end{pmatrix} = J,$$

con $\beta_{12} = b_3(2b_7 f_{16} - b_3 f_{23})$, $\beta_{15} = b_2 b_8 f_{16} + b_3 b_9 f_{16} + b_3 b_8 f_{26}$, $\beta_{16} = b_{10} b_3 f_{16} - b_4 b_7 f_{16} + b_1 b_8 f_{16} + b_2 b_9 f_{16} + b_3 b_4 f_{23} + b_2 b_8 f_{26} + b_3 b_9 f_{26} + b_3 b_8 f_{36} + b_7 b_8 f_{56}$ y $\beta_{56} = b_8(2b_4 f_{16} - b_8 f_{56})$.

Note que la matriz $B_1^T F B_1$ debe ser J , así, basta considerar

$$b_3 b_8 = \frac{1}{\{a_1, a_6\}}, \quad (6.48)$$

y además, se debe verificar que $\beta_{12} = \beta_{15} = \beta_{16} = \beta_{56} = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= b_3(2b_7f_{16} - b_3f_{23}), \quad 0 = b_2b_8f_{16} + b_3b_9f_{16} + b_3b_8f_{26}, \quad 0 = b_8(2b_4f_{16} - b_8f_{56}), \\ 0 &= b_{10}b_3f_{16} - b_4b_7f_{16} + b_1b_8f_{16} + b_2b_9f_{16} + b_3b_4f_{23} + b_2b_8f_{26} + b_3b_9f_{26} + b_3b_8f_{36} + b_7b_8f_{56}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Como buscamos una forma lo más simple posible para la matriz B_1 , sin pérdida de generalidad, hacemos $b_2 = b_{10} = 0$ y en (6.48) podemos considerar $b_8 = 1$, así, obtenemos

$$b_3 = \frac{1}{\{a_1, a_6\}}. \quad (6.50)$$

Además, como $b_3, b_8 \neq 0$ de (6.49), se sigue que

$$b_1 = -\frac{b_3(4f_{16}f_{36} + 3f_{23}f_{56} - 4f_{26}^2)}{4f_{16}^2}, \quad b_4 = \frac{f_{56}}{2f_{16}}, \quad b_7 = \frac{b_3f_{23}}{2f_{16}} \quad \text{y} \quad b_9 = -\frac{f_{26}}{f_{16}}. \quad (6.51)$$

A partir de las restricciones $b_1 = b_4 = 0$, $b_8 = 1$ y de las ecuaciones obtenidas en (6.50) y (6.51), por fin obtenemos la expresión para la matriz N como

$$N = [b_1a_1 + b_3a_3 + b_6a_4 + b_7a_5 \quad b_3a_2 + b_7a_4 \quad b_3a_1 \quad a_4 \quad b_4a_1 + b_9a_4 - a_5 \quad b_5a_1 - b_4a_2 - b_9a_5 + a_6]. \quad (6.52)$$

De manera equivalente a (6.52), la matriz N puede ser escrita como

$$N = \begin{pmatrix} b_1a_{11} + b_3a_{31} + b_6a_{41} + b_7a_{51} & b_3a_{21} + b_7a_{41} & b_3a_{11} & a_{41} & b_4a_{11} + b_9a_{41} - a_{51} & b_5a_{11} - b_4a_{21} - b_9a_{51} + a_{61} \\ b_1a_{12} + b_3a_{32} + b_6a_{42} + b_7a_{52} & b_3a_{22} + b_7a_{42} & b_3a_{12} & a_{42} & b_4a_{12} + b_9a_{42} - a_{52} & b_5a_{12} - b_4a_{22} - b_9a_{52} + a_{62} \\ b_1a_{13} + b_3a_{33} + b_6a_{43} + b_7a_{53} & b_3a_{23} + b_7a_{43} & b_3a_{13} & a_{43} & b_4a_{13} + b_9a_{43} - a_{53} & b_5a_{13} - b_4a_{23} - b_9a_{53} + a_{63} \\ b_1a_{14} + b_3a_{34} + b_6a_{44} + b_7a_{54} & b_3a_{24} + b_7a_{44} & b_3a_{14} & a_{44} & b_4a_{14} + b_9a_{44} - a_{54} & b_5a_{14} - b_4a_{24} - b_9a_{54} + a_{64} \\ b_1a_{15} + b_3a_{35} + b_6a_{45} + b_7a_{55} & b_3a_{25} + b_7a_{45} & b_3a_{15} & a_{45} & b_4a_{15} + b_9a_{45} - a_{55} & b_5a_{15} - b_4a_{25} - b_9a_{55} + a_{65} \\ b_1a_{16} + b_3a_{36} + b_6a_{46} + b_7a_{56} & b_3a_{26} + b_7a_{46} & b_3a_{16} & a_{46} & b_4a_{16} + b_9a_{46} - a_{56} & b_5a_{16} - b_4a_{26} - b_9a_{56} + a_{66} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es simpléctica con

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{\{a_1, a_6\}}, \\ b_1 &= -\frac{b_3(4f_{16}f_{36} + 3f_{23}f_{56} - 4f_{26}^2)}{4f_{16}^2}, \quad b_4 = \frac{f_{56}}{2f_{16}}, \quad b_7 = \frac{b_3f_{23}}{2f_{16}} \quad \text{y} \quad b_9 = -\frac{f_{26}}{f_{16}}. \end{aligned}$$

Además, usando el hecho de que $rg(S) = 4$ en la ecuación (6.44), la matriz de normalización JS^* está dada por

$$\begin{aligned} JS^* &= [A(b_1a_1 + b_3a_3 + b_6a_4 + b_7a_5) \quad A(b_3a_2 + b_7a_4) \quad A(b_3a_1) \quad A(a_4) \quad A(b_4a_1 + b_9a_4 - a_5) \quad A(b_5a_1 - b_4a_2 - b_9a_5 + a_6)] \\ &= [b_3a_2 + b_7a_4 \quad b_3a_1 \quad 0 \quad 0 \quad -a_4 \quad -(b_4a_1 + b_9a_4 - a_5)], \end{aligned}$$

de donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{así,} \quad S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (6.1) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} K_2(q, p) &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \cdot (p_2, p_3, 0, 0, q_1, q_2) \\ &= q_1 p_2 + q_2 p_3. \end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración del ítem (1).

Ahora, demostraremos el ítem (2), en este caso existe base $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ tal que

$$Aa_1 = 0, \quad Aa_2 = a_1, \quad Aa_3 = a_2, \quad Aa_4 = a_3, \quad Aa_5 = 0, \quad Aa_6 = a_5. \quad (6.53)$$

Construiremos la matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$, del mismo modo que en el caso anterior, es decir, buscamos una matriz de normalización de la forma $N = A_1 B_1$. En este caso, notemos que la matriz JS^* viene dada por

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, se verifica fácilmente que la matriz $C = col(c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6)$, con $c_j, j = 1, \dots, 6$ linealmente independientes, es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{31} & c_{41} & c_{51} & c_{61} \\ 0 & c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{43} & 0 & c_{63} \\ 0 & 0 & 0 & c_{31}\delta_1 & 0 & c_{51}\delta_1 \\ 0 & 0 & c_{13}\delta_2 & c_{23}\delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{13}\delta_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.54)$$

con $c_{13}, c_{51} \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $c_{23}, c_{31}, c_{33}, c_{41}, c_{43}, c_{61}, c_{63} \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, como $B_1 = C^{-1}$ se tiene que

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & b_1\delta_2 & -b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2\delta_2 & -b_1\delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2\delta_2 \\ b_6 & 0 & 0 & b_7 & b_8 & b_9 \\ 0 & 0 & 0 & b_6\delta_1 & 0 & -b_8 \end{pmatrix}, \quad (6.55)$$

con $b_1 = -\frac{c_{23}}{c_{13}^2}$, $b_2 = \frac{1}{c_{13}}$, $b_3 = -\frac{\delta_1 c_{63}}{c_{13} c_{51}}$, $b_4 = \frac{\delta_2 (c_{23}^2 - c_{13} c_{33})}{c_{13}^3}$, $b_5 = \frac{\delta_2 (c_{51} c_{23}^3 - 2c_{13} c_{33} c_{51} c_{23} + c_{13}^2 (c_{43} c_{51} - c_{31} c_{63}))}{c_{13}^4 c_{51}}$,
 $b_6 = \frac{1}{c_{51}}$, $b_7 = -\frac{\delta_1 c_{61}}{c_{51}^2}$, $b_8 = -\frac{\delta_2 c_{31}}{c_{13} c_{51}}$ y $b_9 = -\frac{\delta (c_{23} c_{31} c_{51} - c_{13} c_{41} c_{51} + c_{13} c_{31} c_{61})}{c_{13}^2 c_{51}^2}$. Notemos que b_j , $j = 1, \dots, 9$ son número reales arbitrarios, con $b_1, b_2 \neq 0$, puesto que $c_{13}, c_{51} \neq 0$. Por consiguiente, la matriz $F = (B_1^{-1})^T J B_1^{-1} = C^T J C$ tiene la siguiente forma

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{14} & 0 & f_{34} & 0 & f_{36} \\ -f_{14} & 0 & -f_{34} & 0 & -f_{36} & f_{46} \\ 0 & 0 & 0 & f_{36} & 0 & f_{56} \\ 0 & 0 & -f_{36} & -f_{46} & -f_{56} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.56)$$

con $f_{14} = -\delta_2 c_{13}^2$, $f_{34} = \delta_1 c_{31}^2 + \delta_2 c_{23}^2 - 2\delta_2 c_{13} c_{33}$, $f_{36} = \delta_1 c_{31} c_{51}$, $f_{45} = -\delta_1 c_{31} c_{51}$, $f_{46} = \delta_1 c_{41} c_{51} - \delta_1 c_{31} c_{61} + \delta_2 c_{13} c_{62}$ y $f_{56} = \delta_1 c_{51}^2$. Note que $f_{14}, f_{56} \neq 0$, dado que $c_{13}, c_{51} \neq 0$ y además $f_{14}^4 f_{56}^2 = \det(F) = \det(A_1^T J A_1) = \det^2(A_1) \neq 0$.

De las ecuaciones (6.56) y (6.12), para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ se tiene las siguientes condiciones: $\{a_i, a_1\} = 0$, $i \neq 4$; $\{a_i, a_2\} = 0$, $i \neq 3$; $\{a_i, a_3\} = 0$, $i = 1, 3, 5$; $\{a_i, a_4\} = 0$, $i = 2, 4$; $\{a_i, a_5\} = 0$, $i = 1, 2, 3, 5$; $\{a_i, a_6\} = 0$, $i = 1, 2, 6$; $\{a_1, a_4\} = \{a_3, a_2\} = f_{14} \neq 0$; $\{a_3, a_4\} = f_{34}$; $\{a_3, a_6\} = \{a_5, a_4\} = f_{36}$; $\{a_4, a_6\} = f_{46}$; $\{a_5, a_6\} = f_{56} \neq 0$.

Ahora, calculando la ecuación $J = B_1^T F B_1$, determinamos algunas condiciones para las constantes b_j , $j = 1, \dots, 9$, esto es,

$$B_1^T F B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_6^2 f_{56} \delta_1 & 0 & \beta_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2^2 f_{14} \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2^2 f_{14} \delta_2 \\ -b_6^2 f_{56} \delta_1 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 \beta_{16} & \beta_{46} \\ 0 & b_2^2 f_{14} \delta_2 & 0 & -\delta_1 \beta_{16} & 0 & \beta_{56} \\ \beta_{16} & 0 & b_2^2 f_{14} \delta_2 & -\beta_{46} & \beta_{56} & 0 \end{pmatrix} = J,$$

con $\beta_{16} = -b_6(b_8 f_{56} + b_2 f_{36} \delta_2)$, $\beta_{46} = -b_2 b_3 f_{14} \delta_2 - b_7(b_8 f_{56} + b_2 f_{36} \delta_2) + b_6 \delta_1(-b_9 f_{56} + b_1 f_{36} \delta_2 + b_2 f_{46} \delta_2)$ y $\beta_{56} = b_1^2 f_{14} - b_2^2 f_{34} - b_8^2 f_{56} - 2b_2(b_4 f_{14} + b_8 f_{36}) \delta_2$.

Note que la matriz $B_1^T F B_1$ debe ser J , así, basta considerar

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_4\}|}}, \quad b_6 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_5, a_6\}|}}, \quad \delta_1 = \text{sgn}(\{a_5, a_6\}), \quad \delta_2 = -\text{sgn}(\{a_1, a_4\}), \quad (6.57)$$

y además, se debe verificar que $\beta_{16} = \beta_{46} = \beta_{56} = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= -b_6(b_8 f_{56} + b_2 f_{36} \delta_2), & 0 &= b_1^2 f_{14} - b_2^2 f_{34} - b_8^2 f_{56} - 2b_2(b_4 f_{14} + b_8 f_{36}) \delta_2 \\ 0 &= -b_2 b_3 f_{14} \delta_2 - b_7(b_8 f_{56} + b_2 f_{36} \delta_2) + b_6 \delta_1(-b_9 f_{56} + b_1 f_{36} \delta_2 + b_2 f_{46} \delta_2). \end{aligned} \quad (6.58)$$

Como buscamos una forma lo más simple posible para la matriz B_1 , sin pérdida de generalidad, podemos considerar $b_1 = b_5 = b_7 = b_9 = 0$, así, de (6.58) obtenemos

$$b_3 = \frac{b_6 \delta_1 f_{46}}{f_{14}}, \quad b_4 = -\frac{\delta_2 (b_2^2 f_{34} f_{56} - b_2^2 f_{36}^2)}{2b_2 f_{14} f_{56}} \quad \text{y} \quad b_8 = -\frac{b_2 \delta_2 f_{36}}{f_{56}}. \quad (6.59)$$

A partir de las restricciones $b_1 = b_5 = b_7 = b_9 = 0$ y de las ecuaciones obtenidas en (6.57) y (6.59), tenemos la expresión para la matriz N como

$$N = [b_6 a_5 \quad b_2 a_2 \quad b_2 a_1 \quad b_3 a_1 + \delta_1 b_6 a_6 \quad b_4 a_1 + \delta_2 b_2 a_3 + b_8 a_5 \quad -b_4 a_2 - \delta_2 b_2 a_4 - b_8 a_6]. \quad (6.60)$$

De manera equivalente la matriz N en (6.60), puede ser escrita como

$$N = \begin{pmatrix} b_6 a_{51} & b_2 a_{21} & b_2 a_{11} & b_3 a_{11} + \delta_1 b_6 a_{61} & b_4 a_{11} + \delta_2 b_2 a_{31} + b_8 a_{51} & -b_4 a_{21} - \delta_2 b_2 a_{41} - b_8 a_{61} \\ b_6 a_{52} & b_2 a_{22} & b_2 a_{12} & b_3 a_{12} + \delta_1 b_6 a_{62} & b_4 a_{12} + \delta_2 b_2 a_{32} + b_8 a_{52} & -b_4 a_{22} - \delta_2 b_2 a_{42} - b_8 a_{62} \\ b_6 a_{53} & b_2 a_{23} & b_2 a_{13} & b_3 a_{13} + \delta_1 b_6 a_{63} & b_4 a_{13} + \delta_2 b_2 a_{33} + b_8 a_{53} & -b_4 a_{23} - \delta_2 b_2 a_{43} - b_8 a_{63} \\ b_6 a_{54} & b_2 a_{24} & b_2 a_{14} & b_3 a_{14} + \delta_1 b_6 a_{64} & b_4 a_{14} + \delta_2 b_2 a_{34} + b_8 a_{54} & -b_4 a_{24} - \delta_2 b_2 a_{44} - b_8 a_{64} \\ b_6 a_{55} & b_2 a_{25} & b_2 a_{15} & b_3 a_{15} + \delta_1 b_6 a_{65} & b_4 a_{15} + \delta_2 b_2 a_{35} + b_8 a_{55} & -b_4 a_{25} - \delta_2 b_2 a_{45} - b_8 a_{65} \\ b_6 a_{56} & b_2 a_{26} & b_2 a_{16} & b_3 a_{16} + \delta_1 b_6 a_{66} & b_4 a_{16} + \delta_2 b_2 a_{36} + b_8 a_{56} & -b_4 a_{26} - \delta_2 b_2 a_{46} - b_8 a_{66} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es simpléctica con

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_4\}|}}, \quad b_6 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_5, a_6\}|}}, \quad \delta_1 = \text{sgn}(\{a_5, a_6\}), \quad \delta_2 = -\text{sgn}(\{a_1, a_4\}),$$

$$b_3 = \frac{b_6 \delta_1 f_{46}}{f_{14}}, \quad b_4 = -\frac{\delta_2 (b_2^2 f_{34} f_{56} - b_2^2 f_{36}^2)}{2b_2 f_{14} f_{56}} \quad \text{y} \quad b_8 = -\frac{b_2 \delta_2 f_{36}}{f_{56}}.$$

Además, usando el hecho de que $rg(S) = 4$ en la ecuación (6.53), la matriz de normalización JS^* está dada por

$$JS^* = [A(b_6 a_5) \quad A(b_2 a_2) \quad A(b_2 a_1) \quad A(b_3 a_1 + \delta_1 b_6 a_6) \quad A(b_4 a_1 + \delta_2 b_2 a_3 + b_8 a_5) \quad A(-b_4 a_2 - \delta_2 b_2 a_4 - b_8 a_6)] \\ = [0 \quad b_2 a_1 \quad 0 \quad \delta_1 b_6 a_5 \quad \delta_2 b_2 a_2 \quad -(b_4 a_1 + \delta_2 b_2 a_3 + b_8 a_5)],$$

de donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{así,} \quad S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (6.1) adquiere la siguiente forma

$$K_2(q, p) = \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad (6.61)$$

$$= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \cdot (0, p_3, 0, \delta_1 p_1, \delta_2 p_2, q_2)$$

$$= \frac{\delta_1}{2} p_1^2 + q_2 p_3 + \frac{\delta_2}{2} p_2^2, \quad \delta_1 = \pm 1, \quad \delta_2 = \pm 1.$$

Esto finaliza la demostración del teorema. ■

Finalmente, analizamos el caso $rg(S) = 5$, los detalles se muestra en el siguiente teorema. Este resultado ya fue estudiado anteriormente por Waz en [23].

Teorema 38 *Suponga que todo los valores propios de $A = JS$ son nulos y la matriz A no es diagonalizable. Si $rg(S) = 5$, entonces la forma normal para el Hamiltoniano en (6.1) es*

$$K_2 = \frac{1}{2}\delta p_1^2 + q_1 p_2 + q_2 p_3,$$

donde $\delta = \pm 1$.

Demostración. Supongamos que $rg(S) = 5$ y sean $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ vectores en \mathbb{R}^6 linealmente independientes, entonces

$$Aa_1 = 0, \quad Aa_2 = a_1, \quad Aa_3 = a_2, \quad Aa_4 = a_3, \quad Aa_5 = a_4, \quad Aa_6 = a_5. \quad (6.62)$$

Construiremos la matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$, análogamente al los teoremas anteriores, es decir, buscamos una matriz de normalización de la forma $N = A_1 B_1$. En este caso, notemos que la matriz JS^* viene dada por

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, se verifica fácilmente que la matriz $C = col(c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6)$, con $c_j, j = 1, \dots, 6$ linealmente independientes, es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{14} & c_{23} & c_{33} & c_{43} \\ 0 & c_{14} & c_{23} & c_{33} & c_{43} & c_{53} \\ c_{14} & c_{23} & c_{33} & c_{43} & c_{53} & c_{63} \\ 0 & 0 & 0 & c_{14}\delta & c_{23}\delta & c_{33}\delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{14}\delta & -c_{23}\delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14}\delta \end{pmatrix}, \quad (6.63)$$

con $c_{14} \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $c_{23}, c_{33}, c_{43}, c_{53}, c_{63} \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, como $B_1 = C^{-1}$ se tiene que

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ b_2 & b_3 & 0 & b_1\delta & -b_4 & -b_5 \\ b_3 & 0 & 0 & b_2\delta & -b_1\delta & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_3\delta & -b_2\delta & b_1\delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_3\delta & b_2\delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3\delta \end{pmatrix}, \quad (6.64)$$

donde $b_1 = \frac{c_{23}^2 - c_{14}c_{33}}{c_{14}^2}$, $b_2 = -\frac{c_{23}}{c_{14}^2}$, $b_3 = \frac{1}{c_{14}}$, $b_4 = -\frac{\delta}{c_{14}^2}(c_{23}^3 - 2c_{14}c_{23}c_{33} + c_{14}^2c_{43})$, $b_5 = -\frac{\delta}{c_{14}^2}(c_{23}^4 - 3c_{14}c_{23}^2c_{33} + 2c_{14}^2c_{23}c_{43} + c_{14}^2c_{33}^2 - c_{14}^3c_{53})$, $b_6 = -\frac{\delta}{c_{14}^2}(c_{23}^5 - 4c_{14}c_{23}^3c_{33} + 3c_{14}^2c_{23}^2c_{43} + 3c_{14}^2c_{33}^2c_{23} - 2c_{14}^3c_{23}c_{53} - 2c_{14}^3c_{33}c_{43} + c_{14}^4c_{63})$. Notemos que b_j , $j = 1, \dots, 6$ son número reales arbitrarios, con $b_3 \neq 0$, puesto que $c_{14} \neq 0$. Por consiguiente, la matriz $F = (B_1^{-1})^T J B_1^{-1} = C^T J C$ tiene la siguiente forma

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -f_{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{16} & 0 & f_{36} \\ 0 & 0 & -f_{16} & 0 & -f_{36} & 0 \\ 0 & f_{16} & 0 & f_{36} & 0 & f_{56} \\ -f_{16} & 0 & -f_{36} & 0 & -f_{56} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.65)$$

con $f_{16} = c_{14}^2\delta$, $f_{36} = \delta(2c_{14}c_{33} - c_{23}^2)$, $f_{56} = \delta(c_{33}^2 - 2c_{23}c_{43} + 2c_{14}c_{53})$. Note que $f_{16} \neq 0$, dado que $c_{14} \neq 0$ y además $f_{16}^6 = \det(F) = \det(A_1^T J A_1) = \det^2(A_1) \neq 0$.

De las ecuaciones (6.65) y (6.12), para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ se tiene las siguientes condiciones: $\{a_i, a_1\} = 0$, $i \neq 6$; $\{a_i, a_2\} = 0$, $i \neq 5$; $\{a_i, a_3\} = 0$, $i = 1, 2, 3, 5$; $\{a_i, a_4\} = 0$, $i = 1, 2, 4, 6$; $\{a_i, a_5\} = 0$, $i = 1, 3, 5$; $\{a_i, a_6\} = 0$, $i = 2, 4, 6$; $\{a_1, a_6\} = \{a_5, a_2\} = \{a_3, a_4\} = f_{16} \neq 0$; $\{a_3, a_6\} = \{a_5, a_4\} = f_{36}$; $\{a_5, a_6\} = f_{56}$.

Ahora, calculando la ecuación $J = B_1^T F B_1$, determinamos algunas condiciones para las constantes b_j , $j = 1, \dots, 6$, esto es,

$$B_1^T F B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_3^2 f_{16} \delta & 0 & \beta_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3^2 f_{16} \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3^2 f_{16} \delta \\ -b_3^2 f_{16} \delta & 0 & 0 & 0 & \delta \beta_{16} & 0 \\ 0 & -b_3^2 f_{16} \delta & 0 & -\delta \beta_{16} & 0 & \beta_{56} \\ -\beta_{16} & 0 & -b_3^2 f_{16} \delta & 0 & -\beta_{56} & 0 \end{pmatrix} = J,$$

donde $\beta_{16} = -\delta(f_{16}b_2^2 - 2b_1b_3f_{16} - b_3^2f_{36})$ y $\beta_{56} = -b_1^2f_{16} + b_2^2f_{36} - 2b_1b_3f_{36} - b_3^2f_{56} + 2b_2b_4f_{16}\delta + 2b_3b_5f_{16}\delta$.

Note que la matriz $B_1^T F B_1$ debe ser J , así, basta considerar

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{\{a_1, a_6\}}}, \quad \delta = \text{sgn}(\{a_1, a_6\}), \quad (6.66)$$

y además, se debe verificar que $\beta_{16} = \beta_{56} = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(f_{16}b_2^2 - 2b_1b_3f_{16} - b_3^2f_{36}), \\ 0 &= b_1^2f_{16} - b_2^2f_{36} + 2b_1b_3f_{36} + b_3^2f_{56} - 2b_2b_4f_{16}\delta - 2b_3b_5f_{16}\delta. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Como buscamos una forma lo más simple posible para la matriz B_1 , sin pérdida de generalidad podemos considerar $b_2 = b_4 = b_6 = 0$, así, de de (6.67) obtenemos

$$b_1 = -\frac{b_3f_{36}}{2f_{16}} \quad \text{y} \quad b_5 = \frac{b_3\delta(4f_{16}f_{56} - 3f_{36}^2)}{8f_{16}^2}. \quad (6.68)$$

A partir de las restricciones $b_2 = b_4 = b_6 = 0$ y de las ecuaciones obtenidas en (6.66) y (6.68), tenemos la expresión para la matriz N como

$$N = [b_1a_1 + b_3a_3 \quad b_3a_2 \quad b_3a_1 \quad \delta(b_1a_2 + b_3a_4) \quad b_5a_1 - \delta(b_1a_3 + b_3a_5) \quad -b_5a_2 + \delta(b_1a_4 + b_3a_6)]. \quad (6.69)$$

De manera equivalente la matriz N en (6.69), puede ser escrita como

$$N = \begin{pmatrix} b_1a_{11} + b_3a_{31} & b_3a_{21} & b_3a_{11} & \delta(b_1a_{21} + b_3a_{41}) & b_5a_{11} - \delta(b_1a_{31} + b_3a_{51}) & -b_5a_{21} + \delta(b_1a_{41} + b_3a_{61}) \\ b_1a_{12} + b_3a_{32} & b_3a_{22} & b_3a_{12} & \delta(b_1a_{22} + b_3a_{42}) & b_5a_{12} - \delta(b_1a_{32} + b_3a_{52}) & -b_5a_{22} + \delta(b_1a_{42} + b_3a_{62}) \\ b_1a_{13} + b_3a_{33} & b_3a_{23} & b_3a_{13} & \delta(b_1a_{23} + b_3a_{43}) & b_5a_{13} - \delta(b_1a_{33} + b_3a_{53}) & -b_5a_{23} + \delta(b_1a_{43} + b_3a_{63}) \\ b_1a_{14} + b_3a_{34} & b_3a_{24} & b_3a_{14} & \delta(b_1a_{24} + b_3a_{44}) & b_5a_{14} - \delta(b_1a_{34} + b_3a_{54}) & -b_5a_{24} + \delta(b_1a_{44} + b_3a_{64}) \\ b_1a_{15} + b_3a_{35} & b_3a_{25} & b_3a_{15} & \delta(b_1a_{25} + b_3a_{45}) & b_5a_{15} - \delta(b_1a_{35} + b_3a_{55}) & -b_5a_{25} + \delta(b_1a_{45} + b_3a_{65}) \\ b_1a_{16} + b_3a_{36} & b_3a_{26} & b_3a_{16} & \delta(b_1a_{26} + b_3a_{46}) & b_5a_{16} - \delta(b_1a_{36} + b_3a_{56}) & -b_5a_{26} + \delta(b_1a_{46} + b_3a_{66}) \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es simpléctica con

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{\sqrt{\{a_1, a_6\}}}, \quad \delta = \text{sgn}(\{a_1, a_6\}), \\ b_1 &= -\frac{b_3f_{36}}{2f_{16}} \quad \text{y} \quad b_5 = \frac{b_3\delta(4f_{16}f_{56} - 3f_{36}^2)}{8f_{16}^2}. \end{aligned}$$

Además, usando el hecho de que $rg(S) = 5$ en la ecuación (6.62), la matriz de normalización JS^* está dada por

$$\begin{aligned} JS^* &= [A(b_1a_1 + b_3a_3) \quad A(b_3a_2) \quad A(b_3a_1) \quad A(\delta(b_1a_2 + b_3a_4)) \quad A(b_5a_1 - \delta(b_1a_3 + b_3a_5)) \quad A(-b_5a_2 + \delta(b_1a_4 + b_3a_6))] \\ &= [b_3a_2 \quad b_3a_1 \quad 0 \quad \delta(b_1a_1 + b_3a_3) \quad -\delta(b_1a_2 + b_3a_4) \quad -b_5a_1 + \delta(b_1a_4 + b_3a_5)], \end{aligned}$$

de donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{así,} \quad S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (6.1) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned}
K_2(q, p) &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \cdot (p_2, p_3, 0, \delta p_1, q_1, q_2) \\
&= \frac{\delta}{2} p_1^2 + q_1 p_2 + q_2 p_3.
\end{aligned}$$

Así, el teorema queda demostrado. ■

6.2. Análisis del caso donde dos frecuencias son nulas, una no nula y la matriz A no es diagonalizable

A continuación, veremos que mediante un cambio de variable adecuado la función H_2 definida en (6.1) con veinticuatro parámetros se reduce a una forma particular más simple. Debido a que en la literatura aún no hay evidencias de formas normales para este caso, en esta sección presentamos resultados puramente originales. Esto fue posible gracias a la teoría desarrollada por K. Meyer en [13].

Para lograr nuestro objetivo, supongamos que la ecuación característica (3.2) asociada a la parte cuadrática H_2 en (6.1) tiene cuatro raíces nulas y dos raíces imaginarias puras, es decir, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ y $\lambda_5 = -\lambda_6 = iw_3$, en este caso, de acuerdo a la naturaleza de los valores propios y al rango de la matriz S , notamos que pueden ocurrir tres casos posibles, los cuales describiremos a continuación.

Suponga que la matriz G es una forma canónica de Jordan de la matriz JS , entonces G es de la forma

$$G = \left(\begin{array}{c|c} G_1 & 0 \\ \hline 0 & G_2 \end{array} \right), \quad (6.70)$$

donde G_1 es una matriz de orden 4×4 y G_2 es una matriz de orden 2×2 , vamos a describir el algoritmo de construcción para la normalización de la función Hamiltoniana H_2 definida en (6.1), es decir, haremos un cambio de variable por medio de una matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$, la cual garantice una forma particular más simple.

En el siguiente teorema, analizaremos con detalle el caso donde la matriz G_1 no es diagonalizable con $rg(G_1) = 1$, y cuando la matriz G_2 es diagonalizable, es decir, cuando la matriz G en (6.70) adquiere la siguiente forma

$$G = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 i \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_3 i \omega_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} G_1 & 0 \\ \hline 0 & G_2 \end{array} \right). \quad (6.71)$$

Teorema 39 *Si los valores propios de la matriz A son $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\pm i\omega_3 \neq 0$ y A no es diagonalizable, entonces existe una matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$ tal que el Hamiltoniano H_2 en (6.1) tiene la forma*

$$K_2 = \frac{\delta}{2} p_1^2 + \frac{\delta_3 \omega_3}{2} (q_3^2 + p_3^2), \quad (6.72)$$

donde $\delta = \pm 1$ y $\delta_3 = \pm 1$.

Demostración. De acuerdo a la sección (2.3), se tiene que los vectores propios y vectores propios generalizados, asociados a los valores propios $\omega_1 = \omega_2 = 0$ generan un subespacio simpléctico Z_1 de \mathbb{R}^6 , con $dim(Z_1) = 4$, y los vectores propios y vectores propios generalizados correspondientes al valor propio $i\omega_3$ generan un subespacio simpléctico Z_2 de \mathbb{R}^6 , con $dim(Z_2) = 2$ de tal manera que

$$\mathbb{R}^6 := Z_1 \oplus Z_2.$$

Luego en la ecuación (6.72), notemos que el término de la derecha está desacoplado, así, el análisis se reduce a dos casos independientes, el análisis del primer término del Hamiltoniano K_2 en (6.72) se realiza como en el Teorema 19 caso dos grados de libertad y el análisis del término de la derecha de (6.72) se realiza como en el Teorema 4 caso un grado de libertad. Observe que en (6.71) la matriz G_1 es una forma canónica de Jordan de JS para el sistema Hamiltoniano correspondiente a la función Hamiltoniana $K_2 = \frac{\delta}{2} p_1^2$ con dos grados de libertad y la matriz G_2 es una forma canónica de Jordan de JS para el sistema Hamiltoniano correspondiente a la función Hamiltoniana $K_2 = \frac{\delta_3 \omega_3}{2} (q_3^2 + p_3^2)$ con un grado de libertad.

Luego de acuerdo al Teorema 19, se tiene que $\mathcal{B}_1 = \{b_1 a_1, b_3 a_3, \delta b_1 a_2 + b_4 a_3 + b_5 a_4, a_4\}$ es una base simpléctica para Z_1 y si $a = r + is$ es el vector propio asociado al valor propio $i\omega_3$, entonces de acuerdo al Teorema 4, se sigue que $\mathcal{B}_2 = \{-2\delta_3 \kappa s, 2\kappa r\}$ es una base simpléctica para Z_2 . Además, recuerde que según la Proposición 1 sección 2.3 se tiene que $\{Z_1, Z_2\} = 0$. Por lo tanto, el conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{b_1 a_1, b_3 a_3, \delta b_1 a_2 + b_4 a_3 + b_5 a_4, a_4, -2\delta_3 \kappa s, 2\kappa r\}$

forma una base simpléctica de \mathbb{R}^6 . Así, obtenemos la expresión para la matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$ como

$$N = [b_1 a_1 \quad b_3 a_3 \quad -2\delta_3 \kappa s \quad \delta b_1 a_2 + b_4 a_3 + b_5 a_4 \quad a_4 \quad 2\kappa r]. \quad (6.73)$$

Esta matriz es simpléctica con

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, \quad b_3 = \frac{1}{\{a_3, a_4\}}, \quad b_4 = -b_1 \delta \frac{f_{24}}{f_{34}}, \quad b_5 = \delta b_1 \frac{f_{23}}{f_{34}}, \quad \delta = \text{sign}(\{a_1, a_2\}),$$

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{|\{r, s\}|}} \quad \text{y} \quad \delta_3 = \text{sgn}(\{r, s\}).$$

Además, la matriz de normalización JS^* está dada por

$$JS^* = [A(b_1 a_1) \quad A(b_3 a_3) \quad A(-2\delta_3 \kappa s) \quad A(\delta b_1 a_2 + b_4 a_3 + b_5 a_4) \quad A(a_4) \quad A(2\kappa r)]$$

$$= [0 \quad 0 \quad -\delta_3 \omega_3 (2\kappa r) \quad \delta(b_1 a_1) \quad 0 \quad \delta_3 \omega_3 (-2\delta_3 \kappa s)],$$

de donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \omega_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_3 \omega_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{así, } S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \omega_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \omega_3 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (6.1) adquiere la siguiente forma

$$K_2(q, p) = \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \omega_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \omega_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad (6.74)$$

$$= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \cdot (0, 0, \delta_3 \omega_3 q_3, \delta_1 p_1, 0, \delta_3 \omega_3 p_3)$$

$$= \frac{\delta}{2} p_1^2 + \frac{\delta_3 \omega_3}{2} (q_3^2 + p_3^2), \quad \delta = \pm 1, \quad \delta_3 = \pm 1.$$

Esto finaliza la demostración del Teorema. ■

En el siguiente teorema, analizaremos el caso donde la matriz G_1 no es diagonalizable con $rg(G_1) = 2$, y la matriz G_2 es diagonalizable, es decir, cuando la matriz G (6.70) adquiere

la siguiente forma

$$G = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 i \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_3 i \omega_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} G_1 & 0 \\ \hline 0 & G_2 \end{array} \right). \quad (6.75)$$

Teorema 40 *Si los valores propios de la matriz A son $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\pm i\omega_3 \neq 0$ y A no es diagonalizable, entonces existe una matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$ tal que el Hamiltoniano H_2 en (6.1) tiene la forma*

$$H_2 = \frac{\delta_1}{2} p_1^2 + \frac{\delta_2}{2} p_2^2 + \frac{\delta_3 \omega_3}{2} (q_3^2 + p_3^2), \quad (6.76)$$

donde $\delta_1 = \pm 1$, $\delta_2 = \pm 1$ y $\delta_3 = \pm 1$.

Demostración. Para la demostración de este teorema, se sigue los mismos pasos que en el Teorema 39, es decir, de acuerdo a sección (2.3), se tiene que los vectores propios y vectores propios generalizados, asociados a los valores propios $\omega_1 = \omega_2 = 0$ generan un subespacio simpléctico Z_1 de \mathbb{R}^6 , con $\dim(Z_1) = 4$, y los vectores propios y vectores propios generalizados correspondientes al valor propio $i\omega_3$ generan un subespacio simpléctico Z_2 de \mathbb{R}^6 , con $\dim(Z_2) = 2$ de tal manera que

$$\mathbb{R}^6 := Z_1 \oplus Z_2, \quad \text{con} \quad \{Z_1, Z_2\} = 0.$$

Note que en la ecuación (6.76), el término de la derecha está desacoplado, así, nuestro análisis es tal como en el Teorema 39, es decir, analizamos de manera independiente los dos primeros términos y el último término de (6.76) en uno y dos grados de libertad, respectivamente. En este caso, observe que en (6.75) la matriz G_1 es una forma canónica de Jordan de JS para el sistema Hamiltoniano correspondiente a la función Hamiltoniana $K_2 = \frac{\delta_1}{2} p_1^2 + \frac{\delta_2}{2} p_2^2$ con dos grados de libertad y la matriz G_2 es una forma canónica de Jordan de JS para el sistema Hamiltoniano correspondiente a la función Hamiltoniana $K_2 = \frac{\delta_3 \omega_3}{2} (q_3^2 + p_3^2)$ con un grado de libertad.

Luego de acuerdo con el Teorema 18, se tiene que $\mathcal{B}_1 = \{b_1 a_1, b_4 a_3, \delta_1 b_1 a_2, b_3 a_1 + \delta_2 b_4 a_4\}$ es una base simpléctica para Z_1 y si $a = r + is$ es el vector propio asociado al valor propio $i\omega_3$, nuevamente por el Teorema 4, se sigue que $\mathcal{B}_2 = \{-2\delta_3 \kappa s, 2\kappa r\}$ es una base simpléctica para Z_2 . Por lo tanto, el conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{b_1 a_1, b_4 a_3, \delta_1 b_1 a_2, b_3 a_1 + \delta_2 b_4 a_4, -2\delta_3 \kappa s, 2\kappa r\}$ forma una base simpléctica de \mathbb{R}^6 . De este modo, obtenemos la expresión para la matriz

$N \in Sp(3, \mathbb{R})$ como

$$N = [b_1 a_1 \quad b_4 a_3 \quad -2\delta_3 \kappa s \quad \delta_1 b_1 a_2 \quad b_3 a_1 + \delta_2 b_4 a_4 \quad 2\kappa r].$$

Esta matriz es simpléctica con

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, & b_4 &= \frac{1}{\sqrt{|\{a_3, a_4\}|}}, & b_3 &= \frac{b_4 \delta_2 f_{24}}{f_{12}}, \\ \delta_1 &= \text{sign}(\{a_1, a_2\}), & \delta_2 &= \text{sign}(\{a_3, a_4\}), \\ \kappa &= \frac{1}{2\sqrt{|\{r, s\}|}} & \text{y} & \delta_3 &= \text{sgn}(\{r, s\}). \end{aligned}$$

Además, la matriz de normalización JS^* está dada por

$$\begin{aligned} JS^* &= [A(b_1 a_1) \quad A(b_4 a_3) \quad A(-2\delta_3 \kappa s) \quad A(\delta_1 b_1 a_2) \quad A(b_3 a_1 + \delta_2 b_4 a_4) \quad A(2\kappa r)] \\ &= [0 \quad 0 \quad -\delta_3 \omega_3 (2\kappa r) \quad \delta_1 b_1 a_1 \quad \delta_2 b_4 a_3 \quad \delta_3 \omega_3 (-2\delta_3 \kappa s)], \end{aligned}$$

de donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \omega_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_3 \omega_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ así, } S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \omega_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \omega_3 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (6.1) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} K_2(q, p) &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \omega_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \omega_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \cdot (0, 0, \delta_3 \omega_3 q_3, \delta_1 p_1, \delta_2 p_2, \delta_3 \omega_3 p_3) \\ &= \frac{\delta_1}{2} p_1^2 + \frac{\delta_2}{2} p_2^2 + \frac{\delta_3 \omega_3}{2} (q_3^2 + p_3^2), \quad \delta_k = \pm 1, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración del Teorema. ■

En el siguiente teorema, analizaremos el caso donde la matriz G_1 no es diagonalizable con $rg(G_1) = 3$, y la matriz G_2 es diagonalizable, es decir, cuando la matriz G en (6.70)

adquiere la siguiente forma

$$G = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 i \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_3 i \omega_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} G_1 & 0 \\ \hline 0 & G_2 \end{array} \right). \quad (6.77)$$

Teorema 41 *Si los valores propios de la matriz A son $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\pm i\omega_3 \neq 0$ y A es no diagonalizable, entonces existe una matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$ tal que el Hamiltoniano H_2 en (6.1) tiene la forma*

$$H_2 = \frac{\delta}{2} p_1^2 - q_1 q_2 + \frac{\delta_3 \omega_3}{2} (q_3^2 + p_3^2), \quad (6.78)$$

donde $\delta = \pm 1$ y $\delta_3 = \pm 1$.

Demostración. La demostración de este teorema, se realiza de manera análoga al Teorema 40, es decir, de acuerdo a sección (2.3), se tiene que los vectores propios y vectores propios generalizados, asociados a los valores propios $\omega_1 = \omega_2 = 0$ generan un subespacio simpléctico Z_1 de \mathbb{R}^6 , con $\dim(Z_1) = 4$, y los vectores propios y vectores propios generalizados correspondientes al valor propio $i\omega_3$ generan un subespacio simpléctico Z_2 de \mathbb{R}^6 , con $\dim(Z_2) = 2$ de tal manera que

$$\mathbb{R}^6 := Z_1 \oplus Z_2, \quad \text{con} \quad \{Z_1, Z_2\} = 0.$$

Nuevamente en la ecuación (6.76), el término de la derecha está desacoplado, por lo tanto, del mismo modo que en el Teorema 39, analizamos de manera independiente los dos primeros términos y el último término de (6.78) en uno y dos grados de libertad, respectivamente. En este caso, observe que en (6.77) la matriz G_1 es una forma canónica de Jordan de JS para el sistema Hamiltoniano correspondiente a la función Hamiltoniana $K_2 = \frac{\delta}{2} p_1^2 - q_1 q_2$ con dos grados de libertad y la matriz G_2 es una forma canónica de Jordan de JS para el sistema Hamiltoniano correspondiente a la función Hamiltoniana $K_2 = \frac{\delta_3 \omega_3}{2} (q_3^2 + p_3^2)$ con un grado de libertad.

Luego de acuerdo con el Teorema 17, se tiene que $\mathcal{B}_1 = \{b_4 a_2, b_3 a_2 + \delta b_4 a_4, b_3 a_1 + \delta b_4 a_3, b_4 a_1\}$ es una base simpléctica para Z_1 y si $a = r + is$ es el vector propio asociado al valor propio $i\omega_3$, nuevamente por el Teorema 4, se sigue que $\mathcal{B}_2 = \{-2\delta_3 \kappa s, 2\kappa r\}$ es una base simpléctica para Z_2 . Así, el conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{b_4 a_2, b_3 a_2 + \delta b_4 a_4, b_3 a_1 + \delta b_4 a_3, b_4 a_1, -2\delta_3 \kappa s, 2\kappa r\}$ forma una base simpléctica de \mathbb{R}^6 . Por lo tanto, obtenemos la expresión para la matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$ como

$$N = [\delta b_4 a_2 \quad b_3 a_2 + \delta b_4 a_4 \quad -2\delta_3 \kappa s \quad b_3 a_1 + \delta b_4 a_3 \quad b_4 a_1 \quad 2\kappa r].$$

Esta matriz es simpléctica con

$$b_3 = -\frac{\delta b_4 f_{34}}{2f_{14}}, \quad b_4 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_4\}|}}, \quad \delta = -\text{sgn}(\{a_1, a_4\}),$$

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{|\{r, s\}|}} \quad \text{y} \quad \delta_3 = \text{sgn}(\{r, s\}).$$

Además, la matriz de normalización JS^* está dada por

$$JS^* = [A(b_4 a_2) \quad A(b_3 a_2 + \delta b_4 a_4) \quad A(-2\delta_3 \kappa s) \quad A(b_3 a_1 + \delta b_4 a_3) \quad A(b_4 a_1) \quad A(2\kappa r)]$$

$$= [b_4 a_1 \quad b_3 a_1 + \delta b_4 a_3 \quad -\delta_3 \omega_3 (2\kappa r) \quad \delta b_4 a_2 \quad 0 \quad \delta_3 \omega_3 (-2\delta_3 \kappa s)],$$

de donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \omega_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_3 \omega_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{así, } S^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \omega_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \omega_3 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (6.1) adquiere la siguiente forma

$$K_2(q, p) = \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \omega_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \omega_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \cdot (-q_2, -q_1, \delta_3 \omega_3 q_3, \delta p_1, 0, \delta_3 \omega_3 p_3)$$

$$= \frac{\delta}{2} p_1^2 - q_1 q_2 + \frac{\delta_3 \omega_3}{2} (q_3^2 + p_3^2), \quad \delta = \pm 1, \delta_3 = \pm 1.$$

Esto finaliza la demostración del Teorema. ■

6.3. Análisis del caso donde una frecuencia es nula, dos no nulas y la matriz A no es diagonalizable

En esta sección, veremos que mediante un cambio de variable adecuado la función Hamiltoniana H_2 en (6.1) con veinticuatro parámetros se reduce a una forma particular más simple. Los resultados que presentamos en esta sección son todos originales, pues aún no han sido

estudiados por otro personaje. Usando la teoría descrita por K. Meyer en [13], fue posible obtener nuestros resultados.

Para lograr nuestro objetivo, supongamos que la ecuación característica (3.3) asociada a la parte cuadrática H_2 en (6.1) tiene dos raíces nulas y cuatro raíces imaginarias puras, es decir, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\lambda_4 = i\omega_2$ y $\lambda_5 = -\lambda_6 = i\omega_3$, con $\omega_2 \neq 0$, $\omega_3 \neq 0$, en este caso, de acuerdo a la naturaleza de los valores propios, notamos que pueden ocurrir tres casos posibles.

Suponga que la matriz G es una forma canónica de Jordan de la matriz JS , entonces G es de la forma

$$G = \left(\begin{array}{c|c} G_1 & 0 \\ \hline 0 & G_2 \end{array} \right), \quad (6.79)$$

donde G_1 es una matriz de orden 2×2 y G_2 es una matriz de orden 4×4 , vamos a describir el algoritmo de construcción para la normalización de la parte cuadrática de la función Hamiltoniana H_2 definida en (6.1), es decir, haremos un cambio de variable por medio de una matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$, la cual garantice una forma particular más simple.

En el siguiente teorema, analizaremos con detalle el caso donde la matriz G_1 no es diagonalizable y la matriz G_2 es diagonalizable, es decir, cuando la matriz G en (6.79) adquiere la siguiente forma

$$G = \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \delta_2 i \omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_2 i \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 i \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_3 i \omega_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} G_1 & 0 \\ \hline 0 & G_2 \end{array} \right). \quad (6.80)$$

Teorema 42 *Si los valores propios de la matriz A son $\omega_1 = 0, \pm i\omega_2, \pm i\omega_3$ con $\omega_2 \neq \omega_3 \neq 0$ y A no es diagonalizable, entonces existe una matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$ tal que el Hamiltoniano H_2 en (6.1) tiene la forma*

$$H_2 = \frac{\delta_1}{2} p_1^2 + \frac{\delta_2 \omega_2}{2} (q_2^2 + p_2^2) + \frac{\delta_3 \omega_3}{2} (q_3^2 + p_3^2), \quad (6.81)$$

donde $\delta_1 = \pm 1$, $\delta_2 = \pm 1$ y $\delta_3 = \pm 1$.

Demostración. De acuerdo a la sección (2.3), se tiene que el vector propio y vector propio generalizado, asociados al valor propio nulo $\omega_1 = 0$ generan un subespacio simpléctico Z_1 de \mathbb{R}^6 , con $\dim(Z_1) = 2$ y los vectores propios y vectores propios generalizados correspondientes

a los valores propios $i\omega_2, i\omega_3$, generan un subespacio simpléctico Z_2 de \mathbb{R}^6 , con $\dim(Z_2) = 4$ de tal manera que

$$\mathbb{R}^6 := Z_1 \oplus Z_2.$$

Luego en la ecuación (6.81), notemos que los dos términos de la derecha están desacoplados, así, el análisis se reduce a dos casos independientes, el análisis del primer término del Hamiltoniano K_2 en (6.72) se realiza como en el Teorema 5 caso un grado de libertad y el análisis de los dos términos de la derecha de (6.72) se realiza como en el Teorema 6 caso dos grados de libertad. Observe que en (6.80) la matriz G_1 es una forma canónica de Jordan de JS para el sistema Hamiltoniano correspondiente a la función Hamiltoniana $K_2 = \frac{\delta_1}{2}p_1^2$ con un grado de libertad y la matriz G_2 es una forma canónica de Jordan de JS para el sistema Hamiltoniano correspondiente a la función Hamiltoniana $K_2 = \frac{\delta_2\omega_2}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\delta_3\omega_3}{2}(q_3^2 + p_3^2)$ con dos grados de libertad.

Luego de acuerdo al Teorema 5, se tiene que $\mathcal{B}_1 = \{\delta_1 b_1 a_1 \quad b_1 a_2\}$ es una base simpléctica para Z_1 y si $a_1 = r_1 + is_1, a_2 = r_2 + is_2$ son los vectores propios asociados a los valores propios $i\omega_2, i\omega_3$, respectivamente, entonces de acuerdo al Teorema 6, se sigue que $\mathcal{B}_2 = \{-2s_1\delta_2\kappa_1 \quad -2s_2\delta_3\kappa_2 \quad 2r_1\kappa_1 \quad 2r_2\kappa_2\}$ es una base simpléctica para Z_2 . Además, recuerde que según la Proposición 1 sección 2.3 se tiene que $\{Z_1, Z_2\} = 0$. Por lo tanto, el conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{\delta_1 b_1 a_1, b_1 a_2, -2s_1\delta_2\kappa_1, -2s_2\delta_3\kappa_2, 2r_1\kappa_1, 2r_2\kappa_2\}$ forma una base simpléctica de \mathbb{R}^6 . De este modo, obtenemos la expresión para la matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$ como

$$N = [\delta_1 b_1 a_1 \quad -2s_1\delta_2\kappa_1, -2s_2\delta_3\kappa_2 \quad b_1 a_2 \quad 2r_1\kappa_1, 2r_2\kappa_2], \quad (6.82)$$

Esta matriz es simpléctica con

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, \quad \delta_1 = \text{sgn}(\{a_1, a_2\}),$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{2\sqrt{|\{r_1, s_1\}|}}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{2\sqrt{|\{r_2, s_2\}|}}, \quad \delta_2 = \text{sgn}(\{r_1, s_1\}) \quad \text{y} \quad \delta_3 = \text{sgn}(\{r_2, s_2\}).$$

Además, la matriz de normalización JS^* está dada por

$$JS^* = [A(\delta b_1 a_1) \quad A(-2\delta_2\kappa_1 s_1) \quad A(-2\delta_3\kappa_2 s_2) \quad A(b_1 a_2) \quad A(2\kappa_1 r_1) \quad A(2\kappa_2 r_2)]$$

$$= [0 \quad -\delta_2\omega_2(2\kappa_1 r_1) \quad -\delta_3\omega_3(2\kappa_2 r_2) \quad \delta_1(\delta_1 b_1 a_2) \quad \delta_2\omega_2(-2\delta_2\kappa_1 s_1) \quad \delta_3\omega_3(-2\delta_3\kappa_2 s_2)],$$

de donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2\omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3\omega_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_2\omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_3\omega_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ así, } S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2\omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3\omega_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2\omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3\omega_3 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (6.1) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned}
K_2(q, p) &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2\omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3\omega_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2\omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3\omega_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \cdot (0, \delta_2\omega_2 q_2, \delta_3\omega_3 q_3, \delta_1 p_1, \delta_2\omega_2 p_2, \delta_3\omega_3 p_3) \\
&= \frac{\delta_1}{2} p_1^2 + \frac{\delta_2\omega_2}{2} (q_2^2 + p_2^2) + \frac{\delta_3\omega_3}{2} (q_3^2 + p_3^2), \quad \delta_k = \pm 1, \quad k = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{6.83}$$

Esto finaliza la demostración del teorema. ■

En el siguiente teorema, analizaremos el caso donde $\omega_2 = \omega_3 = \omega$ y las matrices G_1, G_2 son ambas no diagonalizable, es decir, cuando la matriz G adquiere la siguiente forma

$$G = \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \delta_2 i\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_2 i\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 i\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_3 i\omega \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} G_1 & 0 \\ \hline 0 & G_2 \end{array} \right). \tag{6.84}$$

Teorema 43 *Si los valores propios de la matriz A son $\omega_1 = 0, \pm i\omega_2 = \pm i\omega_3$ ($\omega = \omega_2 = \omega_3$) y A no es diagonalizable, entonces existe una matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$ tal que el Hamiltoniano H_2 en (6.1) tiene la forma*

$$H_2 = \frac{\delta_1}{2} p_1^2 + \frac{\delta_2}{2} (p_2^2 + p_3^2) + \omega (q_2 p_3 - q_3 p_2), \tag{6.85}$$

donde $\delta_1 = \pm 1$ y $\delta_2 = \pm 1$.

Demostración. Para la demostración de este teorema, se sigue las mismas ideas que en el Teorema 42, es decir, de acuerdo a sección (2.3), se tiene que el vector propio y vector propio generalizado, asociado al valor propio nulo $\omega_1 = 0$ generan un subespacio simpléctico Z_1 de \mathbb{R}^6 , con $\dim(Z_1) = 2$, y los vectores propios y vectores propios generalizados correspondientes al valor propio $i\omega$ generan un subespacio simpléctico Z_2 de \mathbb{R}^6 , con $\dim(Z_2) = 4$ de tal manera que

$$\mathbb{R}^6 := Z_1 \oplus Z_2, \quad \text{con} \quad \{Z_1, Z_2\} = 0.$$

Note que en la ecuación (6.85), el primer término está desacoplado, así, nuestro análisis es tal como en el Teorema 42, es decir, analizamos de manera independiente el primer término

y los dos términos de la derecha en (6.85) en uno y dos grados de libertad, respectivamente. En este caso, observe que en (6.84) la matriz G_1 es una forma canónica de Jordan de JS para el sistema Hamiltoniano correspondiente a la función Hamiltoniana $K_2 = \frac{\delta_1}{2}p_1^2$ con un grado de libertad y la matriz G_2 es una forma canónica de Jordan de JS para el sistema Hamiltoniano correspondiente a la función Hamiltoniana $K_2 = \frac{\delta_2}{2}(p_2^2 + p_3^2) + \omega(q_2p_3 - q_3p_2)$ con dos grados de libertad.

Luego de acuerdo con el Teorema 5, se tiene que $\mathcal{B}_1 = \{\delta_1 b_1 a_1, b_1 a_2\}$ es una base simpléctica para Z_1 , además, si $a_1 = r_1 + is_1$ es el vector propio asociado al valor propio $i\omega$ y $a_2 = r_2 + is_2$ es el correspondiente vector propio generalizado, según el Teorema 21, se sigue que $\mathcal{B}_2 = \{\kappa_1 r_1, -\kappa_1 s_1, \delta(\kappa_2 s_1 + \kappa_1 r_2), \delta(\kappa_2 r_1 - \kappa_1 s_2)\}$ es una base simpléctica para Z_2 . Por lo tanto, el conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{\delta_1 b_1 a_1, b_1 a_2, \kappa_1 r_1, -\kappa_1 s_1, \delta(\kappa_2 s_1 + \kappa_1 r_2), \delta(\kappa_2 r_1 - \kappa_1 s_2)\}$ forma una base simpléctica de \mathbb{R}^6 . Así, obtenemos la expresión para la matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$ como

$$N = [\delta_1 b_1 a_1 \quad \kappa_1 r_1, -\kappa_1 s_1 \quad b_1 a_2 \quad \delta_2(\kappa_2 s_1 + \kappa_1 r_2), \delta_2(\kappa_2 r_1 - \kappa_1 s_2)]. \quad (6.86)$$

Esta matriz es simpléctica con

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{a_1, a_2\}|}}, \quad \delta_1 = \text{sgn}(\{a_1, a_2\}),$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{r_1, r_2\}|}}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{2}\kappa_1^3 \{s_2, Jr_2\} \quad \text{y} \quad \delta_2 = \text{sgn}\{r_1, r_2\}.$$

Además, la matriz de normalización JS^* está dada por

$$JS^* = [A(\delta_1 b_1 a_1) \quad A(\kappa_1 r_1) \quad A(-\kappa_1 s_1) \quad A(b_1 a_2) \quad A(\delta_2(\kappa_2 s_1 + \kappa_1 r_2)) \quad A(\delta_2(\kappa_2 r_1 - \kappa_1 s_2))]$$

$$= [0 \quad \omega(-\kappa_1 s_1) \quad -\omega(\kappa_1 r_1) \quad \delta_1(\delta_1 b_1 a_2) \quad \omega\delta_2(\kappa_2 r_1 - \kappa_1 s_2) + \delta_2(\kappa_1 r_1) \quad -\omega\delta_2(\kappa_2 s_1 + \kappa_1 r_2) + \delta_2(-\kappa_1 s_1)],$$

de donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{así, } S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (6.1) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned}
K_2(q, p) &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \cdot (0, \omega p_3, -\omega p_2, \delta_1 p_1, -\omega q_3 + \delta_2 p_2, \omega q_2 + \delta_2 p_3) \\
&= \frac{\delta_1}{2} p_1^2 + \frac{\delta_2}{2} (p_2^2 + p_3^2) + \omega (q_2 p_3 - q_3 p_2), \quad \delta_k = \pm 1, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{6.87}$$

Esto finaliza la demostración del Teorema. ■

En el siguiente teorema, analizaremos el caso donde $\omega_2 = \omega_3 = \omega$, la matriz G_1 es diagonalizable y G_2 no es diagonalizable, es decir, cuando la matriz G en (6.79) adquiere la siguiente forma

$$G = \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \delta_2 i \omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_2 i \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 i \omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_3 i \omega \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} G_1 & 0 \\ \hline 0 & G_2 \end{array} \right). \tag{6.88}$$

Teorema 44 *Si los valores propios de la matriz A son $\omega_1 = 0, \pm i\omega_2, \pm i\omega_3$ ($\omega_2 = \omega_3 = \omega \neq 0$) y A no es diagonalizable, entonces existe una matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$ tal que el Hamiltoniano H_2 en (6.1) tiene la forma*

$$H_2 = \frac{\delta_2}{2} (p_2^2 + p_3^2) + \omega (q_2 p_3 - q_3 p_2), \tag{6.89}$$

donde $\delta_2 = \pm 1$.

Demostración. Análogamente a los teoremas anteriores y de acuerdo a sección (2.3), se tiene que los vectores propios, asociados al valor propio nulo $\omega_1 = 0$ generan un subespacio simpléctico Z_1 , con $\dim(Z_1) = 2$ de \mathbb{R}^6 , además, los vectores propios y vectores propios generalizados correspondientes al valor propio $i\omega \neq 0$ generan un subespacio simpléctico Z_2 , con $\dim(Z_2) = 4$ de \mathbb{R}^6 de tal manera que

$$\mathbb{R}^6 := Z_1 \oplus Z_2, \quad \text{con} \quad \{Z_1, Z_2\} = 0.$$

Notemos que claramente la matriz G_1 no aporta términos en (6.89), de este modo nuestro análisis se reduce a dos grados de libertad.

Luego de acuerdo a la observación 1, se tiene que $\mathcal{B}_1 = \{b_1a_1, b_1a_2\}$ es una base simpléctica para Z_1 , además, si $a_1 = r_1 + is_1$ es el vector propio asociado al valor propio $i\omega$ y $a_2 = r_2 + is_2$ es el correspondiente vector propio generalizado, según el Teorema 21, se sigue que $\mathcal{B}_2 = \{\kappa_1r_1, -\kappa_1s_1, \delta(\kappa_2s_1 + \kappa_1r_2), \delta(\kappa_2r_1 - \kappa_1s_2)\}$ es una base simpléctica para Z_2 . Por lo tanto, el conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{b_1a_1, b_1a_2, \kappa_1r_1, -\kappa_1s_1, \delta(\kappa_2s_1 + \kappa_1r_2), \delta(\kappa_2r_1 - \kappa_1s_2)\}$ forma una base simpléctica de \mathbb{R}^6 . Así, obtenemos la expresión para la matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$ como

$$N = [b_1a_1 \quad \kappa_1r_1, -\kappa_1s_1 \quad b_1a_2 \quad \delta_2(\kappa_2s_1 + \kappa_1r_2), \delta_2(\kappa_2r_1 - \kappa_1s_2)].$$

Esta matriz es simpléctica con

$$b_1 = \frac{1}{\{a_1, a_2\}}, \quad \kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{\{r_1, r_2\}}}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{2}\kappa_1^3\{s_2, Jr_2\} \quad \text{y} \quad \delta_2 = \text{sgn}\{r_1, r_2\}.$$

Además, la matriz de normalización JS^* está dada por

$$\begin{aligned} JS^* &= [A(\delta_1b_1a_1) \quad A(\kappa_1r_1) \quad A(-\kappa_1s_1) \quad A(b_1a_2) \quad A(\delta_2(\kappa_2s_1 + \kappa_1r_2)) \quad A(\delta_2(\kappa_2r_1 - \kappa_1s_2))] \\ &= [0 \quad \omega(-\kappa_1s_1) \quad -\omega(\kappa_1r_1) \quad 0 \quad \omega\delta_2(\kappa_2r_1 - \kappa_1s_2) + \delta_2(\kappa_1r_1) \quad -\omega\delta_2(\kappa_2s_1 + \kappa_1r_2) + \delta_2(-\kappa_1s_1)], \end{aligned}$$

de donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{así, } S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (6.1) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} K_2(q, p) &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \cdot (0, \omega p_3, -\omega p_2, 0, -\omega q_3 + \delta_2 p_2, \omega q_2 + \delta_2 p_3) \\ &= \frac{\delta_2}{2}(p_2^2 + p_3^2) + \omega(q_2 p_3 - q_3 p_2), \quad \delta_2 = \pm 1. \end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración del Teorema. ■

6.4. Análisis del caso donde las frecuencias son no nulas y la matriz A no es diagonalizable

En esta sección, veremos que mediante un cambio de variable adecuado la función Hamiltoniana H_2 en (6.1) con veinticuatro parámetros se reduce a una forma particular más simple. El resultado que presentamos en esta sección es original ya que no ha sido estudiado anteriormente, al igual que en las dos secciones previas, este resultado está basado en la teoría realizada por K. Meyer en [13].

Para lograr nuestro objetivo, supongamos que la ecuación característica (3.3) asociada a la parte cuadrática H_2 en (6.1) tiene raíces no nulas, es decir, $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\omega_1$, $\lambda_3 = -\lambda_4 = i\omega_2$ y $\lambda_5 = -\lambda_6 = i\omega_3$, con $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0$, $\omega_3 \neq 0$.

Suponga que la matriz G es una forma canónica de Jordan de la matriz JS , entonces G es de la forma

$$G = \left(\begin{array}{c|c} G_1 & 0 \\ \hline 0 & G_2 \end{array} \right), \quad (6.90)$$

donde G_1 es una matriz de orden 2×2 y G_2 es una matriz de orden 4×4 , vamos a describir el algoritmo de construcción para la normalización de la parte cuadrática de la función Hamiltoniana H_2 definida en (6.1), es decir, haremos un cambio de variable por medio de una matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$, la cual garantice una forma particular más simple.

En el siguiente teorema, analizaremos con detalle el caso donde la matriz G en (6.90) adquiere la siguiente forma

$$G = \left(\begin{array}{cc|cccc} \delta_1 i\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_1 i\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \delta_2 i\omega_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_2 i\omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 i\omega_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_3 i\omega_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} G_1 & 0 \\ \hline 0 & G_2 \end{array} \right). \quad (6.91)$$

Teorema 45 *Si los valores propios de la matriz A son $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2 = \pm i\omega_3$, con $\omega \neq \omega_1$ y la matriz A no es diagonalizable, entonces existe una matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$ tal que el Hamiltoniano H_2 en (6.1) tiene la forma*

$$H_2 = \frac{\delta_1 \omega_1}{2} (q_1^2 + p_1^2) + \frac{\delta_2}{2} (p_2^2 + p_3^2) + \omega (q_2 p_3 - q_3 p_2), \quad (6.92)$$

donde $\delta_1 = \pm 1$ y $\delta_2 = \pm 1$.

Demostración. Siguiendo las mismas ideas que en las secciones anteriores, se sigue el vector propio y vector propio generalizado, asociados al valor propio nulo $i\omega_1$ generan un subespacio simpléctico Z_1 de \mathbb{R}^6 , con $\dim(Z_1) = 2$ y los vectores propios y vectores propios generalizados correspondientes al valore propio $i\omega$, generan un subespacio simpléctico Z_2 de \mathbb{R}^6 , con $\dim(Z_2) = 4$ de tal manera que

$$\mathbb{R}^6 := Z_1 \oplus Z_2, \quad \text{con} \quad \{Z_1, Z_2\} = 0.$$

Luego de acuerdo al Teorema 4, se tiene que $\mathcal{B}_1 = \{-2\delta\kappa s, \quad 2\kappa r\}$ es una base simpléctica para Z_1 , además, si $a_1 = r_1 + is_1$ es el vector propio asociado al valor propio $i\omega$ y $a_2 = r_2 + is_2$ es el correspondiente vector propio generalizado, según el Teorema 21, se sigue que $\mathcal{B}_2 = \{\kappa_1 r_1, -\kappa_1 s_1, \delta(\kappa_2 s_1 + \kappa_1 r_2), \delta(\kappa_2 r_1 - \kappa_1 s_2)\}$ es una base simpléctica para Z_2 . Por lo tanto, el conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{-2\delta\kappa s, \quad 2\kappa r, \quad \kappa_1 r_1, -\kappa_1 s_1, \delta(\kappa_2 s_1 + \kappa_1 r_2), \delta(\kappa_2 r_1 - \kappa_1 s_2)\}$ forma una base simpléctica de \mathbb{R}^6 . De este modo, obtenemos la expresión para la matriz $N \in Sp(3, \mathbb{R})$ como

$$N = [-2\delta\kappa s, \quad \kappa_1 r_1, -\kappa_1 s_1, 2\kappa r \quad \delta(\kappa_2 s_1 + \kappa_1 r_2), \delta(\kappa_2 r_1 - \kappa_1 s_2)]. \quad (6.93)$$

Esta matriz es simpléctica con

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2\sqrt{|\{r, s\}|}}, & \delta &= \text{sgn}(\{r, s\}), \\ \kappa_1 &= \frac{1}{\sqrt{|\{r_1, r_2\}|}}, & \kappa_2 &= \frac{1}{2}\kappa_1^3 \{s_2, Jr_2\} \quad \text{y} \quad \delta_2 = \text{sgn}\{r_1, r_2\}. \end{aligned}$$

Además, la matriz de normalización JS^* está dada por

$$\begin{aligned} JS^* &= [A(-2\delta_1\kappa s), \quad A(\kappa_1 r_1), A(-\kappa_1 s_1), A(2\kappa r) \quad A(\delta(\kappa_2 s_1 + \kappa_1 r_2)), A(\delta(\kappa_2 r_1 - \kappa_1 s_2))] \\ &= [-\delta_1\omega_1(2\kappa r) \quad \omega(-\kappa_1 s_1) \quad -\omega(\kappa_1 r_1) \quad \delta_1\omega_1(-2\delta_1\kappa r) \quad \omega\delta_2(\kappa_2 r_1 - \kappa_1 s_2) + \delta_2(\kappa_1 r_1) \quad -\omega\delta_2(\kappa_2 s_1 + \kappa_1 r_2) + \delta_2(-\kappa_1 s_1)], \end{aligned}$$

de donde se obtiene que la matriz JS^* es de la forma

$$JS^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_1\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\ -\delta_1\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{así, } S^* = \begin{pmatrix} \delta_1\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal para el Hamiltoniano H_2 en (6.1) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 K_2(q, p) &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} \delta_1 \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \cdot (\delta_1 \omega_1 q_1, \omega p_3, -\omega p_2, \delta_1 \omega_1 p_1, -\omega q_3 + \delta_2 p_2, \omega q_2 + \delta_2 p_3) \\
 &= \frac{\delta_1 \omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\delta_2}{2}(p_2^2 + p_3^2) + \omega(q_2 p_3 - q_3 p_2), \quad \delta_k = \pm 1, \quad k = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{6.94}$$

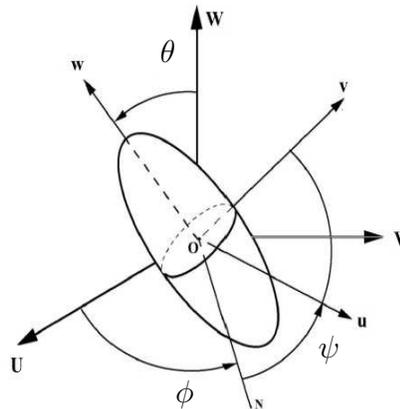
Esto finaliza la demostración del Teorema. ■

6.5. Aplicaciones

6.5.1. Aplicación al problema del satélite caso espacial

En esta subsección, presentamos algunas aplicaciones de nuestros resultados conseguidos para formas normales en tres grados de libertad. Usando los algoritmos descritos en los teoremas anteriores, vamos a obtener la forma normal de la parte cuadrática de la función Hamiltoniana del problema del satélite en el caso espacial (ver [10]).

Consideremos la función Hamiltoniana que describe el movimiento de un satélite alrededor de su centro de masa, donde se supone que el satélite es un cuerpo rígido dinámicamente simétrico, es decir, cuando el elipsoide de inercia es un elipsoide de revolución y el centro de masa del satélite se mueve en una órbita circular.



Esta función viene dada por

$$\begin{aligned}
H = & \frac{\Theta^2}{2} \left[\frac{\nu_1}{\nu_2} + \cot^2 \phi (\nu_1 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \right] + \frac{1}{2} \Psi^2 \csc^2 \phi (\nu_1 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} \Phi^2 (\nu_1 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\
& + \frac{3}{2} \left[\frac{(\nu_2 - 1) \sin^2 \phi \sin^2 \psi + (\nu_1 - 1) (\cos \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \theta \sin \psi)^2}{\nu_1} \right] - \frac{\Phi \Theta \cot \phi \sin(2\theta)}{2} \\
& + \frac{\nu_1}{2} \Phi \Theta \cot \phi \sin(2\theta) + \frac{1}{2} (1 - \nu_1) \Phi \Psi \csc \phi \sin(2\theta) - \Theta \Psi \cot \phi \csc \phi (\nu_1 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \Psi,
\end{aligned} \tag{6.95}$$

donde $\nu_1 = \frac{a}{b}$, $\nu_2 = \frac{c}{b}$ son parámetros y a, b, c los momentos de inercia. El sistema Hamiltoniano asociado a la función Hamiltoniana H en (6.95) viene dado por

$$\begin{aligned}
H_\Phi &= (\nu_1 - 1) \sin \theta \cos \theta (\Theta \cot \phi - \Psi \csc \phi) + \nu_1 \Phi \sin^2 \theta + \Phi \cos^2 \theta, \\
H_\Theta &= \frac{\nu_1 \Theta}{\nu_2} + \cot \phi [\csc \phi (\Theta \cos \phi - \Psi) (\nu_1 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (\nu_1 - 1) \Phi \sin \theta \cos \theta], \\
H_\Psi &= -1 + \csc \phi [(\nu_1 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) (\Psi \csc \phi - \Theta \cot \phi) - (\nu_1 - 1) \Phi \sin \theta \cos \theta], \\
H_\phi &= \frac{\csc^3 \phi}{2\nu_1} [\nu_1^2 \cos^2 \theta (2 \cos \phi (\Theta^2 + \Psi^2) - \Theta \Psi (\cos(2\phi) + 3)) - 3(\nu_1 - 1) \sin^4 \phi \sin \theta \cos \theta \sin(2\psi) \\
& + \nu_1 (\Theta - \Psi \cos \phi) ((\nu_1 - 1) \Phi \sin \phi \sin(2\theta) - 2 \sin^2 \theta (\Psi - \Theta \cos \phi)) + 6 \sin^4 \phi \cos \phi \sin^2 \psi \\
& - 6 \sin^4 \phi \cos \phi \sin^2 \psi (\nu_2 - (\nu_1 - 1) \sin^2 \theta)], \\
H_\theta &= \frac{\nu_1 - 1}{\nu_1} [\cos(2\theta) (\nu_1 \Phi \Psi \csc \phi - \nu_1 \Phi \Theta \cot \phi + 3 \cos \phi \sin \psi \cos \psi) - \nu_1 \Theta \Psi \cot \phi \csc \phi \sin(2\theta) \\
& + \sin \theta \cos \theta (\nu_1 \Theta^2 \cot^2 \phi + \nu_1 \Psi^2 \csc^2 \phi - \nu_1 \Phi^2 - 3 \cos^2 \phi \sin^2 \psi + 3 \cos^2 \psi)], \\
H_\psi &= \frac{3}{\nu_1} [(\nu_1 - 1) (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \cos \theta \sin \psi) (\cos \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \theta \sin \psi) + \frac{1}{2} \sin^2 \phi \sin(2\psi) \\
& - \nu_2 \sin^2 \phi \sin \psi \cos \psi].
\end{aligned} \tag{6.96}$$

Considerando el dominio de los ángulos de eules como $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \psi < 2\pi$, el sistema Hamiltoniano tiene como equilibrios $(\phi_0, \theta_0, \psi_0, \Phi_0, \Theta_0, \Psi_0)$ a

$$\begin{aligned}
e_1 &= \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\nu_1} \right), & e_2 &= \left(\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}, 0, 0, \frac{1}{\nu_1} \right), & e_3 &= \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 1 \right), \\
e_4 &= \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, 0, 1 \right), & e_5 &= \left(\frac{\pi}{2}, 0, \pi, 0, 0, \frac{1}{\nu_1} \right), & e_6 &= \left(\frac{\pi}{2}, \pi, 0, 0, 0, \frac{1}{\nu_1} \right), \\
e_7 &= \left(\frac{\pi}{2}, \pi, \pi, 0, 0, \frac{1}{\nu_1} \right), & e_8 &= \left(\frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}, 0, 0, \frac{1}{\nu_1} \right), & e_9 &= \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \pi, 0, 0, 1 \right).
\end{aligned} \tag{6.97}$$

Es de nuestro interés obtener un caso degenerado para algún valor de los parámetros ν_1 y ν_2 , motivo por el cual consideramos la solución de equilibrio $e_4 = (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, 0, 1)$.

Después de realizar una traslación al origen y una expansión en serie de Taylor, la función Hamiltoniana H admite la siguiente forma

$$H = H_0 + H_2 + H_3 + H_4 + \dots \tag{6.98}$$

donde

$$\begin{aligned}
H_0 &= \frac{1}{2\nu_1}[3(\nu_2 - 1) - \nu_1], \\
H_2 &= \frac{3(\nu_1\phi_1^2 - \nu_2\phi_1^2 - \nu_2\psi_1^2 + \psi_1^2)}{2\nu_1} + \frac{\nu_1}{2}\left(\frac{\Theta_1^2}{\nu_2} + \Phi_1^2 + \theta_1^2\right) + \frac{\phi_1^2 - \theta_1^2 + \Psi_1^2}{2} + (\nu_1 - 1)\Phi_1\theta_1 + \phi_1\Theta_1, \\
H_3 &= -\frac{3\phi_1\theta_1\psi_1}{\nu_1} + (\nu_1 - 1)\Phi_1\theta_1\Psi_1 + \nu_1\theta_1^2\Psi_1 + \phi_1^2\Psi_1 + 3\phi_1\theta_1\psi_1 + \phi_1\Theta_1\Psi_1 - \theta_1^2\Psi_1, \\
H_4 &= \frac{\phi_1^2(\nu_2\phi_1^2 + 3\nu_2\psi_1^2 + 3\theta_1^2) - \nu_1\phi_1^2(\phi_1^2 + 3\nu_1\theta_1^2 + 3\nu_1\psi_1^2) + \psi_1^2(\nu_2\psi_1^2 + 3\nu_1\theta_1^2 - 3\theta_1^2 - \psi_1^2)}{2\nu_1} + \frac{5\phi_1^3\Theta_1}{6} + \\
&\quad \frac{(\nu_1 - 1)\Phi_1(3\phi_1^2\theta_1 - 4\theta_1^3) + \nu_1\theta_1^2(3\phi_1^2 - \theta_1^2 + 3\Psi_1^2) + \phi_1^2(2\phi_1^2 - 3\theta_1^2 + 3\Psi_1^2) + \theta_1^2(\theta_1^2 - 3\Psi_1^2)}{6} \\
&\quad + \frac{\phi_1^2\Theta_1^2 + \Phi_1^2\theta_1^2 - \nu_1\Phi_1^2\theta_1^2}{2} + (\nu_1 - 1)\phi_1\Phi_1\theta_1\Theta_1 + \nu_1\phi_1\theta_1^2\Theta_1 - \phi_1\theta_1^2\Theta_1.
\end{aligned} \tag{6.99}$$

De donde se tiene que la parte cuadrática del Hamiltoniano H en (6.99) está dado por

$$H_2 = \frac{3(\nu_1\phi_1^2 - \nu_2\phi_1^2 - \nu_2\psi_1^2 + \psi_1^2)}{2\nu_1} + \frac{\nu_1}{2}\left(\frac{\Theta_1^2}{\nu_2} + \Phi_1^2 + \theta_1^2\right) + \frac{\phi_1^2 - \theta_1^2 + \Psi_1^2}{2} + (\nu_1 - 1)\Phi_1\theta_1 + \phi_1\Theta_1. \tag{6.100}$$

La matriz asociada a las ecuaciones Hamiltonianas correspondiente a H_2 viene dada por

$$JS = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 - 1 & 0 & \nu_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{2\nu_1}{\nu_2} + 2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{3(2\nu_1 - 2\nu_2)}{\nu_1} - 2\right) & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(2 - 2\nu_1) & 0 & 1 - \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3(2 - 2\nu_2)}{2\nu_1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicación 6 *Caso donde las frecuencias son todas nulas y $rg(S) = 4$ ítem 2 Teorema 37.*

Si $\nu_1 = 1$ y $\nu_2 = 4/3$, los valores propios de la matriz JS del sistema linealizado son todos nulos. En este caso $rg(S) = 4$ y la matriz JS tiene como vectores propios asociados al valor propio nulo a $a_1 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$ y $a_5 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Se puede verificar que los vectores $a_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $a_3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$ y $a_4 = (7/4, 0, 0, 0, -1, 0)$ son vectores propios generalizados del vector propio a_1 y el vector $a_6 = (0, 1, 1, 0, 0, 1)$ es el vector propio generalizado del vector a_5 , el conjunto de vectores $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ satisface la ecuación (6.53). Por lo tanto, de acuerdo a la notación del Teorema 37 ítem 2 se sigue que: $f_{14} = \{a_1, a_4\} = 1$, $f_{36} = 0$, $f_{34} = -\frac{7}{4}$, $f_{46} = 1$, $f_{56} = -1$, $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 1$, $b_4 = -\frac{7}{8}$,

$b_6 = 1$ y $b_8 = 0$. De acuerdo a la ecuación (6.60) se sigue que la matriz N viene dada por

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es simpléctica, pues

$$\begin{aligned} N^T J N &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{7}{8} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{8} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, usando la ecuación (6.61) en el Teorema 37, concluimos que la forma normal K para H_2 en (6.100) es dada por

$$K(q, p) = -\frac{1}{2}p_1^2 + q_2p_3 + \frac{1}{2}p_2^2.$$

Aplicación 7 *Caso donde dos frecuencias son nulas, una no nula y $rg(G_1) = 1$.*

Si $\nu_1 = \nu_2 = 1$, los valores propios de la matriz JS del sistema linealizado son $\{0, 0, 0, 0, i, -i\}$. En este caso $rg(G_1) = 1$ y siguiendo la notación del Teorema 19, la matriz JS tiene como vectores propios asociados a los valores propios nulos a $a_1 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ y $a_4 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Se puede verificar que el vector $a_2 = (-1, 1, 1, 0, 1, 1)$ es un vector propio generalizado del vector propio a_1 , es decir, se cumple que $Aa_2 = a_1$.

Por otro lado el vector $a = (i, -1, 0, 1, 0, 0)$ es el vector propio correspondiente al valor propio i , de acuerdo a la notación del Teorema 4 se sigue que $r = (0, -1, 0, 1, 0, 0)$ y $s = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Por lo tanto, se obtiene que $b_1 = 1$, $b_3 = 1$, $b_4 = -1$, $b_5 = -1$, $\delta = 1$, $\kappa = \frac{1}{2}$ y

$\delta_3 = 1$. De acuerdo a la ecuación (6.73) se sigue que la matriz N viene dada por

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es simpléctica, pues

$$\begin{aligned} N^T J N &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, usando la ecuación (6.74) en el Teorema 39, concluimos que la forma normal K para H_2 en (6.100) es dada por

$$K(q, p) = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}(q_3^2 + p_3^2).$$

Aplicación 8 *Caso donde una frecuencia es nula, dos no nulas y G_2 no diagonalizable.*

Si $\nu_1 = \nu_2 = 5$, los valores propios de la matriz JS del sistema linealizado son $\{0, 0, \pm i, \pm 2i\}$. En este caso $rg(G_1) = 1$ y siguiendo la notación del Teorema 5, la matriz JS tiene como vector propio asociados a al valor propio nulo a $a_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Se puede verificar que el vector $a_2 = (0, 0, 5/12, 0, 0, 1)$ es un vector propio generalizado del vector propio a_1 , es decir, se cumple que $Aa_2 = a_1$. Por otro lado el vector $a_3 = (i, -1, 0, 1, 0, 0)$ es el vector propio correspondiente al valor propio i y el vector $a_4 = (-1, \frac{i}{2}, 0, 0, 1, 0)$ es el vector propio correspondiente al valor propio $2i$, de acuerdo a la notación del Teorema 6 se sigue que $r_1 = (0, -1, 0, 1, 0, 0)$, $s_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $r_2 = (-1, 0, 0, 0, 1, 0)$ y $s_2 = (0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0)$. Por lo tanto, se obtiene que $b_1 = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\delta_1 = -1$, $\kappa_1 = \frac{1}{2}$, $\kappa_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\delta_2 = -1$ y $\delta_3 = -1$. De acuerdo

a la ecuación (6.82) se sigue que la matriz N viene dada por

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{\frac{12}{5}} & 0 & 0 & \sqrt{\frac{12}{5}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es simpléctica, pues

$$\begin{aligned} N^T J N &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{12}{5}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{12}} & 0 & 0 & \sqrt{\frac{12}{5}} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{\frac{12}{5}} & 0 & 0 & \sqrt{\frac{12}{5}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, usando la ecuación (6.83) en el Teorema 42, concluimos que la forma normal K para H_2 en (6.100) es dada por

$$K(q, p) = -\frac{1}{2}p_1^2 - \frac{1}{2}(q_2^2 + p_2^2) - (q_3^2 + p_3^2).$$

Considere la solución de equilibrio $e_4 = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\nu_1})$. Después de realizar una traslación al origen y una expansión en serie de Taylor, la función Hamiltoniana H admite la siguiente forma

$$H = H_0 + H_2 + H_3 + H_4 + \dots \quad (6.101)$$

donde

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{3}{2} - \frac{2}{\nu_1}, \\ H_2 &= \frac{\nu_1^3 \Psi_1^2 + \nu_1 \phi_1^2 - \nu_1 \theta_1^2 + \theta_1^2}{2\nu_1^2} - \frac{3(\nu_1 \theta_1^2 + \nu_1 \psi_1^2 - \nu_2 \psi_1^2 - \theta_1^2)}{2\nu_1} + \frac{\nu_1 \Theta_1^2}{2\nu_2} - \frac{2(\nu_1 - 1)\Phi_1 \theta_1}{2\nu_1} + \phi_1 \Theta_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}\Phi_1^2, \end{aligned} \quad (6.102)$$

$$\begin{aligned}
H_3 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{6\phi_1\theta_1\psi_1}{\nu_1} + 2\nu_1\phi_1\Theta_1\Psi_1 - 2(\nu_1 - 1)\Phi_1\theta_1\Psi_1 + \frac{2\theta_1^2\Psi_1}{\nu_1} + 2\phi_1^2\Psi_1 + 6\phi_1\theta_1\psi_1 - 2\theta_1^2\Psi_1 \right), \\
H_4 &= \frac{3\nu_1^3\phi_1^2\Psi_1^2 - 3\nu_1^3\theta_1^2\Psi_1^2 + 3\nu_1^2\theta_1^2\Psi_1^2 + 2\nu_1\phi_1^4 - 3\nu_1\phi_1^2\theta_1^2 + \nu_1\theta_1^4 + 3\phi_1^2\theta_1^2 - \theta_1^4}{6\nu_1^2} + \frac{\phi_1\theta_1^2\Theta_1}{\nu_1} + \\
&\quad \frac{\nu_1\theta_1^4 + 3\nu_1\theta_1^2\psi_1^2 + \nu_1\psi_1^4 - 3\nu_2\phi_1^2\psi_1^2 - \nu_2\psi_1^4 + 3\phi_1^2\psi_1^2 - \theta_1^4 - 3\theta_1^2\psi_1^2}{\nu_1} - (\nu_1 - 1)\phi_1\Phi_1\theta_1\Theta_1 - \\
&\quad \frac{(\nu_1 - 1)\Phi_1(3\phi_1^2\theta_1 - 4\theta_1^3)}{6\nu_1} + \frac{\nu_1}{2}(\phi_1^2\Theta_1^2 + \Phi_1^2\theta_1^2) + \frac{5\phi_1^3\Theta_1}{6} - \phi_1\theta_1^2\Theta_1 - \frac{1}{2}\Phi_1^2\theta_1^2.
\end{aligned}$$

De donde se tiene que la parte cuadrática del Hamiltoniano H en (6.101) está dado por

$$\begin{aligned}
H_2 &= \frac{\nu_1^3\Psi_1^2 + \nu_1\phi_1^2 - \nu_1\theta_1^2 + \theta_1^2}{2\nu_1^2} - \frac{3(\nu_1\theta_1^2 + \nu_1\psi_1^2 - \nu_2\psi_1^2 - \theta_1^2)}{2\nu_1} + \frac{\nu_1\Theta_1^2}{2\nu_2} - \frac{2(\nu_1 - 1)\Phi_1\theta_1}{2\nu_1} + \phi_1\Theta_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}\Phi_1^2.
\end{aligned} \tag{6.103}$$

La matriz asociada a las ecuaciones Hamiltonianas correspondiente a H_2 viene dada por

$$JS = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\nu_1-1}{\nu_1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\nu_1}{\nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ -\frac{1}{\nu_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{3(2\nu_1-2)}{\nu_1} - \frac{2-2\nu_1}{\nu_1^2} \right) & 0 & \frac{\nu_1-1}{\nu_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3(2\nu_1-2\nu_2)}{2\nu_1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicación 9 *Caso donde una frecuencia es nula y dos no nulas e iguales.*

Si $\nu_1 = \nu_2 = \frac{1}{10}(3\sqrt{5} + 5)$, los valores propios de la matriz JS del sistema linealizado son $\{0, i\sqrt{7 - 3\sqrt{5}}, -i\sqrt{7 - 3\sqrt{5}}\}$ cada uno con multiplicidad dos. En este caso ambas matrices G_1 y G_2 no son diagonalizables, además, la matriz JS tiene como vectores propios asociados al valor propio nulo a $a_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ y como vector propio generalizado correspondiente al valor propio nulo a $a_2 = (0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}(3\sqrt{5} - 5))$. Por otro lado el vector propio y vector propio generalizado correspondiente al valor propio $i\sqrt{7 - 3\sqrt{5}}$ son a_2 y a_4 , respectivamente, donde

$$\begin{aligned}
a_2 &= \left(-\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{i}{2}\sqrt{3 + \sqrt{5}}, 0, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 1, 0 \right), \\
a_4 &= \left(0, \frac{2 + \sqrt{5}}{6}, 0, -\frac{7 + 5\sqrt{5}}{12}, \frac{2i}{3}\sqrt{3 + \sqrt{5}}, 0 \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de acuerdo a la notación del Teorema 21 se sigue que $r_1 = \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0, 0, 0, 1, 0\right)$, $s_1 = \left(0, \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $r_2 = \left(0, \frac{2+\sqrt{5}}{6}, 0, -\frac{7+5\sqrt{5}}{12}, 0, 0\right)$ y $s_2 = \left(0, 0, 0, 0, \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5}}}{3}, 0\right)$. Así, se obtiene que $b_1 = \sqrt{\frac{1}{10}(5+3\sqrt{5})}$, $\delta_1 = 1$, $\kappa_1 = \sqrt{\frac{3}{3+\sqrt{5}}}$, $\kappa_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{6}(3+\sqrt{5})}$ y $\delta_2 = 1$. De acuerdo a la ecuación (6.86) se sigue que la matriz N viene dada por

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{2\sqrt{3+\sqrt{5}}} & 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}}{8\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{3(3+\sqrt{5})}} - \frac{3+\sqrt{5}}{8\sqrt{6}} & 0 \\ \sqrt{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2(3+\sqrt{5})}} & 0 & -\frac{11+9\sqrt{5}}{8\sqrt{3(3+\sqrt{5})}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{3+\sqrt{5}}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2(3+\sqrt{5})}+16}{8\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(3\sqrt{5}-5)\sqrt{5+3\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede verificar que esta matriz es simpléctica.

Finalmente, usando la ecuación (6.87) en el Teorema 43, concluimos que la forma normal K para H_2 en (6.103) es dada por

$$K(q, p) = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}(p_2^2 + p_3^2) + \sqrt{7-3\sqrt{5}}(q_2p_3 - q_3p_2).$$

6.5.2. Aplicación al problema restringido circular de los tres cuerpos caso espacial

En esta subsección aplicamos el resultado obtenido en el Teorema 45 para conseguir la forma normal de la parte cuadrática de la función Hamiltoniana correspondiente al problema restringido circular de los tres cuerpos en el caso espacial en una vecindad de los puntos de libración Lagrangianos.

Consideremos el problema restringido circular de los tres cuerpos en el caso espacial definido por el Hamiltoniano (ver detalles en [13])

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + q_2p_1 - q_1p_2 - V - \frac{1}{2}\mu(\mu - 1), \quad (6.104)$$

donde

$$V = \frac{\mu}{\sqrt{(\mu + q_1 - 1)^2 + q_2^2 + q_3^2}} + \frac{1 - \mu}{\sqrt{(\mu + q_1)^2 + q_2^2 + q_3^2}}.$$

Inicialmente escribiremos el Hamiltoniano de este problema dado en (6.104) en serie de Taylor al rededor del equilibrio L_4 , es decir, en el punto

$$\left(q_1 = \frac{1}{2} - \mu, q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, q_3 = 0, p_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, p_2 = \frac{1}{2} - \mu, p_3 = 0 \right).$$

Éstas son dadas por

$$H = H_0 + H_2 + H_3 + H_4 + \dots \quad (6.105)$$

$$H_0 = -\frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu}{2} - \frac{5}{2},$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + p_1 q_2 - q_1 p_2 + \frac{1}{2} q_3^2 + \frac{1}{8}(q_1^2 - 8k q_1 q_2 - 5q_2^2),$$

$$H_3 = -\frac{7\sqrt{3}}{36} k q_1^3 + \frac{3\sqrt{3}}{16} q_1^2 q_2 + \frac{11\sqrt{3}}{12} k q_1 q_2^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16} q_2^3 - \frac{\sqrt{3}}{3} k q_1 q_3^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4} q_2 q_3^2,$$

$$H_4 = \frac{37}{128} q_1^4 + \frac{25}{24} k q_1^3 q_2 - \frac{123}{64} q_1^2 q_2^2 - \frac{15}{8} k q_1 q_2^3 - \frac{3}{128} q_2^4 + \frac{3}{16} q_1^2 q_3^2 + \frac{33}{16} q_2^2 q_3^2,$$

$$H_5 = \frac{23\sqrt{3}}{576} k q_1^5 - \frac{285\sqrt{3}}{256} q_1^4 q_2 - \frac{215\sqrt{3}}{288} k q_1^3 q_2^2 + \frac{345\sqrt{3}}{128} q_1^2 q_2^3 + \frac{555\sqrt{3}}{576} k q_1 q_2^4 - \frac{33\sqrt{3}}{256} q_2^5 +$$

$$\frac{25\sqrt{3}}{72} q_1^3 q_3^2 - \frac{45\sqrt{3}}{32} q_1^2 q_2 q_3^2 - \frac{85\sqrt{3}}{24} k q_1 q_2^2 q_3^2 - \frac{45\sqrt{3}}{32} q_2^3 q_3^2 + \frac{5\sqrt{3}}{12} k q_1 q_3^4 + \frac{15\sqrt{3}}{16} q_2 q_3^4,$$

donde $k = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)$ es el valor crítico de Routh.

Por lo tanto, se tiene que la parte cuadrática del Hamiltoniano H en (6.105) está dado por

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + p_1 q_2 - q_1 p_2 + \frac{1}{2} q_3^2 + \frac{1}{8}(q_1^2 - 8k q_1 q_2 - 5q_2^2), \quad (6.106)$$

La matriz asociada a las ecuaciones Hamiltonianas correspondiente a H_2 viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\sqrt{3}(1 - 2\mu) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{4}\sqrt{3}(1 - 2\mu) & \frac{5}{4} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicación 10 *Caso donde las frecuencias son no nulas.*

Si $\mu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{69}}{9}\right)$, los valores propios de la matriz A del sistema linealizado son

$$\lambda_1 = \pm i, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \pm \frac{i\sqrt{2}}{2}, \quad (6.107)$$

Se verifica que $(0, 0, i, 0, 0, 1)$ es el vector propio correspondiente al valor propio i de la matriz A , el vector propio y vector propio generalizado correspondiente al valor propio $\frac{i\sqrt{2}}{2}$ son a_1 y a_2 , respectivamente, donde

$$a_1 = \left(\frac{14 + i\sqrt{46}}{11}, \frac{3i\sqrt{2} - 2\sqrt{23}}{11}, 0, \frac{\sqrt{23} + 4i\sqrt{2}}{11}, 1, 0 \right),$$

$$a_2 = \left(0, \frac{8}{11}, 0, \frac{6 + i\sqrt{46}}{11}, \frac{7i\sqrt{2} - 2i\sqrt{23}}{11}, 0 \right).$$

Así, de acuerdo a la notación en el Teorema 4 se obtiene que $r = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ y $s = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ y según la notación del Teorema 21 se sigue que $r_1 = \left(\frac{14}{11}, -\frac{2\sqrt{23}}{11}, 0, \frac{\sqrt{23}}{11}, 1, 0\right)$, $s_1 = \left(\frac{\sqrt{46}}{11}, \frac{3\sqrt{2}}{11}, 0, \frac{4\sqrt{2}}{11}, 0, 0\right)$, $r_2 = \left(0, \frac{8}{11}, 0, \frac{6}{11}, -\frac{2\sqrt{23}}{11}, 0\right)$ y $s_2 = \left(0, 0, 0, \frac{\sqrt{46}}{11}, \frac{7\sqrt{2}}{11}, 0\right)$. Ahora notemos que $\{r, s\} = -1$, así, $\delta_1 = -1$, $\kappa = \frac{1}{2}$, además, $\{r_1, r_2\} = \frac{8}{11}$ y $\{r_2, s_2\} = -\frac{56\sqrt{2}}{121}$, de donde se sigue que $\kappa_1 = \frac{\sqrt{11}}{2}$, $\kappa_2 = -\frac{7}{4\sqrt{11}}$ y $\delta_2 = 1$. Por lo tanto, la matriz N en (6.93) viene dada como

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{\sqrt{22}} & -\frac{\sqrt{\frac{23}{11}}}{2} & 0 & -\frac{1}{22} \left(7\sqrt{\frac{23}{22}}\right) & -\frac{49}{22\sqrt{11}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{23}{22}} & -\frac{3}{2\sqrt{11}} & 0 & \frac{67}{22\sqrt{22}} & \frac{7\sqrt{\frac{23}{11}}}{22} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\frac{23}{22}}}{2} & -\frac{2}{\sqrt{11}} & 0 & \frac{19}{11\sqrt{22}} & -\frac{1}{44} \left(29\sqrt{\frac{23}{11}}\right) \\ 0 & \frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{2} & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{23}{22}} & -\frac{21}{4\sqrt{11}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ésta es simpléctica, pues

$$\begin{aligned}
N^T J N &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{\sqrt{22}} & -\sqrt{\frac{23}{22}} & 0 & \frac{\sqrt{\frac{23}{22}}}{2} & \frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{\frac{23}{11}}}{2} & -\frac{3}{2\sqrt{11}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{22} \left(7\sqrt{\frac{23}{22}} \right) & \frac{67}{22\sqrt{22}} & 0 & \frac{19}{11\sqrt{22}} & -\sqrt{\frac{23}{22}} & 0 \\ -\frac{49}{22\sqrt{11}} & \frac{7\sqrt{\frac{23}{11}}}{22} & 0 & -\frac{1}{44} \left(29\sqrt{\frac{23}{11}} \right) & -\frac{21}{4\sqrt{11}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{\sqrt{22}} & -\frac{\sqrt{\frac{23}{11}}}{2} & 0 & -\frac{1}{22} \left(7\sqrt{\frac{23}{22}} \right) & -\frac{49}{22\sqrt{11}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{23}{22}} & -\frac{3}{2\sqrt{11}} & 0 & \frac{67}{22\sqrt{22}} & \frac{7\sqrt{\frac{23}{11}}}{22} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\frac{23}{22}}}{2} & -\frac{2}{\sqrt{11}} & 0 & \frac{19}{11\sqrt{22}} & -\frac{1}{44} \left(29\sqrt{\frac{23}{11}} \right) \\ 0 & \frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{2} & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{23}{22}} & -\frac{21}{4\sqrt{11}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando la ecuación (6.94) en el Teorema 45, concluimos que la forma normal K para H_2 en (6.106) es dada por

$$K(q, p) = -\frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + p_3^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(q_2 p_3 - q_3 p_2).$$

Capítulo 7

Estabilidad de un sistema Hamiltoniano con tres grados de libertad cuando una de las frecuencias es nula

En este Capítulo trataremos el problema de estabilidad de una solución de equilibrio para un sistema Hamiltoniano con tres grados de libertad asumiendo que una de sus frecuencias es nula, dos frecuencias no nulas diferentes y la matriz asociada a la parte lineal no es diagonalizable.

7.1. Formulación del problema

Consideremos un Hamiltoniano autónomo con tres grados de libertad en coordenadas q_1, q_2, q_3 y momento p_1, p_2, p_3

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.1)$$

con función Hamiltoniana

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + \cdots + H_s + \cdots \quad (7.2)$$

que es analítica cerca de la posición de equilibrio $q_i = 0, p_i = 0, i = 1, 2, 3$ del sistema de ecuaciones diferenciales (7.1), H_s en (7.2) son polinomios homogéneos de grado $s + 2$ en las coordenadas q_i y p_i y el sistema linealizado tiene frecuencias ω_1, ω_2 y ω_3 números no negativos y donde uno de ellos es cero. En general podemos encontrar once subcasos dependiendo de cuantos de ellos son cero y si la parte lineal asociada a (7.1) es o no diagonalizable. Esta

sección muestra una aproximación inicial al estudio de la estabilidad en este tipo de problema con tres grados de libertad.

Asumiendo que los valores propios de la parte lineal de (7.1) son

$$\lambda_1 = \pm\omega_1 i, \quad \lambda_2 = \pm\omega_2 i, \quad \lambda_3 = \pm\omega_3 i, \quad (7.3)$$

en este trabajo analizaremos la estabilidad solo en el caso donde $\omega_1 = 0 < \omega_2 < \omega_3$ y cuando la parte lineal es no diagonalizable. Asumiendo que no existen relaciones de resonancia de ningún orden, obtenemos condiciones de estabilidad e inestabilidad, también se obtiene una expresión de estas condiciones en términos de los coeficientes de H dado por (7.2).

7.2. Forma normal de la parte cuadrática

La primera etapa para llegar a nuestro resultado es la determinación de la forma normal del sistema lineal. Por lo tanto, de acuerdo al Teorema 42 la parte cuadrática del Hamiltoniano (7.2) está en la forma normal. Debemos recordar que ésta es obtenida haciendo una transformación lineal simpléctica en nuestro sistema Hamiltoniano (7.2). Por lo tanto, tenemos la siguiente forma canónica para A , en el caso no diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \omega_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_2 \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_3 \omega_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\delta_j = \pm 1$ para $j = 1, 2, 3$.

Note que la parte cuadrática es definida por $H_2 = \frac{1}{2}x^T Sx$ con $x = (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ y $S = -JA$.

Ahora, consideremos el sistema Hamiltoniano definido por (7.1) con tres grados de libertad, el origen $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ del espacio de fase corresponde a la solución de equilibrio del sistema, y sea H la función Hamiltoniana dado por (7.2) analítica en alguna vecindad de la posición de equilibrio, así tenemos

$$H_{s-2} = \sum_{|(k,l)|=s} a_{kl} q^k p^l \quad (7.4)$$

donde $k = (k_1, k_2, k_3)$, $l = (l_1, l_2, l_3)$, $|(k, l)| = k_1 + k_2 + k_3 + l_1 + l_2 + l_3$, $s \geq 3$. Recordemos que la parte lineal de (7.1) denotado por $A = JS$, siendo S una matriz simétrica de 6×6 y $H_2 = \frac{1}{2}x^T Sx$ con $x = (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ que ya ha sido normalizado, ver Teorema 42.

En este caso tenemos

$$S = \text{diag}(0, \delta_2\omega_2, \delta_3\omega_3, \delta_1, \delta_2\omega_2, \delta_3\omega_3)$$

y entonces

$$\begin{aligned} H_2(x) &= \frac{1}{2}x^T Sx = -\frac{1}{2}x^T JAx \\ &= \frac{\delta_1}{2}p_1^2 + \frac{\delta_2\omega_2}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\delta_3\omega_3}{2}(q_3^2 + p_3^2). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Observe que la parte cuadrática nunca es una función definida positiva.

7.3. Forma normal de Lie de los términos de orden superior

De acuerdo a nuestra notación, sea

$$H(y) = \sum_{s=0}^{\infty} H^s(y), \quad (7.6)$$

el Hamiltoniano en la forma normal, donde los H^s son polinomios de grado $s + 2$ en la variable $y = (q, p)$ (para simplificar usamos la misma notación)

$$H^{s-2} = \sum_{|(k,l)|=s} h_{kl} q^k p^l. \quad (7.7)$$

Usamos el Teorema 10 para obtener la forma normal, es necesario verificar la ecuación de Lie, es decir,

$$0 = \{H_0^T, H_s\} = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial H_0^T}{\partial q_i} \frac{\partial H_s}{\partial p_i} - \frac{\partial H_0^T}{\partial p_i} \frac{\partial H_s}{\partial q_i} \right] \quad (7.8)$$

donde

$$\begin{aligned} H_0^T(x) &= \frac{1}{2}x^T Rx = -\frac{1}{2}x^T JATx = -H_0(x) \\ &= -\frac{\delta_1}{2}q_1^2 - \frac{\delta_2\omega_2}{2}(q_2^2 + p_2^2) - \frac{\delta_3\omega_2\mathfrak{I}}{2}(q_3^2 + p_3^2). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Así que (7.8) asume la forma:

$$-\delta_1 q_1 \frac{\partial H_s}{\partial p_1} + \delta_2 \omega_2 \left[q_2 \frac{\partial H_s}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial H_s}{\partial q_2} \right] + \delta_3 \omega_3 \left[q_3 \frac{\partial H_s}{\partial p_3} - p_3 \frac{\partial H_s}{\partial q_3} \right] = 0. \quad (7.10)$$

Por conveniencia en la solución del operador (7.10) hacemos un cambio canónico complejo lineal de coordenadas

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{-i\delta_1}}q_1, & y_1 &= \frac{1}{\sqrt{i\delta_1}}p_1 \\ x_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(q_2 - i\delta_2p_2), & y_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(p_2 - i\delta_2q_2) \\ x_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(q_3 - i\delta_3p_3), & y_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(p_3 - i\delta_3q_3). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Así, por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial}{\partial p_1} = i\delta_1 \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial}{\partial q_j} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} - i\delta_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right], \quad \frac{\partial}{\partial p_j} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y_j} - i\delta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right], \quad (7.12)$$

$j = 1, 2$. Así, el operador $L_{A_1^T}$ en las variables complejas asume la forma

$$L_{A_1^T} = -i\delta_1 x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + i\delta_1 \omega_2 \left[x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right] + i\omega_3 \left[x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - y_3 \frac{\partial}{\partial y_3} \right]. \quad (7.13)$$

Denotando el nuevo Hamiltoniano, es decir, el Hamiltoniano en las variables complejas por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, y) &= H(\sqrt{-i\delta_1}x_1, \frac{\sqrt{2}}{2}(x_2 + i\delta_2y_2), \frac{\sqrt{2}}{2}(x_3 + i\delta_3y_3), \sqrt{i\delta_1}y_1, \frac{\sqrt{2}}{2}(y_2 + i\delta_2x_2), \frac{\sqrt{2}}{2}(y_3 + i\delta_3x_3)) \\ &= \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{|(k,l)|=s} g_{kl} x^k y^l, \end{aligned} \quad (7.14)$$

y el correspondiente polinomio homogéneo por

$$\mathcal{H}^{s-2} = \sum_{|(k,l)|=s} g_{kl} x^k y^l, \quad (7.15)$$

donde hemos mantenido la notación $g_{kl} = \alpha_{kl} + i\beta_{kl}$, primero observe que el operador $L_{A_2^T}$ satisface

$$L_{A_2^T}(x^k y^l) = -i\delta_1 l_1 x_1^{k_1+1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} y_1^{l_1-1} y_2^{l_2} y_3^{l_3} + i[\omega_2(k_2 - l_2) + \omega_3(k_3 - l_3)]x^k y^l = 0, \quad (7.16)$$

entonces aplicando el operador $L_{A_2^T}$ a H^{s-2} dado por (7.15) y usando las relaciones dadas por (7.16) para $l_1 \geq 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} L_{A_2^T}(H^{s-2}) &= \sum_{|(k,l)|=s, k_1 \neq 0} \{i\delta_1(l_1 + 1)g_{k_1-1, k_2, k_3} + l_1 + 1l_2 + l_3 + \\ &\quad i[\omega_2(k_2 - l_2) + \omega_3(k_3 - l_3)]g_{k_1, k_2, k_3, l_1-1, l_2, l_3}\} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} y_1^{l_1} y_2^{l_2} y_3^{l_3} + \\ &\quad \sum_{(k,l)=s} i[\omega_2(k_2 - l_2) + \omega_3(k_3 - l_3)]g_{0, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3} x_2^{k_2} x_3^{k_3} y_1^{l_1} y_2^{l_2} y_3^{l_3} = 0. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Por lo tanto, obtenemos las ecuaciones,

$$\begin{aligned} \{i\delta_1(l_1 + 1)g_{k_1-1}k_2k_3 + l_1 + 1l_2 + l_3 + i[\omega_2(k_2 - l_2) + \omega_3(k_3 - l_3)]g_{k_1k_2k_3l_1l_2l_3}\} &= 0 \\ i[\omega_2(k_2 - l_2) + \omega_3(k_3 - l_3)] &= 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

o, equivalentemente, para $l_1 \geq 1$ y si $[\omega_2(k_2 - l_2) + \omega_3(k_3 - l_3)] \neq 0$ tenemos las relaciones

$$\begin{aligned} g_{k_1k_2k_3l_1l_2l_3} &= \frac{\delta_1(l_1 + k_1)!}{[\omega_2(k_2 - l_2) + \omega_3(k_3 - l_3)]} g_{0k_2k_3l_1l_2l_3}, \\ g_{0k_2k_3l_1l_2l_3} &= 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Iterando la anterior fórmula (7.19) $k_1 - 2$ veces, obtenemos para $k_1 \geq 1$ y si $[\omega_2(k_2 - l_2) + \omega_3(k_3 - l_3)] \neq 0$

$$g_{k_1k_2k_3l_1l_2l_3} = \frac{\delta_1^{k_1}(l_1 + k_1)!}{[\omega_2(k_2 - l_2) + \omega_3(k_3 - l_3)]} g_{0k_2k_3l_1l_2l_3}. \quad (7.20)$$

Asumiendo que no existen relaciones de resonancia hasta orden s , inclusive, es decir,

$$n_1\omega_2 + n_2\omega_3 \neq 0, \quad \text{con } n_1n_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \text{y} \quad |n_1| + |n_2| \leq s \quad (7.21)$$

y $k_2 - l_2 \neq 0$, $k_3 - l_3 \neq 0$, $l_1 \neq 0$, $k_2 - l_2 \neq 0$, $k_3 - l_3 \neq 0$, sustituyendo las relaciones dadas por (7.19) en (7.20), obtenemos para $l_1 \neq 0$.

$$g_{k_1k_2k_3l_1l_2l_3} = 0. \quad (7.22)$$

Por lo tanto, la ecuación de Lie y si no hay relaciones de resonancia hasta el orden s , inclusive, vemos que en la nueva función Hamiltoniana no podemos anular solo los términos para los cuales

$$l_1 = 0, \quad k_2 - l_2 = 0, \quad k_3 - l_3 = 0, \quad (7.23)$$

con $k_1 + k_2 + k_3 + l_1 + l_2 + l_3 = s$, $k_j \geq 0$ y $l_j \geq 0$. Después de este análisis, asumiendo que no existen relaciones de resonancia hasta orden s , inclusive, los términos

$$x_1^{k_1}(x_2y_2)^{k_2}(x_3y_3)^{k_3} \quad (7.24)$$

pueden aparecer en la forma normal y en consecuencia, los coeficientes g_{kl} asociados son

$$g_{k_1k_2k_3l_1l_2l_3} \quad \text{con } l_1 = 0, \quad k_2 = l_2, \quad k_3 = l_3. \quad (7.25)$$

Por otra parte, como en la subsección previa estamos interesados en la forma normal real para el Hamiltoniano en (7.14), teniendo en cuenta que

$$\bar{x}_1 = i\delta x_1, \quad \bar{y}_1 = i\delta y_1, \quad \bar{x}_j = i\delta_j y_j, \quad j = 3, 4 \quad (7.26)$$

tenemos que los coeficientes de H debe satisfacer la relación

$$g_{k_1 k_2 k_3 l_1 l_2 l_3} = (-1)^{k_1} i^{k_1 + k_2 + k_3 + l_1 + l_2 + l_3} \delta_1^{k_1 + l_1} \delta_2^{k_2 + l_2} \delta_3^{k_3 + l_3} \bar{g}_{k_1 k_2 k_3 l_1 l_2 l_3} \quad (7.27)$$

En H^{s-2} ($s \geq 0$) si no existen relaciones de resonancia hasta orden s , inclusive, las relaciones en (7.27) asumen la forma

$$g_{k_1 k_2 k_3 0 l_2 l_3} = (-1)^{k_1} i^{l_1} \delta_1^{l_1} \bar{g}_{k_1 k_2 k_3 0 l_2 l_3}, \quad (7.28)$$

donde $k_2 = l_2$, $k_3 = l_3$, $k_1 + k_2 + k_3 + l_2 + l_3 = s$, y $k_2 + k_3 + l_2 + l_3 = 2k = s - k_1$.

Como,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \delta_1 i) q_1 \\ x_j y_j &= -\frac{1}{2} i \delta_j (q_j^2 + p_j^2), \quad j = 2, 3, \end{aligned} \quad (7.29)$$

entonces

$$\begin{aligned} H^{s-2} &= g_{s00000} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \delta_1 i) \right]^s q_1^s + \\ &\quad \sum_{k_1 + 2k_2 = s, k_2 = l_2 \neq 0} g_{k_1 k_2 0 0 k_2 0} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \delta_1 i) q_1 \right]^{k_1} \left(-\frac{1\delta_2}{2} \right)^{k_2} (q_2^2 + p_2^2)^{k_2} + \\ &\quad \sum_{k_1 + 2k_3 = s, k_3 = l_3 \neq 0} g_{k_1 0 k_3 0 0 k_3} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \delta_1 i) q_1 \right]^{k_1} \left(-\frac{1\delta_3}{2} \right)^{k_3} (q_3^2 + p_3^2)^{k_3} + \\ &\quad \sum_{|(k,l)|=s, k_2 l_3 \neq 0} g_{k_1 k_2 k_3 0 k_2 k_3} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \delta_1 i) \right]^{k_1} \left(-\frac{1\delta_2}{2} \right)^{k_2} \left(-\frac{\delta_3}{2} \right)^{k_3} q_1^{k_1} (q_2^2 + p_2^2)^{k_2} (q_3^2 + p_3^2)^{k_3}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Retornando a las variables reales, tomando y teniendo en cuenta la ecuación (7.28) y (7.30) obtenemos que

- $H^0 = \frac{1}{2} \delta_1 p_1^2 + \frac{1}{2} \delta_2 \omega_2 (q_2^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} \delta_3 \omega_3 (q_3^2 + p_3^2)$.
- Para H^1 tenemos las siguientes posibilidades dadas en la Tabla 3.

k_1	3	1	1
k_2	0	1	0
k_3	0	0	1
l_1	0	0	0
l_2	0	1	0
l_3	0	0	1

por lo tanto,

$$H^1 = -\sqrt{2}\alpha_{300000}q_1^3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_1\delta_2\alpha_{110010}q_1(q_2^2 + p_2^2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_1\delta_2\alpha_{101001}q_1(q_3^2 + p_3^2),$$

donde por el triángulo de Lie (ver [13]) tenemos

$$\begin{aligned}\alpha_{300000} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}a_{300000}, & \alpha_{110010} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\delta_1\delta_2(a_{120000} - a_{100020}), \\ \alpha_{101001} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\delta_1\delta_3(a_{102000} + a_{100002}).\end{aligned}$$

- Para H^2 tenemos las siguientes posibilidades dadas en la Tabla 4.

k_1	4	0	0
k_2	0	2	0
k_3	0	0	2
l_1	0	0	0
l_2	0	2	0
l_3	0	0	2

por lo tanto,

$$H^2 = -\alpha_{400000}q_1^4 - \frac{1}{2}\alpha_{020020}(q_2^2 + p_2^2)^2 - \frac{1}{2}\alpha_{002002}(q_3^2 + p_3^2)^3.$$

En general la forma normal de la función Hamiltoniana 2 es dada por

$$\begin{aligned}H^\# &= \frac{1}{2}\delta_1p_1^2 + \frac{1}{2}\delta_2\omega_2(q_2^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}\delta_3\omega_3(q_3^2 + p_3^2) + H^1 + H^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2}\delta_1p_1^2 + \frac{1}{2}\delta_2\omega_2(q_2^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}\delta_3\omega_3(q_3^2 + p_3^2) + \\ &\quad + \sum_3^M \sum_{k+l=0}^{[s/2]} a_{s-2(k+1),k+l}q_1^{s-2(k+l)}(q_2^2 + p_2^2)^k(q_3^2 + p_3^2)^l + H^*,\end{aligned}\tag{7.31}$$

donde $a_{s-2(k+1),k+l}q_1^{s-2(k+l)}$ son coeficientes reales, mientras que los corchetes denotan la operación de tomar la parte entera de un número. Se asume que la normalización se debe realizar hasta orden M tal que el coeficiente a_{M0} es diferente de cero. Los coeficientes de la forma normal se expresan de manera simple en términos de los coeficientes de la función Hamiltoniana original (7.2).

7.4. Resultado principal

A continuación presentamos nuestro resultado principal de este Capítulo, el cual es un resultado original, pues hasta la actualidad en la literatura no hay evidencias de su existencia. Este resultado surgió como una extensión del Teorema 31 al caso tres grados de libertad, los detalles se muestran en el siguiente teorema

Teorema 46 *Suponga que $h_{M00000} = a_{M0} \neq 0$, entonces*

1. *Si M es impar, la solución de equilibrio es inestable en el sentido de Lyapunov para cualquier orden pero finito.*
2. *Si M es par y $\delta_1\delta_3a_{M0} < 0$, la solución de equilibrio es inestable en el sentido de Lyapunov para cualquier orden pero finito.*
3. *Si M es par y $\delta_1\delta_3a_{M0} > 0$, la solución de equilibrio es estable en el sentido de Lyapunov para cualquier orden pero finito.*

Demostración. Introducimos coordenadas acción - ángulo r_j, φ_j por la fórmula

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1, & p_1 &= p_1, \\ q_j &= \sqrt{2r_j} \sin(\varphi_j), & p_j &= \sqrt{2r_j} \cos(\varphi_j), \quad j = 2, 3. \end{aligned} \quad (7.32)$$

la función Hamiltoniana (7.31) se convierte en

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\delta_1 p_1^2 + \delta_2 \omega_2 r_2 + \delta_3 \omega_3 r_3 + H_3 + H_4 + \dots \\ &= \frac{1}{2}\delta_1 p_1^2 + \delta_2 \omega_2 r_2 + \delta_3 \omega_3 r_3 + \sum_{s=3}^M \sum_{k+l=0}^{[s/2]} a_{s-2(k+1),k+l} q_1^{s-2(k+l)} r_2^k r_3^l + H^*. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Usando la integral $H = \text{constante}$ en coordenadas polares (7.33) reducimos el orden del sistema en dos unidades y se reduce la investigación del sistema autónomo con tres grados de libertad a la investigación de un sistema con dos grados de libertad que es autónomo si asumimos que no existen relaciones de resonancia para todo orden. El nuevo Hamiltoniano es dado por

$$\begin{aligned} K &= -r_3 = \frac{1}{2\omega_3} \delta_1 \delta_3 p_1^2 + \delta_2 \delta_3 \frac{\omega_2}{\omega_3} r_2 + \\ &+ \frac{\delta_3}{\omega_3} \sum_{s=3}^M \sum_{k+l=0}^{[s/2]} a_{s-2(k+1),k+l} q_1^{s-2(k+l)} r_2^k \left(\frac{1}{2\omega_3} \delta_1 \delta_3 p_1^2 + \delta_2 \delta_3 \frac{\omega_2}{\omega_3} r_2 \right)^l + H^*. \end{aligned} \quad (7.34)$$

De esta última igualdad, se sigue que

$$K = \frac{1}{\delta_3 \omega_3} \left[\frac{\delta_1}{2} p_1^2 + a_{M,0} q_1^M + K^M + K^{M+1} + \mathcal{O} \right]. \quad (7.35)$$

donde

$$K^M(q_1, p_1) = \sum_{s=3}^M \sum_{k+l=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} a_{s-2(k+l), k+l}^* q_1^{s-2(k+l)} p_1^{k+l},$$

$$K^{M+1}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \sum_{s=3}^M [(q_1^2 + p_1^2)^{\frac{s+1}{2}} + (q_2^2 + p_2^2)^{\frac{s+1}{2}}].$$

Ahora, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 31, el cual garantiza el resultado. ■

Observación 3 *Los coeficientes $a_{s-2(k+l)}$ se puede obtener en función de los coeficientes del Hamiltoniano original, por ejemplo, si $M = 3$ entonces se tiene que $h_{300000} = a_{30}$.*

Bibliografía

- [1] Buchannan, D. Trojan Satellites (Limiting Case). *Trans. Royal Soc. Canada, vol. 35*, pp. 9-25, 1941.
- [2] Burgoyne, N. and Cushman, R. Normal forms for real linear Hamiltonian system with purely imaginary eigenvalues. *Dept. of Mathematics, Univ. of California at Santa Cruz*, 1972.
- [3] Deprit, A. Canonical Transformation depending on a small parameter. *Celest. Mech.*, 72, 173-179, 1969.
- [4] Henrard, J. On a perturbation theory using Lie transformation. *Cel. Mech.*, 3, 107-120, 1970.
- [5] Hoffman, K., and Kunze, R. *Álgebra Lineal*. PHI, 1973.
- [6] Hori, G. Teory oh general perturbation with unspecifed canonical variables. *Publ. Astron. Soc. Japan*, 18, 287-296, 1966.
- [7] Kamel, A. Perturbation Method in the theory of nonlinear oscilations. *Cel. Mech.*, 3, 90-99, 1970.
- [8] Lang, S. *Fundamentals of Differential Geometry*. Springer, 1999.
- [9] Markeev, A. P. *Librations points in Celestial Mechanics and space dynamics*. Nauca, Moscov, 1978.
- [10] Markeev, A. P. *Linear Hamiltonian Systems*. Moscow, 2009.
- [11] Markeev, A. P. On the Birkhoff Transformation in the Case of Complete Degeneracy of the Quadratic Part of the Hamiltonian. *Moscow*, 2015.
- [12] Meyer, K. R. Generic Stability Properties of Periodic Points. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1971, vol. 154, pp. 273-277.

- [13] Meyer, K. R. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. Springer, 2017.
- [14] Meyer, K. R. and Schmidt, D.S. Periodic Orbits near \mathcal{L}_4 for Mass Ratios near the Critical Mass Ratio of Routh. *Celestial Mech.*, 1971, vol. 4, pp. 99-109.
- [15] Moser, K. Lectures on Hamiltonian system. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 81, AMS, Providence, RI, 1968.
- [16] Paul, F. B, and Morris, D. G. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers an Scientists. *Springer*, 1971.
- [17] Siegel, C. and Moser, J. Lectures on Celestial Mechanics, *Springer-Verlag*, 1971.
- [18] Sokol'skii, A. G. On the stability of an autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom in the case of equal frequencies. *PMM Vol.* 38(5), 1974.
- [19] Sokol'skii, A. G. On the stability of an autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom under first-order resonance. *PMM Vol.* 41(1), 1976.
- [20] Sokol'skii, A. G. On the stability of self-contained Hamiltonian system with two degrees of freedom in the case of zero frequencies. *PMM Vol.* 44, 1981.
- [21] Van Der Meer, J. Nonsemisimple 1:1 resonance at an equilibrium. *Celestial Mechanics*, vol. 27, 1981.
- [22] Vidal, J. C. *Una introducción a los sistemas dinámicos Hamiltonianos*. Marzo, 2017.
- [23] Waz, P. Normal terms of Hamiltonian system. *Vol.* 89 1996.