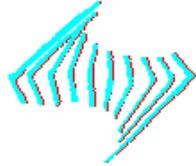




Universidad Centroccidental  
"Lisandro Alvarado"



Universidad Nacional Experimental  
Politécnica Antonio José de Sucre

U  
N  
E  
X  
P  
O



Universidad Pedagógica  
Experimental Libertador

**REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA  
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR  
INSTITUTO PEDAGÓGICO "LUIS BELTRÁN PRIETO FIGUEROA"  
MAESTRÍA INTERINSTITUCIONAL EN MATEMÁTICA  
MENCIÓN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA**

**ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA Y EL  
APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA,  
DIRIGIDAS A DOCENTES EN FORMACIÓN DE LA  
ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA.**

**Trabajo de Grado para optar al grado de Magister en Matemática  
Mención Enseñanza de la Matemática**

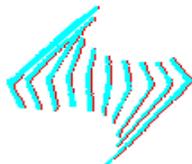
Autora: Prof<sup>a</sup>. Kellys Querales

Tutor: Dr. Dones Colmenárez

Barquisimeto, Julio de 2011



**Universidad Centroccidental  
"Lisandro Alvarado"**



**Universidad Nacional Experimental  
Politécnica Antonio José de Sucre**

**U  
N  
E  
X  
P  
O**



**Universidad Pedagógica  
Experimental Libertador**

**REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA  
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR  
INSTITUTO PEDAGÓGICO "LUIS BELTRÁN PRIETO FIGUEROA"  
MAESTRÍA INTERINSTITUCIONAL EN MATEMÁTICA  
MENCIÓN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA**

**ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA Y EL  
APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA,  
DIRIGIDAS A DOCENTES EN FORMACIÓN DE LA  
ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA.**

Autora: Prof<sup>a</sup>. Kellys Querales

Tutor: Dr. Dones Colmenárez

## DEDICATORIA

A mi Señor Dios Todopoderoso por su inagotable amor y por ser mi acompañante incondicional...

A mi madre Carmen por ser la mejor madre del mundo por su amor infinito e irremplazable...

A mi padre Carlos por ser ejemplo y mi fuente de inspiración...

A mis sobrinos Arianny, Arianara, Carlos Esteban, Mariana y Diego por ser la luz y alegría de mi corazón...

A mis hermanos Hjalmar, Wilmer, Harold, Karla y Walter por ser parte fundamental e imprescindible de mi vida...

A mis colegas del departamento de Matemática por su apoyo y presencia en este camino...

A mis amigos incondicionales que siempre estuvieron allí en cada momento de mi vida...

A los estudiantes que hicieron posible esta investigación...

Kellys

## **AGRADECIMIENTOS**

Al Dr. Dones Colmenárez por su inestimable guía y apoyo, por su motivación en cada uno de los momentos de esta investigación...

A los estudiantes de la especialidad de Matemática de la UPEL IPB, en especial a los del curso de Tópicos en Educación Matemática del lapso I-2010 por hacer posible este estudio.

## INDICE

	pp.
ACEPTACIÓN DEL TUTOR.....	iii
DEDICATORIA.....	iv
AGRADECIMIENTOS.....	v
LISTAS DE CUADROS.....	viii
LISTA DE FIGURAS.....	ix
RESUMEN.....	x
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULOS	
I LA IDEA DE INVESTIGACIÓN	
Escenario de Estudio.....	3
Propósito General de la Investigación.....	7
<i>Metas Especificas</i> .....	7
Justificación.....	7
II MARCO REFENCIAL	
Antecedentes de la Investigación.....	10
Referentes Teóricos.....	15
<i>Procesos de Enseñanza y de Aprendizaje</i> .....	15
<i>Didáctica de la Matemática</i> .....	16
<i>La Enseñanza y el Aprendizaje de la Demostración Matemática...</i>	18
<i>Las Concepciones y los Esquemas de Prueba</i> .....	20
<i>La Demostración como estrategia didáctica en la Educación Matemática</i>	21
III ABORDAJE METODOLÓGICO	
Naturaleza del Estudio.....	24

<i>Participantes de la investigación</i> .....	27
Momentos de la Investigación.....	27
Técnicas e Instrumentos de recogida de Información.....	31
Técnicas de Análisis de Información.....	34
IV ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LA INFORMACIÓN	
Análisis del Cuestionario Diagnóstico.....	36
Reflexión de las Primeras Actividades Didácticas .....	39
Reflexión de las Segunda Actividad Didáctica.....	46
Reflexión de la Sesión 1.....	49
Reflexión de la Sesión 2.....	55
Reflexión de la Sesión 3.....	63
Reflexión de los Testimonios Focalizados.....	66
Reflexión de las Entrevistas a Profundidad.....	69
V DESCUBRIMIENTOS Y REFLEXIONES FINALES	
Descubrimientos.....	73
Reflexiones.....	74
REFERENCIAS.....	76
ANEXOS	
A Instrumento Diagnóstico.....	80
B Instrumentos de las Actividades Didácticas.....	83
C Transcripción de Sesiones de Actividades.....	90
D Transcripción de Entrevistas a Profundidad.....	105

## LISTA DE CUADROS

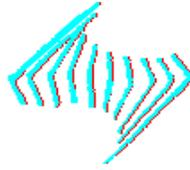
CUADROS	pp
1 Categorización según las estrategias de enseñanza utilizada.....	12
2 Categoría C1: Percepción de la Demostración desde la experiencia como estudiante de Matemática	37
3 Categoría C2: Qué están esperando los estudiantes de las actividades didácticas para el aprendizaje y la enseñanza de la demostración matemática	38
4 Respuestas de la Demostración 1.....	40
5 Respuestas de la Demostración 2.....	42
6 Respuestas de la Demostración 3.....	43
7 Respuestas del segundo Cuestionario.....	46
8 Tercer Instrumento.....	49
9 Respuestas de la pregunta 1 <sup>a</sup> .....	49
10 Respuestas de la pregunta 1b.....	50
11 Respuestas de la pregunta 2.....	51
12 Respuestas de la pregunta 3.....	52
13 Cuarto Instrumento.....	53
14 Categorías.....	54
15 Instrucciones del Juego.....	63

## LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICOS	pp
1 Producción del Grupo 1.....	55
2 Producción del Grupo 2.....	57
3 Producción del Grupo 4.....	59
4 Producción del Grupo 5.....	60
5 Demostración presentada por la autora de la Investigación.....	61
6 Propuesta de Demostración del Estudiante.....	65
7 Propuesta de Demostración del Estudiante (continuación).....	65



Universidad Centroccidental  
"Lisandro Alvarado"



Universidad Nacional Experimental  
Politécnica Antonio José de Sucre

U  
N  
E  
X  
P  
O



Universidad Pedagógica  
Experimental Libertador

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR  
INSTITUTO PEDAGÓGICO "LUIS BELTRÁN PRIETO FIGUEROA"  
MAESTRÍA INTERINSTITUCIONAL EN MATEMÁTICA  
MENCIÓN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA**

**ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA Y EL  
APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA, DIRIGIDAS A  
DOCENTES EN FORMACIÓN DE LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA**

**Autora: Prof<sup>a</sup> Kellys Querales**

**Tutor: Dr. Dones Colmenárez**

**Fecha: Julio 2011**

**RESUMEN**

En esta investigación se diseñaron y aplicaron actividades didácticas con el fin de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática, dirigidas a docentes en formación de la especialidad de matemática. En cuanto a los basamentos teóricos, se presentó un resumen de diferentes investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en la educación matemática. La metodología utilizada fue la investigación acción, la cual se encuentra dentro del paradigma cualitativo. Se desarrollaron diferentes momentos, los cuales permitieron diagnosticar, desarrollar y evaluar el alcance de las actividades en forma continua y reflexiva. Los participantes de la investigación estuvieron conformados por docentes en formación de la especialidad de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Luis Beltrán Prieto Figueroa. Para la recolección de la información se hicieron filmaciones, grabaciones de voz y producciones por escrito de las actividades desarrolladas. Se describieron las creaciones de los estudiantes y se hicieron reflexiones de las mismas. Algunas de las conclusiones que se pueden destacar son: El uso de actividades didácticas permite mejorar el aprendizaje y minimizar las concepciones negativas de los estudiantes en torno a la demostración matemática.

Descriptores: Actividades Didácticas, Demostración Matemática, Enseñanza y Aprendizaje de la Demostración Matemática.

## INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que la demostración en la educación matemática juega un papel fundamental y trascendental; no obstante, el rechazo a las tareas de demostración por parte de los docentes en formación ha sido un tema que, desde mi experiencia como docente de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, siempre ha preocupado y llamado mi atención. En procura de disminuir esa apatía y mejorar las concepciones negativas de los estudiantes, se desarrolló esta investigación basada en el diseño de actividades didácticas las cuales pretenden mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática.

La exposición del producto de esta investigación se describe en cinco capítulos a saber:

En el primer capítulo se esboza la idea de la investigación, el propósito general de la misma y las metas más específicas. Así como también la justificación e importancia.

En el segundo capítulo se presenta los antecedentes y referentes teóricos que respaldan la investigación, Proceso de Enseñanza y Aprendizaje, Didáctica de la Matemática, La Enseñanza y el Aprendizaje de la Demostración Matemática, Las Concepciones y Los Esquemas de Pruebas, La Demostración como Estrategia Didáctica en la Educación Matemática.

En el tercer capítulo se esboza la metodología implementada: la naturaleza de la investigación, así como también los participantes de la investigación, los momentos de la investigación, las técnicas e instrumentos de recogida de información, y por último las técnicas de análisis inherentes a la metodología.

En el cuarto capítulo se muestra el análisis de la información de las actividades desarrolladas, y la comparación con las teorías exploradas.

En el quinto capítulo se presentan las consideraciones y reflexiones finales de la investigación.

Para finalizar se muestra la lista de referencias consultadas y a manera de anexo las transcripciones de las entrevistas a profundidad y de las filmaciones de las sesiones de actividades.

## CAPITULO I

### LA IDEA DE INVESTIGACIÓN

#### Escenario de Estudio

La demostración cumple un papel fundamental y evidentemente conocido en la comunidad matemática, por tal razón es un elemento importante en la enseñanza y el aprendizaje, históricamente comprobable por demás. Diversas investigaciones han surgido en los últimos años en relación a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática; orientadas por lo general en cuatro tendencias: *históricas, epistemológicas, cognitivas y didácticas*, Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006). Por su parte, Ibañes (2001) distingue cuatro tendencias de investigaciones sobre el aprendizaje de la demostración, *Investigaciones generales sobre el aprendizaje de la demostración, Investigaciones que versan sobre las funciones de la Demostración, Investigaciones que definen niveles de demostración e Investigaciones sobre la demostración en el aula*. Cabe destacar que la mayoría de las indagaciones se centran en las dificultades de los estudiantes al momento de enfrentarse a una demostración matemática; y en menor medida estas investigaciones suelen referirse a elementos instruccionales de la demostración matemática.

Peci (2006) desarrolló un estudio sobre las concepciones de los docentes de una institución de educación media diversificada (Liceo Bolivariano) en la ciudad de Quíbor en Venezuela, relacionada con la enseñanza aprendizaje de la demostración matemática; uno de los aspectos destacados en la misma, tiene que ver con las concepciones de los docentes en relación a las capacidades de los estudiantes para afrontar tareas demostrativas. Peci (ob. cit.) expresa que “*los docentes consideran que los alumnos en ese nivel escolar no poseen la madurez que se requiere para afrontar el proceso demostrativo*”. Se puede presumir que al referirse a la madurez, se refiere

a los conocimientos matemáticos y la capacidad cognitiva de los sujetos. *“Existe un desconocimiento casi general de cómo debe ser contemplada la enseñanza aprendizaje de la demostración matemática en el sistema educativo de Venezuela”* Peci (2006); esto explica de alguna manera la ausencia de demostraciones en las clases de matemática en los distintos niveles educativos, exceptuando quizás el universitario.

Por otro lado, Ibañes (2001) en su tesis doctoral desarrolla un estudio sobre los aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de bachillerato en Valladolid (España); el equipo que acompañó a Ibañes en la investigación aseguraba que la demostración matemática es uno de los aspectos más problemáticos del aprendizaje de las matemáticas. También se plantea una serie de hipótesis a ser evaluadas durante el proceso investigativo. Cada una de estas hipótesis hace referencia a problemas sobre el aprendizaje de la demostración matemática, y entre las conclusiones que se generaron, destaca que *“los alumnos se encuentran en un estado de transición entre los esquemas de prueba inductivos y los intuitivo-axiomáticos”*, lo cual deriva muchas dificultades en la comprensión de demostraciones matemáticas. Asimismo, se enfatiza en la necesidad de que los docentes conozcan estos hallazgos, ya que pueden ser agentes para mejorar el escenario con actividades adecuadas.

Por su parte, Perry y otros (2006) hicieron un estudio minucioso sobre la actividad demostrativa en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, enfocándose en el papel y las funciones de la demostración en diferentes ámbitos y hacen una aproximación a tres perspectivas fundamentales en los trabajos revisados, a saber: *la histórica-epistemológica* la cual se refiere a la *“evolución de la concepción de demostración y de la actividad demostrativa en el tiempo”*, y al estatus de los objetos, propiedades y relaciones en los procesos demostrativos; *la cognitiva*, centradas en los procesos cognitivos al momento de producir y/o entender demostraciones; *la didáctica*, ésta se refiere al papel de la demostración en el contexto educativo.

Martínez Recio (1999), en su tesis doctoral, aborda tres aspectos fundamentales:

1. *La naturaleza diversa de la demostración según distintos contextos institucionales, así como sus conexiones con las distintas clases de argumentación matemática.*
2. *Los esquemas personales de demostración observados en estudiantes de primer curso de la universidad de Córdoba, su relación con los significados institucionales de la demostración, y su potencial dependencia de diferentes factores.*
3. *Las dificultades de los estudiantes en la elaboración de demostraciones, derivadas de su complejidad ontológica y semiótica.*

Estos aspectos dan cuenta de la problemática existente en relación a la actividad demostrativa en la educación matemática, sobre todo las dificultades individuales presentes en los alumnos que estudian matemáticas a nivel universitario.

En este mismo sentido, Moore (1994) en una investigación realizada logra desarrollar una teoría sobre las dificultades que los estudiantes tienen para hacer demostraciones matemáticas. En el análisis de los datos investigados, el autor señala que las percepciones de los estudiantes sobre las matemáticas y las demostraciones influyen en sus realizaciones, y suponen, en ocasiones, un obstáculo para su correcta ejecución.

Por su parte, Colmenárez (2008) en su tesis doctoral, hace un estudio minucioso en relación a los errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje de la demostración matemática, entre las sugerencias propuestas destacan, que los docentes de matemática deben buscar nuevas formas o pautas didácticas para realizar la transposición didáctica de los contenidos, a saber:

Iniciar o profundizar, según el caso, el estudio de las funciones de la demostración y su aplicación en el aula. Lo cual debe traducirse en actividades didácticas concretas que contribuyan al fortalecimiento matemático y didáctico de los futuros profesores de matemática. En tales actividades es imperioso el planteamiento de problemas que conlleven al establecimiento de conjeturas que muestren la necesidad de una demostración. (p.95)

Es importante tener en cuenta qué tipo de necesidades, a partir de los contenidos o de la didáctica, existen en el entorno educativo en el cual se desarrollan los procesos demostrativos; el conocer estas insuficiencias permitirá al docente planificar con herramientas adecuadas, y de esta manera el camino hacia la excelencia de los procesos de enseñanza y de aprendizaje podría verse favorecido en buena medida.

Así mismo, Hanna (1995) sostiene que el papel que juega la demostración en matemáticas conduce a la conclusión de que la demostración debe formar parte de cualquier currículo, y agrega que el principal reto que tienen los profesores de matemáticas, en el campo de la demostración, es realzar su papel en el aula encontrando vías más efectivas de utilizarlas para potenciar la comprensión de las matemáticas.

Por otro lado, Mejia e Inglis (2009) presentan una investigación en la cual identificaron las diferentes actividades asociadas a la noción de una demostración matemática y también hacen un estudio bibliográfico en el que revisan diferentes investigaciones, en las cuales se explora el grado en que cada una de esas actividades han sido utilizadas; sostienen además que la comprensión y presentación de argumentos dados es importante, pero las actividades matemáticas relacionadas con la demostración han sido poco exploradas.

Las investigaciones relacionadas con la demostración en la educación matemática que se han revisado hasta ahora, dan cuenta de que pocas de ellas se han dedicado a mejorar la práctica demostrativa; de aquí la importancia de elaborar actividades adecuadas, tomando en cuenta el nivel de estudio, el contexto, los sujetos involucrados, los contenidos, así como también desarrollarlas en los ambientes de clases, observar su evolución y alcance; abriendo la posibilidad de adentrarse en un interesante camino hacia la propuesta y desarrollo de tareas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la práctica demostrativa, generando experiencias, donde se intente de manera *activa, constante y reflexiva* salvar las múltiples dificultades a las que se enfrentan docentes y estudiantes en los procesos demostrativos. Surgen entonces algunas interrogantes en relación a esta motivación ¿Qué tipo de actividades

contribuyen a un mejor entendimiento de las demostraciones en matemática? ¿Qué actividades desarrollar en las clases que ayuden a entender y a construir demostraciones matemáticas?

### **Propósito General de la Investigación**

Proponer actividades didácticas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática dirigidas a docentes en formación de la especialidad de matemática.

### ***Metas Específicas***

- Diagnosticar la necesidad de formular actividades didácticas para minimizar las dificultades en tareas de demostración.
- Diseñar actividades didácticas para la enseñanza de la demostración matemática.
- Aplicar las actividades diseñadas para docentes en formación de la especialidad de matemática.
- Evaluar el alcance de las actividades aplicadas.

### **Justificación e Importancia del Estudio**

La demostración matemática en muchas ocasiones es considerada como un producto o resultado, cuando se concibe como algo ya hecho y acabado; las estrategias rígidas y algorítmicas al desarrollar demostraciones, hacen que el estudiante no comprenda la misma, y aún más que ni siquiera le dé importancia, como ayuda a su desarrollo cognitivo, y al desarrollo de su madurez matemática. En este sentido, Crespo y Ponteville, citados por Peci (2006), señalan que:

Si el docente considera la demostración matemática como una estructura rígida y no modificable que aparece en los libros, entonces

la enseñará como algo acabado y que debe ser memorizado por los alumnos, o tal vez, le reste importancia a su enseñanza en el aula de clase; en cambio, si considera que los alumnos pueden hacer matemática, la demostración como contenido matemático adquirirá un perfil de elemento dinámico y modificable desde el punto de vista didáctico, pudiendo adaptarse a la situación escolar presente.(p.6)

Las concepciones de los docentes en relación a la demostración matemática influirán en tanto si se hacen o no actividades o tareas demostrativas en las aulas de clases, lo que implica un estudio a profundidad también con los docentes de matemática en los diferentes niveles educativos.

Por su parte Mejia e Inglis (2009) exponen que su estudio consistió en realizar una búsqueda de artículos de investigación en el que se discute o plantea la noción de demostración o de argumentación; destacaron entre las investigaciones las que estudian las tareas relacionadas con el concepto de demostración (ya sea para ilustrar un punto de vista teórico o como parte de un instrumento en un estudio empírico), además clasifican estas tareas de acuerdo a sus condiciones dadas, su meta implícita y producto esperado. Estos investigadores también proponen algunas de las actividades que consideran, favorecerían el aprendizaje de los estudiantes, entre las cuales destacan: abordar preguntas de verdadero o falso o cuando se les pide que justifiquen una proposición que no habían visto antes, la lectura de argumentos dados por los profesores o presentados en los libros con el objetivo de fomentar su comprensión, la presentación de argumentos que han leído con anterioridad con el fin de explicar estos argumentos a sus compañeros (durante la clase), o para demostrar a sus profesores que han entendido.

Los estudios mencionados dan cuenta de que existe una problemática latente y actual en el proceso enseñanza aprendizaje de la demostración matemática; este proceso se ve afectado por la interacción de varios elementos, relación docente-alumno, historia individual, contexto, nivel educativo, contenidos, percepción de la necesidad de demostrar, entre otros, que no deben considerarse aislados los unos de los otros durante el desarrollo del proceso. Como se mencionó anteriormente, pocas investigaciones han hecho propuestas didácticas en relación a la problemática que

genera la actividad demostrativa en la educación matemática. Con esta investigación se pretende minimizar esta dificultad y hacer una aproximación a las actividades más adecuadas según el nivel y contexto educativo.

Así mismo, el estudio se enmarca dentro de la línea de investigación enseñanza de la matemática adscrita al Departamento de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador Instituto Pedagógico de Barquisimeto (UPEL-IPB).

## CAPITULO II

### MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se presentan algunos estudios que orientan de alguna u otra manera este trabajo, investigaciones relacionadas con las dificultades en la actividad demostrativa, estrategias de aprendizaje, entre otras.

#### **Antecedentes de Investigación**

Se describirán a continuación algunos estudios relacionados con la investigación realizada, los cuales motivaron y ayudaron con el soporte de los aspectos teóricos, diseños de instrumentos, metodología e incluso la elaboración de conclusiones y recomendaciones. No se pretende hacer una relación completa de todas las investigaciones inherentes a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática, sino solo aquellas que se consideraron más relevantes para este estudio.

Blanco (2004) en su estudio *Dificultades que confrontan los profesores de matemática en formación en el aprendizaje de la demostración*, plantea en sus conclusiones, que efectivamente existen dificultades, por parte de los docentes en formación, en cuanto al abordaje y producción de demostraciones matemáticas. Este aspecto presente en los estudiantes en formación de la especialidad de Matemática preocupa y motiva a la reflexión de los métodos de enseñanza por parte de los docentes en servicio.

Por su parte Colmenárez (2008) en su tesis doctoral *Errores, Dificultades y Obstáculos en el aprendizaje de la Demostración Matemática*, clasifica los errores mas comunes cometidos por los estudiantes en tareas de demostración en dos áreas: “*Errores en los fundamentos lógicos de una demostración* (identificación de hipótesis y tesis, concepciones inadecuadas de la noción de demostración, mal uso de

conectivos lógicos, cuantificadores y métodos de demostración)” y “*Errores en el lenguaje algebraico* (confusión de símbolos, dificultades con operaciones algebraicas sencillas y *estaticidad notacional*, es decir, la incapacidad de algunos estudiantes para adaptar la notación en casos especiales)”. La revisión de este estudio motivó esta investigación, desde el punto de vista teórico.

Ibañes (2001) en su tesis doctoral titulada *Aspectos Cognitivos del Aprendizaje de la Demostración Matemática en Alumnos de primer curso de bachillerato*, hace un estudio importante que, según el mismo autor expresa, permitió *aportar alguna luz al proceso de aprendizaje de la demostración en Matemáticas de Bachillerato*. La puesta en práctica de dicho trabajo de investigación se llevó a cabo siguiendo una metodología de investigación acción, centrándose en tres focos: *Esquemas de prueba, Reconocimiento de procesos matemáticos y Estudio de algunas expresiones*. El estudio del primero de ellos llevó a la consideración de los otros dos. Cabe destacar que la metodología utilizada en la tesis de Ibañes determinó el abordaje metodológico de esta investigación.

Perry y otros (2006) desarrollaron un proyecto de investigación titulado *Actividad Demostrativa en la formación inicial del profesor de Matemáticas* en el que se identificaron experiencias las cuales ayudan a la construcción de un ambiente de aprendizaje favorable al desarrollo de competencias demostrativas, a saber haciendo uso de estrategias novedosas. También hacen una caracterización de la actividad demostrativa en el ámbito escolar, de la cual se reconocen dos aspectos: el proceso y el producto. En cuanto a las acciones implicadas en el proceso se enuncian la Visualización, la Exploración, Formulación de Conjeturas y la Verificación. Asimismo, proponen justificaciones asociadas al producto, la Explicación, la Prueba, y la Demostración Formal. Las conclusiones en relación a esta investigación, hacen referencia del trabajo sistemático y reflexivo basado en diseño de estrategias, las cuales generaron un ambiente que favoreció el desarrollo de la competencia demostrativa.

Por su parte, Caro (2001) en su tesis de grado, *Estrategias de Enseñanza en Introducción al Álgebra en la especialidad de Matemática*, hace un estudio en el cual

analiza las estrategias de enseñanza en el área de álgebra con profesores en formación de la especialidad de matemática; la investigadora determina cuáles son las estrategias que utiliza el docente que dicta cursos de álgebra, llegando a la conclusión de que los docentes desarrollan clases basadas en estrategias mecánicas o tradicionales; recomienda que se estimule la participación del estudiante en la resolución de situaciones didácticas (incluidas las de carácter demostrativa), además que sea organizada y dotada de materiales distintos a los usuales (tiza y borrador).

Calvo (2001) en su tesis doctoral *Un Estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Calculo Diferencial e Integral* hace un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios; en esa investigación Calvo expone una caracterización sobre las actividades que se desarrollan en las clases de matemática y las compara en relación a la etapa; la *etapa elemental* se le llama a la fase en que el alumno se encuentra en bachillerato tomando sus cursos preuniversitarios, en la *etapa avanzada* el alumno está ubicado en los primeros cursos de matemática universitaria, y por último llama *etapa de transición* al período de adaptación de una etapa a la otra. A manera de orientación, se muestra siguiente cuadro presentado por Calvo (ob.cit.) para analizar las diferencias entre la dos etapas de las que ya se mencionaron.

### Cuadro N° 1

#### Caracterización según las estrategias de enseñanza utilizadas.

	Etapa Elemental	Etapa Avanzada
Estructura de las unidades didácticas.	-Son cortas, y en ellas no se presenta diferenciación entre la teoría y la práctica.	-Se presenta mucha información, en poco tiempo y sin ser precedida por una familiarización previa con las nociones que involucra; - los espacios dedicados a la teoría y a la práctica se presentan diferenciados y a menudo, distanciados en el tiempo y dirigidos por profesores diferentes, donde el profesor más calificado (en el área matemática) suele encargarse de la teoría.
Estrategias utilizadas en el aula	-Basada en la resolución de problemas, entre los que están ausentes los pedidos de justificaciones; -presenta una tendencia hacia la	-En las clases teóricas se trabaja sobre la base de exposiciones magistrales centradas en la presentación de definiciones, teoremas y aplicaciones; -la demostración formal sustituye

	<p>rutinización de tareas, que convive con un rechazo ideológico a lo no creativo;</p> <p>-el uso de definiciones se restringe a la descripción de objetos ya conocidos.</p>	<p>plenamente la explicación discursiva como método de validación;</p> <p>-las definiciones ya no describen objetos conocidos sino que los construyen formalmente;</p> <p>-en las clases prácticas, los problemas para resolver pasan a un segundo plano y son sustituidos en gran número por problemas para demostrar;</p> <p>-no se fomenta la rutinización de tareas pero se exige implícitamente.</p>
Dispositivos didácticos	<p>-Libros de texto, fichas de trabajo, u otros materiales impresos que el profesor sigue literalmente, muy procesados para que estén “a punto” para ser usados por el alumno y conteniendo toda la información requerida.</p>	<p>-Aunque se sugieren libros de texto, el profesor no los suele seguir estrictamente;</p> <p>-el alumno produce su propio material, el cual a menudo debe completar con búsquedas autónomas de información.</p>
Roles del profesor y los alumnos	<p>-<i>Profesor</i>: es el responsable del aprendizaje del alumno.</p> <p>-<i>Alumnos</i>: alcanza con que “sigan la clase” y hagan lo que el profesor les indica en cada momento.</p>	<p><i>Alumnos</i>: son responsables de su aprendizaje, por lo que: deben ampliar el horario de estudio más allá de la permanencia en el aula, deben poder justificar todo lo que afirman ¿la intuición es ahora insuficiente?, deben encontrar el equilibrio entre sus conocimientos y deben ser capaces de evaluar la corrección, relevancia o elegancia de esa formulación.</p> <p><i>Profesor</i>: guía una parte del proceso de estudio.</p>
Evaluación	<p>-Sobre la base de exámenes o pruebas parciales complementadas con aportaciones mas globales que incluyen valoraciones de la participación en clase o del desempeño en tareas domiciliarias;</p> <p>-en las pruebas se pide mayoritariamente reproducir lo hecho en clase, con escasa exigencia de justificaciones;</p> <p>-los mecanismos de evaluación ocupan cada vez mas espacio en el proceso de enseñanza tendiendo a integrarse en el.</p>	<p>-Sobre la base de exámenes, donde se suele pedir la resolución de problemas poco rutinarios y donde la teoría, que ocupa la mayor parte del tiempo de clase, no tiene una presencia equivalente;</p> <p>-distanciada del proceso de enseñanza en tiempo y también en espíritu desde que se considera a las clases prácticas y teóricas impartidas como simples ayudas de un proceso de estudio que el alumno debe realizar por si solo, siendo este proceso de estudio lo que se pretende evaluar.</p>

**Fuente: Calvo (2001)**

En su trabajo, Calvo (ob. cit.) identifica y estudia las actividades que podrían influir favorablemente en este período de transición por parte de los alumnos y como parte de las conclusiones y recomendaciones generadas en tal investigación se evidencian

los obstáculos existentes para la aceptación por parte de los alumnos de demostraciones y definiciones, así como la convicción de que estos obstáculos pueden ser salvados a través de estrategias y o actividades de enseñanzas adecuadas para esta etapa.

Winicki-Landman (2009) en su investigación *Mathematical Games as Proving Seminal Activities for Elementary School Teachers*, expresan desde la perspectiva pedagógica que los juegos matemáticos permiten involucrar a los participantes en una actividad significativa, facilitando la comunicación, la colaboración y la participación más genuina, así como también darle un enfoque menos intimidante al aprendizaje. Desde el punto de vista de los contenidos, el desarrollo del juego permitió ampliar las concepciones del rol que juega el proceso demostrativo, al explorar diferentes maneras de presentar una demostración y evaluar si una simple justificación constituye una demostración. En este sentido Winicki-Landman describe una actividad lúdica hecha con docentes en formación durante un curso basado en juegos matemáticos; esta actividad consistió en presentar un juego y a partir del mismo indagar sobre las posibles generalizaciones o conjeturas sobre una *estrategia ganadora* la cual describe como “una descripción completa de los movimientos que puede elegir un jugador con el fin de garantizar una victoria en todas las circunstancias posibles”

Por otra parte, Sun y Chan (2009) presentaron una investigación titulada *Regenerate the Proving Experiences: An Attempt for Improvement Original Theorem Proof Construccions of Student Teachers by Using Spiral Variation Curriculum*, en la cual describen nueve formas distintas de demostrar el teorema del segmento medio. Con un grupo de catorce (14) docentes en formación desarrollaron una actividad que consistió en solicitarle a los estudiantes proveyeran demostraciones distintas de la siguiente proposición “*Demuestre que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud*” luego de dos horas los estudiantes presentaron uno por uno en el pizarrón sus demostraciones, obteniendo nueve (9) métodos distintos de demostrar la misma proposición.

Las dificultades en el aprendizaje de la demostración es lo que realmente motiva a este estudio; las investigaciones descritas anteriormente dan cuenta de que efectivamente existen dificultades en el aprendizaje de la demostración matemática, por parte de los estudiantes tanto de cursos pre universitarios como en el mismo nivel universitario, dando origen a la necesidad de hacer actividades que disminuyan estos obstáculos, sin perder de vista el papel o función que cumple la demostración en la educación matemática.

La revisión bibliográfica hecha hasta ahora muestra una gran inquietud en relación a las dificultades de los docentes y estudiantes al abordar algún tópico matemático que necesite de la demostración matemática para su desarrollo. En este sentido se pretende introducir en los ambientes educativos, actividades que generen situaciones dinámicas y modificables de acuerdo a su situación real y contextual.

## **Referentes Teóricos**

### ***Procesos de Enseñanza y de Aprendizaje***

La enseñanza no puede entenderse más que en relación al aprendizaje; y esta realidad enlaza no sólo a los procesos vinculados a enseñar, sino también a aquellos vinculados a aprender. El aprendizaje surgido de la unión, del intercambio, de la actuación de profesor y alumno en un contexto determinado y con unos medios y estrategias concretas constituyen los procesos de Enseñanza y de Aprendizaje. Meneses (2007) por su parte, expone que el proceso enseñanza-aprendizaje es “simultáneamente un fenómeno que se vive y se crea desde dentro, esto es, proceso de interacción e intercambios regidos por determinadas intenciones”. En principio este intercambio está destinado a hacer posible el aprendizaje.

Por su parte Mora (2003), caracteriza la enseñanza como “*un proceso activo, el cual requiere no solamente del dominio de la disciplina, sino del dominio adecuado de un conjunto de habilidades y destrezas necesarias para un buen desempeño de la labor docente*”, así mismo plantea que el aprendizaje no es un asunto exclusivo de quien

aprende, sino también de quien tiene la tarea de enseñar. El estudiante tiene cierta responsabilidad de su aprendizaje, sin perder de vista que al aprendizaje no está desligado del proceso de enseñanza; en la medida que se profundice en aspectos relacionados con la enseñanza, se influirá directamente en el proceso de aprendizaje. Freire citado por Mora (2003) expone que *“entre las personas que aprenden y las que enseñan se desarrolla una relación dialéctica lo cual permite que durante el aprendizaje y la enseñanza se ponga de manifiesto una bidireccionalidad, permitiendo de esta manera que el proceso sea mutuo y compartido”*.

### ***Didáctica de la Matemática***

Se presentan las principales características que definen la Didáctica de la Matemática en el campo de la investigación educativa. El término *Didáctica*, deriva del griego *didaktikè* que significa “enseñar” desde el punto de vista de la palabra utilizada como sustantivo, si se habla de didáctica de la matemática en el ámbito científico de investigación se puede ampliar y contextualizar un poco más este término.

La didáctica de la matemática estudia las actividades didácticas, es decir las actividades que tienen por objeto la enseñanza, evidentemente en lo que ellas tienen de específico de la matemática. Los resultados, en este dominio, son cada vez más numerosos; tratan los comportamientos cognitivos de los alumnos, pero también los tipos de situaciones empleados para enseñarles y sobre todo los fenómenos que genera la comunicación del saber. La producción o el mejoramiento de los instrumentos de enseñanza encuentra aquí un apoyo teórico, explicaciones, medios de previsión y de análisis, sugerencias y aun dispositivos y métodos. Brousseau (1986, p.125)

Por su parte Godino (2009) hace una diferenciación muy sutil de como concibe la educación matemática y la didáctica de la matemática:

La distinción entre “educación matemática” y “didáctica de la matemática”. Aunque a veces, principalmente en el ámbito anglosajón, estas expresiones suelen tener significados equivalentes, en los países europeos continentales la “didáctica de la matemática” se refiere a la

disciplina científica que se interesa por las cuestiones relativas a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

D' Amore (2008 y 1999) puntualiza que “la didáctica de la matemática es el arte de concebir y crear condiciones que pueden determinar el aprendizaje de un conocimiento matemático por parte del individuo” del mismo modo, hace una distinción sobre la *didáctica de la matemática* como “la disciplina científica y el campo de investigación cuyo objetivo es identificar, caracterizar y comprender los fenómenos y los procesos que condicionan la enseñanza y el aprendizaje de la matemática” y la *educación matemática* como “un sistema social complejo y heterogéneo que incluye teoría, desarrollo y práctica relativa a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática. Incluye la didáctica de la matemática como subsistema”

De acuerdo con Godino(2009), no se podría hablar de didáctica por sí misma, ni tampoco de educación matemática si se hace a un lado la didáctica de la matemática, por su parte D'Amore(1999), hace una distinción muy tenue de ambos términos; se puede afirmar entonces que la *didáctica de la matemática* y la *educación matemática* están interrelacionadas, esto es, la didáctica de la matemática vista desde el ámbito investigativo es una *disciplina científica* que permite al investigador adentrarse, analizar y entender situaciones didácticas, tanto para la enseñanza, como para el aprendizaje; con la finalidad de mejorar la educación matemática. “Si se mejora la enseñanza, mejorará también el aprendizaje” (ob. cit.). Así se puede decir que la didáctica de la matemática se ocupa de indagar sistemáticamente sobre la enseñanza y el aprendizaje como procesos; su objetivo fundamental se refiere al estudio de situaciones que surgen durante la transmisión, construcción, valoración y comunicación del conocimiento matemático.

En este sentido se pretende hacer uso de la didáctica de la matemática con la finalidad de profundizar en el tema de la *demonstración* dentro de la educación matemática, y darle un sentido más didáctico a la práctica demostrativa, vista ésta, como un instrumento fundamental en la enseñanza y aprendizaje, y en tal sentido se

formularon actividades para el aula con la finalidad de mejorar el aprendizaje de la demostración matemática.

### ***La Enseñanza y el Aprendizaje de la Demostración Matemática***

La enseñanza de la demostración matemática es uno de los mayores retos en la actividad educativa. En el desarrollo de una demostración, por parte del docente, suelen estar involucrados ciertos aspectos, los cuales influirán directamente en el aprendizaje de los estudiantes; la adquisición de técnicas por parte de estos depende en buena medida de las estrategias utilizadas por el docente.

De acuerdo con Hanna (1995) *“el papel que juega la demostración en matemáticas conduce a la conclusión de que la demostración debe formar parte de cualquier currículo”*. Así mismo, plantea que el desafío principal al que se enfrentan los profesores en cuanto a la demostración, es precisamente realzar su papel en el aula, buscando y haciendo uso de estrategias o actividades más efectivas para potenciar la comprensión de la matemática como tal.

Por su parte, Freudenthal, Arsac y Noirfalise (citados por Peci, 2006) señalan que *“los problemas que presentan los alumnos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las demostraciones, no pueden ser solamente atribuibles a un lento desarrollo cognitivo, sino a la dificultad de ver la función, significado, propósito y utilidad de la misma”*; de aquí se deriva el hecho de que la mayor responsabilidad del buen desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje recae sobre el manejo de estrategias por parte del docente.

La demostración matemática como ya se ha mencionado anteriormente presenta dificultades en el campo educativo, los estudiantes no se sienten motivados a desarrollar ni prestar atención a las demostraciones hechas en clase, desconocen además el papel que juega la demostración en la matemática; es imprescindible que tanto el docente como el estudiante tengan conciencia de la importancia de la demostración matemática en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Se ha expuesto en investigaciones anteriores sobre algunas funciones que se le puede dar a

la demostración matemática en diferentes contextos; De Villiers (1993), hace una distinción de cinco de estas funciones en la educación matemática: verificación-convicción, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación.

Por su parte, Balacheff (2000) presenta un estudio concerniente a aquellos procedimientos que los alumnos consideran significativos, y no todas las especulaciones que aparecen en el desarrollo de sus demostraciones, es decir, sus conjeturas. El investigador hace una distinción de los procedimientos y los llama Tipos de Pruebas, los cuales surgieron a partir del análisis de su investigación. Estos tipos de prueba que describe Balacheff (ob. cit.) son:

- *El Empirismo Ingenuo*: aquí el estudiante intenta asegurar la validez de un enunciado después de haberlo verificado en algunos casos.
- *La experiencia Crucial*: El individuo plantea explícitamente el problema de la generalización y lo resuelve, aventurándose a la ejecución de un caso que reconoce tan poco particular como le es posible.
- *El Ejemplo Genérico*: consiste en la explicación de las razones de validez de una afirmación para la validación de operaciones o transformaciones de un objeto en calidad de representante característico de determinada clase.
- *La Experiencia Mental*: se centra en la acción, interiorizándola y separándola de su ejecución sobre un representante en particular.

Se consideran estos tipos de prueba como un referente a tener en cuenta tanto para la elaboración como para la implementación de las actividades didácticas que se desarrollaron, en función de ayudar a mejorar el aprendizaje de la demostración matemática.

Es preciso tener un conocimiento en relación a estas consideraciones, debido a que contribuirá en gran medida al diseño de estrategias adecuadas y efectivas para la enseñanza de la demostración matemática; también se debe tomar en cuenta que los docentes se enfrentan al desafío de transmitir su importancia en el proceso de enseñanza y su repercusión en el proceso de aprendizaje.

## ***Las Concepciones y los Esquemas de Pruebas***

Según Ponte citado por Ibañes (2001) las concepciones “*son organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza cognitiva y que incluyen creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan*”. Las concepciones forman parte fundamental de la enseñanza y el aprendizaje, ya que de alguna u otra manera éstas serán obstáculos o por el contrario una posibilidad de aprendizaje, bien sea por las concepciones de los docentes como de los estudiantes. Es por ello que se debe considerar este aspecto en el momento de diseñar e implementar alguna actividad didáctica, ya que influirán directamente en el desarrollo y en los resultados de la implementación.

Los esquemas de prueba o esquemas de demostración, son “argumentos que usa una persona para convencer a otros y a sí misma de la veracidad o falsedad de una proposición matemática” según Harel y Sowder, citado por Colmenárez (2008); estos autores exponen sobre los siete esquemas de demostración que identificaron, agrupados en tres categorías a saber: *esquemas de convicción externa, esquemas empíricos y esquemas analíticos*. Los esquemas de convicción externa, son aquellos en que los estudiantes se convencen a sí mismos o a otros usando algo externo a ellos. Los esquemas empíricos son aquellos en los cuales los estudiantes validan o rechazan las conjeturas en virtud de experiencias sensoriales y por último, en cuanto a los esquemas analíticos, las conjeturas se validan a través de la deducción lógica. Es preciso tener en cuenta estos aspectos ya los esquemas personales de cada estudiante y del docente formará parte fundamental de cualquier actividad didáctica relacionada con la demostración matemática.

### ***La Demostración como Estrategia Didáctica en la Educación Matemática***

Las estrategias didácticas pueden considerarse como herramientas individuales o grupales que siguen una acción en el quehacer educativo; estas

permiten organizar y desarrollar las actividades de los profesores, las cuales estimulan la participación de los estudiantes con la finalidad de alcanzar objetivos específicos. Es necesario conocer los niveles de conocimiento de los estudiantes, con la finalidad de seleccionar las estrategias adecuadas para lograr un buen aprendizaje. *“La selección apropiada de estrategias contribuye con el aprendizaje significativo que permite la motivación al autoaprendizaje y la creatividad, fomentar y elevar la calidad de trabajos en grupos, la identificación de problemas y proponer alternativas de solución”* Mendoza citado por Caro (2001).

Perry y otros (2006) describen algunos tipos de tareas matemáticas que propusieron a sus estudiantes futuros profesores de matemática, en un curso de geometría, cuyo objetivo era aprender a demostrar y promover la construcción colectiva de un sistema axiomático. La particularidad de este estudio estribó en que se lograron los objetivos del curso mediante la participación de los estudiantes en diferentes tipos de tareas en lugar de proporcionarles algunas actividades matemáticas pre fabricadas.

. Las actividades se clasifican de la siguiente forma:

*Relativas al procedimiento de la demostración.*

Estas actividades se refieren a determinar si un conjunto de postulados, definiciones o teoremas permiten la validación de una proposición dada, hacer un examen crítico de una demostración escrita en el pizarrón por estudiantes, escribir una demostración completa y generar una secuencia de afirmaciones claves que describen una vía para demostrar una proposición.

*Relativas a la demostración en referencia a un sistema axiomático.*

Producir un diagrama de las relaciones de dependencia entre las diferentes propuestas que conforman una parte de un sistema axiomático, decidir si una proposición, que es producto de una búsqueda de afirmaciones que se requieren para completar una demostración, puede convertirse en un postulado, definición o teorema.

*Relativas a los temas relacionados con la demostración en geometría.*

En estas actividades se evidencia la obtención y uso de información que la representación gráfica en papel ofrece, buscar construcciones auxiliares adecuadas y reconocer y usar algunas figuras de un sistema axiomático.

Estos tipos de tareas ejemplifican el esfuerzo realizado en la planificación de las clases en que se involucraron los estudiantes en la construcción de un sistema axiomático.

Por otro lado, Barba y Andonegui (1992) plantean estrategias metodológicas que pueden considerarse para la enseñanza de la matemática:

1. La resolución de problemas: El proceso de analizar un problema hasta determinar una o varias soluciones posibles.
2. Heurística: Descubrimiento de algún concepto por parte del individuo a través del ensayo y error, la exploración, y la intuición.
3. El juego: Aprendizaje mediante un juego didáctico.
4. Algorítmica: Es un conjunto ordenado de instrucciones cuyo seguimiento produce el resultado deseado.
5. Laboratorio: Desarrolla una actitud de búsqueda e intenta adquirir conocimientos a través del descubrimiento.
6. Modelos Deductivos: Se desarrollan actividades centradas en la deducción de proposiciones.

Cabe destacar que estas estrategias no son excluyentes en ningún contexto, su utilidad puede ir en función de los contenidos o temas que se desarrollarán. Por otro lado, a partir del nivel medio, “el conocimiento debe presentarse con cierto rigor formal” Barba y Andonegui (ob. cit.) así como también se requieren la utilización y comprensión los modelos deductivos. De esta manera, es importante mencionar lo relativo a los sistemas axiomáticos y los métodos de demostración inherentes a la deducción matemática, así como también, el manejo de habilidades, los contenidos teóricos matemáticos.

Los sistemas axiomáticos están constituidos por *los términos primitivos*, los cuales no se definen y son los que establecen la creación del sistema; *los axiomas*,

son propiedades básicas que cumplen los términos primitivos y se asumen sin ninguna demostración; *las definiciones*; son enunciados que se relacionan con los términos primitivos; *los teoremas*; son enunciados demostrables dentro de la teoría que se está desarrollando. Otro aspecto importante de los sistemas axiomáticos es el hecho de que estos satisfacen las siguientes características:

- Consistencia: no debe haber contradicciones dentro del sistema. (obtener un teorema y la negación del mismo)
- Completitud: los teoremas generados dentro del mismo sistema deben ser verdaderos o falsos.
- Independencia: ningún axioma debe deducirse a partir de otros.

Para que el alumno obtenga habilidades en la utilización de la deducción matemática, se requiere que conozca los métodos de demostración, así como que identifique cuál es más idóneo para el caso particular al que se enfrente, y los utilice frecuentemente. Según Barba y Andonegui (1992) estos requerimientos deben ser “considerados por los docentes como objetivos explícitos de su enseñanza”; además el docente puede complementar con otras tareas la práctica demostrativa. Puede considerarse entonces la demostración como una estrategia valiosa, para la enseñanza de la matemática.

## CAPITULO III

### ABORDAJE METODOLÓGICO

En esta sección se presenta la metodología que se desarrolló en este estudio. Se considera la naturaleza de la investigación, las fases de la investigación, los actores sociales o informantes, las técnicas e instrumentos de recogida de la información y las técnicas de análisis de información.

#### Naturaleza del Estudio

Se concibe el presente trabajo bajo el enfoque cualitativo, permitiendo la exploración de aspectos socioeducativos, y aspirando mejorar la práctica docente, enmarcada dentro de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Sandín (2003) hace referencia a la investigación cualitativa como “una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimientos”. En este mismo sentido, Pérez Serrano citado por Sandín (ob.cit.) considera “la investigación cualitativa como un proceso *activo, sistemático y riguroso* de indagación dirigida, en el cual se toman decisiones sobre lo investigable en tanto se está en el campo de estudio”; en cuanto a la orientación de las investigaciones cualitativas, radica en la realización de “*descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que son observables, incorporando la voz de los participantes, sus experiencias, actitudes, creencias, pensamientos y reflexiones tal y como son expresados por ellos mismos*” Pérez Serrano citado por Sandín (ob.cit.).

Por otro lado, el estudio que se describe es una Investigación de Campo ya que se permitió abordar problemas reales desde su propio contexto, así como “el análisis sistemático de problemas de la realidad, con el propósito bien sea de describirlos, interpretarlos, entender su naturaleza y factores constituyentes, explicar sus causa y efectos, o predecir su ocurrencia” (Manual de Trabajo de Grado, de Especialización, Maestría y Tesis Doctorales, UPEL 2006). Así mismo, la investigación es de tipo *Investigación Acción*, debido a que se pudo hacer una reflexión del desempeño docente, elaborar un plan de cambio, ejecutarlo, evaluar la superación del problema y el progreso personal. Estas características coinciden con lo expuesto por Martínez (2006) en cuanto a los aspectos generales de la Investigación Acción, pues el mismo autor plantea que el fin de la investigación acción es mejorar la *eficiencia docente*.

Por otro lado, Martínez (2006) traza una serie de etapas de la investigación acción en el aula, las cuales pueden adaptarse a la investigación que se desarrolló:

1. Diseño General del Proyecto.
2. Identificación de un Problema Importante.
3. Análisis del problema.
4. Formulación de Hipótesis.
5. Recolección de la información necesaria.
6. Categorización de la Información.
7. Reestructuración de las categorías.
8. Diseño y ejecución de un plan de acción.
9. Evaluación de la acción ejecutada.

Por su parte, Sandín (2003) expresa que “la investigación acción se encuentra ubicada en la metodología orientada a la práctica educativa”; en este sentido lo que se hizo fue acumular información valiosa para guiar un proceso de cambio a través de la puesta en práctica de propuestas didácticas, es decir, cambiar la realidad en base a la concientización de los participantes en la acción educativa. Del mismo modo Sandín, propone algunas etapas para desarrollar una investigación acción:

1. Clarificar y diagnosticar una situación problemática para la práctica.

2. Formular estrategias de acción para resolver el problema.
3. Poner en práctica y evaluar las estrategias de acción. Comprobar hipótesis.
4. El resultado conduce a una nueva aclaración y diagnóstico de la situación problemática, iniciándose así la siguiente espiral de reflexión y acción.

Se puede decir que las 4 etapas sugeridos por Sandín, resumen en gran medida las etapas propuestas por Martínez (2006) Es importante resaltar que durante el proceso de la investigación acción las personas involucradas deben articular constantemente las etapas de planificación y acción con las de recolección de información.

Bajo esta modalidad de trabajo están involucrados técnicas y procedimientos de reflexión, transformación, aprendizaje, cambio y progreso, características de la práctica pedagógica. La investigación se desarrolló en las siguientes etapas, apegada en gran medida a los autores citados anteriormente

1. Se elaboró un diagnóstico para determinar necesidades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración.
2. Se diseñaron actividades didácticas inherentes a la enseñanza de la demostración matemática.
3. Se aplicaron las actividades diseñadas para los docentes en formación. (en este caso no se comprobaron hipótesis como lo indica Sandín (2003) en la 4ª etapa de su propuesta)
4. En esta última etapa se evaluó el alcance de las actividades desarrolladas tomando en cuenta el desempeño de los actores sociales.

Se hizo un primer abordaje a la realidad de estudio, para diagnosticar las necesidades relacionadas con el aprendizaje de la demostración en los docentes en formación en la especialidad de matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Barquisimeto (UPEL IPB), específicamente con estudiantes de semestres avanzados (7° en adelante) los cuales ya han tenido contacto con tareas demostrativas en las diferentes áreas del pensum de estudio.

### ***Participantes de la Investigación***

En primera instancia se había planificado hacer las indagaciones con estudiantes del curso *Resolución de Problemas* en el lapso I-2010, el cual es un curso optativo de profundización de la especialidad de matemática ubicada en el séptimo (7º) semestre. Con ellos se desarrollaron, la aplicación del instrumento diagnóstico y la realización de las dos primeras actividades didácticas en sendas sesiones de trabajo. Por situaciones ajenas a la autora se debió buscar otro nuevo grupo para desarrollar el resto de las actividades planificadas. Para el lapso I-2011 se consideraron como informantes a los estudiantes inscritos en el curso *Tópicos en Educación Matemática*; este curso se ubica en el noveno (9º) semestre del plan de estudio y es también un curso optativo de profundización; el curso contaba con 33 estudiantes inscritos y la autora administraba el mismo. El tópico que se escogió fue necesariamente la *demostración matemática*, y las actividades didácticas planificadas para este estudio estuvieron enmarcadas dentro del desarrollo del curso. Los estudiantes estaban al tanto de que las actividades formarían parte de un trabajo de investigación, y que algunas sesiones serían filmadas. Cabe destacar que los estudiantes que formaron parte de este curso están próximos a graduarse de profesores de matemática y algunos inclusive ya practican la docencia, considerándose con suficiente madurez tanto personal como profesional.

### **Momentos de la Investigación**

Según Teppa (2006) se propone dividir el proceso de una investigación acción, en cinco momentos, donde se inserten las etapas clásicas: Diagnóstico, Planificación, Ejecución, Reflexión y Replanificación. No obstante también recomienda adaptar dichos momentos al contexto en el que se esté investigando; en este caso se describen siete (7) momentos para la investigación.

#### *Sensibilización de los Estudiantes*

Como se dijo anteriormente se planificó hacer un diagnóstico para sustentar la idea de la investigación; en este caso se aplicó un instrumento contentivo de una

pregunta abierta, a un grupo de 12 estudiantes, con la finalidad de indagar en relación a la necesidad de hacer actividades didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática.

#### *Elaboración del Plan de Acción*

Aquí se planificaron dos actividades didácticas para desarrollar en dos sesiones; la primera consistió en revisar tres proposiciones con su respectiva demostración, tomada cada una de ellas de diferentes textos de matemática; una del libro Fundamentos de la Matemática de Sáenz y otros (2006), la cual forma parte del contenido del curso *Introducción al Álgebra*, el cual está ubicado en el segundo semestre del plan de estudio de la especialidad de Matemática; la segunda fue propuesta por la autora, con contenido de *Álgebra Lineal*, curso ubicado en el quinto semestre y por último una obtenida del libro de *Cálculo Diferencial* de Sáenz (2005); ésta última demostración era contenido de Cálculo Diferencial; ubicado en el tercer semestre. Los estudiantes por grupos pequeños de cinco (5) o seis (6) participantes contestarían algunas preguntas en relación a las demostraciones, con la finalidad de indagar sobre los conocimientos de algunos aspectos técnicos sobre las tareas demostrativas. En la segunda actividad se aspiraba indagar de nuevo en la identificación de hipótesis y tesis en las proposiciones, y además percibir cómo los estudiantes intentan elaborar una demostración; para ello se planteó lo siguiente:

Dada la siguiente proposición “*Si  $n^2$  es par,  $n$  es par, con  $n \in \mathbb{Z}$* ”, haga una demostración de la misma y luego responda a los siguientes planteamientos:

1. ¿Puede identificar la hipótesis y la tesis? (escríbalas)
2. Explique el método de demostración utilizado.
3. Proponga otra forma de demostrar la proposición.

#### *Observación y Acción*

Aquí se ejecutaron las actividades planificadas en el momento 2 (Elaboración del Plan de Acción), para ello se necesitaron de dos sesiones de clases; para la primera actividad como se dijo anteriormente, se dividió en grupos pequeños y luego de dejarlos debatir entre ellos y que respondieran a las preguntas, se hizo una discusión con el grupo completo. En la segunda actividad solo se les proporcionó el

instrumento y se dejó tiempo libre para que ellos lo desarrollaran sin ninguna otra instrucción y no se hizo discusión posterior a la actividad.

### *Reflexión*

Luego de recabar toda la información proporcionada por los estudiantes se procedió a meditar sobre los resultados de las mismas, lo que Teppa (2006) llama producción intelectual; con el fin de contrastar con las teorías revisadas en el primer momento, así como también describirlas en forma sistematizada.

### *Replanificación*

En esta etapa se planificó un nuevo ciclo de actividades didácticas con las que se proyectó mejorar el aprendizaje de la demostración matemática. Se revisaron diferentes trabajos de investigación relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática. Las actividades planificadas fueron desarrolladas en tres sesiones con una duración de dos (2) a tres (3) horas, las cuales fueron llamadas actividades didácticas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática.

Para la *sesión 1* se diseñaron dos instrumentos los cuales se aplicaron en forma individual, el primero fue un cuestionario con preguntas en las que se esperaba que los estudiantes desarrollaran libremente lo que ellos entienden en relación a un razonamiento de validación de ciertas proposiciones, por ello, y siguiendo a Ibañes (2001) se obviaron las palabras: Demuestre, Demostrar, Probar, Pruebe, entre otras, con el fin de obtener respuestas más auténticas, es decir, sus esquemas de prueba.

En cuanto al segundo instrumento para esta *sesión 1* se extrajo del módulo de actividades desarrolladas por Stacey (1988); en dicho módulo el autor presenta algunos “errores famosos” relacionados con las demostraciones matemáticas. Se les presentó a los estudiantes un planteamiento, que a simple vista parecía una demostración, pero el resultado obtenido era una contradicción, y al final se preguntó a los estudiantes qué reflexión podían hacer de la demostración anterior. Se colocó la palabra demostración para indagar si los estudiantes lograrían objetar que efectivamente el planteamiento no era una demostración y que había algún error en la misma.

Para la *sesión II* se extrajo del artículo de investigación de Sun y Chan (2009) una actividad, que consistía en que un grupo de catorce (14) estudiantes presentaron en el pizarrón nueve (9) formas distintas de demostrar la siguiente proposición: “*Demuestre que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud*”. Los treinta y tres (33) estudiantes de Tópicos en Educación Matemática, los cuales fueron divididos en cinco (5) grupos pequeños, durante una hora y media discutieron en relación a cómo proponer una demostración; luego se escogieron dos (2) de los cinco (5) grupos para hacer la exposición en el pizarrón de su demostración. La selección de estos dos grupos se hizo de la siguiente manera: uno de los grupos decidió voluntariamente participar y el segundo grupo lo seleccionó la docente porque consideró era diferente a la del primer grupo. Esta actividad es lo que Perry y otros (2006) describen como un *tipo de tarea*, específicamente “un examen crítico de una prueba escrita en la pizarra”. Cabe destacar que este tipo de tarea permite reconocer algunos aspectos fundamentales y específicos de un tema, así como también la inclusión de argumentaciones o afirmaciones que no se utilizan o se obvian en una prueba escrita, lo que hace una demostración más enriquecedora.

Siguiendo con las sesiones se planificó para la última (III) un juego tomado de la investigación de Winicki-Landman (2009), el cual consistió en explicar las reglas de un juego didáctico en el que todos los estudiantes participarían y luego discutir en relación a los aspectos matemáticos inmersos en el mismo. Las primeras instrucciones fueron las siguientes: dado un número natural, dos jugadores se turnan para restarle a dicho número cualquier potencia natural de base 2 siempre que sea menor que el número dado, y luego se reemplaza el número original con el resultado de la resta. Gana aquel jugador que escribe al final el número 1. El objetivo del juego era encontrar, si existía, una “estrategia ganadora”, una estrategia que permitiera la obtención de un resultado favorable.

Luego de jugar se procedió a discutir en grupos más grandes y luego en el grupo completo sobre las justificaciones matemáticas inmersas en el juego, con el fin de

llegar a la estrategia ganadora y aun más, demostrar que efectivamente la estrategia seleccionada o encontrada es válida siempre.

#### *Ejecución de la Replanificación*

Se desarrollaron las tres sesiones planificadas en forma continua, en un periodo de tres semanas.

#### *Apreciación del Alcance*

Una vez concluidas las sesiones I, II y III, se solicitó a todos los estudiantes que escribieran en forma de ensayo su apreciación en relación a las actividades didácticas desarrolladas en el curso y se hicieron entrevistas a cinco (5) participantes colaboradores; seleccionados tres de ellos por la autora, por la constante participación en las sesiones y las tareas del curso; también se recogieron las reflexiones personales de la autora.

### **Técnicas e Instrumentos de Recogida de Información**

En la investigación acción existen diversos tipos de recolección de información; se sugiere además que la recolección de la información no consuma mucho tiempo, ya que esto pudiera interferir en gran medida en el proceso de enseñanza; el docente debe familiarizarse con los instrumentos que va a utilizar. Martínez (2006) sugiere 5 técnicas que considera apropiadas en la recolección de información en la investigación acción:

1. Tomar notas en clase.
2. Grabación de sonido.
3. Grabación de video.
4. El Cuestionario.
5. La Observación.

Por su parte Teppa (2006) sugiere entre las técnicas e instrumentos para la recolección de información en la investigación acción, lo siguiente: Observación Participante, Entrevistas, Encuestas y Cuestionarios, Testimonios Focalizados, Grupos de Discusión, Grupos Focales, Análisis Documental y Círculos de Reflexión.

Tomando en cuenta lo señalado por los expertos para esta investigación, se utilizaron algunas de las técnicas sugeridas, entre las cuales están:

- *Cuestionarios:* Se elaboraron cuestionarios concernientes a la práctica demostrativa; estos cuestionarios fueron respondidos en forma individual y/o grupales, se le pidió a los estudiantes que dejaran todas las anotaciones utilizadas, incluso si las mismas no fueran utilizadas o necesarias.
- *Grabación de videos y de sonido:* Se filmaron videos de los estudiantes en sus clases, con la finalidad de registrar con fidelidad, conversaciones y/o debates orales relacionados con las actividades desarrolladas en la misma. Las grabaciones fílmicas hechas, fueron: Entrevistas Grupales relacionadas con el segundo cuestionario de la primera sesión y de la segunda sesión. Observaciones Participantes relacionadas con la tercera sesión. Las grabaciones de sonido fueron: Entrevistas a profundidad a cinco (5) participantes en la cual se elaboraron preguntas amplias no estructuradas en relación a las actividades didácticas desarrolladas.
- *Entrevistas:* Se procedió a realizar entrevistas grupales e individuales, relacionadas con las actividades hechas en los cuestionarios así como también con la práctica demostrativa a la que ellos se enfrentan en las diferentes asignaturas de la especialidad. Se hicieron preguntas tanto abiertas como cerradas y estas fueron respondidas en forma oral.

A continuación se presentan los cuestionarios elaborados para la investigación.

Diagnóstico. (Anexo A)

*A continuación se le formula una pregunta acerca de la demostración en matemática, se le agradece toda su colaboración en la respuesta de la misma.*

*¿Considera usted necesario el uso de actividades didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática? Explique su respuesta.*

Primer Instrumento. (Anexo B,1)

*Se presentan tres demostraciones extraídas de textos de matemática. Y luego de hacen las siguientes preguntas:*

*¿Puede identificar el método de demostración utilizado? (explique)*

*¿Puede identificar la hipótesis y la tesis? (escribalas)*

*¿Es adecuado el lenguaje utilizado en la demostración para el nivel que se ubica?*

*Agregue (si cree necesario) algunas sugerencias para la demostración.*

*Proponga otra forma de demostrar la proposición.*

Segundo Instrumento. (Anexo B,2)

*Dada la siguiente proposición “Si  $n^2$  es par,  $n$  es par, con  $n \in \mathbb{Z}$ ”, haga una demostración de la misma y luego responda a los siguientes planteamientos:*

*¿Puede identificar la hipótesis y la tesis? (escribalas)*

*Explique el método de demostración utilizado.*

*Proponga otra forma de demostrar la proposición.*

Tercer Instrumento. (Anexo B,3)

Responda las siguientes interrogantes:

1) a)  $\forall L, M, P, N \in \mathbb{R} : L + M + P = N + L + P?$

b)  $\exists L, M, P, N \in \mathbb{R} : L + M + P = N + L + P?$

2) ¿Para qué valores de  $x$  se cumple que  $\sin x = \cos x$ ?

3) ¿La suma de cuatro números impares es divisible por cuatro?

Cuarto Instrumento. (Anexo B,4)

La siguiente identidad es cierta:

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Restando  $2n + 1$  en ambos lados de la igualdad tenemos,

$$(n + 1)^2 - (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 - (2n + 1)$$

$$(n + 1)^2 - (2n + 1) = n^2$$

Restando  $n(2n + 1)$  de nuevo en ambos lados,

$$(n + 1)^2 - (2n + 1) - n(2n + 1) = n^2 - n(2n + 1)$$

Sumando ahora  $\frac{(2n+1)^2}{4}$  en ambos lados,

$$(n + 1)^2 - (n + 1)(2n + 1) + \frac{(2n + 1)^2}{4} = n^2 - n(2n + 1) + \frac{(2n + 1)^2}{4}$$

Nótese que ambos lados son cuadrados perfectos, luego

$$\left[ (n + 1) - \frac{(2n + 1)}{2} \right]^2 = \left[ n - \frac{(2n + 1)}{2} \right]^2$$

Entonces

$$(n + 1) - \frac{(2n + 1)}{2} = n - \frac{(2n + 1)}{2}$$

Por lo tanto,  $n + 1 = n$

*¿Qué reflexión puedes hacer en relación a la demostración anterior?*

Quinto Instrumento. (Anexo B,5)

*Demuestre que el segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.*

Por último, veintinueve (29) de los treinta y tres (33) hicieron testimonios focalizados en forma de ensayo en el que plasmaron sus apreciaciones en relación a las actividades didácticas hechas en las sesiones de clases.

### **Técnicas de Análisis de Información**

La información recogida fue categorizada; por categorizar se entiende resumir o sintetizar en una idea un conjunto de información escrita, grabada o filmada para su fácil manejo posterior; se trata de que el investigador interprete la información recabada e intente ubicarla en diferentes escenarios posibles.

Seguendo a Teppa (2006), se consideraron algunas técnicas propias de la investigación acción como lo son:

- *Observar Patrones*: la observación durante cada una de las actividades garantizó que éstas tuvieran la aceptación por parte de los participantes, en función de proponer cambiar alguna o seguir en la línea de la planificación.
- *Categorizar*: clasificar o codificar mediante un término o palabra que contenga una idea central, las respuestas de los participantes en cada una de las actividades desarrolladas.

- *Realizar contrastes y comparaciones:* contrastar y comparar con teorías fue la principal y constante técnica utilizada en las sesiones y en las respuestas escritas por los participantes.

## CAPITULO IV

### ANALISIS E INTERPRETACIÓN DE LA INFORMACIÓN

En este capítulo se presenta el análisis de la información recabada de todas las actividades didácticas realizadas por los dos grupos de estudiantes tal como se explicó en el capítulo anterior, incluyendo la actividad diagnóstica.

#### **Análisis del Cuestionario Diagnóstico**

Como se indicó en el capítulo anterior, se desarrolló el estudio en diferentes momentos. A continuación se muestra la información recabada del primer momento, *sensibilización de los estudiantes*, en el que se elaboró un instrumento diagnóstico. En las respuestas de los estudiantes se pudieron evidenciar ciertos patrones y estos se organizaron en categorías, las cuales sustentan la necesidad de desarrollar actividades didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática. Las respuestas dieron origen a dos categorías a saber: **C1** *Percepción de la Demostración desde la experiencia como estudiante de matemática*, se refiere a cómo ha sido su experiencia, cómo han vivido la demostración en el aula y cómo lo que han visto los estudiantes en relación a demostraciones matemáticas, influye en sus creencias. En esta categoría se pudieron distinguir 5 subcategorías, las cuales también se presentan y describen en el siguiente cuadro:

## Cuadro N° 2

### Categoría C1: Percepción de la Demostración desde la experiencia como estudiante de Matemática.

Subcategorías	Descriptores	N° de estudiantes
C1.1 Tediado/Monótono	La demostración matemática: tarea tediosa y monótona	10
C1.2 Difícil	Es difícil demostrar proposiciones	11
C1.3 Memorización	La demostración vista como un proceso algorítmico y/o memorístico	6
C1.4 Rígido	La forma en que se enseña es rígida y tradicional	5
C1.5 Estrategias	Asumir la demostración como una estrategia de aprendizaje	9

**Fuente: La autora, 2011**

En esta categoría se notan aspectos importantes, los cuales se consideraron para la elaboración de las actividades didácticas; se observa también que existen diversas percepciones tales como: considerar la demostración como una tarea tediosa, monótona y de difícil comprensión, las tareas demostrativas son vistas como un proceso algorítmico, además de creer que la forma de enseñar de los docente es rígida y tradicional.

En cuanto a la segunda categoría, llamada **C2** *Qué esperan los estudiantes de las actividades didácticas para el aprendizaje y la enseñanza de la demostración matemática*, describe lo que los estudiantes esperan al desarrollar en clase actividades didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática; esta categoría generó siete (7) subcategorías que se describen en el siguiente cuadro.

### Cuadro N° 3

#### Categoría C2: Qué esperan los estudiantes de las actividades didácticas para el aprendizaje y la enseñanza de la demostración matemática

Subcategorías	Descriptor	N° de estudiantes
C2.1 Facilitar la comprensión (enseñanza-aprendizaje)	Las actividades didácticas pueden facilitar la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática, así como avance en el conocimiento y aprendizaje significativo.	19
C2.2 Tener manejo de la demostración	Manipular, tener dominio de los métodos de demostración y reforzar conocimientos.	5
C2.3 Motivación – Interés	A través de las actividades didácticas el estudiante se motiva, así como también se promueve el interés hacia el aprendizaje de la demostración	10
C2.4 Ver menos compleja la demostración	Las actividades didácticas ayudarían en gran medida a disminuir la complejidad con la que los estudiantes ven la tarea de demostrar.	10
C2.5 Superar dificultades	Las demostraciones son para la mayoría de los estudiantes una barrera de aprendizaje.	7
C2.6 Valorar la importancia de la demostración matemática.	Identificar y valorar las funciones de la demostración matemática.	13
C2.7 Innovación	Clases más amenas y dinámicas.	8

**Fuente: La autora, 2011**

Según la información recabada, los estudiantes reconocen la importancia de la demostración matemática en los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje; los mismos dieron cuenta que el desarrollar actividades didácticas facilitaría el aprendizaje de la demostración matemática, también a valorar la importancia y funciones de la misma, así mismo ayudaría a disminuir la complejidad con que perciben una demostración, ya que algunos hasta la consideran un problema de

aprendizaje. El realizar actividades didácticas centradas en la enseñanza de la demostración matemática despertaría interés y motivación en los estudiantes y las clases serían más amenas y dinámicas.

Luego del primer momento se procedió a planificar (segundo momento) las actividades a desarrollar en el tercer momento de la investigación.

Se describe a continuación el tercer momento: *Observación y Acción*, aquí se relatan las dos primeras actividades didácticas desarrolladas con el primer grupo de estudiantes cursantes de la asignatura Resolución de Problemas.

### **Reflexión de la Primera Actividad Didáctica**

Se muestran las proposiciones con las demostraciones, en la misma forma en que aparecen en los libros de donde se extrajeron.

*Proposición 1:* Sea  $*$  una operación binaria en  $A$ . Se dice que un elemento  $a$  de  $A$  es regular a la operación  $*$  si se cumplen las dos siguientes condiciones (cancelación a la derecha y a la izquierda)

$$1. a * x = a * y \Rightarrow x = y \quad 2. x * a = y * a \Rightarrow x = y$$

*Probar que todo elemento invertible es regular*

*solución*

*Supongamos que  $a$  es invertible y sea  $a^{-1}$  su inverso*

$$\begin{aligned} 1. a * x = a * y &\Rightarrow a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * (a * y) \\ &\Rightarrow (a^{-1} * a) * x = (a^{-1} * a) * y \\ &\Rightarrow e * x = e * y \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

2. Se procede en forma similar a 1.

[Extraída del libro Fundamentos de la Matemática de Sáenz y otros (2006)]

## Cuadro N° 4

### Respuestas de la Demostración 1

Preguntas	1. ¿Puede identificar el método de demostración utilizado? Explique	2. ¿Puede identificar la hipótesis y la tesis? (escribalas)	3. ¿Es adecuado el lenguaje utilizado en la demostración para el nivel en que se ubica?	Agregue (si cree necesario) algunas sugerencias para la demostración
Equipo 1	Demostración Directa	H: Todo elemento $a$ es invertible T: El elemento $a$ es regular	Si	No hay sugerencias, sin embargo se nos hizo complicado identificar la hipótesis y la tesis
Equipo 2	Se presume que es el método directo	H: La ley $*$ es una operación binaria en $A$ . Todo elemento de $A$ es invertible. T: Probar que $A$ es regular	Es adecuado y sencillo	Sugerimos que se deben justificar los pasos de la demostración
Equipo 3	Método Directo	H: Sea $*$ una operación binaria en $A$ se dice que un elemento $a$ de $A$ es regular respecto a la operación $*$ si se cumplen las dos siguientes condiciones (cancelación a la izquierda y a la derecha) T: Todo elemento invertible es regular	Si	Justificación en los pasos y fue complicado saber cual era la hipótesis y la tesis
Equipo 4	Método Directo	H: 1. $a * x = a * y \Rightarrow x = y$ 2. $x * a = y * a \Rightarrow x = y$  T: Probar que todo elemento invertible es regular	Si	Debe estar especificado que $e = a^{-1} * a$
Equipo 5	Método Directo	H: Sea $*$ una operación binaria en $A$ 1. $a * x = a * y \Rightarrow x = y$ 2. $x * a = y * a \Rightarrow x = y$ , aquí el equipo colocó una llave antes del símbolo de implicación para decir que era la hipótesis y después del símbolo la tesis Además agregó una nota: Está muy confuso identificar la hipótesis y la tesis	Si	Debería tener justificación de cada paso
Equipo 6	Método Directo	H: todo elemento invertible	Si	Se deben justificar los

		T: 1. $a * x = a * y \Rightarrow x = y$ 2. $x * a = y * a \Rightarrow x = y$ , lo que implica que todo elemento invertible es regular		pasos de la demostración y culminar la demostración así sea similar
Descripción de la autora	Los seis equipos coincidieron en reconocer adecuadamente que el método utilizado fue el método directo.	De los seis quipos solo uno estuvo bien claro en identificar la hipótesis y la tesis.	Todos coincidieron en que es adecuado el lenguaje utilizado	Cinco de los seis equipos coincidieron en que hacia falta la justificación de los pasos realizados, tres de los seis equipos afirmaron que fue difícil para ellos identificar la hipótesis y la tesis.

**Fuente: La autora, 2011**

Se puede decir que los estudiantes reconocen la utilización del método directo en una demostración presentada por otro, o en este caso extraída de un texto. En cuanto a la identificación de hipótesis y tesis, se evidenció dificultad para esta proposición. Los estudiantes reconocen la importancia de la justificación en las demostraciones.

### *Proposición 2*

Teorema.

Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales y  $T: V \rightarrow W$  una transformación lineal. Entonces  $N(T) = \{x \in V \text{ tal que } T(x) = 0\}$  es subespacio de  $V$ .

Demostración:

Usaremos  $0_v$  para denotar el elemento neutro del espacio vectorial  $V$ .

Como  $T(0_v) = 0_w$  tenemos que  $0_v \in N(T)$ . Sean  $x, y \in N(T)$  y  $\alpha \in K$ .

Entonces  $T(x + y) = T(x) + T(y) = 0_w + 0_w = 0_w$  y  $T(\alpha x) = \alpha T(x) = \alpha 0_w = 0_w$ .

En consecuencia  $x + y \in N(T)$  y  $\alpha x \in N(T)$ , así  $N(T)$  es un subespacio de  $V$ .

[Demostración hecha por la autora]

### **Cuadro N° 5**

## Respuestas de la Demostración 2

Preguntas	1. ¿Puede identificar el método de demostración utilizado? Explique	2. ¿Puede identificar la hipótesis y la tesis? (escribalas)	3. ¿Es adecuado el lenguaje utilizado en la demostración para el nivel en que se ubica?	Agregue (si cree necesario) algunas sugerencias para la demostración
Equipo 1	Método Directo	H: Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales y $T:V \rightarrow W$ una transformación lineal T: $N(T) = \{x \in V \text{ tal que } T(x) = 0\}$ es subespacio de $V$	Si	No hay sugerencias,
Equipo 2	Método Directo	H: Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales y $T:V \rightarrow W$ una transformación lineal T: entonces $N(T) = \{x \in V \text{ tal que } T(x) = 0\}$ es subespacio de $V$	Si	No hubo respuesta
Equipo 3	Método Directo	H: Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales y $T:V \rightarrow W$ una transformación lineal T: $N(T) = \{x \in V \text{ tal que } T(x) = 0\}$ es subespacio de $V$	Si	No hubo respuesta
Equipo 4	Método Directo	H: Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales y $T:V \rightarrow W$ una transformación lineal T: $N(T) = \{x \in V \text{ tal que } T(x) = 0\}$ es subespacio de $V$	Si	No hay nada que agregar
Equipo 5	Método Directo	H: Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales y $T:V \rightarrow W$ una transformación lineal T: $N(T) = \{x \in V \text{ tal que } T(x) = 0\}$ es subespacio de $V$	Si	No hubo respuesta
Equipo 6	Método Directo	H: Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales y $T:V \rightarrow W$ una transformación lineal T: $N(T) = \{x \in V \text{ tal que } T(x) = 0\}$	Si	En primer lugar se debe resaltar que $T(a_v) = a_w$ es un teorema.

		es subespacio de V		
Descripción de la autora		Todos coincidieron en identificar correctamente la hipótesis y la tesis	Todos coincidieron en que es adecuado el lenguaje utilizado	Solo un equipo dio sugerencias sobre la demostración

**Fuente: La autora, 2011**

*Proposición 3:*

Criterio de Monotonía

Sea  $f$  una función continua en un intervalo  $I$  y diferenciable en todo punto interior de  $I$ .

1. Si  $f'(x) > 0$  en todo punto interior de  $I$ , entonces  $f$  es creciente en  $I$ .
2. Si  $f'(x) < 0$  en todo punto interior de  $I$ , entonces  $f$  es decreciente en  $I$ .

Demostración

1. Sean  $x_1$  y  $x_2$  dos puntos cualesquiera de  $I$ . Supongamos que  $x_1 < x_2$ ; como  $[x_1, x_2]$  está contenido en el intervalo  $I$ ,  $f$  es continua en  $[x_1, x_2]$  y es diferenciable en  $(x_1, x_2)$ . Por el Teorema del valor medio, existe  $c$  en  $(x_1, x_2)$  tal que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) (x_2 - x_1)$$

$$\text{Pero } f'(c) > 0 \text{ y } x_2 - x_1 > 0 \implies f(x_2) - f(x_1) > 0 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

Como  $x_1$  y  $x_2$  son dos puntos cualesquiera de  $I$ , se concluye que  $f$  es creciente en  $I$

2. Se procede como en 1.

[Extraída del libro de Cálculo Diferencial de Sáenz (2005)]

## Cuadro N° 6

### Respuestas de la Demostración 3

Preguntas	1. ¿Puede identificar el método de demostración utilizado? Explique	2. ¿Puede identificar la hipótesis y la tesis? (escríbalas)	3. ¿Es adecuado el lenguaje utilizado en la demostración para el nivel en que se ubica?	Agregue (si cree necesario) algunas sugerencias para la demostración
Equipo 1	Método Directo	H: $f$ es una función continua en un intervalo $I$ y diferenciable en todo punto interior de $I$ . T: 1. $f$ es creciente en $I$ . 2. $f$ es decreciente en $I$ .	No	Se debe realizar un grafico para ambos casos

Equipo 2	Método Directo	H: $f$ es una función continua en un intervalo $I$ y diferenciable en todo punto interior de $I$ . Además para la primera condición se tiene como hipótesis $f'(x) > 0$ en todo punto interior de $I$ . Luego la tesis de esa condición es que $f$ es creciente en $I$ , análogo para la segunda condición	Es un poco abstracto	Se sugiere hacer la demostración más esquematizada, pues podría ser compleja para el estudiante
Equipo 3	Método Directo	H: Sea $f$ una función continua en un intervalo $I$ y diferenciable en todo punto interior de $I$ . Si $f'(x) > 0$ en todo punto interior de $I$ T: $f$ es creciente en $I$ .	Si	No hubo respuesta
Equipo 4	Método Directo	H: Sea $f$ una función continua en un intervalo $I$ y diferenciable en todo punto interior de $I$ . 1. $f'(x) > 0$ en todo punto interior de $I$ 2. $f'(x) < 0$ en todo punto interior de $I$ T: 1. $f$ es creciente en $I$ 2. $f$ es decreciente en $I$	Si	Creemos necesario la justificación de cada paso
Equipo 5	Método Inductivo, ya que la demostración se utiliza la suposición como elemento para llegar al resultado de la misma	H: Sea $f$ una función continua en un intervalo $I$ y diferenciable en todo punto interior de $I$ . 1. $f'(x) > 0$ en todo punto interior de $I$ 2. $f'(x) < 0$ en todo punto interior de $I$ T: 1. $f$ es creciente en $I$ 2. $f$ es decreciente en $I$	Si	Debería poseer una ilustración. Debería ser más explícita con mayor cantidad de pasos, para así entender de una manera comprensible para el estudiante de acuerdo a su nivel
Equipo 6	Método Directo	H: Sea $f$ una función continua en un intervalo $I$ y diferenciable en todo punto interior de $I$ . 1. $f'(x) > 0$ en todo punto interior de $I$ 2. $f'(x) < 0$ en todo punto interior de $I$ T: 1. $f$ es creciente en $I$ 2. $f$ es decreciente en $I$	Si	Debe ser más detallada la demostración, es decir desglosar más los pasos

Descripción de la autora		De los seis equipos dos no lograron identificar la hipótesis y la tesis	Dos de los equipos sugirieron hacer una ilustración de la demostración para facilitar el entendimiento y disminuir la complejidad. Tres de los equipos sugirieron detallar más la información
--------------------------	--	---	---

**Fuente: La autora, 2011**

Luego de presentar en forma escrita las respuestas de los estudiantes se discutió con el grupo completo de estudiantes en relación a la actividad. A la mayoría de los participantes les resultó interesante responder esas preguntas, ya que nunca se habían detenido a analizar una demostración de esa manera; la actividad tuvo gran recepción por parte del grupo de estudiantes quienes estuvieron motivados para realizar la misma.

Reflexionando un poco sobre las respuestas se puede decir que en cuanto a los métodos de demostración, no tuvieron inconvenientes para identificarlos, todos los equipos coincidieron en dar la respuesta correcta para las proposiciones, quiere decir que los estudiantes en ese nivel tienen conocimiento de los métodos de demostración.

En cuanto a la identificación de las hipótesis y las tesis la mayoría de los equipos respondieron correctamente; sin embargo en la primera proposición los equipos 1, 5 y 6 no respondieron correctamente y para la tercera los equipos 1 y 3 de nuevo no las identificaron correctamente, esto se considera un error en el aprendizaje de la demostración calificado por Colmenárez (2008) como un *Error en los fundamentos lógicos de una demostración*; es importante acotar también que las dos proposiciones en las que hubo respuestas incorrectas no tienen explícita la forma " $p \Rightarrow q$ " a lo que se puede inferir entonces, que los estudiantes están acostumbrados a las proposiciones escritas de la forma "*Si..... entonces*"

Dentro de las sugerencias propuestas por los grupos estuvieron: hacían falta las justificaciones de los pasos en todas las demostraciones, pudiéndose percibir una

marcada influencia del esquema de demostración (dos columnas) en las cuales se enumeran los pasos y a un lado se escribe la justificación de la misma. Para la demostración del teorema del valor medio, hubo sugerencias de hacer un gráfico para facilitar la comprensión de la demostración, siendo este aspecto también de importancia, ya que evidencia que los estudiantes suelen necesitar información gráfica.

En cuanto al lenguaje utilizado, a los estudiantes en su mayoría les pareció bastante adecuado, a pesar de la notable dificultad para algunos en relación a la identificación de las hipótesis y las tesis.

### Reflexión de la Segunda Actividad Didáctica

Tal como se describió en el capítulo anterior para la segunda actividad se sugirió hacer en forma individual la proposición: *Dada la siguiente proposición “Si  $n^2$  es par,  $n$  es par, con  $n \in \mathbb{Z}$ ”, haga una demostración de la misma.* En esta actividad participaron solo doce (12) estudiantes del curso de Resolución de Problemas y se muestran las conclusiones de sus respuestas individuales en el siguiente cuadro, (para identificar a los informantes se enumeraron con la letra S y un número para cada uno).

#### Cuadro N° 7

#### Respuestas del Segundo Cuestionario

Estudiantes	Análisis de las respuestas
S1	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Intentó hacer la demostración por el contrarrecíproco.</li> <li>2. No hizo ninguna demostración.</li> <li>3. Identificó correctamente la hipótesis y la tesis.</li> </ol>
S2	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Hizo un comentario: “por el método directo es difícil verlo, entonces procedamos por otro camino como reducción al absurdo”</li> <li>2. Identificó correctamente la hipótesis y la tesis</li> <li>3. Desarrolló una demostración por el método reducción al absurdo en la cual justifico los aspectos importantes.</li> <li>4. Propuso hacer la demostración por el método directo, pero acotó que era difícil.</li> </ol>
S3	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Desarrolló una demostración por el método reducción al absurdo, a</li> </ol>

	<p>pesar de que al principio reescribió la expresión erróneamente, desarrolló una buena demostración y efectivamente llegó a una contradicción con la hipótesis.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Identificó correctamente la hipótesis y la tesis.</li> <li>Propuso hacer la demostración por el método directo.</li> </ol>
S4	<ol style="list-style-type: none"> <li>Desarrolló lo que consideró una demostración utilizando la inducción matemática, pero hizo mal uso del método al no utilizar correctamente la variable y la hipótesis inductiva, y luego al desarrollar la demostración.</li> <li>Identificó correctamente la hipótesis y la tesis.</li> <li>Propuso el método reducción al absurdo.</li> </ol>
S5	<ol style="list-style-type: none"> <li>Desarrolló una demostración por el método reducción al absurdo.</li> <li>Identificó correctamente la hipótesis y la tesis.</li> <li>Propuso hacer la demostración por el método directo.</li> </ol>
S6	<ol style="list-style-type: none"> <li>Desarrolló una demostración por el método reducción al absurdo, a pesar de algunas confusiones con las variables utilizadas.</li> <li>Identificó correctamente la hipótesis y la tesis.</li> <li>Propuso y desarrolló una demostración por contrarreciproco.</li> </ol>
S7	<ol style="list-style-type: none"> <li>Desarrolló unos ejemplos: <math>2^2=4</math> <math>-2^2=4</math>... Y al final <math>n^2=n</math> y <math>-n^2=n</math></li> <li>Identificó correctamente la hipótesis y la tesis.</li> <li>Describió lo que desarrolló como un método de demostración.</li> <li>Propuso y desarrollo otra forma de “demostrar” la proposición, pero tampoco se considera una demostración como tal.</li> </ol>
S8	<ol style="list-style-type: none"> <li>Escribió: Si <math>n^2=2k</math> entonces <math>n=2k</math></li> <li>Desarrolló lo siguiente: <math display="block">n^2 = (2k)^2</math> <math display="block">= 4k^2</math> <math display="block">\sqrt{n^2} = \sqrt{4k^2}</math> <math display="block">n=2k \quad \text{por lo tanto } n \text{ es par}</math> </li> <li>No identificó la hipótesis y la tesis.</li> <li>Describió el método utilizado como el método simple.</li> <li>Intento hacer una demostración por reducción al absurdo.</li> </ol>
S9	<ol style="list-style-type: none"> <li>Desarrolló una demostración por el método reducción al absurdo.</li> <li>Identificó correctamente la hipótesis y la tesis.</li> <li>Propuso hacer la demostración por contraejemplo.</li> </ol>
S10	<ol style="list-style-type: none"> <li>Desarrolló un par de ejemplos en donde escribió si <math>n=1</math> es un número impar, su cuadrado también lo es, cabe destacar que el estudiante comenzó escribiendo que la demostración la haría por reducción al absurdo.</li> <li>Identificó correctamente la hipótesis y la tesis.</li> <li>Propuso hacer la demostración por inducción matemática.</li> </ol>
S11	<ol style="list-style-type: none"> <li>Solo escribió <math>n^2=2k</math> entonces <math>n=2k</math>.</li> <li>Identificó correctamente la hipótesis y la tesis.</li> <li>Propuso hacer la demostración por reducción al absurdo.</li> </ol>
S12	<ol style="list-style-type: none"> <li>Desarrolló lo siguiente: <math display="block">n^2 = (2k)^2</math> <math display="block">(2k)^2 \Rightarrow 2k_1 \cdot 2k_2</math> </li> </ol>

	$\Rightarrow 2(k_1 \cdot k_2) \quad q = k_1 \cdot k_2$ $\Rightarrow 2q \quad \text{por lo tanto es un número}$ <p>par</p> <p>Cabe destacar que esto no se considera como una demostración.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>2. Identificó correctamente la hipótesis y la tesis.</li> <li>3. Propuso y desarrolló otra forma de “demostrar”, escribiendo: <math>n^2</math> es par entonces <math>n</math> no es par.</li> </ol>
--	---

**Fuente: La autora, 2011**

En este cuestionario solo uno de los estudiantes no identificó la hipótesis y la tesis. De nuevo se comprueba que los estudiantes tienen conocimientos de los métodos que se utilizan para hacer demostraciones, a pesar de que en algunos casos no hacían buen uso de los mismos; solo cinco de los doce lograron desarrollar una demostración de la proposición; hubo también algunas confusiones en cuanto a la utilización de variables en cuatro oportunidades y los estudiantes cometieron el error de tomar una misma letra para dos variables diferentes lo que Colmenárez (2008) identifica como un error en el aprendizaje de la demostración matemática calificado como de *estaticidad notacional*.

Por otro lado, dos de los estudiantes dieron en sus respuestas, ejemplos de que se cumple la proposición para números específicos; a pesar de que no fue mayoría es importante destacar este aspecto, pues se presume que hay estudiantes que aun en este nivel no tienen claridad de lo que es una demostración matemática. Este tipo de tareas es lo que Balacheff (2000) llama *Empirismo Ingenuo*.

Al finalizar el tercer y cuarto momento de la investigación y luego de reflexionar en base a los resultados, se hizo una revisión de trabajos de investigación con la finalidad de planificar las actividades didácticas para desarrollar en el momento seis (6). Este momento consistió en la ejecución de un ciclo de actividades con un nuevo grupo de estudiantes inscritos en el curso de Tópicos en Educación Matemática del lapso I-2011 cuya matrícula era de treinta y tres (33) estudiantes. Se diseñaron tres (3) sesiones de actividades didácticas.

Para estas sesiones se hicieron filmaciones del desarrollo de las actividades con el fin de analizar en profundidad las participaciones orales de los estudiantes en

las dinámicas de las mismas. Se describirán cada una de las sesiones en el orden en que se desarrollaron. A continuación se presentan las reflexiones de los resultados a manera de resumen en cuadros para cada pregunta.

### Reflexión de la Sesión 1

#### Cuadro N° 8

##### Tercer instrumento

<p>Responda las siguientes interrogantes:</p> <p>1) a) <math>\forall L, M, P, N \in \mathbb{R} : L + M + P = N + L + P?</math>          b) <math>\exists L, M, P, N \in \mathbb{R} : L + M + P = N + L + P?</math></p> <p>2) ¿Para qué valores de <math>x</math> se cumple que <math>\text{sen } x = \text{cos } x?</math></p> <p>3) ¿La suma de cuatro números impares es divisible por cuatro?</p>
--

**Fuente: La autora, 2011**

#### Cuadro N° 9

##### Respuestas de la Pregunta 1a

Categorías Destacadas	Frecuencia
Falso, Dio un contraejemplo.	13
Verdadero, Desarrolló una ecuación.	2
Verdadero, Desarrolló una “demostración”.	2
Verdadero, cuando $M=N$ .	5
Falso, sin justificación.	4
No respondieron.	1
Número de estudiantes	27

**Fuente: La autora, 2011**

A manera de reflexión se puede decir que la gran mayoría de los estudiantes respondieron que la pregunta era falsa y dieron un contraejemplo. Así mismo, Cinco (5) de los estudiantes respondieron que era verdadero solo cuando  $M=N$ , sin hacer

énfasis que ese era solo un caso, pero que no era cierto para la proposición, ya que en la misma se utilizó el cuantificador universal  $\forall$ . Solo dos de los estudiantes intentaron hacer una demostración para justificar su respuesta. Se puede decir entonces que los estudiantes aun confunden los cuantificadores  $\forall$  y  $\exists$ . En algunos casos los estudiantes manifestaron que, sin tener conciencia del error, un caso particular era suficiente para probar la veracidad de una proposición, esto es lo que Balacheff (2000) denomina “*la experiencia crucial*” enmarcada en los tipos de prueba que él considera presentan los estudiantes.

### Cuadro N° 10

#### Respuestas de la Pregunta 1b

Categorías Destacadas	Frecuencia
Verdadero, dio un ejemplo	12
No se cumple - Falso	2
Se cumple cuando M=N	3
No respondieron.	10
Número de estudiantes	27

**Fuente: La autora, 2011**

La mayoría de los estudiantes respondió que era verdadero y dio un ejemplo, sin embargo un número considerable (10) de estudiantes no respondieron, a lo que se puede inferir que la no respuesta fue debido precisamente a la confusión con los cuantificadores  $\forall$  y  $\exists$ . Solo dos (2) de los estudiantes dieron un ejemplo; no obstante no justificaron que para esta pregunta no era necesario hacer una demostración, esta dificultad es lo que Colmenárez (2008) describe como un *Error en los fundamentos lógicos de una demostración*, el estudiante tiene una concepción equivocada de la noción de demostración.

### Cuadro N° 11

#### Respuestas de la Pregunta 2

Categorías Destacadas	Frecuencia
$x = \frac{\pi}{4}$ y/o $x = 45^\circ$	11
$x = \frac{n\pi}{4}$	3
$2n\pi = n\pi$	1
No hay valores	2
$x = \frac{\pi}{2}$	2
$x = \frac{4n+1}{4}\pi$	1
No respondieron	7
Número de estudiantes	27

**Fuente: La autora, 2011**

Siete (7) de los estudiantes no respondieron a ésta pregunta. La mayoría de los estudiantes dieron valores a  $x = \frac{\pi}{4}$  y/o  $x = 45^\circ$ , sin tomar en cuenta que esos eran solo casos particulares. Cuatro de los estudiantes utilizaron el gráfico de la circunferencia unitaria con los cuatro cuadrantes, pero no se evidenció la relación con la respuesta dada. Tres (3) de los estudiantes escribieron los valores de los ángulos notables para las funciones seno y coseno en una forma aislada de sus respuestas. Un solo estudiante dibujó las graficas de las funciones seno y coseno en un mismo plano cartesiano, pero no logró dar con una respuesta. Cinco (5) de los estudiantes intentaron dar una respuesta más genérica de los valores que hacen igual al seno y al coseno, pero de nuevo sin una justificación o demostración.

Se puede decir que la mayoría de los estudiantes, al asegurar un único valor para esta igualdad, no tomaron en cuenta la periodicidad de las funciones seno y

coseno. Solo cinco de los estudiantes intentaron expresar los valores que satisfacían la igualdad, por medio de un representante característico, esto es lo que llama Balacheff (2000) “el ejemplo genérico”.

**Cuadro N° 12**  
**Respuestas de la Pregunta 3**

<b>Categorías Destacadas</b>	<b>Frecuencia</b>
Falso, dio un contraejemplo.	12
Verdadero.	2
Se cumple cuando los números son consecutivos.	5
Hizo una “demostración”.	2
Dio un ejemplo donde se cumple.	1
No se especificó el conjunto.	2
No respondió.	3
Número de estudiantes	27

**Fuente: La autora, 2011**

En cuanto a esta pregunta resalta que la mayoría de los estudiantes respondieron en forma correcta y justificaron su respuesta con un contraejemplo. Por otro lado, cabe destacar también que algunos estudiantes no tenían claridad sobre la justificación de su respuesta, ya que cinco (5) de ellos respondió con un ejemplo de que la suma de cuatro números específicos (consecutivos) es divisible por cuatro.

En cuanto a los comentarios de los estudiantes en la entrevista grupal hecha luego de la primera sesión, los mismos sugirieron que las preguntas debieron ser más específicas ya que faltaba información, algunos de los estudiantes manifestaron tener bastante claridad del uso de los cuantificadores, otro grupo de estudiantes aun tienen confusiones a pesar de no darse cuenta de esta dificultad. La mayoría de los estudiantes no vieron la necesidad de hacer una demostración para responder a las

primeras dos preguntas, al contrario sucedió para la última, a pesar de que solo dos lograron hacer un bosquejo de la demostración.

### Cuadro N° 13

#### Cuarto Instrumento

La siguiente identidad es cierta:

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Restando  $2n + 1$  en ambos lados de la igualdad tenemos,

$$(n + 1)^2 - (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 - (2n + 1)$$

$$(n + 1)^2 - (2n + 1) = n^2$$

Restando  $n(2n + 1)$  de nuevo en ambos lados,

$$(n + 1)^2 - (2n + 1) - n(2n + 1) = n^2 - n(2n + 1)$$

Sumando ahora  $\frac{(2n+1)^2}{4}$  en ambos lados,

$$(n + 1)^2 - (n + 1)(2n + 1) + \frac{(2n + 1)^2}{4} = n^2 - n(2n + 1) + \frac{(2n + 1)^2}{4}$$

Nótese que ambos lados son cuadrados perfectos, luego

$$\left[ (n + 1) - \frac{(2n + 1)}{2} \right]^2 = \left[ n - \left( \frac{2n + 1}{2} \right) \right]^2$$

Entonces

$$(n + 1) - \frac{(2n + 1)}{2} = n - \frac{(2n + 1)}{2}$$

Por lo tanto,  $n + 1 = n$

*¿Qué reflexión puedes hacer en relación a la demostración anterior?*

**Fuente: La autora, 2011**

Las respuestas a esta pregunta fueron muy variadas, sin embargo se pudieron extraer algunas categorías de las mismas, las cuales se presentan en el siguiente cuadro. Y luego se exponen las impresiones dadas en la entrevista grupal.

### Cuadro N° 14

#### Categorías

Categorías	Frecuencia
------------	------------

Hay Error: “no es una demostración”, “no tiene sentido”, “es una contradicción”.	14
Confusión: “a pesar de que todos los pasos son lógicos al final se llega a una contradicción”, “se puede llegar a una contradicción aun y cuando hagamos todos los pasos bien”,	8
No respondió	2
Número de estudiantes	24

**Fuente: La autora, 2011**

En esta actividad a pesar de que la mayoría pudo darse cuenta que había algún tipo de error, los estudiantes aún tenían dudas sobre aspectos lógicos; cabe destacar que para el momento de utilizar este instrumento, ya se habían hecho discusiones en clase relacionadas con la demostración matemática. Es también importante resaltar que los estudiantes aun no se habían familiarizado con las actividades didácticas inherentes a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática. Se evidencia que la influencia del docente es bastante significativa hacia los estudiantes; las dudas surgieron precisamente por el hecho de que en la pregunta hecha por la autora al final imperó por encima de lo que ellos pensaban en relación a la proposición. Esto se puede evidenciar en la discusión posterior a la actividad, los estudiantes que tuvieron dudas afirmaron que al ver la palabra “demostración” asumieron que lo planteado era efectivamente una demostración, pero que no entendían como se podía llegar a una contradicción, y en las entrevistas individuales, el primer estudiante entrevistado afirmó: *“todos los pasos eran lógicos, una propiedad cierta, pero más que todo era el lenguaje...”* (la palabra demostración) *“...lo que hizo que algunos, nos cayéramos.....”*. Sin embargo, luego de la discusión quedaron claros del error que existía en el instrumento.

## Reflexión de la Sesión 2

En esta sesión se dividió al grupo completo en cinco (5) grupos pequeños y se les presentó una proposición para que la demostraran por escrito, y en consenso con los integrantes de los equipos procedieron a hacerlo por un espacio de una hora aproximadamente. Luego, brevemente un integrante por cada equipo explicó en forma oral cuales fueron los procedimientos y las estrategias utilizadas. Finalmente se seleccionaron dos (2) de los cinco (5) grupos para que presentaran en el pizarrón sus respectivas demostraciones.

Se presentan a continuación las demostraciones elaboradas por los cinco (5) grupos de estudiantes en la *sesión 2*.

Demostración.

Consideramos al  $\triangle ABC$  tal que, y traemos EF.  
y EF.

1.  $BD = DA$  Hipótesis.
2.  $BE = EC$  Hipótesis.
3.  $\angle B \cong \angle B$  Identidad.
4.  $AB = 2BD$  De 1 y 2.
5.  $BC = 2BE$  De 1 y 2.
6.  $\frac{AB}{BD} = \frac{AB}{\frac{AB}{2}} = 2$ .
7.  $\frac{BC}{BE} = \frac{BC}{\frac{BC}{2}} = 2$ .
8.  $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}$  De 6 y 7.
9.  $\triangle ABC \sim \triangle DBE$  De 7 y 8 (Postulado LAL).
10.  $\angle C \cong \angle E$  Partes correspondientes.
11.  $\angle D \cong \angle A$  "
12.  $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$  De 10. Teorema de ángulos correspondientes.

$$15. \frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{1}{2} \quad \text{Semejanza de triángulos}$$

$$16. \frac{DE}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$17. DE = \frac{AC}{2}$$

∴ Se demuestra que los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad de su longitud.

### Gráfico 1 Producción del Grupo 1

Este grupo construyó la prolongación de un segmento en el gráfico que dibujaron, pero no lo utilizaron en la demostración, solo hicieron uso de propiedades de semejanza y correspondencia así como el postulado LAL (*Si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, de un triángulo son respectivamente congruentes con dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo entonces la correspondencia es una congruencia y los dos triángulos son congruentes*). Este fue uno de los dos equipos seleccionados para exponer en el pizarrón su producción; así, como se puede observar en el gráfico anterior, dibujaron la prolongación del segmento pero en el transcurso de la explicación se dieron cuenta que no lo utilizaron; este hallazgo proporciona información relacionada con el hecho de que los estudiantes intentaron recordar la demostración que se presenta en el libro de Geometría Moderna de Moise y Downs (1966), el cual se utiliza como referente principal en los cursos de Geometría I y II en la especialidad de matemática.

Se presentará una sola demostración de los dos grupos 2 y 3 ya que fueron similares en cuanto al método utilizado.

tesis:  $BC \parallel DE$   
 $DE = \frac{1}{2} BC$

Solución

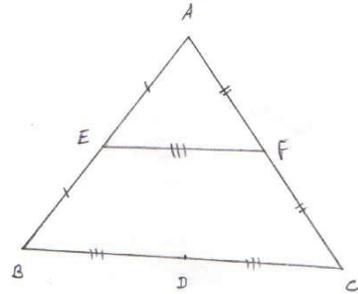
- ① Sea D y E puntos medios de  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  respect.
- ② Prolongamos  $\overline{DE}$  hasta F de modo tal que  $\overline{EF}$  tenga la misma medida de  $\overline{DE}$ .
- ③ Trazamos  $\overline{CF}$  por construcción.
- ④  $\sphericalangle CEF \cong \sphericalangle AED$   $\sphericalangle$  opuestos por el vertice
- ⑤  $\overline{AE} \cong \overline{EC}$  y  $\overline{DE} \cong \overline{EF}$  Por hi.P. y de ②
- ⑥  $\triangle CEF \cong \triangle AED$  de ④ y ⑤ T.L.A.L.
- ⑦  $\overline{CF} \cong \overline{AD}$  P.C.T.C.C.
- ⑧  $\overline{AD} \cong \overline{DB}$  de ①
- ⑨  $\overline{DB} \cong \overline{CF}$  de ⑦ y ⑧
- ⑩  $\sphericalangle DAE \cong \sphericalangle ECF$  P.C.T.C.C. de ⑥
- ⑪  $\overline{BD} \parallel \overline{CF}$  def  $\sphericalangle$  alternos internos (recíproca)
- ⑫  $\square BDFC$  es paralelogramo de ⑪ y ⑨
- ⑬  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$  def de Paral. de ⑫
- ⑭  $\overline{DF} \cong \overline{BC}$  def de Paral. de ⑫
- ⑮  $\overline{DF} = 2\overline{DE}$  de ②
- ⑯  $2\overline{DE} = \overline{BC}$  de ⑮ y ⑭
- ⑰  $DE = \frac{1}{2} BC$

**Gráfico 2 Producción del Grupo 2**

Las demostraciones de estos dos grupos fueron en cierta medida parecidas; hicieron una construcción en el gráfico dibujado, prolongaron el segmento DE de tal forma que luego lograron demostrar que el cuadrilátero ADFB era un paralelogramo y así demostrar que los segmentos BC y DE son paralelos, describieron cada paso enumerando los mismos, como es típico de una demostración de geometría en el entorno en que hacen vida los estudiantes. El equipo 3 fue el seleccionado para hacer la demostración en el pizarrón y al cual se le hizo sólo una sugerencia de la misma, quedando convencidos todos los participantes incluyendo a la autora de la validez de la demostración.

hip: E y F son puntos medios de  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  respectivamente.  
 Tesis:  $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$  y  $2\overline{EF} = \overline{BC}$ .

Demost.:

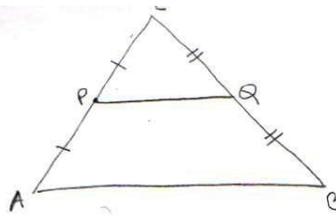


- ① E y F son puntos medios de  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$ . hip
- ②  $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$  y  $2\overline{EF} = \overline{BC}$ ? Tesis
- ③  $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB}$   $\wedge$   $\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{FC}$ , por ①
- ④  $\overline{AE} = \overline{EB}$   $\wedge$   $\overline{AF} = \overline{FC}$ , por ①
- ⑤  $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{AE}$   $\wedge$   $\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{AF}$ , por ④
- ⑥  $\overline{AB} = 2\overline{AE}$   $\wedge$   $\overline{AC} = 2\overline{AF}$ , operando en ⑤.
- ⑦  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = 2$   $\wedge$   $\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = 2$ , operando en ⑥ ] Q.E.D.
- ⑧  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = 2 = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}$ , Igualando en ⑦
- ⑨  $\overline{AB}$   $\wedge$   $\overline{AC}$  son proporcionales, por ⑧
- ⑩  $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ , por Teorema: Si una recta interseca a los lados de un triángulo y determina sobre ellos segmentos proporcionales, entonces, es paralela al tercer lado.

- ① D es punto medio de  $\overline{BC}$ , por construcción.
- ②  $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}$ , por ① y def de punto medio.
- ③  $\overline{BD} = \overline{DC}$ , por def de punto medio.
- ④  $\overline{BC} = \overline{DC} + \overline{DC}$ , por ③
- ⑤  $\overline{BC} = 2 \overline{DC}$ , operando en ④
- ⑥  $\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = 2$ , operando en ⑤
- ⑦  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$   $\wedge$   $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AF}}$ , por proporcionalidad
- ⑧  $\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AF}}$ , por ⑦
- ⑨  $\overline{DC} = \overline{AF}$ , operando
- ⑩  $\frac{\overline{BC}}{\overline{AF}} = 2$ , por ⑦
- ⑪  $\overline{BC} = 2 \overline{AF}$ , operando.

### Gráfico 3 Producción del Grupo 4

Este grupo utilizó los seis primeros pasos para describir o decretar la información que se generaba de la hipótesis, haciendo uso de conceptos de aritmética así como de proporcionalidad. Al igual que los grupos anteriores dibujaron un triángulo en el que especificaron la información de la tesis; de la misma manera, también enumeraron todos los pasos desarrollados en la demostración y cada paso iba siendo justificado con un teorema, una operación o propiedad.



- ①  $\frac{PC}{AC} = \frac{CQ}{CB} = \frac{PQ}{AB} = \frac{1}{2}$  Por Def de Proporcionalidad.
- ②  $\frac{PQ}{AB} = \frac{1}{2}$  De ①
- ③  $PQ = \frac{AB}{2}$  Operando en ①.
- ④ PC es proporcional con AC De ①
- ⑤ QC es proporcional con BC De ②
- ⑥  $\angle ACB \cong \angle PCQ$  (por identidad)
- ⑦  $\triangle ABC$  es semejante con  $\triangle PCQ$  (LAL de semejanza)
- ⑧  $\angle CPQ \cong \angle CAB$  De ⑦
- ⑨  $\angle CQP \cong \angle CBA$  De ⑦
- ⑩  $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$  (Recíproco de ángulos alternos internos.)

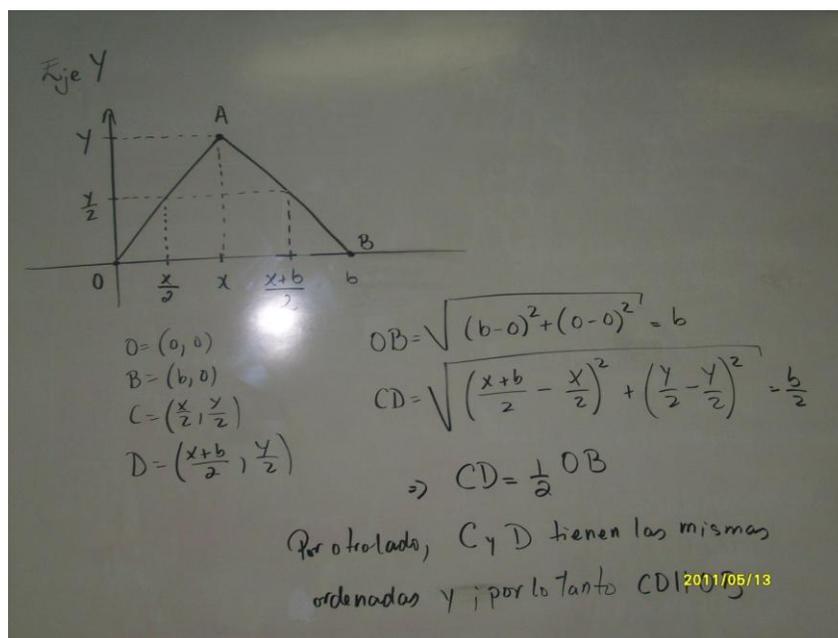
Por el paso ③ y ⑩ queda demostrado que el tercer lado es paralelo al segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo y tiene la mitad de su longitud.

#### Gráfico 4 Producción del Grupo 5

Al igual que los grupos anteriores este grupo enumeró todos los pasos, pero en el primer paso consideraron como cierto la tesis, cometiendo así un error común en los estudiantes, el de usar lo que se quiere demostrar; este error o dificultad es lo que Colmenárez (2008) califica como *Dificultades o errores de tipo lógico*.

Durante la exposición del primer grupo, hubo solo una sugerencia por parte de los estudiantes, y fue el hecho de que no escribieron como último paso, lo que se quería demostrar, a pesar de haberlo dicho en forma verbal. Al segundo grupo se le hicieron varias sugerencias, entre las cuales: construyeron la prolongación del segmento y no lo utilizaron para la demostración, faltó un poco más de claridad y

justificación para la segunda parte de la demostración, (el probar que uno de los segmentos era la mitad del otro). Una vez finalizada la participación de los dos grupos seleccionados, la docente sugirió que la demostración se podía desarrollar utilizando elementos de la geometría analítica, y procedió a hacer una ilustración de cómo se podía demostrar.



**Gráfico 5 Demostración presentada por la autora de la investigación.**

[Extraída de Xuhua Sun y Kahou Chan (2009)]

Al explicar esta otra vía de demostración de la proposición haciendo uso de la geometría analítica, hubo participación de los estudiantes proporcionando información que ayudó a la autora a detallar la misma, así como también mostraron gran admiración al ver concluida la demostración y dieron muestra de ello en forma oral, expresaron quedar sorprendidos de que podía demostrarse ese teorema haciendo usos de herramientas del cálculo. Los entrevistados 2 y 4 hicieron énfasis en esa demostración en particular, *“la demostración del segmento medio, muy bueno, porque desde hace mucho tiempo no veíamos geometría, entonces tratar de recordar todo eso que habíamos visto en geometría y me gustó mucho en el sentido de que*

*nosotros conocíamos una sola demostración de ese teorema... “, además manifestaron que con la actividad pudieron darse cuenta que una proposición no tenía una única vía para demostrarla, “... vimos que cada quien, uniendo todo eso podíamos encontrar otras demostraciones, es decir que no nos podemos quedar con una sola vía que nos muestren, hay diferentes formas de demostrar..., algunos son más fáciles, otros son más cortos, otros son más largos, pero hay diferentes vías...” . “ ... no hubo una sola visión de lo que era la demostración como tal ..... hubo tres visiones, entonces es importante que de repente a veces uno cree que las demostraciones salen por un solo camino.....” , también manifestaron que debido a la discusión en equipo y las explicaciones en la pizarra pudieron darse cuenta de ello.*

A pesar de que no hubo una amplia gama de formas para desarrollar la demostración, se logró que los estudiantes visualizaran e internalizaran en que una demostración no tiene una única vía, además de la gran receptividad por parte de los estudiantes en el desarrollo de la misma. La autora infiere que el hecho de que los estudiantes habían visto esa demostración en uno de los cursos de geometría, influyó en sus producciones, dando cuenta de que la mayoría de los estudiantes utilizó la construcción que se hace en el libro de Geometría Moderna de Moise y Downs (1966). Se puede dar evidencia de esto, al momento de entrevistar al estudiante 4, él comentó lo siguiente: *“...yo le propuse a mi equipo que construyéramos y ellos me dijeron que no, que lo demostráramos por otro lado, ...hace tiempo vi geometría y el profesor lo demostró así...”*

Todos los grupos presentaron de la misma forma la información a pesar de utilizar métodos distintos, enumerando todos los pasos y justificándolos a un lado de cada paso.

### **Reflexión de la Sesión 3**

Continuando con las reflexiones relacionadas con las sesiones planificadas, se presenta ahora la *sesión 3*. En esta sesión se utilizó un juego como estrategia inicial.

## Cuadro N° 15

### Instrucciones del Juego

#### INSTRUCCIONES DEL JUEGO

1. Se formaran grupos pequeños, máximo 6 participantes.
2. Se coloca un número natural, los jugadores se turnan para restar a ese número potencias naturales de base 2 que sean menores al número dado y se reemplazará el número original por el resultado de la resta.
3. El jugador que escriba el número 1 después de la resta, gana el juego.

Una vez presentado el juego, se procedió a dividir el grupo de alumnos en parejas y una vez dadas las instrucciones comenzó el juego. Luego de que los estudiantes se familiarizaron con el juego se les pidió que se hicieran dos grupos más grandes, y en esta ocasión se le dio una nueva instrucción: que intentaran conseguir una estrategia ganadora, es decir una estrategia que les permitiera a un equipo ganar siempre. Al cabo de un tiempo, se dividió el grupo completo en dos grandes grupos, y se iniciaron unas rondas de juego escribiendo los resultados en el pizarrón. Al finalizar algunas rondas se discutió en relación a las “estrategias ganadoras” que tenían cada uno de los equipos y procedieron a describirlas.

**Equipo 1** (el que ganó más partidas) una de las integrantes de este grupo expresó: “nuestra idea era llevarlo a un número impar de manera de que al jugar la otra persona los condujera a llegar al número 1”. Una segunda integrante de ese mismo grupo manifestó que su estrategia era contraria de la expresada por su compañera “la de nosotros era llevarlo a un número par para conseguir el mínimo par ya que al encontrar el 6 ó 4 sabíamos que estaba ganado el juego”.

**Equipo 2** uno de los participantes de este equipo expreso que no tenia en si una estrategia ganadora, sin embargo sabían que al lograr dejar el número cuatro (4) sabían que podían ganar la partida.

Una vez analizadas ambas estrategias y luego de debatir por largo rato, entre todos se llegó a aprobar como estrategia ganadora que había que dejar siempre un número de la forma  $3k+1$  para que el oponente no pudiera ganar, y si el número original tenía ya la forma  $3k+1$  se proponía al adversario comenzara la partida. Luego de eso se intentó justificar ese hecho utilizando casos particulares, quedando todos

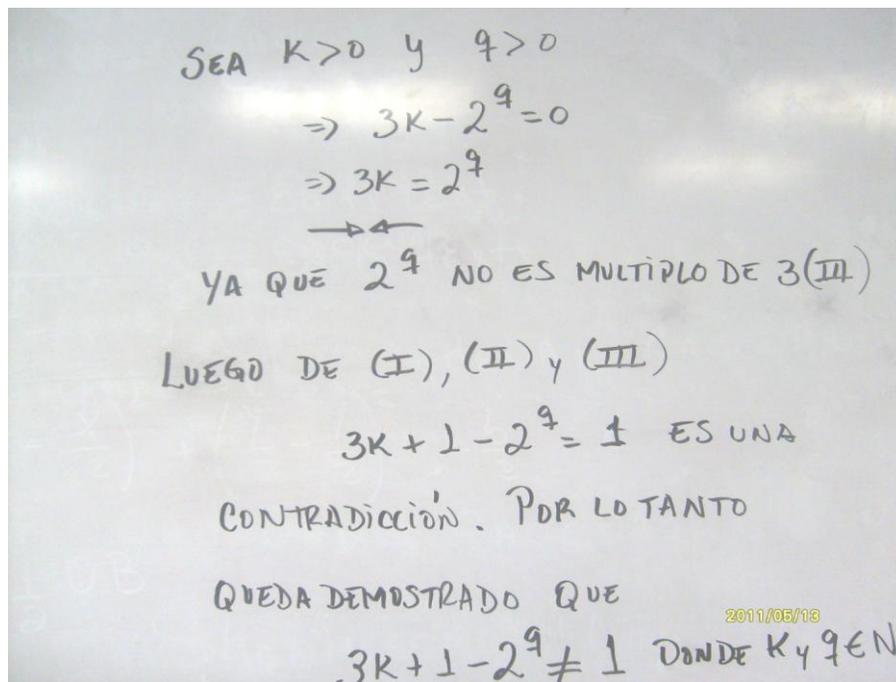
convencidos por completo que esa era efectivamente una estrategia ganadora. Se propuso a los estudiantes que pensarán si existiría alguna forma de hacer una demostración que permita comprobar que esa estrategia es siempre ganadora, y que llevarán por escrito las anotaciones hechas al intentar hacer o proponer una demostración. La siguiente jornada de clase se inicia con la discusión relacionada con la proposición y demostración de la estrategia ganadora del juego; uno de los estudiantes plantea en el pizarrón lo que él había considerado podría ser la proposición y la demostración.

Propuesta del participante:

*“Existe una estrategia para ganar el juego, consiste que uno de los jugadores al restar el número dado o restante logre que el número que resulta de la resta sea de la forma  $(3k+1)$ . Así se le imposibilita al jugador contrincante que el resultado del número que reste sea igual a 1. Ahora demostraremos que es cierto esta afirmación”.*

SEA  $3K+1-2^q \neq 1$  LO QUE  
 QUEREMOS DEMOSTRAR, DONDE  $K, q \in \mathbb{N}$   
 SUPONGAMOS QUE  $3K+1-2^q = 1$   
 $\Rightarrow 3K-2^q = 0$   
 SEA  $K=0 \Rightarrow 3(0)-2^q = 0$   
 $\Rightarrow -2^q = 0$   
 $\Rightarrow 2^q = 0$  (I)  
 $\longleftrightarrow$   
 SEA  $q=0 \Rightarrow 3K-2^0 = 0$   
 $\Rightarrow 3K-1 = 0$   
 $\Rightarrow 3K = 1$   
 $\Rightarrow K = \frac{1}{3}$  (II)  
 $\longleftrightarrow$

**Gráfico 6 Propuesta de Demostración del Estudiante.**



**Gráfico 7 Propuesta de Demostración del Estudiante (continuación)**

Durante la explicación en el pizarrón, una de las participantes sugirió que el número  $k$  si podía ser un número racional, sin embargo se descartó dicha sugerencia pues ya el hecho de que el número de la forma  $3k+1$  es un número entero no racional limitaba la naturaleza del número  $k$ . Luego la autora sugiere que no había necesidad de trabajar los casos planteados, ya que el hecho de que  $3k - 2^q = 0$  implicaba que  $3k = 2^q$  y ya esta afirmación era una contradicción. La mayoría de los participantes quedaron convencidos con esa demostración, algunos otros aún no entendían ni la demostración ni la proposición. “*se me hizo complicado saber qué era lo que iba a demostrar...*” .” ... *la parte del  $3k+1$  no la entendí....*”

Revisando luego las anotaciones por escrito que dejaron los estudiantes con respecto a esta actividad, solo uno de los participantes (el mismo que lo desarrolló en clase) logró hacer una deducción lógica de lo planteado. Ninguno de los demás pudo ni siquiera redactar lo que se quería demostrar. Este aspecto es bastante interesante de resaltar; la autora infiere que los estudiantes no están acostumbrados a este tipo de actividad y por tanto algunos no tienen confianza en sí mismos o no se sienten

capaces de deducir o descubrir una proposición por su propia cuenta. Una de las entrevistadas, la número 5, da cuenta de este hecho: “... *la conclusión de  $3k+1$  yo sola no llegué, fue a partir de que usted empezó a discutir en la pizarra que empezamos a ver todos, pero sola no lo veía lo que notaba era lo que notaban los otros compañeros que era que había que llegar al 2 al 4 pero no al número en genérico como tal si no lo notaba...*”.

### **Reflexión de los Testimonios Focalizados**

Una vez revisados los testimonios focalizados de veintinueve (29) de los treinta y tres (33) estudiantes del curso de Tópicos en Educación Matemática, relacionados con las apreciaciones de las actividades didácticas que se desarrollaron durante el curso, se logró recabar información importante, la cual permitió de alguna manera evaluar el alcance de dichas actividades.

La mayoría de los estudiantes coincidieron en calificar las actividades de muy dinámicas, agradables, interesantes, didácticas, es decir, el docente facilitó la comprensión del desarrollo de las actividades así como sus objetivos. “... *el uso de la discusión socializada fue importante para conocer el punto de vista de los compañeros...*”.

Así mismo expresaron que la interacción entre el docente y los alumnos fue un aspecto muy positivo, logrando una participación casi absoluta por parte de los estudiantes sobre todo en las discusiones grupales. Algunos dijeron que las actividades les ayudaron a recordar conocimientos previos. “... *la profesora me pareció muy pedagoga, fuera de lo conductista, actuando solo como guía...*”, “... *las actividades realizadas nos ayudaron también a refrescar los conocimientos que con el tiempo se han olvidado...*”

Tres de los estudiantes opinaron que les resultaron difíciles y complicadas algunas de las actividades. A pesar de que no fue una mayoría, es importante hacer énfasis en este aspecto; la autora sugiere que este hecho puede deberse a que los estudiantes están acostumbrados a ver la práctica demostrativa como una tarea rígida

y tediosa. *“fueron un poco complicadas para mi,... pero me ayudó a refrescar conocimientos...”* , *“me cuesta mucho entrarle a alguna demostración, especialmente cuando no son planteamientos o demostraciones convencionales, es decir, teoremas o corolarios”*, *“ la actividad del juego me pareció muy divertida...”*

Algunos participantes consideraron que las actividades estuvieron basadas en ellos, es decir que los principales protagonistas fueron los estudiantes, que el docente solo actuó como guía sin dar muchas instrucciones, permitiendo la libertad de expresarse y de hacer producciones personales, sin que influyeran las concepciones del docente por encima de las de ellos. *““me parecieron muy didácticas, diferente a lo que siempre se realiza en clases...”*, *“las actividades han sido desarrolladas de manera participativa, permitiendo dar opiniones y recibir a la vez información que aclare nuestras dudas...”*. Así mismo las calificaron también como actividades novedosas, fuera de la rutina y poco tediosas, en el caso del juego fue una actividad divertida, lo que les permitió ver la práctica demostrativa más atractiva. *“ las dos últimas actividades me parecieron muy dinámicas, interactivas y novedosas, logré aprender por medio de las actividades y vi una manera de ver las demostraciones más atractiva”*

Por otro lado, también expresaron que el desarrollo de las actividades les permitió darse cuenta del papel y funciones de la demostración en la Educación Matemática, además de creer necesario implementar estas actividades en las clases ya que resultaron ser enriquecedoras a nivel cognitivo y de conocimientos y para ello el docente debe estar bien preparado. *“ Estas actividades a mi parecer son muy buenas implementarlas en clase... resulta muy interesante el estudio de esta parte de las matemáticas (la demostración) ”*, *“estas actividades han favorecido en nuestro conocimiento intelectual y lingüístico en el área de la matemática”*, *“... es necesario como profesores implementar actividades para desarrollar el pensamiento lógico matemático”*, *“ mi experiencia fue de calidad por el hecho de visualizar la importancia de la demostración en la educación...”*

En cuanto a la sesión 3 basada en un juego, a la mayoría les pareció muy divertido e interesante a la vez, sin embargo se les dificultó encontrar una proposición

para demostrar la estrategia ganadora. *“ la actividad del juego me pareció muy divertida, sin embargo nos costó ver la lógica del juego, es decir cual era el patrón que había que seguir para siempre ganar”*

Por último, dos de los estudiantes dijeron que las actividades les permitieron cambiar la actitud reticente hacia las tareas demostrativas. *“... ha sido una experiencia enriquecedora de mis conocimientos mayormente en cuanto a la actitud que asumía al respecto del concepto de demostración en la matemática...”* *“las actividades hicieron que mi actitud frente a demostraciones cambiara positivamente...”*

En general, las evidencias dan cuenta de la aceptación y buena receptividad de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades; la participación en discusiones resultó un aspecto de suma importancia, ya que permitió el intercambio de ideas y de conocimientos.

### **Reflexión de las Entrevistas a Profundidad**

A continuación se presenta una reflexión de cada uno de los entrevistados por parte de la autora. A pesar de no tener una estructura para la entrevista, se planteó una pregunta principal, con el fin de generar la discusión e interacción entre los estudiantes y la docente. Se preguntó inicialmente: *¿qué comentarios tienes en relación a las actividades didácticas que se llevaron a cabo en el curso de tópicos?*

#### **Estudiante 1**

A este estudiante las actividades le parecieron muy pedagógicas, se salieron de la rigidez a la cual se acostumbra en las clases de matemática, bastante novedosas. Le gustó mucho la actividad de juego. Expresó además creer que el *objetivo del primer cuestionario fue que aprendieran a reconocer una demostración en sí*. En cuanto a la segunda sesión le pareció muy positivo el aporte de todos los participantes del grupo, *le resultó bastante novedoso ver una demostración de geometría euclídea desarrollada por geometría analítica*. El hecho de que los estudiantes debían desarrollar las actividades con las pautas mínimas del docente le pareció positivo, ya

que permitió *mayor libertad y no había presión*. Sintió que *no lo limitaron los contenidos desarrollados*, es decir para este estudiante no fueron un obstáculo los contenidos de matemática que se presentaron en las actividades. En la primera sesión, en el segundo cuestionario específicamente, se dejó influenciar por el docente o con la palabra demostración contenida en la pregunta, ya que le generó confusión con sus concepciones.

### **Estudiante 2**

Las estrategias que se utilizaron  *fueron muy didácticas*, debido a que buscaba la participación de los estudiantes. Las discusiones grupales permitieron ver los diferentes puntos de vista en cada una de las actividades. En la sesión 3 se  *indujo la parte competitiva, y cuando hay competencia, por naturaleza el ser humano intenta encontrar una estrategia para ganar*, así que la participación para buscar esa estrategia ganadora fue bastante notable; sin embargo al momento de establecer una demostración para verificar que la estrategia encontrada era siempre cierta, se dificultó a muchos de los compañeros; a este estudiante el hecho de que no se les dio una proposición sino que debían deducirla, le resultó interesante, innovador y tuvo mucha recepción de su parte. El estudiante entrevistado expresó que le hubiese gustado que hubiese habido más actividades como las hechas. Así mismo, dijo haberse sentido  *protagonista de las actividades, el docente solo dio pautas básicas*. Las actividades le permitieron darse cuenta de que las tareas demostrativas son muy necesarias,  *no tienen por qué ser tediosas y deben ser parte del desarrollo de las clases*.

### **Estudiante 3**

Calificó como  *muy buenas las actividades, le hicieron recordar cosas*, y las discusiones le aclararon muchas dudas; se le dificultaron algunas de las actividades, los cuestionarios donde había preguntas con cuantificadores por ejemplo.  *Las discusiones grupales, permitieron expresar sus puntos de vista y se dio cuenta de que el aporte de los demás puede dar una visión diferente*. La última sesión le pareció

*bastante dinámica, a pesar de que le resultó muy difícil la deducción de la estrategia ganadora y aun más intentar hacer una demostración de la misma. El docente los estimuló a ser más espontáneos, a decir lo que pensaban sin presión por sentirse evaluados.*

#### **Estudiante 4**

La sesión 3 le resultó *muy didáctica, se salió de los esquemas, de una estructura formal y conductista*, y permitió un poco más de libertad al razonamiento. El *trabajo en colectivo fue muy positivo y atractivo* porque se considera novedoso. Le gustó mucho la sesión 2 ya que el ver diferentes formas de demostrar un teorema *enriqueció sus conocimientos, el hecho de ver una demostración de geometría plana hecha con propiedades de cálculo fue muy nutritivo a nivel intelectual*, permitió ver la integración de dos áreas y rompió con el esquema de parcialismo de las áreas de la matemática, así como acabar con las concepciones de otros docentes que influyen significativamente por encima de las concepciones propias de cada estudiante. En cuanto al segundo cuestionario de la primera sesión, tuvo *confusión porque contradecía sus concepciones de lo que es una ecuación y una identidad*, y se dejó llevar por la palabra *demostración* en la pregunta de ese cuestionario. En cuanto al primer cuestionario de la sesión 1, no sintió la necesidad de tener que hacer alguna demostración a excepción de la última pregunta; sin embargo, luego de las discusiones posteriores a esa sesión se dio cuenta de los errores cometidos en sus respuestas; así mismo al intentar hacer una demostración de esa última pregunta se encontró con un contraejemplo y en ese momento desistió de hacer la demostración. El estudiante reflexionó en relación al hecho de que *la demostración debería ser parte fundamental del plan de estudio*, que los docentes tomen conciencia de la importancia y de las funciones que tiene en el proceso de enseñanza y de aprendizaje. Gracias a las actividades tomó conciencia de que *la demostración no es ni debe ser un proceso mecánico donde se busca satisfacer la inquietud intelectual del docente*, sino más bien que primero debe estar la formación matemática que se está

adquiriendo. Por último, el estudiante de matemática debe tener madurez e identificar la importancia de las tareas demostrativas en la educación matemática.

### **Estudiante 5**

Las actividades le parecieron *muy innovadoras* con una notoria y positiva participación de los estudiantes. Se descubrieron muchas cosas interesantes, *cosas que asumíamos se dejaban solo a los grandes matemáticos*, subestimando así las capacidades de los estudiantes. En cuanto al primer cuestionario de la sesión 1 le gustaron mucho las primeras preguntas ya que estaban involucrados los cuantificadores y *particularmente le va bien ese contenido*; en cuanto a las otras preguntas se sintió un tanto cohibida porque no sabía como demostrarlas y algunas salía con contraejemplo, en esos casos no hacía falta una demostración; cabe resaltar que la estudiante expresó sentir la necesidad de hacer demostraciones para responder a las preguntas planteadas en los cuestionarios a pesar de que en ningún momento se solicitaba hacerlo. Se sorprendió cuando se presentó la sesión 2 ya que *no esperaba ver un contenido de geometría en el curso*, además no recordaba muchas cosas de geometría y eso obstaculizó al momento de hacer la demostración del segmento medio; sin embargo, con la ayuda de los compañeros del grupo lograron hacerla. La última sesión fue la que gustó más; la estudiante consideró que el objetivo era hacer un razonamiento para deducir algo que es verdadero; confesó *no haber encontrado una estrategia ganadora por sí sola*, fue después en la discusión grupal que logró ver una estrategia. Luego intentó hacer una demostración por inducción matemática pero *no visualizó sobre cuál variable hacer la inducción así que desistió*. Por último opinó que *las actividades evidentemente estaban centradas en los alumnos y que el trabajo o rol del docente fue proponer las mismas y orientar más que todo*, afirmando que *el aprendizaje así resulta más significativo*.

Las entrevistas confirmaron la aceptación por parte de los estudiantes de las actividades desarrolladas, permitiendo reflexionar en relación a la propuesta de actividades didácticas con la finalidad de mejorar la enseñanza y en consecuencia el aprendizaje de la demostración en la educación matemática.

## **CAPITULO V**

### **DESCUBRIMIENTOS Y REFLEXIONES FINALES**

En este capítulo se exponen los hallazgos y las reflexiones finales aportadas por los estudiantes en el desarrollo de las actividades, las cuales permiten un acercamiento a los propósitos e interrogantes de la investigación. Se presentan también algunas consideraciones para investigaciones futuras.

#### **Descubrimientos**

- Se considera necesaria la formulación de actividades didácticas en cualquiera de las áreas de la matemática, que permitan facilitar la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática.
- El diseño y aplicación de actividades didácticas ayudarían en gran medida a disminuir la complejidad con la que los estudiantes ven las tareas demostrativas, además de permitir la valoración e identificación de las funciones de la demostración en la educación matemática.
- El desarrollo de actividades didácticas motiva y promueve el interés hacia el aprendizaje de la demostración, así como también recordar conocimientos e integrar áreas de la matemática.
- Las tareas de demostración son para la mayoría una barrera de aprendizaje, para algunos son consideradas fastidiosas y monótonas; las actividades desarrolladas permitieron detectar estas dificultades, de una forma diferente a la que los docentes están acostumbrados a evaluar.
- Los estudiantes están acostumbrados a una enseñanza rígida y tradicional, y la demostración es vista como un proceso algorítmico y memorístico.
- Las actividades didácticas permitieron salir de la rutina a la que los estudiantes están acostumbrados en las clases donde se necesita hacer tareas demostrativas.

- Las actividades didácticas novedosas permiten que las clases sean más amenas y dinámicas.
- Las actividades sirvieron para combatir o cambiar la actitud de rechazo hacia las tareas de demostración.
- Las actividades dieron confianza a los estudiantes para hacer conjeturas en relación a un planteamiento nuevo para ellos.
- Las exposiciones y discusiones fortalecieron los criterios de los estudiantes, exponer abiertamente sus puntos de vista.
- Las demostraciones forman parte de un debate social dentro de una comunidad. (comunidad matemática).
- La dinámica con que se desarrollaron las sesiones generó entre los estudiantes libertad de razonamiento.

### **Reflexiones Finales**

La revisión bibliográfica, el diseño y aplicación de estas actividades permitieron a la autora darse cuenta de aspectos importantes inmersos en el rol docente; el hecho de interactuar con los estudiantes y las discusiones grupales hicieron de las sesiones, momentos muy agradables y enriquecedores.

La manera en que se desarrollaron las sesiones de actividades permitió una visualización más real de las actitudes de los estudiantes, logrando cambiar las concepciones sobre el papel de la demostración en la educación matemática.

La información generada por los estudiantes y la autora determinó algunas consideraciones positivas: la interacción social y cooperativa por parte de los estudiantes, nuevas concepciones en relación a las tareas de demostración como aspecto fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, la actitud mediadora de la autora, la participación productiva de los estudiantes en los contenidos matemáticos específicos de cada actividad.

Se afirma la necesidad de diseñar más actividades diferentes a las que los estudiantes están acostumbrados, actividades inherentes a áreas específicas, (cálculo,

álgebra, geometría), y utilizarlas en las clases, como estrategias de enseñanza y de evaluación de los conocimientos.

La utilización de actividades didácticas novedosas permitiría observar la evolución cognitiva e intelectual de los estudiantes (docentes en formación), desde el punto de vista personal y profesional.

## REFERENCIAS

- Balacheff, N. (2000) *Procesos de Pruebas en los alumnos de Matemática*. Bogotá. Colombia.
- Barba de Ramos, M. y Andonegui, M. (1992) Estrategias Metodológicas Aplicables al Proceso Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico de Barquisimeto. Venezuela.
- Blanco, Y. (2004) *Dificultades que confrontan los profesores de Matemática en formación en el aprendizaje de la demostración*. Trabajo de Grado de Maestría (no publicado). Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara. Maracay, Venezuela.
- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica*, RDM, N° 9 (3). Versión en español publicada por Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad de Córdoba.
- Calvo, C. (2001) *Un Estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona, España.
- Caro, Y (2001). *Estrategias de Enseñanza en Introducción al Álgebra en la especialidad de Matemática*. Trabajo Especial de Grado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico Luis Beltrán Prieto Figueroa. Barquisimeto, Venezuela.
- Colmenárez, D. (2008). *Errores, Dificultades y Obstáculos en el Aprendizaje de la Demostración Matemática*. Tesis doctoral (no publicado) Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico Luís Beltrán Prieto Figueroa. Barquisimeto, Venezuela.
- D` Amore, B. (1999). *Didáctica de la Matemática*. Cooperativa Editorial Magisterio Italia.
- D` Amore, B. (2008). *Epistemología, Didácticas de la Matemática y Prácticas de enseñanza* Revista Enseñanza de la Matemática ASOVEMAT N° 1 Volumen 17 p. 87-105 Venezuela.
- De Villiers, M (1993) *El papel y la función de la demostración en matemáticas*. Revista Epsilon. España. N° 26. p. 15 – 30.

- Godino, J. (2009). *Presente y Futuro de la Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. [Documento en lineal]. Disponible: [http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo\\_producoes/docs\\_29/presente.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_29/presente.pdf). [Consulta Octubre 2009]
- Hanna, G. (1995). *Challenges to the importance of proof. For the Learning of mathematics*. P. 42-49.
- Ibañez, M. (2001). *Aspectos Cognitivos del Aprendizaje de la Demostración Matemática en Alumnos de Primer Curso de Bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid, España.
- Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales (2006). Caracas-Venezuela: UPEL
- Martínez, A (1999) *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*. Resumen de Tesis Doctoral Disponible: <http://www.ugr.es/~jgodino/si=idm/escorial/ponencia1.html>. [Consulta: Octubre 2009].
- Martínez, M. (2006). *Ciencia y Arte en la Metodología Cualitativa*. Editorial Trillas. México.
- Mejia, J. & Inglis, M. (2009) *Argumentative and Proving Activities in Mathematics Education Research*. Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education Volume 2. Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei, Taiwan
- Meneses, G. (2007). *El proceso de enseñanza aprendizaje: el acto didáctico*. [Documento en lineal]. Disponible: [http://www.tesisenxarxa.net/TESIS\\_URV/AVAILABLE/TDX-1207107-161635//Elprocesoenseñanza.pdf](http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_URV/AVAILABLE/TDX-1207107-161635//Elprocesoenseñanza.pdf) [Consulta Octubre 2009].
- Moise, E. y Downs, F. (1966) *Geometría Moderna*. Addison Wesley Publishing Company. Estados Unidos.
- Moore, R. (1994). *Making the transition to formal proof. Educational Studies in Mathematics*. 27: 249-266.
- Mora, D. (2003) Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Revista de Pedagogía ISSN 0798-9792 versión impresa Universidad Central de Venezuela
- Peci, M. (2006). *Concepciones de los Docentes en Educación Media Diversificada Profesional respecto a la enseñanza y aprendizaje de la Demostración*

- Matemática.** Trabajo Especial de Grado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico Luis Beltrán Prieto Figueroa. Barquisimeto, Venezuela.
- Perry, P.; Camargo, L.; Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad Demostrativa en la formación inicial del profesor de Matemáticas.* Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Sáenz, J. Gil, F. López, B. Romero, N. y Bethelmy, J. (2006). *Fundamentos de la Matemática.* Segunda Edición. Editorial Hipotenusa. Lara Venezuela.
- Sáenz, J. (2005) *Cálculo Diferencial, con funciones trascendentes tempranas.* Segunda Edición. Editorial Hipotenusa. Lara Venezuela.
- Sandín, M. (2003). *Investigación Cualitativa en Educación. Fundamentos y Tradiciones.* Mc Graw Hill. España.
- Stacey, K. (1988) *Describing, Explaining, Convincing. An Introduction to Proof for Students, 15 -20.* Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham
- Sun, X. y Chan, K. (2009) *Regenerate the Proving Experiences: An Attempt for Improvement Original Theorem Proof Constructions of Student Teachers by Using Spiral Variation Curriculum.* University of Macao, China. Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education Volume 2. Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei, Taiwan
- Teppa, S. (2006). *Investigación Acción Participativa en la Praxis Pedagógica Diaria.* Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico Luís Beltrán Prieto Figueroa. Barquisimeto, Venezuela.
- Winicki-Landman, G. (2009) *Mathematical Games as Proving Seminal Activities for Elementary School Teachers.* California State Polytechnic University, Pamosa, USA. Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education Volume 2. Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei, Taiwan

## **ANEXOS**

**ANEXO A**  
**INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO**



## POSGRADO INTERINSTITUCIONAL EN MATEMÁTICA UCLA – UNEXPO – UPEL

Apreciado Estudiante.

El presente cuestionario ha sido elaborado con la finalidad de recolectar información que orientará la investigación que gira en torno a “PROPUESTA DIDÁCTICA PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA, DIRIGIDA A DOCENTES EN FORMACIÓN DE LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA”.

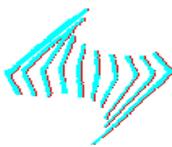
Gracias.

---

Kellys Querales  
Investigadora



Universidad Centroccidental  
"Lisandro Alvarado"



Universidad Nacional Experimental  
Politécnica Antonio José de Sucre

U  
N  
E  
X  
P  
O



Universidad Pedagógica  
Experimental Libertador

## POSGRADO INTERINSTITUCIONAL DE MATEMÁTICA UCLA - UNEXPO - UPEL

A continuación se le formula una pregunta a cerca de la demostración en matemática, se le agradece toda su colaboración en la repuesta de la misma.

1. ¿Considera usted necesario el uso de actividades didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática? Explique su respuesta.

**ANEXO B**  
**INSTRUMENTOS DE LAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS**



## POSGRADO INTERINSTITUCIONAL DE MATEMÁTICA UCLA – UNEXPO - UPEL

A continuación se les presenta una proposición con una demostración de la misma, después de revisarla con su grupo de trabajo procederán a discutir las posibles respuestas a las preguntas que seguidamente se les presentan:

1. ¿Puede identificar el método de demostración utilizado? (explique)
2. ¿Puede identificar la hipótesis y la tesis? (escríbalas)
3. ¿Es adecuado el lenguaje utilizado en la demostración para el nivel que se ubica?
4. Agregue (si cree necesario) algunas sugerencias para la demostración.
5. Proponga otra forma de demostrar la proposición.



## POSGRADO INTERINSTITUCIONAL DE MATEMÁTICA UCLA – UNEXPO - UPEL

Dada la siguiente proposición “*Si  $n^2$  es par,  $n$  es par, con  $n \in \mathbb{Z}$* ”, haga una demostración de la misma y luego responda a los siguientes planteamientos:

1. ¿Puede identificar la hipótesis y la tesis? (escríbalas)
2. Explique el método de demostración utilizado.
3. Proponga otra forma de demostrar la proposición.



## POSGRADO INTERINSTITUCIONAL DE MATEMÁTICA UCLA - UNEXPO - UPEL

Nombre y Apellido: \_\_\_\_\_

Responda las siguientes interrogantes:

- 1) a) ¿ $\forall L, M, P, N \in \mathbb{R} : L + M + P = N + L + P$ ?
- b) ¿ $\exists L, M, P, N \in \mathbb{R} : L + M + P = N + L + P$ ?
  
- 2) ¿Para qué valores de  $x$  se cumple que  $\text{sen } x = \text{cos } x$ ?
  
- 3) ¿La suma de cuatro números impares es divisible por cuatro?



U  
N  
E  
X  
P  
O



## POSGRADO INTERINSTITUCIONAL DE MATEMÁTICA UCLA - UNEXPO - UPEL

Nombre y Apellido: \_\_\_\_\_

La siguiente identidad es cierta:

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Restando  $2n + 1$  en ambos lados de la igualdad tenemos,

$$(n + 1)^2 - (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 - (2n + 1)$$

$$(n + 1)^2 - (2n + 1) = n^2$$

Restando  $n(2n + 1)$  de nuevo en ambos lados,

$$(n + 1)^2 - (2n + 1) - n(2n + 1) = n^2 - n(2n + 1)$$

Sumando ahora  $\frac{(2n+1)^2}{4}$  en ambos lados,

$$(n + 1)^2 - (n + 1)(2n + 1) + \frac{(2n + 1)^2}{4} = n^2 - n(2n + 1) + \frac{(2n + 1)^2}{4}$$

Nótese que ambos lados son cuadrados perfectos, luego

$$\left[ (n + 1) - \frac{(2n + 1)}{2} \right]^2 = \left[ n - \frac{(2n + 1)}{2} \right]^2$$

Entonces

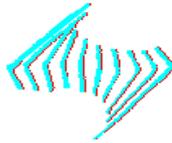
$$(n + 1) - \frac{(2n + 1)}{2} = n - \frac{(2n + 1)}{2}$$

Por lo tanto,  $n + 1 = n$

¿Qué reflexión puedes hacer en relación a la demostración anterior?



Universidad Centroccidental  
"Lisandro Alvarado"



Universidad Nacional Experimental  
Politécnica Antonio José de Sucre

U  
N  
E  
X  
P  
O



Universidad Pedagógica  
Experimental Libertador

## POSGRADO INTERINSTITUCIONAL DE MATEMÁTICA UCLA - UNEXPO - UPEL

Nombre y Apellido: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Demuestre que el segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.



## POSGRADO INTERINSTITUCIONAL DE MATEMÁTICA UCLA - UNEXPO - UPEL

### INSTRUCCIONES DEL JUEGO

1. Se formaran grupos pequeños, máximo 6 participantes.
2. Se coloca un número natural, los jugadores se turnan para restar a ese número potencias naturales de base 2 que sean menores al número dado y se reemplazará el número original por el resultado de la resta.
3. El jugador que escriba el número 1 después de la resta, gana el juego.

**ANEXO C**  
**TRANSCRIPCIÓN DE SESIONES DE ACTIVIDADES**

## Sesión 1

Profesora: En relación a las preguntas que se les hizo en el cuestionario, quién quisiera decir algo, en general, algo que comentar...

Estudiante A: En cuanto a la tercera pregunta no estaba definida en que conjunto se iba a trabajar, razón por la cual teníamos que... bueno personalmente responder que si era divisible, porque como no me estaban avisando en que conjunto numérico estaba, ósea indistintamente si me daban un número que sea múltiplo de 4 era divisible entre 4, podía ser un número entero o un numero decimal o racional.

Profesora: ¿Van a decir algo?

Estudiante B: Para la definición de un número impar  $2n+1$ , yo hice el ejercicio como la amiga concluyo que es divisible siempre y cuando los números impares sean consecutivos porque aquí obtuve un contraejemplo sumando  $9+5+11+13$  da 38, que no es divisible entre 4, entonces allí no se cumple para números impares consecutivos verdad, pero con respecto a la primera ecuación se podía responder.

Profesora: Ya va... Espera un momento, vamos por parte, estamos primero... vamos a desglosar cada una de las preguntas si, ósea específicamente vamos a trabajar, pero quería saber a manera general ¿cómo se sintieron respondiendo a esas preguntas? ¿Qué sintieron, qué creen que se les pedía al responder esas preguntas?

Estudiante C: Primero yo creo que falta información, ósea porque realmente a veces hay preguntas básicas pero realmente uno necesita como una base para responder ese tipo de preguntas. Información para responder la pregunta.

Estudiante D: Bueno en la pregunta tres la hice como un planteamiento, donde no se podía resolver pero luego la pregunta decía que: ¿será que existe algunos impares donde se puede resolver?, eh!! Que sea divisible entre 4, hay vi. Que en algunos se podía resolver y otros no. Realmente lo que me pasó fue que para dar esto hay que estar pendiente en la notación matemática que se usa para la formulación de la pregunta.

Profesora: ok! Fíjense, vamos entonces ahora a entrar de lleno con las preguntas, de la primera pregunta, ésta tenía una parte a y una parte b. La parte a si alguien puede recordar qué decía...

Estudiante E: Para todo  $L, M, P$  y  $N$  en  $R$   $L+M+N=N+L+P$ , ¿lo ponen en signo de interrogación verdad?..

Profesora: Ósea ¿está en signo de interrogación, que respondieron ustedes? El que respondió la pregunta, ¿qué respondió?

Estudiante F: Yo respondí que era falsa, verdad, porque por ejemplo si me están diciendo que para todo debe ser para todo caso se debe cumplir la igualdad, pero podemos conseguir un contraejemplo fácil donde  $M$  y  $N$  son diferentes, no se cumple la igualdad.

Estudiante A: yo lo condicioné

Profesora: ¿tú qué?

Estudiante A: yo lo condicioné, como me están preguntando si es cierto que eran iguales si  $M$  y  $N$  eran iguales.

Estudiante F: pero por ejemplo la pregunta esta, en que para todos la respuesta esta como algo, como que no está acorde a la realidad. Porque es para todos, debería ser para todos.

Profesora: ¿quién está de acuerdo?

Estudiante G: Yo estoy de acuerdo con (Estudiante F), porque si están preguntando que es para todos los números había que conseguir un contraejemplo donde no lo es, puede afirmar que es falsa la pregunta o es negativa.

Profesora: y la parte b?

Estudiante F: Ahí si es verdad eso, porque existen al menos un caso un número que cumpla eso, lo que pasa es que  $M$  y  $N$  sean iguales.

Profesora: si  $M$  y  $N$  son iguales.

Estudiante F: eso va existir, porque por ejemplo tomamos  $M$  y  $N$  igual, entonces se cumple la igualdad.

Profesora: se cumple la igualdad!!! Exacto!!!

Estudiante G: Bastaría con crear un caso específico, con un valor específico.

Profesora: ¿o sea tú dices por ejemplo darle un valor a M, L, N y P, que cumpla esa igualdad?

Estudiante A: Yo lo que hice fue asignarle un valor y listo.

Profesora: ¡Ajá! Con asignarle un valor ustedes creen que es suficiente?

Estudiante G: se pudiese decir que existe algún...

Estudiante F: Profesora mire, porque la cuestión está en la forma general  $M+P+N=M+L+P$ , pero L y P son iguales para los dos miembros verdad, solo tiene que dar que M y N sean iguales.

Profesora: ¿quién puso números para la segunda respuesta? Es decir, ¿quién le dio números específicos?

Estudiante D: Bueno entonces sería que M y L tenían que ser iguales, se repite L y P, lo que bastaría probar que con un solo caso se cumpliera para que esa primera frase.

Profesora: Y eso no funciona para la pregunta anterior?

Estudiante D: Para la pregunta anterior si se encuentra un contraejemplo ya no es válida.

Profesora: ¿O sea que la segunda respuesta me serviría como para responder la primera, en todo caso, no lo vieron así?

Estudiante D: La segunda si!!

Estudiante C: La primera para responder la segunda.

Profesora: ¿Alguien tuvo dificultad para responder esa pregunta?, ¿confusión con los cuantificadores?

Estudiantes: No!!

Profesora: Ahora vamos con la segunda pregunta a ver, la pregunta decía para qué valores se cumple que  $\sin x = \cos x$ . Levanten la mano para responder...

Estudiantes: (risas)

Estudiante B: bueno para pi cuarto ( $\frac{\pi}{4}$ ), el seno y el coseno son iguales, es el valor de x.

Profesora: ¿Cómo llegaste a esa respuesta?

Estudiante B: Gracias al profesor Arismendi, él puso un ejercicio y precisamente  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  es el seno y coseno de 45 grados, o pi cuarto en este caso.

Profesora:  $\frac{\pi}{4}$  si hablamos de número real y 45 grados si hablamos de grados. ¿Ese será el único valor?

Estudiante D: También el valor, si se generaliza todo eso llegamos a la forma general  $\frac{(4n+1)\pi}{4}$

Profesora: De donde sacaste esa información? ... Tú la tenías, es decir la habías visto antes o hiciste la deducción en el momento?

Estudiante D: La había visto antes y me recordé.

Estudiante F: Yo también llegué a ese resultado, lo hice fue colocando seno sobre coseno y entonces me quedaba  $\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = 1$  y eso es  $\tan x = 1$ . Entonces si le aplicamos la cotangente. Y la cotangente es 45 grados que es pi cuarto.

Profesora: utilizaste las identidades. ¿Quién hizo algo diferente a eso? ¿Nadie utilizó gráficos?

Estudiante H: La circunferencia unitaria.

Profesora: ¿La circunferencia unitaria?

Estudiante H: Si pero no llegué a nada.

Profesora: Alguien hizo la gráfica de las funciones seno y coseno?

Estudiante I: Yo profesora, dibuje las funciones seno y coseno y vi que parte más o menos se cortaban de manera intuitiva.

Profesora: Tenías certeza que habían valores donde coincidían?

Estudiante I: Si, ya que se que aparte de pi cuarto debían haber otros valores.

Profesora: ¿por qué?

Estudiante I: Ahh porque, esa es oscilante, no?

Profesora: ¡ajá!!

Estudiante I: Si nos daban un parámetro desde menos pi hasta pi, ahh bueno pero como eso va hasta el infinito también hay otros valores.

Profesora: y ¿encontraste esos valores?

Estudiante I: No!!

Estudiante J: Profesora yo no grafique por flojera yo me fui, porque seno es una función impar y coseno es par y por ende no debe existir.

Profesora: ¿para ningún valor?

Estudiante J: Exacto y ahorita me puse a analizar, si bueno en pi cuarto la función es trigonométrica, seno y coseno coinciden.

Profesora: ¿tú respondiste que no había un valor para el cual fuese igual?

Estudiante J: Exacto, porque seno es impar y coseno par, entonces como la calculadora marca seno de cero es uno y coseno de cero es cero nunca va a ser igual. Ósea fue por flojera mental, por inmadurez.

Estudiante G: Yo también respondí que no había ningún valor, porque ósea, yo tenía el recuerdo de una tabla que me aprendí en bachillerato y podía afirmar que había un valor pero no recordé y era 45 grados entonces, comencé a probar con la calculadora y respondí que no.

Profesora: ¿esa tabla que tú recuerdas es para valores de seno y coseno?

Estudiante G: si esa tabla.

Profesora: Esos valores que nos enseñan en bachillerato son valores notables y 45 está allí, ¿se te pasó por alto?

Estudiante G: Después recordé que si uno invierte luego los valores, invierte la tabla.

Estudiante L: por lo menos en 90 grados también se cumple.

Profesora: ¿en 90 grados se cumple?

Estudiantes: Noooo!!!

Estudiante B: Coseno de 90 es cero y de seno es uno.

Estudiante K: ¿Dónde más se cumpliría?

Profesora: Bueno, el compañero respondió, dio una respuesta general.

Estudiante J: Yo me fui por los impulsos.

Profesora: ¿en relación a la última pregunta, la suma de cuatro números impares es divisible por cuatro?

Estudiante J: Ese fue otro impulso que yo tomé porque tome puros consecutivos, y analizando lo que dijo el compañero, cuando uno toma los impares que no son consecutivos no son divisibles entre cuatro, yo tomé 1, 3, 5 y 7.

Profesora: Tomaste esos valores y no viste la necesidad de buscar otros?

Estudiante J: tome todos consecutivos 3,5,7 y 9.

Profesora: hiciste varias veces la prueba?

Estudiante J: Exacto!!

Profesora: Y cuándo sumaste todos esos números consecutivos impares siempre te da un número divisible entre cuatro?

Estudiante J: Si, y nunca tomé impares no consecutivos, ese fue mi error.

## **Sesión 2**

Profesora: una persona de este equipo que explique dos minutos máximo, como abordaron el problema.

Estudiante A: por aquí.

Profesora: si.

Estudiante A: bueno lo primero que hicimos fue realizar una construcción, la construcción consistía en extender el segmento DF de ver los puntos medios, trazamos,. Extendimos ese segmento, pero con su igual longitud y de ahí sacamos ya datos, tenemos; congruencias entre dos triángulos, de ahí fuimos sacando datos por ángulos alternos internos llegando a que dos rectas eran paralelas de allí, nos fuimos al paralelogramo de allí obtuvimos datos.

Profesora: el equipo ahí como plantearon, como comenzaron a plantear el problema, algunos de los participantes.

Estudiante B: primero buscamos la proporcionalidad para llegar a la conclusión de que el segmento que une los puntos medios, era la mitad del otro segmento, luego que buscamos la proporcionalidad, allí abordamos la semejanza para concluir que los

ángulos de cada uno de los triángulos eran congruentes y así utilizar el teorema de los ángulos internos para poder llegar a la conclusión de que eran paralelos.

Profesora: okey, el equipo de allá de los chicos.

Estudiante C: nosotros lo hicimos, un esquema de ejercicio, luego la abordamos por una construcción por triángulos congruentes, luego llegamos a un paralelogramos y de ahí hicimos, luego usamos la definición de paralelogramos para encontrar que los segmentos era la mitad del segmento que el pequeño era la mitad del grande.

Profesora: por aquí las chicas.

Estudiante D: nosotras tratamos de construir también primero el segmento DE y lo extendimos, después por ahí buscamos mucha información, pero no llegamos a demostrar que el lado DF era igual que AC, entonces tratamos hacerlo por semejanza de triangulo demostrando que los triángulos ABC es semejante al triangulo BDE, lo hicimos usando la proporcionalidad entre los lados y este igualando las dos proporciones y como el angula B es congruente con el mismo demostrando que los dos triángulos son semejantes, y son semejantes por parte correspondiente los ángulos alternos internos son congruentes y a partir de allí demostramos que son paralelos.

Profesora: el equipo aquí.

Estudiante E: lo primero que hicimos fue leer detenidamente el planteamiento y tratar de tener la hipótesis y la tesis y bueno obtuvimos que la hipótesis era que tenemos los puntos medios nada más y tenemos que llegar que dos de los lados ¿son paralelos y que el segmento que este en el medio determinado por los puntos que es la mitad del segmento paralelo, luego nos apoyamos en la figura geométrica, ubicar esos puntos que diseñamos y tratamos de unir la proporcionalidad de los triángulos, y así llegamos que la parte paralela de los dos segmentos, luego pues nos dedicamos a determinar que ese segmento que determina los puntos medios es la mitad de ese paralelogramo, por supuesto entonces nos apoyamos en un teorema que dice que si una recta intercepta a dos lados de un triangulo y termina dichos lados segmentos proporcionales a dichos lados pues a dichos lados paralelos pues es paralelo al tercer lado, esos puntos medios genera un segmento que es paralelo al tercer lado y por ahí lo fuimos desarrollando.

Profesora: okey muchas gracias entonces, bueno que pase el primer equipo entonces. Pasa la chica allá entonces, democráticamente, vamos hacerlo por parte, porque para que no nos enfoquemos en las dos cosas para que nos enfoquemos en una sola, no sé quien de ustedes escogieron o no escogieron a alguien para, si necesita la demostración ahí está en el. Ella va a explicar la demostración si el equipo necesita, si ella se le pasa por alto ustedes pueden.

Estudiante F: voy a explicar de una vez okey. Los datos que tenemos que el segmento que une los dos puntos medios de los lados cualesquiera de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad de su longitud, aquí tenemos que B y E son los puntos medios de AC y DC respectivamente, y si son puntos medios tendríamos entonces que, AD es congruente DC y DE con CE, esto por definición de punto medio, esto o que decimos fue una construcción, lo que hicimos fue alargar el segmento DE en su misma medida, es decir, seguimos al lado un segmento que sea la misma medida de DE, construimos DF el otro paso fue determinar la construcción aquí uniendo BF.

Profesora: halla también tienes marcadores y borradores.

Estudiante A: sigue su explicación: este paso es por construcción. Si encontramos que F es congruente con D, voy hacer una marca aquí y también podemos observar que el ángulo DEF es opuesto por el vértice con el ángulo FEB y si son opuestos por el vértice ellos son congruentes, ahora por el postulado Lado Angulo Lado, tenemos que el triángulo DCE es congruente con el BFE, bueno por aquí es debido entender esto pasa a congruencias por que tiene igualdad, si estos triángulos son congruentes quiere decir que este lado es congruente por parte correspondiente y también el ángulo que tenemos acá va a ser congruente con el ángulo EBF ahora tenemos que, este ángulo es congruente con este, pero también tenemos que nosotros conocemos como las famosas, y tenemos dos rectas que están bien abordadas bien por una secante dos pares de ángulos que son ángulos alternos internos y son congruentes, y tenemos el teorema AI que si dos ángulos alternos internos son congruentes entonces son paralelos, tenemos entonces que BC es paralela BF entonces resulta que el segmento está contenido en el segmento AC lo que quiere decir que AC también va hacer paralelo a BF y si AC es paralelo BF, también tenemos que AD está contenida en AC

quiere decir que AD es paralelo a BF entonces tenemos que AD es congruente con DC pero resulta que DC es congruente con BE tenemos una transitividad, AD es congruente con BE que AD es paralelo a BF y AD es congruente BF por un teorema de paralelogramo, quiere decir que el cuadrilátero ADBF es un paralelogramo, si es un paralelogramo se cumple entonces que el segmento AB va hacer congruente con el segmento DF no es más que el segmento DF esta también por un teorema de paralelogramo y si son congruentes entonces son iguales, pero nosotros tenemos que el segmento DF no es más que el segmento DE mas el segmento EF por definición de estar entre, pero en un paso que tenemos por acá DF es congruente con DE y sustituyendo y operando otra vez pero DF es igual a AB es igual a dos veces DE, entonces AB medio va hacer igual a AE y es lo que queremos llegar, ya que los lados son paralelos y que mide la mitad de su longitud.

Profesora: muy bien, alguna sugerencia. ¿Quedo bien claro?

Estudiante B: cuando dice que es paralelogramo falto el paso de que índice que AB es paralelo DF, no sé si esta demás.

Estudiante A: ¿Cuál dices tú?

Estudiante B: después de que dice que su paralelogramo entonces dices que AB es paralelo con DF que también podemos demostrarlo, esta sobre entendido.

Profesora: que DE es paralelo con AB ella lo dijo. Pero no lo escribió que es parte de la tesis, okey si alguien más quiere. ¿La contratamos o no la contratamos?

Todos: si.

Profesora: pero a los varones no les estoy preguntando. Bueno si no hay ninguna sugerencia, aparte de eso podemos horita escribir ahí. Un pasito para que quede bien allí escrito porque los que quieren tomar nota y eso, bueno entonces vamos con el otro equipo.

Estudiante D: el de nosotros lo hicimos.

Profesora: ellas lo hicieron pero no están seguras si está bien.

Estudiante D: lo que hicimos también, colocamos también el lado DE, luego por hipótesis tenemos que este lado es igual a este lado, entonces decimos que DA es igual a CA, y B es igual a F, a partir de acá nosotras hicimos que, nosotras lo que

queremos hacer, demostrar que este triangulo grande era congruente al chiquito. Verdad que el triangulo ABC es congruente al triangulo CDE por que a partir de allí podíamos decir que demostrando este triangulo es congruente con este y si demostramos ya tenemos que estos dos son paralelos, el teorema no lo recuerdo bien, pero yo se que viene por esta parte si estos dos son congruentes verdad, entonces va hacer congruente con este y así tenemos los alternos internos, bueno sabiendo que estos dos son congruentes son alternos internos entonces son paralelos.

Estudiante A: no, esto lo que tienes allí, pero de allí a que sean congruentes a lo que señalaste mas abajito.

Estudiante A: ella lo que quiere demostrar que son congruentes, para luego paralelo.

Estudiante D: entonces a partir de allí nosotras sabemos que el lado AB entonces tenemos que demostrar que la proporcionalidad de los lados, entonces decimos que el lado AB sobre el lado BE es igual al lado CB sobre el ED pero el lado AB sobre el lado BD es igual al lado CB sobre EB sobre el lado AB sobre el lado BE es igual a AB y quien es BD la mitad de AB.

Profesora: ¿quién te está apuntando la experta?

Estudiante D: esto es lo que yo quiero probar, pero que tengo que AB sobre BD es igual a AB sobre la mitad sobre AB por hipótesis entonces, aquí tendríamos igual, en el otro tendríamos BC sobre EB es igual a CB y este señor es la mitad del que vimos, por lo mismo que dije anteriormente ahora igualando estos dos pasos tendríamos que AB sobre BD es igual a CB sobre EB, entonces esto sería de los pasos 4 y 5, ahora tenemos que estos dos son ya estos lados proporcionales son iguales, ahora restaría colocar que el ángulo B es congruente consigo mismo por identidad, ahora por el postulado LAL, tenemos que el triangulo ABC es semejante con el triangulo DCE entonces a partir de allí podemos decir que por partes correspondiente que el ángulo B es congruente con el ángulo A, tenemos que el ángulo BDE es congruente con el ángulo DAC, y el ángulo DEC es congruente con el ángulo ECA, por partes correspondiente ahora tenemos entonces que estos ángulos son congruentes pero el ángulo FEC es congruente con el ángulo BED por ángulos opuestos por el vértice. Entonces tenemos que estos dos son congruentes pero este es congruente con este, y

estos son alternos internos y a partir de allí podemos decir que estos dos son paralelos y el ángulo FEC es congruente con el ángulo ECA y los ángulos alternos internos son congruentes entonces son paralelos la recta es paralela y ahora la demostración de que este es la mitad de este queda propuesto.

Profesora: no lo hicieron, que sugerencia le damos hasta ahí esa demostración, que sugerencia dan para partir de eso, que tenemos allí. Demostrar lo que falta para demostrar que DE es la mitad de AC con lo que está allí, que pudiéramos, como sería, haber si alguien puede hacer unos pasitos allí, pero escríbelo allí haber, ahí hay unos marcadores, mira allí detrás si lo ves eso sale de donde.

Estudiante B: de acá.

Profesora: pero ella ya mostró que los ángulos son semejantes.

Estudiante B: como ya sabemos que son congruentes entonces acá decimos que.

Profesora: te faltaba nada, ya habías probado lo más difícil que era la semejanza.

Estudiante F: lo que faltó es que ellos escribieron la semejanza igual a 2 pero si lo volteas, al revés y por eso es que no lo veías bien.

Profesora: en general ahora si quisiera por equipo los que quieran participar, por equipo en general los que no están allí planteado, que otra cosa agregaría con estas dos demostraciones o si hay algún equipo perdón, o si hay un equipo que no hay construido esa prolongación de segmento, pero por lo menos el equipo de allá ustedes también prolongaron la proyección del segmento no, como lo hicieron, haber repítame otra vez ustedes se fueron, a bueno que de hecho allí cuando ella utilizó la semejanza creo que no utilizó prolongación verdad.

Estudiante D: si profe yo la utilice para decir que estos dos ángulos son opuestos por el vértice y a partir allí puedo tener los ángulos alternos internos pero no me acordaba de la propiedad.

Estudiante B: pero no era necesario porque si tenemos que son correspondientes queda demostrado que eran paralela y no era necesario la construcción.

Profesora: me imagino que habían visto esa demostración antes verdad, como les dije este es el tema de segmento medio, lo debieron escuchado por lo menos en algún momento, ahora fíjense que se demostró de dos formas diferentes, esos son dos

formas diferentes, porque a pesar que ella construyó el mismo segmento no lo utilizó, entonces dos formas diferentes, ahora habrá otra forma que pudiéramos demostrar eso..... Pero fíjense, por geometría analítica utilizando la geometría analítica se pudiera hacer tomando los puntos, los vértices del triángulo como puntos en el plano, con pares ordenados, como sería será que podemos hacerlo en forma general.

### Sesión 3

Profesora: Voy a dar un número y comienza el equipo A, yo voy a ubicar el número “20”

¿Qué número va a escoger el equipo A para restarle?

Equipo A: número  $2^4$

Repito  $2^4$  respuesta definitiva,  $20 - 2^4 = 4$ , sigue el equipo B

Equipo B: con  $2^0$  ó  $2^1$  ganan ellos, si yo coloco  $2^0$  les da 3 ellos con colocar  $2^1$  ganan y si coloco  $2^1$  ellos colocan  $2^0$  y ganan

Equipo B: escoge jugar  $2^1$  y queda 3 y el equipo A resta  $2^0$  y queda 1 gana el equipo A

Profesora: ahora va a comenzar el equipo B vamos a jugar así una y una ok, 132 que número le vas a restar equipo B resta  $2^7$  cuanto es  $2^7 - 132$  es 4 entonces gana el equipo B, vamos a poner otro número aquí, 61

Comienza el equipo A,  $2^0$ , el equipo A resta  $2^0$  es decir que me quedan 60, el equipo B resta  $2^0$ ,  $2^0$ ,  $2^0$  quedan 58, ustedes  $2^3$  si, equipo A  $2^5$  me quedan 28 aja el equipo B  $2^1$  profe, el equipo A  $2^1$ , el equipo B  $2^3$  profe me quedan 6, el equipo A  $2^1$ , creo q va a ganar el equipo A ¿no?

Vamos a hacer otra ronda 48 comienza el equipo B

Equipo B  $2^5$  me quedan 14

Equipo A  $2^2$  me quedan 10

Aja equipo B  $2^1$

Equipo A  $2^2$

Gana el equipo A

Equipo A “3” puntos, equipo B “1” punto

Profesora: ya jugamos, por equipos ahora les pregunto: qué fue lo que ustedes hicieron por ejemplo A qué fue el que más ganó sí, que estrategias por así decirlo usaron para siempre ganar, en las 3 oportunidades que ganaron

Estudiante A: “nuestra idea era llevarlo a un número impar de manera de presentarle al contrincante un número impar y entonces dejarnos a nosotros una secuencia cuando esta persona no dejaba un número par entonces nosotros continuábamos con esa estrategia”

Profesora: otra persona del grupo

Estudiante B: “la de nosotros fue lo contrario era llevarlo a un número par para conseguir el mínimo par ya que al encontrar el 6 ó 4 sabíamos que estaba ganado el juego”

Profesora: ósea ustedes buscaron la manera de mantener un número par, ustedes un número impar para llevarlo a 4 ó 6, ósea que si llegaban a 4 ó 6 ya ganaban, alguien más, vamos a ver si esta teoría funcionó, vamos a ver ustedes siempre llevar a un número par, cada vez que jugaba A lo ponían en un número par, que estrategia usó el equipo B en la única que ganaron

Estudiante C: “*en si no había una estrategia solo era tratar de buscar llegar a el número 4*”

La profesora repasa en una ronda cuál fue una de las equivocaciones del equipo B al jugar

Profesora: a ver ¿quién quiere jugar contra mí?,

Estudiante D: yo

Profesora: Que alguien escriba el número “160”, cuáles son las potencias de  $2^1$ ,  $2^2$ ,  $2^3$ ....

Profesora: yo voy a jugar, le voy a restar  $2^0$

Estudiante D:  $2^7$  y queda 31

Profesora:  $2^3$  y me quedan 23

Estudiante D:  $2^1$

Profesora:  $2^3$  otra vez.

Estudiante D:  $2^1$

Profesora: yo le voy a restar  $2^0$

Estudiante D:  $2^2$

Profesora: ya me iba a equivocar voy a restar  $2^1$

*“Yo no estaba segura al principio pero después de  $2^7$  si estaba segura que ganaría, porque o tengo una estrategia no sé si es la misma que tienen ustedes, y eso es lo que vamos a ver ahora; ahora por equipo, vamos a buscar una estrategia, fíjense que en este caso si ambos equipos, es más vamos a jugar otra ronda, porque ya el equipo B sabe la estrategia del equipo A y viceversa. Vamos a volver a jugar ya sabiendo las 2 estrategias, entonces lo hacemos de la misma manera primero empieza el equipo A después el B, lo hacemos así primero A después B y en la tercera lo sorteamos”*

282 va a comenzar el equipo A, que potencia le van a restar

Equipo A:  $2^8$  respuesta definitiva cuanto me queda 26

Equipo B:  $2^4$  profe  $2^4$  me quedaría cuanto 10

Equipo A:  $2^2$  me quedan 6

Equipo B: resta  $2^1$

Profesora: Creo que gana el equipo B aquí no importa lo que juega A gana B, quien comenzó, comenzó A gana B

49, comienza B

Equipo B  $2^0$  Equipo A  $2^0$  Equipo B  $2^3$  Equipo A  $2^0$  Equipo B  $2^4$

Equipo A  $2^3$

Gana el equipo A

Profesora: cuáles son los números que son seguros para ganar como el 4, y con el 10 si restan 4 también se gana por que quedan 6 y le restan  $2^1$  y se gana, si le restan 8 ganan, ósea con las posibilidades que tiene de jugar con 10 se puede ganar también si, 4 y 10 que otro número seria, el 16, se le puede restar 2, 4, 8 restemos las potencias a ver si es un numero ganador.

**ANEXO D**  
**TRANSCRIPCIÓN DE ENTREVISTAS A**  
**PROFUNDIDAD**

## **Entrevistas a profundidad a cinco estudiantes del curso de Tópicos en Educación Matemática**

### **ENTREVISTA: 1**

**Profesora:** ¿Qué comentario tienes en relación a las tres actividades didácticas que tuvimos en el curso de tópicos, de manera general, que pudieras tú decir en relación a esas tres actividades?

**Estudiante:** Me parecieron muy pedagógicas son de por sí, pero salieron rigidez, a la cual uno está acostumbrado por lo menos me gusto mucho la ultima con la del número que llegamos a la forma  $3k+1$ , ósea obviamente pues después que yo pensé en una demostración de manera que usted la planteo a través de un juego me pareció muy muy bueno hace pensar a uno en las propiedades en las conclusiones que debe tener tal que lleve a una demostración como tal, me pareció bastante asertivo, de manera general discúlpeme pero no la recuerdo, muy bien las otras actividades.

**Profesora:** No te preocupes si quieres te la recuerdo. La primera actividad fue, ustedes desarrollaron un cuestionario con tres preguntas, que te pareció específicamente esa actividad? ¿Qué crees tú que se quería lograr con esa actividad?

**Estudiante:** Bueno este... ya recuerdo la actividad. Si recuerdo lo que se estaba buscando es que aprendiéramos a reconocer una demostración en sí; o que debiéramos llegar a una demostración, podría ser desde mi punto de vista,, a través de, si se debe utilizar el término ensayo y error pero a través de nuestros propios medios este construir nosotros el camino para llegar a esa demostración, lo vi. Así.

**Profesora:** ¿En cuanto a la duración de esa actividad en específico que te pareció ósea se debió indagar un poquito más o te pareció pertinente el tiempo?

**Estudiante:** Me pareció adecuado.

**Profesora:** La segunda actividad si la recuerda...

**Estudiante:** si, fue una de las demostraciones que hubo en el ambiente.029 con el teoremas del segmento medio, si me pareció muy buena porque nos hizo reunirnos en grupo y ver, discutir todas las posibilidades del cómo llegar a la solución del problema que en la demostración como tal, ósea de ir aceptando, dejando, desechando

ideas en lo cual uno cree como ciertas para uno y viene otra persona con más argumentos te dice q eso no es así por esto y por esto ah ok uno aprende este como es la demostración como tal y además como usted lo plasmo esa tercera demostración que fue con vectores creo o en el plano nunca la había visto así.

**Profesora:** ¿Te pareció imposible hacer una demostración en forma analítica?

**Estudiante:** sinceramente sí. Así con el plano cartesiano... primera vez.

**Profesora:** En relación al rol de ustedes como estudiantes con respecto a las actividades didácticas que desarrollamos. ¿Qué puedes decir con respecto a eso?

**Estudiante:** El rol de nosotros es este de buscar de hacer las demostraciones que usted ponía siempre y cuando seguir los patrones que usted daba, pues ósea, nos daba las actividades y no eran así, como le digo, no nos daba esas pautas como nos las dan en las demás materias ósea ahí que hacerla la demostración de manera más rígida ósea aplicando teorema no... ósea, tienes aquí el problema, aquí esta resuélvanlo viendo como se les hace más fácil más digerible.

**Profesora:** Eso para ti fue positivo o negativo?

**Estudiante:** Positivo totalmente...

**Profesora:** Que no haya habido muchas indicaciones en relación a las actividades.

**Estudiante:** Si porque nos sentimos entre comillas más libre porque de repente este... cuando a uno le dan tantas este pautas o tantas restricciones hablándolo así de manera más técnica, eee ... no es lo mismo como si presionan, entonces si estos no me concuerdan con lo que me está diciendo ciertas condiciones el teorema x, entonces ya está malo, entonces no puedo, yo me tranco y no puedo hacer la demostración porque no me va dar, entonces me parece un poquito más vuelvo y repito digerible porque uno no le ve tantas restricciones respetando algunas aunque son evidentes los cuales hace que uno puede resolver un poquito más...

**Profesora:** En cuanto al papel de los conocimientos matemáticos ¿para ti fue limitante algunas de las actividades en función a que no pudiste desarrollarlas por qué los conocimientos que tenias no te permitían hacerlo?

**Estudiante:** No si supieras que no, más bien me sorprendió mucho este en una de las propiedades que usted dejo para demostrar, que dice: nos muestra esta identidad ya al

final decía que era una demostración. Todos los pasos eran lógicos, una propiedad cierta, pero más que todo era el lenguaje lo que hizo que algunos, en mi caso que nos cayéramos.

**Profesora:** ¿Tú respondiste que eso era una demostración? Ósea tú estabas confundido, no estabas claro...

**Estudiante:** Si, exactamente, yo ósea, después fue cuando según lo usted dijo que pensarán un poquito... a con razón una conchita de mango por ahí nos caímos con esa con esa conchita de mango, por el de repente no buscarle sentido preciso a las palabras en matemática, ósea una identidad una demostración.

**Profesora:** Por último ¿Qué efecto o repercusión tuvieron para ti en lo personal y como estudiante o futuro profesor de matemática esas actividades como tal? ¿Qué efecto o repercusión causaron en ti?

**Estudiante:** Que por lo menos a la hora de demostrar cualquier contenido, demostración, propiedades, identidades, hay que hacerlas de manera más amena posible que el muchacho no se sienta como que amenazado con lo que coloques en la pizarra, sino que con el conocimiento que tu tengas tu le puedas ilustrar la demostración y pueda resolverla.

**Profesora:** ¿Las actividades como tal te resultaron novedosas y como las calificarías tu?

**Estudiante:** No no... de verdad que si, bastantes novedosas porque siempre teoremas ahí están las propiedades ahí están las demostraciones... háganlas... entonces muchas veces por lo menos dentro de mi punto de vista, eee... hacemos una demostración y asumimos ciertas cosas, pero por qué yo tengo que asumir ciertas cosas, eso es lo que me va a permitir este la resolución del teorema, pero por qué tengo que asumir ciertas cosas.. Por qué no... por qué en este caso en específico y no otro.

**Profesora:** Bueno si no tienes más nada que agregar tu conclusión a las actividades?

**Estudiante:** Bueno me parecieron muy buenas las actividades que usted planteaba de verdad que si muy efectivo de verdad, consiguió el objetivo que estaba buscando, por lo menos en mí.

**Profesora:** Bueno muchas gracias.

## **ENTREVISTA: 2**

**Profesora:** Te voy a hacer unas preguntas en relación a las actividades que desarrollamos en el Curso de Tópicos. ¿Qué comentarios puedes hacer en relación a las actividades didácticas que se llevaron a cabo en el curso de tópicos?, cuando te hablo de las actividades didácticas, fue el ciclo de las tres actividades que hiciste.

**Estudiante:** Voy a hablarle solamente de dos actividades, porque en una estuve ausente, la estrategia que se utilizó fue muy didáctica, porque busca la participación de los estudiantes, por ejemplo la demostración del segmento medio, muy bueno, porque desde hace mucho tiempo no veíamos, habíamos dejado de ver geometría, entonces tratar de recordar todo eso que habíamos visto en geometría y me gustó mucho en el sentido de que nosotros conocíamos una sola demostración de ese teorema y en vista de los que usted nos dijo que debatiéramos, vimos que cada quien, uniendo todo eso podíamos encontrar otras demostraciones, es decir que nosotros no nos podemos quedar con una sola vía que nos muestren, hay diferentes formas de demostrar cualquier teorema, claro, algunos son más fáciles, otros son más cortos, otros son más largos, pero hay diferentes vías y entonces nosotros no podemos quedarnos con procedimientos mecánicos, solamente con una manera, sino debemos seguir indagando, con la del juego, a parte que se buscó la parte competitiva, siempre que uno busca la parte competitiva, siempre busca una estrategia, y eso es obvio y esa fue la intención de ese juego, buscar una estrategia, en la cual uno todo el tiempo, pudiera favorecerse y así poder ser el ganador del juego, primero fue en parejas, luego grupal, al final llegamos a la estrategia que era conseguir un número de la forma  $3k+1$ , luego se nos asignó buscar una manera de demostrar en forma general, que eso es verídico, a muchos se les complicó, a mi también se me complicó como plantear el teorema, hasta que muchos llegaron a plantearlo, muchos no logramos plantearlo, porque el problema era plantearlo para poder decir que era lo que queríamos, entonces me gusta en ese sentido porque tampoco es la facilidad de tener la tesis, la hipótesis o el teorema planteado, también podríamos nosotros indagar sobre cualquier fenómeno y demostrarlo sin tener algo ya planteado, eso es tampoco

estancarnos en que siempre nos den: demuestre, demuestre, demuestre, nosotros también podemos llegar más allá y eso es lo que se buscaba en ese juego.

**Profesora:** En función a la cantidad de actividades que se desarrollaron, ¿Qué piensas tú?, ¿Fue pertinente?, ¿Sentiste la necesidad de que fuesen sido más actividades?, ¿O te parece que fueron muchas actividades?

**Estudiante:** Para mí, fue pertinente, aunque me hubiese gustado que hubiesen habido más actividades de esa forma, pero es porque nos gustó la forma de trabajar, no es por qué hicieron falta, fue pertinente por eso, porque era realmente lo que se necesitaba, pero como nos salimos de la rutina nos gustó, porque fuimos más participativos, nos relajamos también en esas actividades, entonces para mí, me hubiese gustado que hubiesen más actividades, pero lamentándolo mucho tenemos que seguir con el contenido.

**Profesora:** Yo te iba a preguntar muchas cosas, pero ya me las has dicho, que eran sobre todo el papel de los conocimientos matemáticos, ¿fue para ti una limitante? ¿Deberías tener algún conocimiento para abordar algunas de las actividades?

**Estudiante:** Bueno, claro está que debemos tener conocimientos previos, porque no podemos llegar y abordar algo que realmente desconocemos por completo y la limitante realmente la tiene uno, nos la hacemos nosotros mismos, porque si no nos dan algo de donde partir, nosotros no partimos, que a diferencia del juego que nosotros tenemos que buscar de donde partir, entonces debemos ser fuertes a la hora de trabajar con las matemáticas.

**Profesora:** El rol del estudiante y del docente, ¿Cómo te pareció durante las actividades? ¿Cómo pensaste tu que debía ser el rol del docente y del estudiante?

**Estudiante:** Realmente me pareció muy buena en el sentido de que el protagonista realmente tiene que ser el estudiante y eso es lo que se buscó, el protagonista de este curso, fuimos nosotros como estudiantes, el docente fue orientador, solamente nos dio las pautas y nosotros desarrollamos, más aun en el nivel de este curso, debemos ser nosotros quienes debemos tomar la iniciativa, eso es lo que busco el docente, el docente solo nos mostró el camino, bueno desarrollemos.

**Profesora:** ¿Cuál crees tú que fue el objetivo principal de la primera actividad de la que me hablaste?, en geometría, en general, no sé si recuerdas, que se dividieron en grupos pequeños, hicieron una discusión sobre la demostración, la desarrollaron y luego, se escogieron dos de esos equipos para que la expusieran en el pizarrón.

**Estudiante:** Para mí, yo creo que ya antes lo había comentado, y es que nosotros no debemos conformarnos con una sola demostración para cualquier problema, el objetivo es que hay muchos caminos, muchas formas de desarrollarlas, también es la rama, geometría como tal, en las algebras también se podía demostrar y como geometría analítica, lo que nosotros llamamos cálculo, nosotros hubiésemos discutido sobre que podíamos utilizar esos caminos y buscábamos pero como al principio vimos la palabra demuestre, nos fuimos por la parte de geometría, pues nosotros creíamos que era la única forma, cuando vimos que se podía demostrar por geometría analítica, veíamos que era tan sencillo y nosotros nos complicamos porque solamente creemos que hay una sola forma de demostrar.

**Profesora:** ¿Por último, ¿Qué efecto o repercusión tuvo para ti el realizar esas actividades?, desde tu perspectiva como estudiante de matemáticas.

**Estudiante:** Como futuro docente, incluso ya estoy ejerciendo, repercutió en mí, en la parte de que la demostración, aunque uno cree que es muy tediosa para los estudiantes, es muy necesaria, lo que hay que hacer es buscar las diferentes formas de hacérsela llegar a ellos, para que no se haga tedioso, pero si uno les hace una demostración, o logra que ellos hagan una demostración, en ese punto llegamos a que ellos comprendan lo que es el tema en específico, porque si nosotros llegamos solamente a decir: esta es la demostración y este es el ejercicio, entonces los muchachos se van a volver más mecanicistas y harán algo sin saber que es lo que están haciendo, al contrario de que si hacemos una demostración, o logramos que ellos hagan una demostración, ellos van a comprender el teorema y se les va a hacer más fácil aplicarlo a la hora de resolver un ejercicio.

**Profesora:** Muchas gracias eso es todo por los momentos. Gracias.

### **ENTREVISTA: 3**

**Profesora:** Bienvenido entonces a esta entrevista.

**Estudiante:** gracias

**Profesora:** lo primero que me gustaría saber es que comentario puedes hacer en relación a las actividades didácticas que se llevaron a cabo durante el curso de tópico.

**Estudiante:** ¡he!

**Profesora:** en general

**Estudiante:** en general

**Profesora:** ¡aja!

**Estudiante:** bueno para mí fue bastante importante y buena, como buena estrategia, porque gracias a eso nos hizo recordar muchas cosas tanto de geométrica como de las funciones algebraicas que pudimos ver, y no hace nada vimos eso en las cuestiones de algebra y en la materia y con el profesor de resolución, más que todo vimos muchas estrategias que nos sirvieron para visualizar más que todo en lo que se enfocaba o que puede demostrar en dichas preguntas y sobre todo la nos hizo que era de ver el error que tenía.

**Profesora:** ¡aja!

**Estudiante:** ahí nos puso a pensar bastante porque tuvimos que ver, como ver cada rinconcito de donde venia el error porque a la final parecía que era algo verdadero pero era una contradicción, entonces nos puso a indagar a buscar más allá.

**Profesora:** en relación a esa idea tú tenías dudas de si eso era o no era una demostración.

**Estudiante:** si tenía dudas.

**Profesora:** y la aclaraste fue cuando hicimos.

**Estudiante:** cuando hicimos la discusión conjunta con él

**Profesora:** ok, en cuanto a las primeras preguntas que hicimos ¿Qué crees tú que se quería lograr, que objetivos crees ti que se quería lograr con esas preguntas?

**Estudiante:** ¿la visualización que especificaba los cuantificadores?

**Profesora:** ¡aja!

**Estudiante:** eso más que todo porque muchos de nosotros aun no tienen muy claro un para todo, lo que es un existen, la existencia de un único y lo para algún.

**Profesora:** ¿a ti te cuesta todavía?

**Estudiante:** si todavía me cuesta diferenciarlos

**Profesora:** en cuanto a la otra actividad la de geometría que se dividió en grupos grandes, grupos pequeños hicieron una discusión y desarrollaron una demostración y luego se presentaron en el pizarrón. ¿Qué crees tú, primero que te pareció la actividad y luego cual crees tú que era el objetivo de dicha actividad?

**Estudiante:** esa fue la que me pareció muy interesante, porque gracias a eso pudimos discutir entre el grupo completo y decidir porque nos pusimos cada uno a, dimos el punto de vista de cómo podíamos este resolver, el problema de demostración nos pusimos en una discusión socializada hay entre el grupo de donde surgieron muchas ideas y gracias a eso pudimos resolver el dicho, dicha demostración ah claro y también si nos dimos cuenta que no se puede resolver de alguna manera porque a dios, gracias a la discusión lo hicimos de manera más simplificada que otras y nos ahorraos tiempo y en general que la discusión conllevaba a eso a que cuando vimos como plasmaron las otras personas la demostración, vimos que pudimos disminuir el tiempo y ver la demostración de una manera más fácil. Claro a ellos también se les veía que la hicieron más amplia porque desarrollaron paso por paso como de manera, no sé como se dice, minuciosa

**Profesora:** minuciosa

**Estudiante:** buscando cada cuestión, claro como futuro pedagogo debemos hacer eso para que el estudiante en si sepa de donde sale cada cosa

**Profesora:** ok. Y en cuanto a la última actividad, la del juego.

**Estudiante:** la del juego, bueno esa fue más dinámica que todas porque bueno, yo participe con otro compañero y quedamos en mita y mita, porque el gana 4 y yo gana 4 y fue una manera más dinámica pero la demostración, para demostrar dicha cuestión no se me hizo fácil, de hecho no la concluí porque los pasos a seguir la sabía, mas no sabía cómo plasmar tal demostración de cómo hacer  $3k+1$  fuera al llegar a  $3k+1$  pudiera ganar, se me hizo complicado

**Profesora:** o sea se te hizo complicado ver qué era lo que ibas a demostrar o la demostración

**Estudiante:** que era lo que ibas a demostrar

**Profesora:** ok, y una vez que se presentó una demostración si la entendiste

**Estudiante:** si, si

**Profesora:** ok

**Estudiante:** me convención como recuerda como comentamos en la clase que para demostrar uno debe de convencerse

**Profesora:** ok

**Estudiante:** convencer a alguien y después convencer a los demás

**Profesora:** ok, pero entonces el aspecto importante fue que se te dificulto ver qué era lo ibas a demostrar

**Estudiante:** ver qué era lo ibas a demostrar

**Profesora:** ¡eh! En cuanto a los conocimientos matemáticos, o sea para ti influyeron o sea, hubo o sea era importante tener un conocimiento matemático para poder desarrollar las actividades de forma efectiva

**Estudiante:** si, porque gracias a eso nosotros pudimos ver varios caminos sobre todo el de división al absurdo.

**Profesora:** ¡aja!

**Estudiante:** se utiliza mucho, es que partimos de... negamos la hipótesis, utilizamos la... perdón negamos la tesis utilizando la hipótesis para llegar a una contradicción; este de hecho en esa demostración el compañero que la pido resolver, así que nos convenció la utilizo de buena manera porque se fue más allá de los conocimientos de que uno tiene de la matemática

**Profesora:** si pero fíjate que esos conocimientos todos los tienen, o sea

**Estudiante:** ¡aja!

**Profesora:** a lo mejor es la organización

**Estudiante:** a lo mejor es la organización

**Profesora:** y por ultimo en relación, bueno antepenúltimo perdón.

**Estudiante:** ok

**Profesora:** ¿qué te pareció el rol, o que puedes tu reflexionar o comentar en relación al rol del docente y del estudiante en cuanto al desarrollo de las actividades?

**Estudiante:** en cuanto al rol del docente me pareció interesante, porque nos hizo ser espontáneo, decir lo que pensábamos sin estar evaluándonos porque más que todas las personas se ponen muy nerviosas cuando la evalúan y de hecho los conocimientos como si se comprimieran, como si no influyeran.

**Profesora:** ¡aja!

**Estudiante:** Y gracias a eso hubieron discusiones interesantes de donde surgieron productos de que sirvieron para demostrar, para resolver problemas y en cuanto al rol del estudiante muchos de ellos no tomaban si rol como debían, es decir, el de leer las lecturas para después desarrollarlas en clase y discutir las.

**Profesora:** ¡aja!

**Estudiante:** entonces yo creo que el llamado es a eso, que cada actividad que se haga se lea, se desarrolle con seriedad y con espontaneidad

**Profesora:** ok, ahora si por último, ¿Cuál crees tú que fue o qué efecto causó, mejor dicho que efecto causó para ti el desarrollo de esas actividades, cuando digo efecto o sea en qué influyó en ti el desarrollo de esas actividades en relación a tu posición como estudiante de, para ser profesor de matemática?

**Estudiante:** ah ok, bueno eso para mí, pienso que es algo esencial el demostrar porque gracias a eso nosotros vamos a comprobar, a visualizar, a convencer a otras personas de que lo que estoy haciendo sirve o que lo que estoy haciendo no es algo ilógico, y gracias a la demostración nosotros podemos no solo obtenerlo dentro de esas cuatro paredes sino llevarlo más allá de la que ser un docente funcional, nosotros podemos ser un docente integral gracias a la demostración sobre todo en los problemas de la vida cotidiana.

**Profesora:** bueno, cierto, muchas gracias entonces, eso es todo

**Estudiante:** gracias a usted profesora.

**Profesora:** gracias por la entrevista

#### **ENTREVISTA: 4**

**Profesora:** okey, bueno Jesús, este yo te voy a hacer unas preguntas o una pregunta en general sobre las actividades didácticas que desarrollamos en el curso de tópicos, okey, cuando hablo de las actividades fueron el ciclo de tres actividades que hicimos, entonces, que comentarios puedes hacer tu en relación a esas actividades didácticas que se llevaron a cabo en el curso.

**Estudiante:** con respecto a la actividad que se desarrollo con el numero que se le restaba a la potencia de base dos, que posteriormente culmino en una demostración, o lo que se aproxima a una demostración considero que ha sido una manera muy didáctica de poner a pensar, es decir salirse del esquema de una estructura formal y conductista para dar un poquito más de libertad al razonamiento y... una forma de integrar a todos los estudiantes de una manera colectiva no solamente ese proceso que se lleva muy rutinariamente en matemática individualista sino que hubo un compartir y es una demostración de que hay que buscar nuevos recursos para que la matemática sea un poco más atractiva desde el punto de vista de la atención del estudiante.

con respecto a la demostración que se hizo aquí abajo también otra actividad donde se propuso por su parte la demostración del teorema del segmento medio de geometría allí también hubo la particularidad de un trabajo en colectivo es decir no hubo una sola visión de lo que era la demostración como tal me gusto mucho una parte que fue cuando usted realizo la demostración por geometría analítica en verdad yo no lo había visto o no lo hubiese pensado por allá pero no esa clase fue muy nutrir, muy nutritiva desde el punto de vista intelectual porque usted rompió el esquema que viene el divorcio que existe entre la geometría, la geometría formal y la geometría analítica, entonces allí surgieron de los grupos tres formas de demostrar el teorema, sin embargo ahí se sintetizan muchas visiones por ejemplo el equipo mío lo hizo utilizando este triángulos semejantes pero los otros dos equipos lo utilizaron construyendo y llegaron a un paralelogramo entonces esa fue otra manera de una demostración entonces allí hubo tres visiones entonces es importante que de repente

a veces uno cree que las demostraciones salen por un solo camino entonces y sobre todo la utilidad que le se debe dar a la geometría analítica para la demostración de teoremas de geometría normal.

**Profesor:** okey, la parte que, expositiva que te, que te pareció o sea como te pareció la. O sea el hecho de que los se escogieran dos de los equipos para que expusieran su producción, que te que te pareció eso.

**Estudiante:** bueno allí hubo la visión de dos equipos sin embargo había un numero de veinte tantos de personas que cada uno de hecho yo le propuse a mi equipo que construyéramos y ello me dijeron que no que lo demostramos por otro lado pero yo si hace tiempo vi geometría y el profesor laurito lo demostró.

**Profesora:** lo recordabas hacer eso

**Estudiante:** aja

**Profesora:** ¿lo recordabas?, pues

**Estudiante:** aja por un por lo menos construyendo el teorema del segmento medio uno decía que era por un, por construcción pero ellos lo hicieron por triángulos semejantes y entonces el proceso de la exposición de los dos equipos fortaleció eso pues que de repente uno tenía un solo criterio manejaba uno una sola forma en cambio allí a pesar de que eran dos equipos eran el criterio de más de veinte personas que se consolidaran, entonces es una manera muy, muy innovadora de dar una clase porque a veces el profesor hace un una operación o da un bosquejo mire, entonces le encarga al estudiante que haga la demostración pero no ya uno va como con un patrón con algo prediseñado entonces el razonamiento no, no sale a flote que es lo que ha sucedido con eh lo contrario con respecto a las clases que hemos visto en este caso esa tres actividades buscar mecanismos distintos de los convencionales para que el estudiante en verdad razone que es la verdadera naturaleza de la matemática

**Profesora:** la primera actividad no sé si la recuerdas eran dos cuestionarios uno con unas preguntas y el otro era la proposición que al final se preguntaba qué, que opinaba sobre la demostración

**Estudiante:** que al final no era una demostración

**Profesora:** exactamente, que al final no era una demostración.

**Estudiante:** bueno ahí también usted jugó con la, llego a lo que puede ser una contradicción con respecto a los esquemas que tenemos los estudiantes a nivel de las demostraciones porque nosotros nos fuimos mecánicamente y tome fui mecánicamente pero llego un momento en que yo decía pero es que aquí o sea llegábamos a que ene era igual a ene más uno ( $n=n+1$ )

**Profesora:** a ene más uno.

**Estudiante:** a ene más uno, entonces yo veo una de la cosas que si tengo claras y el profesor Arismendi que fue el que me ha formado en calculo él ha hecho mucho hincapié en lo que es una ecuación y una identidad o lo que es una igual y una identidad entonces yo decía si esto está planteado como una demostración o sea yo lo debo asumir como identidad y si no se cumple una identidad quiere decir que hay un error que nosotros no pudimos determinar a pesar de que estábamos usando pasos lógicos entonces ese tipo de procesos en una clase de, para entender lo que es la naturaleza de una demostración porque tenemos el esquema de que es algo mecánico que yo voy metiendo como armando un rompecabezas so van a ver momentos de que todo lo que hicimos nosotros a nivel de pasos lógicos era verdad pero llegamos

**Profesora:** a una contradicción

**Estudiante:** a una contradicción, lo que nos debe llevar a reflexionar que las demostraciones debemos tener un dominio claro y no un proceso mecánico eso es lo que yo he aprendido con respecto a todas esas actividades porque venía trabajando mecánicamente entonces llegamos a que algo que utilizamos premisas verdaderas y llegamos a una contradicción entonces vemos que el planteamiento de un teorema debe llevar más estudio teórico porque el proceso se terminaba con valor absoluto verdad

**Profesora:** si hay era donde estaba, de hecho eso es un error pues o sea ahí hay un error y eso es lo que el objetivo de esa actividad era eso de que ustedes se dieran cuenta de que ahí había un error por eso, por eso cuando discutimos al final yo les dije que yo coloque la palabra demostración a propósito por qué, porque ya ustedes tenían un conocimiento y así no lo tuvieran porque ya habíamos discutido en clases

anteriores sobre que era una demostración y que no era una demostración y así no hubiésemos discutido sobre eso ustedes debían estar en la capacidad de al ver esa conclusión decir no aquí hay un error porque o sea lógicamente eso no es cierto entonces eso era el objetivo principal .

Con respecto al primer cuestionario de preguntas que crees tú que se quería lograr con ese cuestionario

**Estudiante:** ese era donde las donde estaban las preguntas de...

**Profesora:** la primera pregunta era tenían un para todo  $x$ , para todo  $\theta$  existe y el otro era de cuando seno que equis es coseno de equis y la  $\theta$ ... eran tres preguntas, preguntas así con, con interrogación.

**Estudiante:** ah, exacto yo también caí en un error decir que el seno y el coseno de equis solamente para  $\pi$  cuarto es decir este yo decía que allí era donde nada más que el seno era igual al coseno entonces de repente surge esa misma discusión con un compañero que plantea la formula que permite saber no solamente en  $\pi$  cuarto sino en otras en otros este puntos de la recta donde eso también se va a dar. que pienso de esas preguntas, bueno que si me hubiese hecho un examen bueno yo salgo aplazado allí porque no, entonces lo importante de esa clase es que también refrescamos y nos concientizamos con respecto a lo que debe ser una respuesta

**Profesora:** ¿tu sentiste la necesidad de que debías hacer una demostración para responder esas preguntas? o ¿creías que simplemente con responderlas, por ejemplo en el caso aja para equis igual  $\pi$  cuarto ya eso era, era cierto? o sea...

**Estudiante:** ahí lo asumí como cierto porque lo hice directamente ahí si no sentí la necesidad de demostrar todo

**Profesora:** en ninguna de las tres preguntas sentiste la necesidad de...

**Estudiante:** no claro que si, si

**Profesora:** ah okey

**Estudiante:** en la parte de de la suma de números impares

**Profesora:** aja

**Estudiante:** este, allí si yo creo que si trate de hacer un bosquejo de la matriz por números impares consecutivos que consideraba que también era valido porque si era

la suma de impares yo podía agarrar la suma de impares consecutivos pero me fui a una demostración de aja eso sería como no sé si es introducción al álgebra una demostración muy sencilla pero hubo contraejemplo pues entonces ya eso no se puede asumir como una demostración es decir que el proceso de demostrar no está sencillo porque se puede cumplir para una cosa pero de repente sale el contraejemplo y no resulta que eso no va a ser cierto

**Profesora:** es ir, te resulto entonces eso como un aspecto de tomar en cuenta en adelante pues supongo yo pues que si quieres hacer una demostración o una proposición buscar también el contradecir eso para ver si...

**Estudiante:** lo interesante de este curso es que se llega o toca el tema o tiene como tema principal la demostración porque como yo le dije anteriormente la demostración la hemos asumido como un proceso mecánico entonces por ejemplo probar entonces yo sé que eso es verdad y voy construyendo utilizo teoremas axiomas lo que sea postulados y demuestro pero dar una proposición y demostrar que es verdadera ahí es donde está la cosa de la demostración porque puede ser que yo utilice argumentos lógicos pero al llegar a un contraejemplo que alguien me dé un contraejemplo resulta si hablamos desde el punto de vista evaluativo estoy aplazado, pues pero más allá de la, de ser aplazado creo que es el conocimiento que se debe tener porque esa es la verdadera naturaleza de la matemática .

**Profesora:** okey para finalizar, me gustaría saber o sea ¿qué efecto o como repercutió en ti esas actividades que hicimos?

**Estudiante:** bueno una de las cosas que me, que me motiva y me llama la atención de esto es cuando usted hace una propuesta en la primera pregunta que si la demostración debería ser un curso como tal una materia como tal eso fue lo que yo entendí en matemática yo creo que si al igual que como aritmética debería ser una materia obligatoria en todo que estudie educación porque vemos gente de preescolar dando clase en primaria no saben fracciones los elementales entonces en matemática también debería ser la demostración una materia porque es demasiado importante demostrar porque la demostración es la que oficializa el conocimiento en la matemática de repente uno ve docentes que han salido y no le paran a las

demostraciones sino lo mecánico entonces yo de aquí, de los que me han dado clases el único que me motivo a demostrar un poquito más allá o buscar más allá fue el profesor Andrés Arismendi que hace mucho hincapié siempre lo dice y entonces considero que la demostración debería formar parte de un, de un curso.

**Profesora:** y tu no crees más bien que si todos los profesores le dieran el lugar o, o tomaran las funciones que tiene la demostración y las aplicaran en sus cursos ¿no sería más fácil eso? o sea sería como mas, sería como mas integral o sea porque ya tu en cada curso de la especialidad tendrías un profesor que ha, va hacer énfasis y la va a dar la importancia que tiene la demostración en el curso, o sea a mi parecer eso es, eso sería lo ideal

**Estudiante:** porque

**Profesora:** en vez de hacer un curso, en vez de hacer un curso que se refiera específicamente a la demostración matemática porque es mi punto de vista yo respeto el tuyo pero no sé si, para darte una visión diferente fíjate. Ahí parcializaríamos la situación no le daríamos la integrabilidad que, que se merece la matemática como tal ocurrirían situaciones como la que ocurrió que vimos una demostración por geometría euclídea y no vimos la otra forma de hacerlo sino por geometría euclídea ¿si lo ves?

**Estudiante:** si, si

**Profesora:** o sea entonces que el profesor le de la importancia que tiene la demostración en cada curso pienso que nos ayudaría mas a integrarnos o a integrar la áreas por así decirlo no se

**Estudiante:** bueno el hecho de que la demostración forme parte indispensable de la matemática y que los profesores se concienticen con respecto a eso bueno también sería viable porque los planteamientos en generalmente en calculo demuestre que tal, entonces dan es el teorema, entonces si el estudiante llego y lo demostró entonces, vuelvo y le digo nosotros estamos acostumbrados a un proceso mecánico pocas veces nos han puesto a razonar como dice usted con eso que de plantearnos una serie de ejercicios donde de alguna forma, por lo menos yo, me concientice un poco mas con respecto a lo que tiene que ser la demostración, no es el proceso mecánico donde yo, satisfacer la inquietud intelectual del docente, sino que primero debe estar la

formación matemática que yo estoy adquiriendo, entonces bueno si decirlo, establecerlo como un curso sería como a mi entender yo, bueno yo hubiese pensado que se tomara en cuenta esa parte pues esa parte indispensable, pero también entonces, sería que los docentes por lo menos los que administran cursos donde hay muchos teoremas donde la demostración es indispensable geometría, establecerlo con las funciones, muy interesante la sistematización, la del descubrimiento, que son dos cosas que de repente nosotros no, no estamos acostumbrados pues, la sistematización bueno utilizando las justificaciones pero el descubrimiento no porque uno a veces demuestra, ah! ya salió ese examen demuestra, valió tres puntos cuatro puntos el teorema, y entonces de ahí me olvido, entonces es no solamente que el docente se concientice sino que el estudiante también sepa, que no lo deben hacer por la nota sino por su conocimiento intelectual, que es mucho más importante que la nota porque a veces...

**Profesora:** lamentablemente siempre la nota está metida ahí en juego pero...

**Estudiante:** eso claro la nota es como certificación y parte de evaluación y en matemática por supuesto, yo he tenido muchos problemas con los profesores de las materias teóricas porque ellos son, hablan de constructivismo y toman decisiones que deberían ser tomadas por los matemáticos, por ejemplo este tipo de investigación de la demostración solamente en este momento usted tiene la capacidad de arrojar, por lo menos unas orientaciones hacia nosotros los estudiantes pero entonces viene una persona y por decirle algo de integral o de sociales entonces dice: “miren muchachos el estudiante se debe enseñar así se debe enseñar o de otra forma”. pero yo digo que si no es matemático no tiene la potestad de decir cómo se enseña la matemática, al igual como de repente nosotros no vamos a decir o usted va decir cómo se enseña la geografía o cual es el mejor mecanismo porque no es su área, entonces de matemática hay muchos usurpadores teóricos que dicen que, hay que eliminar los exámenes que hay que hacer una serie de procesos donde sale mal parado y perjudicado es la matemática entonces, es muy importante pues que la demostración se le entienda lo que es la naturaleza de la matemática, que ella forme parte de lo académico pero de lo intelectual también que si no iremos en retroceso pues.

**Profesora:** es cierto

**Estudiante:** yo tuve la experiencia de ver introducción al cálculo con el profesor Javier romero y a mí me quedo con cuarenta y ocho en esa época que se pasaba con cincuenta y él me dijo pues, me lo dijo claramente, no profesor como hacemos con esos dos puntos y le hice una evaluación por allá y yo no tenía la, no llene las exigencias que el tenia en ese momento y él me dijo una cosa que yo recuerdo mucho que el mundo de la matemática es como una competencia como un maratón para tu por lo menos llegar aunque sea de tercero tienes que correr entrenarte mucho y así como estas no vas a poder, entonces me mando a correr, y me dijo no te puedo pasar y yo lo agarre, lo aturdí con toda la, la naturalidad de la cosa y dije no tiene razón pues, porque en la matemática que yo me considero si algún día yo tenga un titulo no puedo salir a piratear, y que en verdad lo saque como tiene que ser pues y eso está allí dentro si no sabemos demostrar cómo hacemos. O demostrar uno tiene el disco duro, en el disco duro que es hacer un proceso mecánico pero el razonamiento no...

**Profesora:** fíjate que lo que tu estás diciendo, comparto contigo lo que estás diciendo por ejemplo, a mi no me cabe en la cabeza que un estudiante de matemática no le guste demostrar o que le resulte fastidioso demostrar es algo contradictorio,

**Estudiante:** si

**Profesora:** eso es como que a un estudiante de educación física no le guste correr no le guste hacer deporte, es lo mismo o sea, es semejante pues, entonces cuando a mí un estudiante me dice eso es fastidioso, eso es tedioso, usted se equivoco, se equivoco por o sea eso forma parte de la matemática como tal pues, del proceso.

**Estudiante:** claro, tu sabes con el profesor Javier Romero yo pase esa experiencia y, y le me hizo me dijo mucho que reflexionara que analizara y yo este bueno que tuve muchos problemas en ese momento estaba pasando una situación que yo llegue al pedagógico no tenia casa tenía un hijo eh mi hermano menor drogadicto entonces muchas cosas familiares que de repente me afectaban en ese momento horita ya tengo casa, ya tengo casa propia la tengo con teléfono, televisión cable todo, con todos los servicios internet ya yo tengo mi estabilidad económica un poco más fuerte, en ese momento los problemas a lo mejor me afectaban a nivel de los estudios, me retire

muchos años del pedagógico por situaciones que le estaba diciendo pues quedamos, pero a mí no se me olvida eso y no lo tome como que me iba a resentir

**Profesora:** claro, lo tomaste (tos) perdón (tos) lo tomaste con la madurez

**Estudiante:** claro

**Profesora:** necesaria porque hay muchas personas que pues no toman ese tipo de consejos de buena manera pues, como tú dices o tienen resentimiento o se sienten frustrados

estudiante Jesús: si no no no, yo no, okey yo se que la matemática para mí la matemática es algo, es la madre de todas las ciencias y como la madre de todas las ciencias ella debe tener un respeto, un respeto entonces por ejemplo si yo tenía dudas con respecto a un, yo me acuerdo que la inecuación que me puso yo despeje la equis en el denominador y la despeje así, yo no asumía que de repente allí, había valores para equis que yo no podía alegremente despejar eso pues porque entonces saque un intervalo loco ahí un cosa disparatada, me dijo, no yo no o sea para mí no estás en las condiciones que de que te de esos dos puntos o que te lleve al mínimo aprobatorio, pero profesora no me quise chuletear, el me encerró en su cubículo y se fue hacer una cosa me dejo, yo tenía el libro de Sarabia tenía muchas cosas por allá y yo no, no me chuletee como mucha gente lo hace pues, entonces uno de repente ve a una persona que iba más avanzada que yo, valor absoluto de equis menor o igual que a, si solo si menos a menor o igual que equis menor o igual que a, no no, epa y que es eso decía, ¿cómo pásate tu? entonces ah no chuleteandose, entonces no, para mí con mi conciencia y con, con los principios que yo tengo yo no, bueno está bien profesora aquí esta esto fue lo que hice, me puso tres ejercicios y los tres los quiero perfectos me dijo, hice dos grafique una elipse por allá, una parábola, hice todo lo que era con las cónicas pero cuando me toco la parte de intervalos aplicando la regla de sturms, ahí fue donde rodé y bueno.

**Profesora:** me imagino por esa era la parte más analítica.

**Estudiante:** y esa era la más indispensable.

**Profesora:** lo otro te lo pudiste haber aprendido de memoria, pues

**Estudiante:** claro, eso era muy mecánico pero entonces la parte de la regla de sturms, ahí hay que razonar hay que ver entonces generar los intervalos a veces que el intervalo yo no lo puedo tomar abierto sino dejarlo cerrado y no abrirlo porque, por condiciones del problema pues yo tenía dudas allí bueno y el profesor considero que yo no estaba en condiciones de, de avanzar pues, lo asumí bueno que, de decir no que lo iba agarrar a tenerle rabia a un docente, no, no que para eso estoy aquí para que me eduquen eso si en matemática, muchos se fueron brincaron la talanquera este, se fueron a integral se fueron a sociales, yo no me iba a ir a ninguna parte de esas, porque lo que me propuse que si paso la geometría yo me quedo y pase la geometría y me quede pues.

**Profesora:** bueno Jesús yo creo que esto ha sido todo

**Estudiante:** aja bueno

**Profesora:** esto era lo que queríamos indagar cual fue el efecto que causo con ustedes las actividades que surgieron lamentablemente pues no se pudieron...

#### **ENTREVISTA: 4**

**Profesora:** ¿Que comentarios puedes hacer tú en relación a esas actividades didácticas que se llevaron a cabo en el transcurso del desarrollo del curso?

**Estudiante:** Bueno de verdad que me parecieron muy innovadoras, porque por lo general las clases son pizarra-marcador y también se ve la poca participación de los estudiantes y en este caso si pudimos participar, por ejemplo en el caso de el juego que nos hizo de restar la potencia de base 2 y bueno en general de verdad que me pareció muy didáctica además que descubrimos muchas cosas, muchas cosas que a lo mejor uno se limita al profesor que trasmite y no descubre uno, a mi me gusto mucho la parte del juego porque descubrimos el numero ganador entonces uno a veces cree que eso solo se les ocurre a los grandes matemáticos.

**Profesora:** ¡Muy bien!, ¿En cuanto a la cantidad de actividades que te pareció? ¿Qué comentarios puedes hacer en relación a la cantidad de actividades y la duración de cada una de ellas?

**Estudiante:** Me parecieron adecuadas para el tiempo, por clases se hacían uno ó dos que era más o menos el tiempo que ameritaba.

**Profesora:** ¿Con respecto a la primera actividad, que ustedes desarrollaron como una especie de cuestionario, que eran unas preguntas? ¿Si recuerdas? Que eran tres preguntas en la primera pregunta habían dos involucradas que tenían cuantificadores. ¿Si recuerdas ese primer cuestionario? La primera pregunta era si para todo L, M, N. ¿si recuerdas?

**Estudiante:** ¡Ah sí!

**Profesora:** ¿Qué te pareció a ti ese cuestionario, que puedes decir en relación a ese cuestionario?

**Estudiante:** Bueno, ¿esa era la que tenía el seno y el coseno? A mí me gustó mucho las que tenía la parte de los cuantificadores, personalmente me gusta esa parte, ahora la del seno y el coseno si de verdad no podría saber... ¿para qué valores? para que ángulos el seno era igual al coseno algo así, ahí se de verdad me sentí un poquito cohibida porque no encontraba como demostrarlo o expresarlo, porque yo decía pero es que si yo comienzo a darle valores a esto puedo hacerlo verdad, puedo obtener para que valores son iguales pero no era el deber ser porque debería hacer un análisis más lógico de esto y por eso no las respondí. Las otras si las respondí porque más que todo me parece que salían por cotangente, no se cumplía las cosas para todo entonces uno fácilmente veía cuales eran los ejemplos que contradecían esa proposición general que decía que era para todo.

**Profesora:** ¿O sea que tú sentiste la necesidad de hacer demostraciones para responder esas preguntas?

**Estudiante:** si había que demostrarlo

**Profesora:** A pesar de que en ninguna parte decía demuestre esto.

**Estudiante:** si exacto.

**Profesora:** ok. En relación a la segunda actividad que hicimos que ustedes se dividieron en grupo e intentaron hacer una demostración de geometría y luego la expusieron delante de sus compañeros, ¿qué te pareció esa actividad en particular?

**Estudiante:** Bueno me pareció un poquito como sorprendida porque como la materia no es geometría como tal entonces de repente una demostración de este tipo y más cuando tenemos tanto tiempo sin ver esa materia, entonces no recordábamos bien la teoría pues como tal. Pero sin embargo si la pudimos trabajar e incluso la hicimos de otra forma que no es la que nos enseñaron en geometría verdad, lo que nos ayudo bastante fue el hecho de conocer lo que es la parte de semejanza de triangulo y de ahí nos salió muy sencillo una parte la otra parte que fue la que el compañero nos ayudo hacer, pero de verdad que si nos pareció así como sorprendente esa demostración, pero tuvimos que recordar y empezar a rayar y uno se da cuenta que si está capacitado para hacer demostraciones y que todo el tiempo que uno ha pasado aquí no ha sido en vano, que si algo uno recuerda.

**Profesora:** o sea que al principio a ti te resulto como una barrera el no tener los conocimientos breves de la geometría

**Estudiante:** exacto.

**Profesora:** En cuanto a la última actividad que me dijiste que fue una de las que más te gusto, ¿cual crees tú que haya sido el objetivo de esa actividad?

**Estudiante:** Bueno yo creo que el objetivo era como hacer un razonamiento para deducir algo que es verdadero, o sea algo que me permite hacerte una proposición sino es verdadera, por ejemplo eso que explico en la demostración verdad entonces esta proposición cuando es verdadera e incluso la demostró por el método de reducción, yo me imagino que a partir de ese juego nosotros deducíamos cuales eran las formas de obtener siempre ese resultado igual a 1, tener esa garantía de que nos diera eso.

**Profesora:** A ti te resulto difícil o no llegaste a esa conclusión.

**Estudiante:** no la conclusión de  $3k+1$  yo sola no llegue, fue a partir de que usted empezó a discutir en la pizarra que empezamos a ver todos, pero sola no lo veía lo que notaba era lo que notaban los otros compañeros que era que había que llegar al 2 al 4 pero no al número en genérico como tal si no lo notaba.

**Profesora:** o sea que mucho menos entonces llegar a una proposición para que esa estrategia fuera ganadora, ¿no pudiste?

**Estudiante:** Cuando usted lo mando hacer en particular trate hacerlo por inducción matemática pero lo que me costaba mas era plantear la proposición porque yo decía bueno si yo comienzo con este número suponte que es un numero “x” entonces le voy a restar un numero 2 a la Q pero como tiene que ser ese número, tiene que ser en la forma testa  $3k+ 1$  para garantizar que yo voy hacer la ganadora, pero y que pasa con los otros números como los escribo, y sin embargo yo la planteo pero para el  $k+1$  no la pude demostrar porque no había una secuencia como tal o por lo menos yo no la conocía.

**Profesora:** o sea te resulto difícil llegar a una proposición. Ahora si se te fuese planteado una proposición como tal...

**Estudiante:** si la hubiese podido demostrar.

**Profesora:** Por penúltimo bilma ¿Cómo viste tú el rol del docente y el rol del estudiante dentro de las actividades?

**Estudiante:** Me pareció que las actividades estaban centradas en los estudiantes, que el trabajo del docente era proponer las actividades y orientar más que todo, del resto las actividades nosotros las realizábamos y eso nos garantizaba ya tener como mayor conocimiento porque a lo mejor las cosas que aprendimos no se nos olvidaran tan pronto porque nosotros mismo las hacíamos.

**Profesora:** Y ahora si por último, ¿Qué efecto causo por ti esas actividades que desarrollamos? ¿Cómo repercutió en ti esas actividades?

**Estudiante:** Desde el punto de vista para mi desenvolvimiento como profesora me gusto eso de poder descubrir con los estudiantes nuevas cosas así como también hacer demostraciones junto a ellos, de igual forma hacerles una demostración y plantear la proposición para que ellos la demuestren y así lograr que ellos tenga más firmes sus conocimientos, para el caso cuando yo vaya hacer profesora.

**Profesora:** muchas gracias por tu aporte.