

**UNIVERSIDAD DE VALLADOLID**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE SISTEMAS Y  
AUTOMÁTICA**



**TESIS DOCTORAL**

**IDENTIFICACIÓN DE PROCESOS EN LAZO  
CERRADO CON SUBESPACIOS**

**Edilberto H. VÁSQUEZ DÍAZ**

**Director:**

**Dr. D. César de Prada Moraga**

**Julio del 2004**



## **Agradecimientos**

*El término del presente proyecto ha sido posible gracias a la motivación y ayuda profesional del Prof. César de Prada, asesor del proyecto. Mi más sincero agradecimiento por su dedicación y apoyo recibidos durante la elaboración de esta tesis, por su constante estímulo y oportunas sugerencias que me han permitido completarla.*

*A los miembros del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Valladolid, por su acogedora hospitalidad durante mi permanencia en el Departamento.*

*En Piura, a mis amigos y compañeros del Departamento de Electrónica y Automática de la Universidad de Piura, que siempre me apoyaron y me alentaron a culminar el proyecto.*

*A mi esposa, mi más profundo agradecimiento, por su comprensión, cariño y sus palabras siempre oportunas: "Bueno, Tu no te preocupes, haz lo que debes hacer, que Yo me encargo de los niños". Y que niños !!!.*



*A Mi Querida Esposa, Roxana*

*A Mis Hijos:*

*Álvaro Horacio*

*Roxana del Rosario*

*Sergio Sebastián*

*María Celeste*

*Sol María*

*José Joaquín*

*Por ellos todo vale la pena.*



# INDICE

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 1</b>	
<b>Identificación de sistemas dinámicos.</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción.	7
1.2. Clasificación de modelos de sistemas dinámicos.	8
1.3. Sistemas lineales invariantes en el tiempo.	12
1.4. Modelos paramétricos.	16
1.5. Modelos en espacio de estados.	21
1.6. Métodos de Identificación.	24
1.6.1. Métodos no paramétricos.	25
1.6.2. Métodos paramétricos.	32
1.6.3. Métodos de subespacios.	42
1.7. Etapas para la identificación de sistemas.	52
<b>Capítulo 2</b>	
<b>Identificación basada en subespacios.</b>	<b>57</b>
2.1. Herramientas geométricas.	58
2.1.1. Proyección ortogonal.	57
2.1.2. Proyección oblicua.	61
2.2. Métodos basados en subespacios.	63
2.2.1. Algoritmos de realización.	63
2.2.2. Algoritmos directos.	72
2.2.2.1. Algoritmo MOESP	74
2.2.2.2. Algoritmo N4SID	85
2.2.2.3. Algoritmo propuesto: Moesp_SID	90
2.3. Aplicación práctica	93
<b>Capítulo 3</b>	
<b>Identificación a lazo cerrado.</b>	<b>105</b>
3.1. Métodos de identificación a lazo cerrado.	111
3.2. Modelo en espacio de estados de un sistema a lazo cerrado.	115
3.3. Métodos de identificación para sistemas a lazo cerrado basados en subespacios.	119
3.3.1. Métodos directos.	120
3.3.2. Métodos indirectos.	120
3.3.3. Métodos de entrada – salida.	122
3.3.4. Método propuesto: IdCL.	124
3.4. Caso de aplicación del algoritmo IdCL.	133
3.5. Comparación de los algoritmos IdCL y CLID	143
3.6. Estimación del tiempo de retardo de un proceso a lazo cerrado.	147
3.7. Identificación de una planta prototipo de dos tanques interconectados funcionando a lazo cerrado.	161
3.8. Comparación del método de identificación propuesto con el método de identificación directo.	173

<b>Capítulo 4</b>	
<b>Identificación de una unidad despanizadora de butano y propano</b>	<b>177</b>
4.1. Descripción del proceso.	178
4.2. Modelo dinámico de la planta.	181
4.3. Identificación de la columna despropanizadora.	182
4.3.1 Identificación a lazo abierto	184
4.3.2 Identificación a lazo cerrado	194
<b>Capítulo 5</b>	
<b>Identificación de sistemas no lineales</b>	<b>213</b>
5.1. Modelos de sistemas no lineales orientados a bloques	215
5.2. Identificación de sistemas no lineales basados en subespacios.	217
5.3. Caso de estudio: Identificación de un reactor continuamente agitado	225
<b>Capítulo 6</b>	
<b>Descripción del software desarrollado</b>	<b>239</b>
6.1. Rutinas desarrolladas	240
6.1.1. Identificación en espacio de estados: Lazo abierto	243
6.1.2. Identificación en espacio de estados: Lazo cerrado	255
6.1.3. Identificación en espacio de estados: Sistemas no lineales	266
<b>Capítulo 7</b>	
<b>Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>269</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>273</b>

# *Introducción*

Desde un punto de vista práctico el problema de *Identificación de Sistemas* puede ser descrito como una metodología que nos permite *obtener el modelo matemático de un sistema de manera experimental*. A partir de un conocimiento previo de la dinámica y de mediciones realizadas a las variables de entrada/salida del sistema, se encuentra un modelo que describe adecuadamente su comportamiento dinámico. En ingeniería de control los modelos obtenidos por identificación usualmente son utilizados en la predicción y simulación de procesos, análisis y diseño de controladores.

Los modelos obtenidos mediante identificación se representan matemáticamente como funciones salto o impulso, función de transferencia o en variables de estado, siendo este último muy utilizado para describir procesos multivariables, sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), ya que numéricamente es más consistente.

En general obtener un modelo a partir de datos experimentales, implica el uso de algoritmos que permiten estimar los parámetros de una función de transferencia o las matrices del modelo en espacio de estados. Los algoritmos clásicos de identificación se basan en métodos de mínimos cuadrados (LS), error de predicción (PEM) [Ljung, 1998] y en el uso de variable instrumental (IV) [Söderström y Stoica, 1989], para obtener la función de transferencia o las matrices del modelo. La parte inicial de la identificación consiste en definir una estructura del modelo, cuyos parámetros son

estimados haciendo uso de herramientas matemáticas de optimización, que minimizan el error entre la señal de salida del experimento y la respuesta del modelo a estimar. Estos métodos permiten obtener buenas soluciones para muchos problemas reales, sin embargo presentan limitaciones para el caso de representar sistemas MIMO, como se mencionó anteriormente es recomendable representar esta clase de sistemas mediante espacio de estados.

A finales de 1980 comenzaron a desarrollarse nuevas técnicas de identificación denominadas métodos de *identificación basados en subespacios* (SIM), que permiten de una manera fiable y numéricamente consistente obtener, directamente de los datos medidos, modelos de sistemas en espacio de estados, [DeMoor, 1988] [Moonen, 1989] [Verhaegen, 1991]. Estos métodos presentan ventajas significativas frente a los métodos clásicos, por ejemplo, no es necesario definir un modelo a priori del sistema y no son iterativos por lo que no presentan problemas de no convergencia.

En ingeniería de control automático es muy frecuente, como metodología de diseño de controladores, identificar el proceso para determinar su comportamiento dinámico y estimar un modelo que permita encontrar los parámetros más adecuados del controlador del proceso. Generalmente estos experimentos son a lazo abierto ya que los algoritmos de identificación dan mejores resultados, debido a que el ruido de medición no está correlacionado con la señal que excita el proceso [Ljung, 1998]. Sin embargo, no siempre es posible identificar un proceso a lazo abierto, en la industria generalmente los procesos están trabajando bajo control, ya sean por razones de propias de operación o económicas.

Por otro lado, el uso de controladores avanzados en el control de procesos se está difundiendo cada vez más en la industria, por las ventajas económicas que suponen en el control de procesos complejos, sobre todo en aquellos de características multivariable. El principal “problema” que encuentran los controladores avanzados, es la necesidad de contar con el modelo de la planta para poder desarrollar adecuadamente su estrategia de control. Los métodos empleados para estimar el modelo de la planta suponen un costo económico muy elevado, ya que las pruebas para la identificación a lazo abierto se tienen que realizar con la planta en

funcionamiento; por lo que será necesario abrir algunos lazos de control, con el inconveniente de poner en riesgo la estabilidad de la planta y mermar la calidad del producto final. Dependiendo de la complejidad del proceso, las pruebas de identificación pueden durar varios días; se puede decir que la identificación se vuelve un costo económico que se debe pagar para poder tener un sistema de control avanzado en funcionamiento.

Frente a la necesidad de obtener el modelo de una planta cuando se encuentra funcionando bajo control, surgen los métodos de identificación a lazo cerrado. Estos métodos buscan estimar el modelo del proceso a partir de experimentos sobre la planta trabajando a lazo cerrado. La principal ventaja que ofrecen estos métodos frente a los de identificación a lazo abierto, es la de mantener la planta bajo control, es decir no se corre el riesgo de generar perturbaciones que puedan desestabilizar la planta y la calidad del producto final se puede mantener mejor dentro de los estándares permitidos.

Los métodos de identificación a lazo cerrado, parten de un análisis muy similar a los algoritmos de identificación a lazo abierto, utilizan las mismas técnicas matemáticas para estimar el modelo del proceso, es decir pueden usar los métodos de error de predicción (PEM), de variable instrumental (IVM) y los basados en subespacios (SIM). Una descripción detallada de los métodos de identificación a lazo cerrado y sus aplicaciones lo podemos encontrar en el artículo *Closed-loop identification revisited* [U. Forssell, L.Ljung, 1999] y en la tesis doctoral *Closed-loop, methods, theory and Applications* [U. Forssell, 1999]

Los algoritmos basados en subespacios, se presentan matemáticamente muy atractivos para el desarrollo de técnicas de identificación a lazo abierto y a lazo cerrado; debido principalmente a su capacidad de poder estimar el modelo de la planta directamente en espacio de estados, recomendable para procesos MIMO. Otra ventaja que presentan los métodos en subespacios es que no utilizan herramientas matemáticas de optimización, que muchas veces pueden llevar a estimar mínimos locales no deseados.

Las técnicas de identificación a lazo cerrado no pueden utilizar directamente los algoritmos desarrollados para identificación a lazo abierto, debido a la correlación que existe entre la señal de excitación al proceso y los ruidos de medición y de perturbaciones en el proceso. Una alternativa para estimar el modelo de un proceso a lazo cerrado con subespacios es utilizar los parámetros del controlador, es decir suponer que se conoce el modelo del controlador y a partir de una identificación del sistema a lazo cerrado determinar el modelo del proceso. Un método basado en técnicas de subespacios, que utiliza la respuesta impulso del controlador es propuesto en [V. Overschee y B. De Moor, 1999], sin embargo cualquier error en el conocimiento del controlador se refleja directamente en el modelo estimado del proceso.

En el presente proyecto se estudiarán los métodos de identificación a lazo abierto basados en subespacios, de manera de poder evaluar sus fundamentos matemáticos y sus prestaciones para representar sistemas MIMO, se propondrá un método alternativo de identificación a lazo abierto. Se analizarán los principales métodos de identificación basados en subespacios para la estimación de modelos a lazo cerrado, con la finalidad de plantear un algoritmo de identificación que considere el desacoplamiento de los ruidos de medición y perturbación en el proceso, así como prescindir del conocimiento del tipo de controlador; principales inconvenientes en la identificación a lazo cerrado. Se plantean las dificultades más significativas de estos métodos en relación con la identificación “clásica”, particularmente en cuanto a la estimación de retardos, compromisos orden-dinámicas lentas. El trabajo se ha dividido en 7 capítulos, en los cuales no solamente se estudian aspectos teóricos de los algoritmos, sino que también son evaluados mediante simulaciones y con datos obtenidos a partir de plantas reales.

En el capítulo 1, identificación de sistemas dinámicos lineales invariantes en el tiempo, se hace una revisión muy general de los modelos y métodos clásicos utilizados en la identificación que obtienen como modelo de la planta una función de transferencia en  $z$ , un análisis detallado sobre estos métodos los podemos encontrar en [Ljung, 1998], [Söderstrom y Stoica, 1989]. Se describe también, la representación en espacio de estados de un sistema MIMO y se hace una introducción a la identificación en subespacios, definiendo arreglos matriciales con

las matrices en espacio de estados, como son las matrices de observabilidad extendida, controlabilidad, Toeplitz y Hankel de los datos de entrada/salida, necesarias para el desarrollo de los algoritmos de identificación con subespacios.

En el capítulo 2, se hace un estudio de los principales métodos de identificación a lazo abierto, que se desarrollan usando técnicas de subespacios. Se revisan las herramientas matemáticas del álgebra lineal necesarias para implementar los algoritmos y se estudian sus principios y prestaciones. Finalmente se propone un método alternativo para identificación a lazo abierto, el cual es evaluado con datos obtenidos de pruebas experimentales realizadas sobre un proceso de dos tanques interconectados.

En el capítulo 3, a partir del algoritmo propuesto en el capítulo 2, se desarrolla un método alternativo para la identificación de procesos a lazo cerrado utilizando subespacios. La principal ventaja que ofrece el método es que no se necesita conocer las características del controlador. Las prestaciones del método propuesto, son evaluadas comparándolo por simulación con el algoritmo desarrollado por Peter Van Overschee y Bart de Moor de la Universidad Católica de Leuven, Bélgica, este método parte de conocer los parámetros del controlador. Se estudia también la estimación de los posibles retardos que pueda tener el proceso identificado y su representación en espacio de estados, para probar el algoritmo frente a procesos con retardos se hace la simulación de una planta MIMO 2x2 funcionando a lazo cerrado con dos controladores PI descentralizados y un desacoplador en el estado estacionario. Las prestaciones del método de identificación a lazo cerrado es evaluado con datos reales de la planta experimental de dos tanques interconectados, a diferencia del capítulo 2, los tanques se encuentran trabajando a lazo cerrado bajo el control de dos PID.

Como aplicación práctica de los algoritmos de identificación basados en subespacios que se proponen en el presente trabajo, se expone la identificación de una columna despropanizadora de propano y butano, con el fin de obtener un modelo matricial, necesario para la implementación de un control avanzado. En el capítulo 4, se describen los procedimientos para la identificación y los resultados obtenidos.

En el capítulo 5 se propone como aplicación adicional a los métodos de identificación a lazo abierto basados en subespacios, la identificación de sistemas no lineales que se modelan bajo una estructura Wiener, un sistema dinámico lineal seguido de una no linealidad estática.

Los algoritmos propuestos en los capítulos 2, 3 y 5 se han integrado como parte de una herramienta informática, HIDE<sub>N</sub>ss, que facilita el análisis, procesamiento de datos y la identificación de procesos MIMO utilizando técnicas de subespacios. En el capítulo 6 se explican las principales características de la herramienta, desarrollada en torno MATLAB y que forma parte de los programas de estimación de modelos que se han desarrollado en el Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Valladolid.

Finalmente, en el capítulo 7, se exponen las conclusiones del trabajo, así como recomendaciones para futuros proyectos, que se pueden efectuar a partir de los temas vistos, principalmente utilizando la metodología de identificación de procesos a lazo cerrado basada en subespacios.

# *Capítulo 1*

## *Identificación de sistemas dinámicos*

### **1.1 Introducción**

En el campo del diseño de *sistemas de control avanzado basados en modelos*, - control predictivo, control adaptativo, control robusto, control con modelo interno-, se hace necesario contar con un modelo numérico preciso que describa el comportamiento dinámico del sistema o proceso en estudio. Así mismo, una de las principales tareas que tienen los sistemas de supervisión industrial, es la *detección y diagnóstico de fallos*, que permiten una rápida detección de los fallos con la finalidad de evitar, desde una pérdida de prestaciones hasta un deterioro del proceso, con consecuencias que pueden ser catastróficas para el propio proceso e incluso para el personal de planta; los sistemas de detección de fallos basados en modelos, se basan en la obtención de síntomas, señales indicadoras de fallos, a partir de la comparación del funcionamiento real del proceso con un modelo de simulación.

Principalmente por las dos razones expuestas anteriormente, diseño de controladores avanzados y métodos de detección de fallos, en el campo del control automático se hace necesario disponer de un modelo matemático que se ajuste al comportamiento del proceso, de manera de: a) poder simular el funcionamiento del sistema y b) utilizarlo para estimar los parámetros del controlador. El modelo matemático puede

ser obtenido a partir de dos métodos. El primero es a partir del conocimiento de las leyes físicas, químicas, biológicas, y de otras ciencias, que nos permiten explicar mediante ecuaciones de movimiento la respuesta dinámica de los cuerpos rígidos, circuitos eléctricos y motores, fluidos y muchos otros elementos que pueden formar parte del sistema a ser modelado. Sin embargo, muy frecuentemente los fenómenos físicos que se deben describir son muy complejos y el modelo que se obtiene resulta ser muy complicado para los objetivos de diseño del controlador. Frente a este inconveniente, se tiene un segundo método para obtener el modelo del sistema, es a través de experimentos que permiten estimular directamente el proceso y medir su respuesta. La metodología de construir un modelo y estimar los parámetros desconocidos del proceso a partir de los datos experimentales de entrada y salida del experimento se conoce como *identificación de sistemas*.

De los métodos explicados para obtener un modelo del sistema o proceso, el primero de ellos se adecua mejor para los casos en que se desea hacer una simulación muy rigurosa del funcionamiento del sistema, esto involucra conocer todos los parámetros del proceso. El segundo método es más idóneo para aplicaciones de control, donde a partir de entradas adecuadas al proceso se busca estimular aquellas dinámicas que son de interés para diseñar la estrategia de control.

## **1.2 Clasificación de modelos de sistemas dinámicos**

Para los propósitos de diseño de controladores es importante conocer el comportamiento dinámico del proceso a controlar, es decir, tener una representación matemática del mismo, un modelo, que nos permita estimar sus salidas en función a las entradas manipulables. Si mayor es el conocimiento del proceso - mejor es el modelo-, mayor será la posibilidad de lograr un buen control del mismo.

Debemos dejar claros varios aspectos en cuanto a la construcción de un modelo:

- a) Un modelo se desarrolla siempre a partir de una serie de aproximaciones e hipótesis y, por lo tanto, es una representación parcial de la realidad;
- b) Un modelo se construye para una finalidad específica y debe ser formulado para que sea útil a dicho fin;

- c) Un modelo tiene que ser por necesidad un compromiso entre la simplicidad y la necesidad de recoger los aspectos esenciales del proceso en estudio.

Existe muchas formas de representar un proceso mediante un modelo, dependiendo si el modelo representa el comportamiento del sistema en el tiempo o en la frecuencia, si el sistema es de una entrada y una salida (SISO), o si el sistema es de varias entradas y varias salidas (MIMO). La clasificación de los modelos que describen un sistema lineal invariable en el tiempo (Linear Time-Invariant LTI) son muy diversas, dependen del tipo de proceso, lineal o no lineal; del dominio de trabajo en frecuencia o en el tiempo; del tipo de experimento utilizado: lazo abierto o lazo cerrado, etc. En el presente proyecto no se pretende dar una clasificación completa de los modelos, sino abarcar aquellos aspectos que son fundamentales y la clasificación que se hace es en base a [Ljung98]:

**Modelos causales y no causales:**

El estado de un sistema causal depende sólo de las condiciones presentes y pasadas, pero no de las futuras, es decir hay una relación de causalidad. Los sistemas físicos son causales, pero uno puede concebir modelos de ciertos sistemas que no lo sean.

**Modelos estáticos y dinámicos:**

El estado de un sistema estático depende sólo de las condiciones presentes, y no de las pasadas. En contraposición, el estado de un sistema dinámico depende de lo que haya sucedido en el pasado, generalmente debido a que en el sistema hay algún tipo de almacenamiento de energía. Los sistemas dinámicos también se conocen como sistemas con memoria. Los modelos de sistemas dinámicos son ecuaciones diferenciales o de diferencia.

**Modelos estocásticos y determinísticos:**

En ocasiones se sabe que existen variables que afectan el sistema, pero no es posible predecir el valor que éstas puedan tomar; una de las alternativas para hacer frente a estos casos consiste en considerar que esa variable es aleatoria, y buscar técnicas basadas en la teoría de probabilidades para analizar el sistema. Un modelo que

incluya variables aleatorias es un modelo estocástico, mientras que modelos exentos de aleatoriedad se denominan modelos determinísticos.

### **Modelos de parámetros concentrados y distribuidos:**

La mayoría de los fenómenos físicos ocurren en una región del espacio, pero en muchas ocasiones es posible representar ese fenómeno como algo puntual; por ejemplo, para estudiar la atracción entre el sol y la tierra es posible representar toda la masa de cada uno de esos cuerpos concentrada en un único punto (su centro de gravedad).

Sin embargo, otros fenómenos como la transmisión de ondas electromagnéticas, o las olas en el mar requieren una representación que considere qué está sucediendo en cada punto del espacio, en este caso se necesita un modelo de parámetros distribuidos en el espacio, en contraposición de los modelos de parámetros concentrados. Los modelos de parámetros distribuidos implican ecuaciones diferenciales con derivadas parciales; por su parte los modelos de parámetros concentrados, requieren ecuaciones con derivadas o ecuaciones de diferencia ordinarias.

### **Modelos lineales y no lineales:**

La linealidad es una propiedad que pueden tener o no las funciones; realmente se trata de dos propiedades agrupadas bajo un mismo nombre. Dada una función  $y = f(x)$  estas propiedades son:

1. Proporcionalidad: Es igual calcular la función en un argumento amplificado por un factor  $\alpha$  que calcularla sobre el argumento y luego amplificar el resultado por ese mismo factor:

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

En términos prácticos, esto significa que en los modelos lineales al duplicar el valor de las entradas se duplican las salidas.

2. Superposición: Es igual calcular la función de la suma de dos argumentos que calcularla por separado en cada uno de los argumentos y sumar los resultados.

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

En términos prácticos, esto significa que en los modelos lineales de varias entradas, las salidas pueden conocerse calculando por separado el efecto de cada entrada y sumando los resultados

### **Modelos variantes e invariantes en el tiempo:**

Un modelo se dice invariante en el tiempo cuando las propiedades del sistema modelado se consideran constantes en el tiempo. En caso contrario se dice variante en el tiempo. Nótese que la variación se refiere a las propiedades (parámetros) del sistema, no de las señales que le afectan (variables).

### **Modelos continuos y discretos:**

Para describir el comportamiento de sistema dinámicos es posible definir la variable *tiempo* en dos formas distintas.

Tiempo continuo:

Se considera que el tiempo  $t$  es una variable continua, que puede tomar cualquier valor real, aunque generalmente se restringe a los valores positivos ( $t \in \mathfrak{R}^+$ ). Las variables resultan ser descritas por funciones que van de los reales positivos a los reales ( $f : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}$ )

Tiempo discreto:

Se considera que el tiempo  $k$  es una variable discreta, es decir, que sólo toma valores en ciertos puntos de la recta real. Usualmente estos instantes están espaciados de forma regular en un intervalo  $T$ . De esta forma  $k$  es una variable entera, generalmente

positiva ( $k \in \mathbb{Z}^+$ ). Las variables resultan ser descritas por funciones que van de los enteros positivos a los reales ( $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathfrak{R}$ ), es decir, son sucesiones.

En el presente trabajo, obtención de modelos mediante identificación, consideraremos que los procesos a modelar, se ajustan a un sistema del tipo casuales, dinámicos, determinista –con alguna componente estocástica-, de parámetros concentrados, lineales y no lineales, invariantes en el tiempo y de tiempo discreto.

En cuanto a los procesos industriales se puede decir que la mayoría de ellos se pueden representar mediante sistemas de ecuaciones diferenciales, para el caso de tiempo continuo, y mediante un sistema de ecuaciones diferencias para el caso de tiempo discreto; siendo este último la forma más conveniente cuando se trata de realizar técnicas de control digital. Hay que considerar, además, que debido a que los datos entrada y salida a usar en la identificación se obtienen por muestreo, es más natural asumir que los datos provienen de un modelo en tiempo discreto, aunque las variables del sistema sean inherentemente de naturaleza continua.

### 1.3 Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Si consideramos un Sistema Lineal Invariante en el Tiempo y cuasal con una única entrada  $u(t)$  y una única salida  $y(t)$  (SISO), éste puede ser descrito por su respuesta impulso (o función ponderada)  $h(\tau)$  de la siguiente manera [T. Kailath, 1980]:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (1.1)$$

La respuesta impulso  $h(\tau)$  es una caracterización completa de un sistema, de manera que, conociendo sus valores dentro de un intervalo  $0 \leq \tau \leq t$  y conociendo la entrada  $u(s)$  para  $s \leq t$ , se puede calcular la correspondiente salida en el instante  $y(t)$ ,

Dado que se está considerando trabajar con datos de entrada y salida muestreados, entonces asumiremos que tanto  $y(t)$  como  $u(t)$  se observan sólo en los instantes de muestreo  $t_k = kT$  con  $k = 1,2,3,4,\dots$ , siendo entonces, la respuesta al impulso en

tiempo discreto:

$$y(kT) = \int_{\tau=0}^{\infty} h(\tau)u(kT - \tau)d\tau, \quad (1.2)$$

siendo T el período de muestreo.

Es importante destacar que en aplicaciones de identificación se considera que la entrada  $u(t)$  es mantenida constante entre los intervalos de muestreo.

$$u(t) = u(k) \text{ cuando } kT \leq t \leq (k+1)T, \quad (1.3)$$

se asume, además, un intervalo de muestreo  $T$  unitario y se utiliza la variable  $k$  para enumerar los instantes de muestreo, de esta manera podemos escribir la respuesta impulso del sistema en tiempo discreto como:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)u(t-k) \text{ con } t = 0,1,2,3,\dots \quad (1.4)$$

Una modificación a la relación anterior, es considerar el hecho que a partir de un número demuestras  $n_H$  la respuesta impulso se hace cero, obteniéndose un modelo conocido como respuesta impulso finita (FIR – Finite Impulse Response):

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)u(t-k) \cong \sum_{k=1}^{n_H} h(k)u(t-k) \quad (1.5)$$

Donde:

- $h(k)$  es el elemento  $k$  de la respuesta del proceso a un impulso
- $n_H$  Número de elementos de  $h(k)$  tenidos en cuenta, para  $n_H < k < \infty$ ,  $h(k)$  es cero.

La relación (1.4) permite determinar la respuesta de un sistema lineal invariante en el tiempo a una entrada arbitraria, sin embargo, en la práctica se deben considerar

señales de perturbación que afectan la respuesta del proceso. El efecto de estas perturbaciones puede ser representados por un término aditivo  $v(t)$  a la salida, figura 1.1.

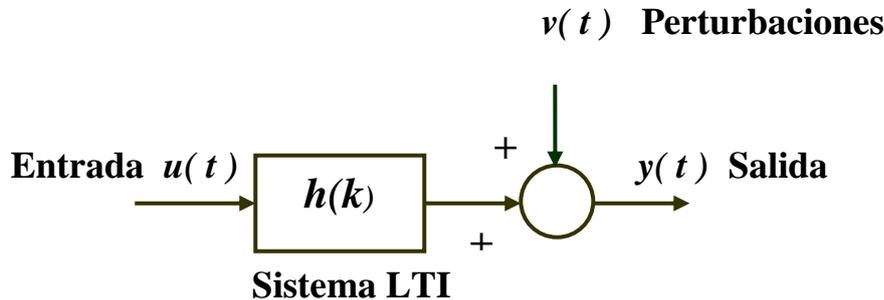


Figura 1.1. Sistema Lineal Invariante en el Tiempo

Luego:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)u(t-k) + v(t) \quad (1.6)$$

Las perturbaciones se deben a muchas causas, principalmente a ruidos de medición, producidos por ruidos electromagnéticos acoplados en los sensores que miden las señales del proceso; y a entradas exógenas al proceso, señales que ingresan al sistema pero que no son controlables por el usuario y tampoco se pueden medir.

La expresión (1.4) se puede representar introduciendo el operador de retardo  $q$  de manera que

$$u(t-1) = q^{-1}u(t)$$

En estas condiciones, se puede escribir:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)u(t-k) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)(q^{-k}u(t)) = \left[ \sum_{k=1}^{\infty} h(k)q^{-k} \right] u(t) = G(q)u(t) \quad (1.7)$$

siendo  $G(q)$  el operador de transferencia:

$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)q^{-k} \quad (1.8)$$

Una característica importante de las perturbaciones  $v(t)$  es que su valor no es conocido, asumiéndose que es un proceso aleatorio, que corresponde a la salida de un sistema lineal cuando su entrada es un ruido blanco  $e(t)$ , figura 1.2.

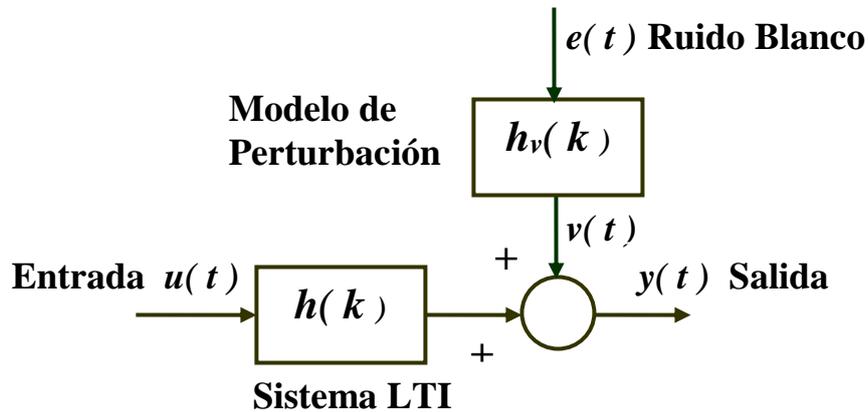


Figura 1.2 Sistema Lineal Invariante en el Tiempo con Perturbaciones

De igual forma que en (1.7) y en (1.8) se puede modelar la perturbación  $v(t)$  como un ruido blanco filtrado por el operador de transferencia  $H(q)$  :

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_v q^{-k} e(t) = H(q)e(t) \quad (1.9)$$

Obteniéndose finalmente, a partir de (1.6), como modelo de un sistema lineal invariante en el tiempo con perturbación aditiva la expresión:

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t) \quad (1.10)$$

El ruido blanco  $e(t)$ , es una variable aleatoria independiente de media cero, varianza constante  $\sigma^2$ , y covarianza cero; se utiliza como una forma conveniente para describir las características de las perturbaciones  $v(t)$ , como un ruido blanco que pasa a través de un filtro  $H(q)$ . Esto permite obtener una mejor estimación del modelo, lo cual sirve para simulación con ruido y para predicciones y control estocástico.

La perturbación  $v(t)$  tendrá también media cero:

$$E\{v(t)\} = \sum h_v(k)E\{e(t-k)\} = 0 \quad (1.11)$$

y su covarianza quedará definida por:

$$C_v(\tau) = E\{v(t)v(t-\tau)\} = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_v(k)h_v(k-\tau) \quad (1.12)$$

donde  $h_v(r) = 0$  para  $r < 0$ .

## 1.4 Modelos paramétricos

Para parametrizar la expresión (1.10) se considera que  $G(q)$  y  $H(q)$  son funciones racionales determinadas por un numerador y un denominador; así por ejemplo si consideramos que el proceso es representado a través de una ecuación lineal en diferencias:

$$y(t) + a_1y(t-1) + a_2y(t-2) + \dots + a_{n_a}y(t-n_a) = b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) + e(t) \quad (1.13)$$

y proponemos dos polinomios  $A(q^{-1})$  y  $B(q^{-1})$  de la forma:

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a} \\ B(q^{-1}) &= b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b} \end{aligned} \quad (1.14)$$

vemos que la ecuación lineal en diferencias (1.13) se corresponde con (1.10), siendo,

$$G(q) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}, \quad H(q) = \frac{1}{A(q^{-1})} \quad (1.15)$$

es decir:

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) + \frac{1}{A(q^{-1})}e(t) \quad (1.16)$$

El modelo descrito por la ecuación (1.16) se conoce como **Modelo ARX**, donde “AR” hace referencia a la parte autorregresiva  $A(q)y(t)$  y “X” a la entrada extra (extra input)  $B(q)u(t)$  también conocida como variable exógena. Gráficamente el modelo ARX se puede representar como en la figura 1.3.

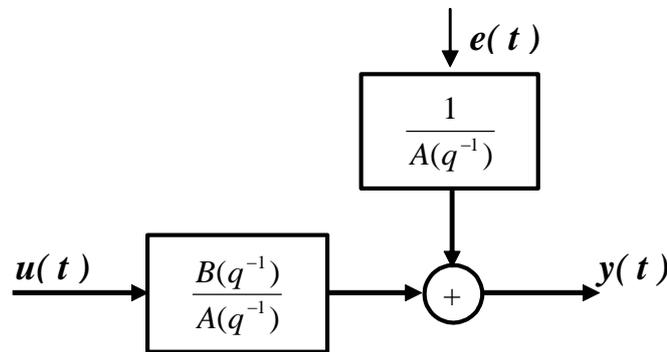


Fig. 1.3 Estructura de un modelo ARX

De manera similar a como se ha obtenido el modelo ARX, se pueden obtener otras estructuras conocidas como *modelos de caja negra* y cuya representación polinomial generalizada es:

$$A(q^{-1})y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(t) \quad (1.17)$$

siendo los polinomios en  $q^{-1}$ , de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \\
 B(q^{-1}) &= b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \\
 C(q^{-1}) &= 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c} \\
 D(q^{-1}) &= 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{n_d} q^{-n_d} \\
 F(q^{-1}) &= 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f}
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

En la figura 1.4 se muestra el diagrama de bloques correspondiente a la ecuación (1.17)

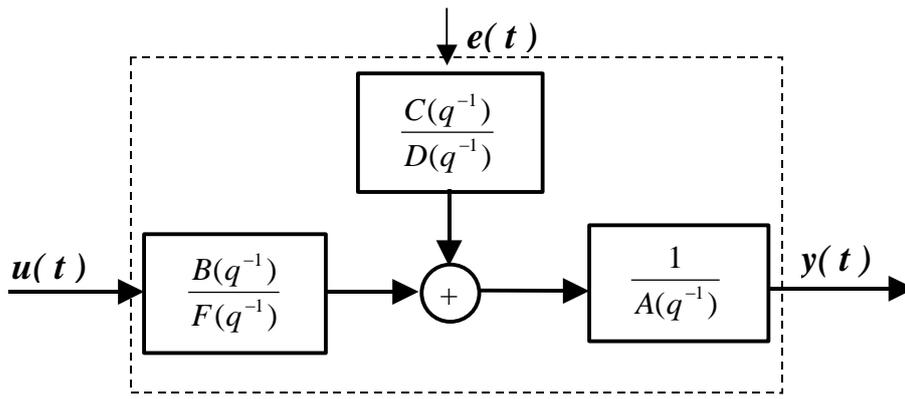


Figura 1.4 Estructura de los modelos de caja negra

De acuerdo a los valores que pueden tomar los diferentes polinomios en  $q^{-1}$ , se tendrán diferentes *estructuras de modelos*, siendo las más importantes en aplicaciones prácticas de identificación de procesos industriales las siguientes:

**Estructura del Modelo ARMAX** (AutoRegressive Moving Average with eXogeneous input) Autoregresivo de media móvil con variable exógena:

$$F(q^{-1}) = D(q^{-1}) = 1.$$

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(t) \tag{1.19}$$

La principal ventaja de la estructura de un modelo ARMAX frente a la de un Modelo ARX, reside en la descripción de la perturbación. Se incorpora una mayor

flexibilidad al modelo debido a que se agrega un término conocido como media en movimiento (moving average) del ruido blanco,  $C(q)e(t)$ , convirtiendo al modelo ARMAX en una herramienta estándar en control, tanto para la descripción del sistema como para el diseño del controlador.

**Estructura del Modelo OE (Output Error):**  $A(q^{-1}) = C(q^{-1}) = D(q^{-1}) = 1$

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t) + e(t) \quad (1.20)$$

Se considera que la perturbación consiste en un ruido blanco puro y que la salida  $y(t)$  se obtiene a partir de:

$$y(t) = w(t) + e(t)$$

donde  $w(t)$  es la relación que existe entre la entrada  $u(t)$  y una salida no perturbada:

$$w(t) + f_1 w(t-1) + \dots + f_{n_f} w(t-n_f) = b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b)$$

por lo tanto:

$$w(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t)$$

siendo los polinomios  $B(q^{-1})$  y  $F(q^{-1})$  de la forma expresada en (1.18).

**Estructura de Modelo BJ (Box –Jenkins):**  $A(q^{-1}) = 1$

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t) \quad (1.21)$$

Se obtiene a partir del Modelo OE, al cual se le adiciona un modelo que describe la perturbación, de manera que la salida está relacionada con el ruido blanco mediante una componente regresiva  $D(q^{-1})$  y una media en movimiento  $C(q^{-1})$ .

Las estructuras que se pueden obtener a partir de (1.17) permitirían desarrollar 32 modelos diferentes, dependiendo de cual de los cinco polinomios en  $q^{-1}$  son utilizados. Para propósitos de identificación de procesos industriales normalmente se utilizan las cuatro estructuras de los modelos que hemos descrito anteriormente.

El modelo general de la ecuación (1.17) permite obtener modelos en tiempo discreto de sistemas lineales invariantes en el tiempo que describen muy bien sistemas de una entrada y una salida (SISO). Para el caso de sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), existe la posibilidad de hacer una generalización de los modelos obtenidos a partir de (1.17), mediante la utilización de matrices. Uno de los métodos utilizados es la descripción por matriz de las funciones de transferencia, matriz Fraction Description – MFD. Así por ejemplo, para un sistema MIMO de  $p$  salidas y  $m$  entradas, el modelo ARX sería:

$$y(t) + A_1 y(t-1) + \dots + A_{n_a} y(t-n_a) = B_1 u(t-1) + \dots + B_{n_b} u(t-n_b) + e(t) \quad (1.22)$$

con  $A_i \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ ,  $B_i \in \mathfrak{R}^{p \times m}$ . Por lo que tendremos matrices en lugar de polinomios:

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= I + A_1 q^{-1} + \dots + A_{n_a} q^{-n_a} \\ B(q^{-1}) &= B_1 q^{-1} + \dots + B_{n_b} q^{-n_b} \end{aligned} \quad (1.23)$$

entonces el operador de transferencia  $G(q^{-1})$  será matriz de la forma:

$$G(q) = \begin{bmatrix} G_{11}(q) & G_{12}(q) & \dots & G_{1m}(q) \\ G_{21}(q) & \dots & \dots & G_{2m}(q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{pm}(q) & \dots & \dots & G_{pm}(q) \end{bmatrix}$$

obteniendo finalmente:

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t), \quad (1.24)$$

La extensión de la ecuación (1.17) a sistemas MIMO no es muy robusta matemáticamente. Una alternativa para representar matemáticamente un sistema MIMO es a través de Modelos en Espacio de Estados. Las principales ventajas que presentan estos modelos son las siguientes:

- La representación de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas es más sencilla.
- Toda la dinámica del sistema se representa por ecuaciones diferenciales o de diferencia de primer orden.
- Permite el desarrollo de métodos computacionales más eficientes para la simulación de sistemas dinámicos.
- Brinda una nueva perspectiva sobre la dinámica de los sistemas
- Algunas de las técnicas de control moderno se basan en este tipo de representación.

### 1.5 Modelos en espacio de estados.

Un sistema discreto Lineal Invariable en el Tiempo (LTI) puede ser representado en espacio de estados como:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) + v(k) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Donde,  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathfrak{R}^{l \times n}$  y  $D \in \mathfrak{R}^{l \times m}$ . Las variables de entrada y salida al sistema son denotadas con  $u(k)$  y  $y(k)$  respectivamente, con  $u(k) \in \mathfrak{R}^{m \times 1}$  y  $y(k) \in \mathfrak{R}^{l \times 1}$ , siendo  $n$  el **orden del sistema**,  $m$  el número de entradas y  $l$  el número de salidas. Por otro lado,  $w(k)$  representa a los disturbios del proceso y  $v(k)$  es el ruido añadido en la medición y se consideran no medibles, con distribución Gaussiana, media cero y estadísticamente independientes de la entrada  $u(k)$  y la salida  $y(k)$ , sus dimensiones son  $w(k) \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$  y  $v(k) \in \mathfrak{R}^{l \times 1}$ .

El estado de un sistema dinámico es el conjunto mínimo de información tal que su conocimiento en  $t=t_0$  conjuntamente con las entradas para  $t \geq t_0$ , determinan totalmente el comportamiento del sistema para  $t \geq t_0$ .

Las variables de estado de un sistema dinámico son el conjunto mínimo de  $n$  variables que determinan el estado del sistema dinámico:  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , y son agrupados en un vector de estados  $x(k) \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ . El espacio de estado es  $n$  – dimensional y sus ejes de coordenadas serán los estados  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Cualquier estado del sistema es un punto en el espacio de estado.

De la ecuación (1.25) se pueden distinguir dos ecuaciones: la ecuación de estados propiamente dicha:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k),$$

y la ecuación de salida:

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) + v(k)$$

La figura 1.5 muestra un esquema de un sistema discreto LTI representado en (1.25).

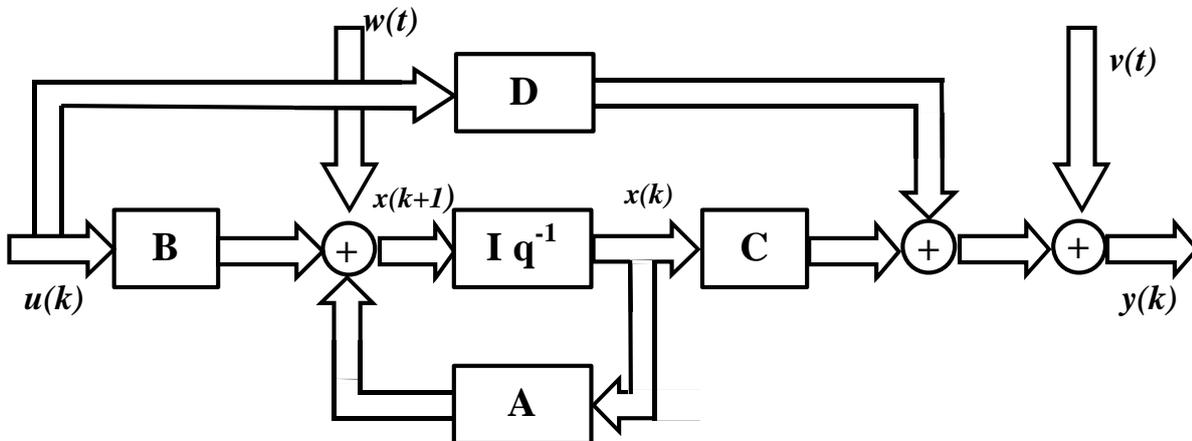


Figura 1.5 Representación esquemática del modelo en Espacio de Estados de un sistema LTI

Se asume también que la realización en espacio de estados de (1.25) es mínima, lo que implica que sea controlable y observable.

Se dice que un sistema es controlable en el instante  $t_0$  si se puede llevar de cualquier estado inicial  $x(t_0)$  a cualquier otro estado, mediante un vector de control  $u(t)$  sin restricciones, en un tiempo finito. Un sistema es de estado **completamente controlable** si todos los estados son controlables.

Un sistema dado por su ecuación de estados:  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  es **completamente controlable** si y solo si los vectores  $[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$  forman una base del espacio vectorial, es decir, son linealmente independientes, o lo que es lo mismo, la matriz de controlabilidad:

$$V = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

es de rango  $n$ . La controlabilidad no depende de las variables de estado elegidas, sino de las matrices  $A$  y  $B$

Por otro lado, dado un sistema sin excitación de la forma:

$$x(k+1) = Ax(k), \quad y(k) = Cx(k), \quad (1.26)$$

se dice que el sistema es completamente observable si se puede determinar todo estado inicial  $x(0)$  a partir de la salida  $y(k)$  en un intervalo de tiempo finito, o sea, si toda transición de estado puede afectar a todos los elementos del vector de salida. Un sistema es **completamente observable** si y solo si la matriz de observabilidad  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

es de rango  $n$  (tiene  $n$  vectores linealmente independientes).

El conjunto de matrices  $\{A, B, C, D\}$  que describe el sistema de la ecuación (1.25) no es único, el conjunto:

$$\begin{aligned}A_T &= TAT^{-1} \\ B_T &= TB \\ C_T &= CT^{-1} \\ D_T &= D\end{aligned}\tag{1.28}$$

es una realización de estados equivalente, con  $T$  como matriz de transformación cuadrada no singular [Kailath, 1980], cualquier transformación lineal no singular del estado  $\xi = T\mathbf{x}(t)$  es también una realización permitida del mismo sistema, siendo para el caso de una realización mínima  $T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$

La propiedad del modelo en espacio de estados de no tener una representación única, sino que a través de una matriz de transformación  $T$  se obtiene un modelo equivalente, es utilizada por los métodos de identificación en espacio de estados para estimar el modelo del proceso.

Existen otras alternativas para describir un sistema LTI en espacio de estados [Kailath, 1980] [Ljung, 1998], sin embargo el modelo de la ecuación (1.25) es útil para modelos orientados al control de procesos ya que permite estudiar en forma conjunta la parte determinística y estocástica del proceso.

## 1.6 Métodos de identificación

La identificación estudia las metodologías que permiten obtener el modelo de un proceso a partir de datos experimentales de entrada y salida de un proceso. Estos métodos se pueden agrupar en tres categorías: *No Paramétricos*, *Paramétricos* y de *Subespacios*. Los dos primeros estiman adecuadamente procesos de tipo SISO, o MISO, sin embargo presentan problemas numéricos de convergencia para sistemas MIMO. Los métodos paramétricos basan su análisis en modelos *de caja negra* y cuya representación polinomial generalizada se expresa en la ecuación (1.17). Los métodos de subespacios estiman el modelos de sistemas MIMO representado en espacio de estado, ecuación (1.25). A continuación se hará una breve descripción de los métodos de identificación No paramétricos y paramétricos, así como una

introducción a los métodos de identificación basados a en subespacios, dejando para el capítulo 2 una descripción detallada de los principales algoritmos de identificación en subespacios.

### **1.6.1 Métodos no paramétricos.**

Los métodos de identificación No Paramétricos se caracterizan por representar al sistema mediante gráficas o tablas y no utilizan un vector de parámetros finitos para obtener el modelo [Ljung 1998], [Södertröm, Stoica 1989]. No consideran las perturbaciones, y son métodos fuera de línea, los principales métodos son: Análisis de respuesta transitoria, análisis de respuesta en frecuencia, análisis de correlación y análisis espectral.

#### **Análisis de respuesta transitoria**

Es una gráfica que describe el comportamiento del sistema frente a una entrada tipo escalón, generalmente utilizado para describir procesos de bajo orden, primer y segundo orden. En la práctica es el primer método de identificación a utilizar, debido a que nos da una primera idea del comportamiento del proceso. El objetivo es, a partir de la gráfica, determinar las constantes dinámicas del proceso: tiempo de retardo, constante del tiempo dominante y su ganancia estática. Estos parámetros son muy útiles en el diseño de controladores, por ejemplo las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols están basadas en la información obtenida a partir de la respuesta escalón. Una descripción detallada de los parámetros obtenidos a partir de la respuesta escalón para sistemas de primer y segundo orden se puede encontrar en [T. Södertröm, P. Stoica. 1989]. En la figura 1.6 se muestra la respuesta de un sistema de primer orden, donde los parámetros obtenidos desde la gráfica sirven para determinar la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT} e^{-s\tau} \quad (1.29)$$

Donde  $T$  es la constante de tiempo del sistema,  $K$  la ganancia y  $\tau$  el retardo.

Esto significa que el sistema es descrito por la ecuación diferencial de primer orden:

$$T \frac{dy}{dt}(t) + y(t) = Ku(t - \tau) \quad (1.30)$$

Para un sistema de segundo orden la respuesta característica a una entrada escalón se muestra en la figura 1.7, siendo su función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} \quad (1.31)$$

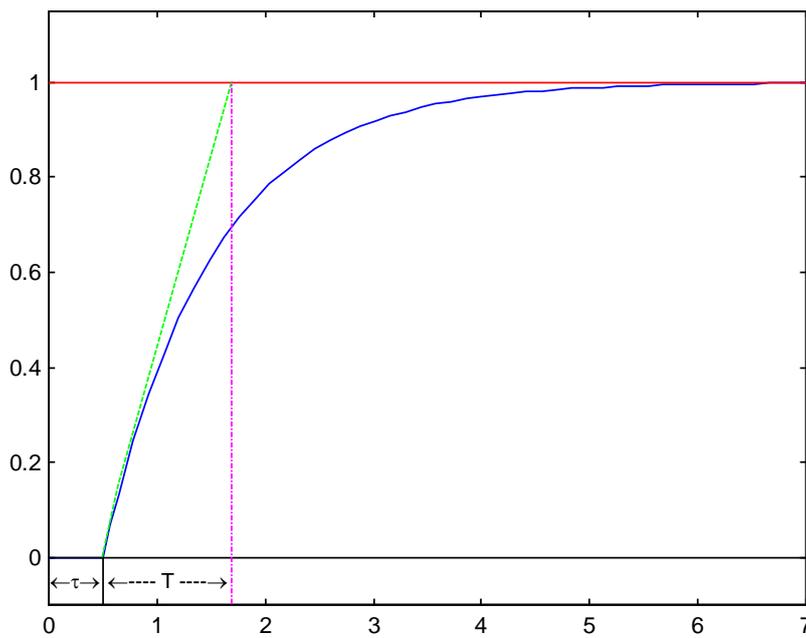


Figura 1.6. Respuesta transitoria de un sistema de primer orden

y en el dominio temporal

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = K\omega_0^2 u \quad (1.32)$$

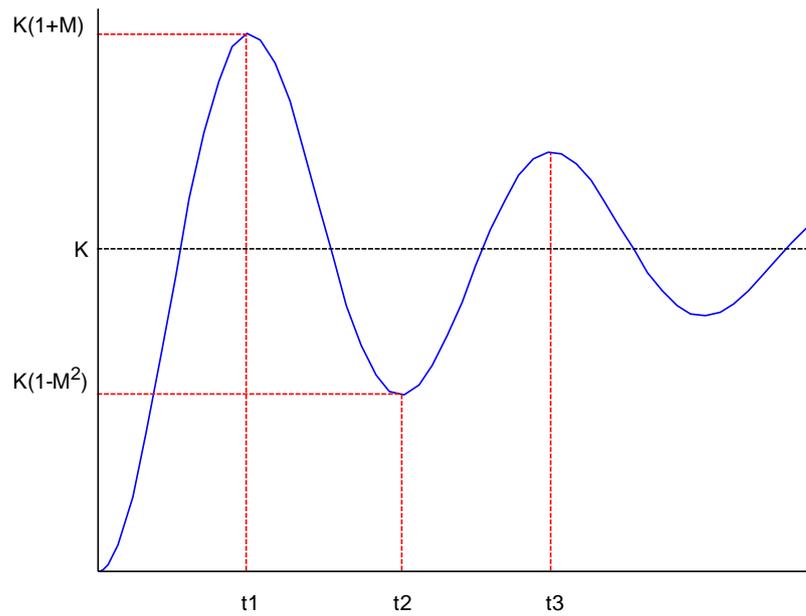


Figura 1.7. Respuesta transitoria de un sistema segundo orden

Físicamente esta ecuación describe un sistema oscilante amortiguado, siendo la respuesta a la entrada escalón:

$$y(t) = K \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{(1-\zeta^2)} t + \varphi) \right] \quad (1.33)$$

donde  $\varphi = \arccos \zeta$ . Para estimar los parámetros del modelo a partir de la gráfica se determina el coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$ :

$$\zeta = \frac{-\log M}{\left[ \pi^2 + (\log M)^2 \right]^{1/2}} \quad (1.34)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{(1-\zeta^2)}} \quad (1.35)$$

Donde M se obtiene de la gráfica 4.0. De manera similar  $\omega_0$  a partir de

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \text{ para } t_k = 1, 2, 3, \dots$$

Para el caso de sistemas discretos la respuesta del proceso a un escalón queda definido por el modelo:

$$y(t) = \sum_{j=1}^n g_j \Delta u(t - j) + v(t) \quad (1.36)$$

donde  $g_i$  son las muestras de la respuesta al salto, la figura 1.8 muestra la relación la respuesta del proceso a la entrada escalón:

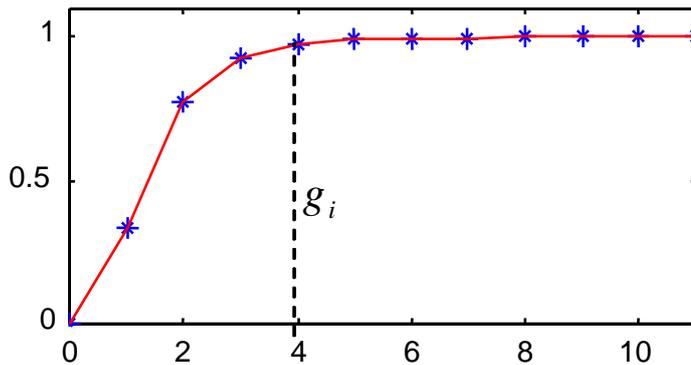


Figura 1.8. Respuesta escalón

### **Análisis de correlación**

En este método se utiliza para modelar el proceso a través de su respuesta impulso (o función ponderada)  $h(k)$  expresada en la ecuación (1.6)

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(t - k) + v(t)$$

donde  $v(t)$  es el término del disturbio. El método nos permite obtener  $h(k)$ , es decir el valor de la respuesta impulso para cada instante de muestreo.

Si se considera que  $u(t)$  tiene media cero con varianza  $\sigma^2$  y es independiente de los disturbios; entonces se cumplen las siguientes relaciones:

$$E\{u(t)u(t-\tau)\} = R_{uu}(\tau) \quad (1.37)$$

$$E\{v(t)u(t-\tau)\} = R_{vu}(\tau) = 0 \quad (1.38)$$

$$E\{y(t)u(t-\tau)\} = R_{yu}(\tau) \quad (1.39)$$

donde la ecuación (1.37) representa la función autocorrelación,  $R_{uu}(\tau)$ , y ecuaciones (1.38) y (1.39) describen las funciones de correlación cruzada,  $R_{vu}(\tau)$  y  $R_{yu}(\tau)$ . La expresión  $E(\cdot)$  es el valor esperado.

Si la expresión en (1.6) es multiplicada por la entrada  $u(t)$  desplazada un instante  $\tau$ ,  $u(t-\tau)$ , luego determinamos el valor esperado  $E(\cdot)$  y teniendo en cuentas las ecuaciones entre (1.37) y (1.38) podemos llegar a la siguiente relación (conocida como la función de Wiener-Hopf):

$$R_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)R_{uu}(\tau-k) \quad (1.40)$$

A partir de la relación anterior podemos determinar la función ponderada, respuesta impulso,  $\{h(k)\}$ . Existen dos métodos para resolver la ecuación (1.40). El primero de ellos considera que la entrada  $u(t)$  es un ruido blanco, por lo tanto se conoce que  $R_u(\tau) = 0$  para  $\tau \neq 0$ , si tenemos en cuenta que:

$$R_{yu}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1-\min(\tau,0)}^{N-\max(\tau,0)} y(t)u(t-\tau) \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.41)$$

$$R_{uu}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} u(t)u(t-\tau) \quad R_{uu}(-\tau) = R_{uu}(\tau) \quad \tau = 0, 1, 2, \dots \quad (1.42)$$

Entonces:

$$h(k) = \frac{R_{yu}(k)}{R_{uu}(0)} \quad (1.43)$$

a partir de las ecuaciones (1.42) y (1.43) fácilmente se puede determinar, con los datos de entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$  del sistema, la respuesta al impulso  $\{h(k)\}$ .

El otro método para obtener  $\{h(k)\}$  considera una función ponderada truncada, lo que nos permitirá obtener un sistema lineal de orden finito. Se asume que:

$$h(k) = 0 \quad \text{para} \quad k \geq M \quad (1.44)$$

En aplicaciones de procesamiento de señales estos modelos son conocidos como FIR (finite pulse response). El número  $M$  debe ser escogido lo suficientemente grande en comparación con la constante de tiempo dominante del sistema de forma que la ecuación (1.44) sea una buena aproximación. Considerando la expresión en (1.44) la ecuación (1.40) se convierte en:

$$R_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)R_{uu}(\tau - k) \quad (1.45)$$

desarrollando la ecuación para  $\tau = 0, 1, 2, \dots, M-1$ , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} R_{yu}(0) \\ R_{yu}(1) \\ \vdots \\ R_{yu}(M-2) \\ R_{yu}(M-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_u(0) & R_u(1) & \cdots & \cdots & \cdots & R_u(M-1) \\ R_u(1) & R_u(0) & & & & R_u(M-2) \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ R_u(M-2) & & & & \ddots & R_u(1) \\ R_u(M-1) & R_u(M-2) & \cdots & \cdots & \cdots & R_u(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(M-2) \\ h(M-1) \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

La ecuación (1.45) también puede aplicarse con más de  $M$  valores diferentes de  $\tau$  que da lugar a un sistema lineal de ecuaciones sobredeterminada, que se puede resolver mediante Mínimos Cuadrados (LS).

### **Análisis de respuesta en frecuencia**

Esta metodología se basa en el uso de señales sinusoidales como entradas al sistema. Sí

$$u(t) = a \sin(\omega t) \quad (1.47)$$

y el sistema es asintóticamente estable, entonces en el estado estacionario la salida será también senoide:

$$y(t) = b \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.48)$$

con

$$b = a|G(j\omega)|$$

$$\varphi = a \tan[G(j\omega)]$$

Para una determinada frecuencia de la señal de entrada se puede obtener por medición las amplitudes  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  así como el desfase  $\boldsymbol{\varphi}$ , la variable compleja  $\mathbf{G(j\omega)}$  se puede determinar a partir de la ecuación (1.48). Si el procedimiento se repite para varias frecuencias, se puede obtener una representación gráfica de  $\mathbf{G(j\omega)}$  en función  $\boldsymbol{\omega}$ , obteniéndose gráficas como el Diagrama de Bode (o el diagrama de Nyquist u otra representación equivalente) que describen el comportamiento en frecuencia del sistema y que son muy utilizados como herramientas de diseño clásico en control.

El método es relativamente sensible a las perturbaciones. Sin embargo puede mejorarse con un procedimiento de correlación. Otro inconveniente es que el método demanda mucho tiempo en la fase experimental, especialmente para sistemas

de baja frecuencia ya que no es fácil lograr las condiciones de estado estacionario [T. Södertröm, P. Stoica 1989].

### **Análisis espectral**

La teoría de análisis espectral para determinar la función de transferencia de un sistema lineal se desarrolla en base a métodos estadísticos. La función de transferencia se estima a partir del espectro de la entrada  $\Phi_u(\omega)$  y de la correlación espectral entre la salida y la entrada:  $\Phi_{yu}(\omega)$ .

$$G(j\omega) = \frac{\Phi_{yu}(\omega)}{\Phi_u(\omega)} \quad (1.49)$$

### **1.6.2 Métodos paramétricos**

Un modelo lineal invariante en el tiempo, ecuación (1.10), puede ser representado por la expresión:

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t) \quad (1.50)$$

donde se considera el ruido blanco  $e(t)$  como una variable aleatoria independiente de media cero, covarianza cero y una varianza constante  $\sigma^2$ .

La ecuación (1.50) en términos paramétricos viene expresada por (1.17), que define un *conjunto de estructuras, modelos de caja negra*, que puede ser representada mediante polinomios en  $q^{-1}$  de la siguiente forma.

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})A(q^{-1})}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})A(q^{-1})}e(t) \quad (1.51)$$

siendo los polinomios en  $q^{-1}$ , de la forma siguiente:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c}$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{n_d} q^{-n_d}$$

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f}$$

Debe enfatizarse que raramente es necesario usar la estructura del modelo en su forma general (1.51). Al contrario, para uso práctico a menudo se simplifica poniendo uno o más polinomios a la unidad, como en los casos de las estructuras tratadas anteriormente: ARX, ARMAX, OE y Box-Jenkins.

La determinación del tipo de estructura que mejor se ajusta al modelo del proceso en estudio, requiere un conocimiento previo de su funcionamiento. En todo caso, debido a que el proceso de identificación es iterativo, se puede redefinir el tipo de estructura con la finalidad de obtener un modelo que se ajuste mejor al proceso real.

El problema de los métodos de identificación paramétricos consiste en encontrar los parámetros de los polinomios, de acuerdo a la estructura escogida para el modelo, a partir de las secuencias de entrada y salida obtenidas experimentalmente.

De acuerdo a la estructura escogida, se determina un vector de parámetros desconocidos  $\theta$ , que deberá ser estimado para que el modelo quede definido. Quedando la descripción del modelo (1.51) de la siguiente forma [Ljung 1998]:

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)e(t) \tag{1.52}$$

Así por ejemplo para una estructura ARX, ecuación (1.16)

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) + \frac{1}{A(q^{-1})}e(t) \tag{1.53}$$

el vector de parámetros  $\theta$  estará conformado por los parámetros de los polinomios  $A(q^{-1})$  y  $B(q^{-1})$ :

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \\ B(q^{-1}) &= b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \end{aligned} \quad (1.54)$$

es decir:

$$\theta = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n_b}] \quad (1.55)$$

correspondiendo a la ecuación (1.52):

$$G(q, \theta) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}, \quad H(q, \theta) = \frac{1}{A(q^{-1})}$$

Para cada una de las estructuras que se pueden obtener de (1.51), se determina un vector de parámetros desconocidos  $\theta$  [Ljung 1998], [Isermann 1981], que deberán ser estimados a partir de métodos matemáticos, siendo los más usados los métodos de mínimos cuadrados (LS), el método de error de predicción (PEM) y el método de variables instrumental (IV). Existen otros métodos los cuales son tratados rigurosamente en [Ljung 1998] y en otra literatura relacionada con identificación de sistemas lineales.

### **Métodos de mínimos cuadrados (LS)**

El método más simple para determinar los parámetros  $\theta$  es el de mínimos cuadrados (LS – Least squares). Se basa en la estructura del modelo ARX que se obtiene a partir de la ecuación diferencia (1.13) y que se puede representar como:

$$y(t) = \varphi(t)^T \theta + e(t) \quad (1.56)$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= [-y(t-1) \dots -y(t-n_a) \quad u(t-1) \dots u(t-n_b)]^T \\ \theta &= [a_1 \dots a_{n_a} \quad b_1 \dots b_{n_b}]^T \end{aligned} \quad (1.57)$$

Se asume que los datos  $u(1), y(1), \dots, u(N), y(N)$  son conocidos a partir de la fase experimental. Los parámetros del vector  $\theta$  son determinados a partir de la minimización de la suma de los cuadrados del error:

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) \quad (1.58)$$

la expresión de  $\varepsilon(t)$  se obtiene como el error entre la salida real del proceso  $y(t)$  y la salida del modelo predictor para una estructura ARX [Ljung 1998]

$$\hat{y}(t/\theta) = \varphi^T(t)\theta$$

es decir,

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t)\theta \quad (1.59)$$

Por lo tanto:

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y^2(t) - \left[ \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N y(t)\varphi^T(t) \right] \theta + \theta^T \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t) \right] \theta \quad (1.60)$$

Minimizando la expresión (1.60) respecto a  $\theta$  se puede estimar el vector de parámetros  $\hat{\theta}$  que hacen que el error se mínimo, obteniendo la llamada ecuación normal:

$$\left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t) \right] \hat{\theta} = \sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t)$$

Asumiendo que la matriz de la izquierda sea no singular (lo cual “normalmente” es así) se tiene:

$$\hat{\theta} = \left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \right] \quad (1.61)$$

El algoritmo de mínimos cuadrados descrito por la ecuación (1.61), nos permite estimar valores de  $\hat{\theta}$  cercanos a los valores reales de los parámetros,  $\theta$ , bajo las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} E\{\varphi(t)\varphi^T(t)\} & \quad \text{sea no singular} \\ E\{\varphi(t)e(t)\} & = 0 \end{aligned}$$

La primera condición se satisface en mucho de los casos, sin embargo hay algunas excepciones [T Söderström, 1989]:

- Si la entrada  $u(t)$  no es lo suficientemente persistente.
- Cuando los datos no están completamente libres de ruido ( $v(t) \equiv 0$ ) y el orden del modelo es elevado (esto implica que  $A(q^{-1})$  y  $B(q^{-1})$  del modelo tengan factores comunes).
- La entrada  $u(t)$  es generada por una retroalimentación lineal de bajo orden de la salida.

La segunda condición es mas restrictiva que la primera y en muchos casos no es satisfecha, ya que se necesita que el ruido sea no correlacionado con los datos pasados de  $\varphi(t)$ , lo cual se cumple si  $v(t)$  es un ruido blanco puro y este tipo de disturbio es difícil de conseguir, o casi nunca se produce en un proceso real.

### **Métodos de error de predicción (PEM)**

El vector de parámetros  $\theta$  de la estructura seleccionada se determina de forma que el error de predicción:

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t/t-1; \theta) \quad (1.62)$$

sea mínimo. En la ecuación  $\hat{y}(t/t-1; \theta)$  representa una predicción de  $y(t)$  conociendo los datos hasta el instante  $t-1$ , inclusive; (es decir,  $y(t-1), u(t-1), y(t-2), u(t-2), \dots$ ) y basado en la estructura del modelo escogido en función del vector de parámetros  $\theta$ .

Si consideramos la estructura general del modelo, ecuación (1.52).

$$y(t) = G(q^{-1}; \theta)u(t) + H(q^{-1}; \theta)e(t)$$

y asumimos que  $G(0; \theta) = 0$ ; es decir que el modelo tiene por lo menos un retardo entre la entrada y salida. El predictor lineal [Ljung 1998] de manera general puede ser descrito como:

$$\hat{y}(t/t-1; \theta) = L_1(q^{-1}; \theta)y(t) + L_2(q^{-1}; \theta)u(t) \quad (1.63)$$

qué sólo es una función de datos del pasado si los filtros del predictor  $L_1(q^{-1}, \theta)$  y  $L_2(q^{-1}; \theta)$  son escogidos de forma:

$$L_1(0; \theta) = 0 \quad L_2(0; \theta) = 0$$

El predictor de (1.63) puede ser construido de diversas formas. Luego que se determina el modelo y el predictor, los errores de predicción son calculados de acuerdo con la ecuación (1.62). Los parámetros estimados  $\hat{\theta}$  son escogidos de manera que los errores de predicción  $\varepsilon(\mathbf{1}, \theta), \dots, \varepsilon(N, \theta)$  sean mínimos.

Para utilizar el método de error de predicción el usuario debe:

- Escoger la estructura del modelo. Esto es definir el orden de los polinomios de  $G(q^{-1}; \theta)$ ,  $H(q^{-1}; \theta)$  como función de  $\theta$ .
- Determinar el predictor. Una vez que el modelo es seleccionado, se deben determinar los filtros  $L_1(q^{-1}; \theta)$  y  $L_2(q^{-1}; \theta)$ .

- Escoger el criterio de minimización. Esto involucra una función escalar - estimada de todos los errores de la predicción

Definir una estructura dependerá de que tanto se conoce del proceso, en todo caso como parte de la identificación se puede cambiar de estructura durante la validación.

El segundo requerimiento se puede obtener a partir de las siguientes consideraciones:  $G(0;\theta) = 0$ ,  $H(0;\theta) = I$  y que  $H^{-1}(q^{-1};\theta)$  y  $H(q^{-1};\theta)G(q^{-1};\theta)$  son asintóticamente estable. Además que  $u(t)$  y el disturbio estadísticamente son independientes. El predictor se encuentra fácilmente a partir de la ecuación (1.52) :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= G(q^{-1};\theta)u(t) + \{H(q^{-1};\theta) - I\}e(t) + e(t) \\
 y(t) &= \left[ H^{-1}(q^{-1};\theta)G(q^{-1};\theta)u(t) + \{H^{-1}(q^{-1};\theta) - I\} \times H^{-1}(q^{-1};\theta) \{y(t) - G(q^{-1};\theta)u(t)\} \right] + e(t) \quad (1.64) \\
 y(t) &= \left[ H^{-1}(q^{-1};\theta)G(q^{-1};\theta)u(t) + \{I - H^{-1}(q^{-1};\theta)\}y(t) \right] + e(t) \\
 y(t) &\cong z(t) + e(t)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, considerando la ecuación (1.62),  $z(t)$  es el predictor y  $e(t)$  el error de predicción. Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 \hat{y}(t | t-1; \theta) &= \left[ H^{-1}(q^{-1};\theta)G(q^{-1};\theta)u(t) + \{I - H^{-1}(q^{-1};\theta)\}y(t) \right] \\
 \varepsilon(t; \theta) &= H^{-1}(q^{-1};\theta) \{y(t) - G(q^{-1};\theta)u(t)\}
 \end{aligned} \quad (1.65)$$

Se debe observar que asumir  $G(0;\theta) = 0$  significa que el predictor  $\hat{y}(t | t-1; \theta)$  depende solamente de entradas previas (es decir  $u(t-1), u(t-2), \dots$ ) y no de  $u(t)$ . De igual forma, dado que  $H(0, \theta) = I$  y  $H^{-1}(0; \theta) = I$ , el predictor no depende de  $y(t)$ , solamente de los valores de las salidas anteriores  $y(t-1), y(t-2), \dots$

Como aplicación de la ecuación (1.65) se encuentra el predictor óptimo y el error de predicción para un modelo ARMAX:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t)$$

donde  $b_0 = 0$ . Usando (1.65) se puede obtener fácilmente

$$\begin{aligned}\hat{y}(t|t-1; \theta) &= \frac{A(q^{-1}) B(q^{-1})}{C(q^{-1}) A(q^{-1})} u(t) + \left(1 - \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}\right) y(t) \\ \hat{y}(t|t-1; \theta) &= \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1}) - A(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t)\end{aligned}\tag{1.66}$$

y

$$\begin{aligned}\varepsilon(t, \theta) &= \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[ y(t) - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) \right] \\ \varepsilon(t, \theta) &= \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) - \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t)\end{aligned}\tag{1.67}$$

El problema de minimización es no lineal. La minimización de la ecuación (1.58),  $V_N(\theta)$ , no se puede encontrar analíticamente. En estos casos la minimización debe hacerse usando rutinas de búsqueda numérica. Un método muy utilizado es el algoritmo de Newton-Raphson.:

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} - \alpha_k \left[ V_N''(\hat{\theta}^{(k)}) \right]^{-1} V_N'(\hat{\theta}^{(k)})^T\tag{1.68}$$

Aquí  $\hat{\theta}^{(k)}$  es el punto de iteración *k-ésimo* en la búsqueda. La secuencia de escalares de  $\alpha_k$  en (1.68) se usa para controlar la longitud del paso. En el sentido estrictamente teórico, el algoritmo de Newton-Raphson corresponde a (1.68) con  $\alpha_k = 1$ .

### **Método de variable instrumental (IVM)**

El método de Variable Instrumental (Instrumental Variable Methods IVM) puede ser visto como una generalización de la estimación de los parámetros  $\theta$  mediante mínimos cuadrados. La idea principal es modificar el método LS de forma que sea consistente para perturbaciones arbitrarias. Un modelo ARX, ecuación (1.52):

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + e(t)$$

se puede representar por el modelo de regresión lineal de la ecuación (1.53):

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta + \varepsilon(t)$$

La ecuación normal de (1.59) se puede modificar de la forma:

$$\left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z(t) \varphi^T(t) \right] \hat{\theta} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z(t) y(t) \right] \quad (1.69)$$

donde  $z(t)$  es un vector de *variables instrumental*.

El vector  $z(t)$  se puede escoger de diferentes formas sujeto a ciertas restricciones que garanticen la consistencia de la ecuación (1.52). Básicamente:

$$\bar{E} \{ z(t) \varphi^T(t) \} \text{ sea no singular} \quad (1.70)$$

$$\bar{E} \{ z(t) v(t) \} = 0 \quad (1.71)$$

Donde:

$$\bar{E} \{ x(t) \} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E x(t) \quad (1.72)$$

Es decir, que las variables instrumentales deben ser correlacionadas con las variables de la regresión lineal pero no correlacionadas con el ruido.

Por ejemplo, para un modelo tipo ARX se puede generar las variables instrumentales en forma similar al modelo seleccionado:

$$z(t) = K(q^{-1}) \left[ -x(t-1) \quad -x(t-2) \dots -x(t-n_a) \quad u(t-1) \dots u(t-n_b) \right]^T \quad (1.73)$$

Donde  $K$  es un filtro lineal y  $x(t)$  es generado a partir de la entrada a través del sistema lineal:

$$N(q^{-1})x(t) = M(q^{-1})u(t) \quad (1.74)$$

Se considera:

$$\begin{aligned} N(q^{-1}) &= a + n_1 q^{-1} + \dots + n_n q^{-n} \\ M(q^{-1}) &= m_o + m_1 q^{-1} + \dots + m_m q^{-m} \end{aligned} \tag{1.75}$$

Muchas de las variables instrumentales utilizadas en la práctica se generan de la manera descrita. Debido a que  $z(t)$  se obtiene a partir de entradas pasadas mediante un filtrado lineal se puede escribir de la forma:

$$z(t) = z(t, u^{t-1}) \tag{1.76}$$

La expresión (1.73) cumple con la condición (1.70) y debido a que la entrada  $u(t)$  a lazo abierto no está correlacionada con el ruido del sistema  $v(t)$ , podemos afirmar, de acuerdo con (1.76), que  $z(t)$  tampoco será correlacionada con el ruido, cumpliéndose la condición (1.71).

Una opción simple y atrayente para las variables instrumentales es aplicar primero el método LS al modelo ARX y luego usar el modelo estimado por mínimos cuadrados para  $M$  y  $N$  en (1.74). Los instrumentos son entonces obtenidos a partir de (1.73) con  $K(q^{-1}) = 1$ .

Los métodos Paramétricos son muy útiles y adecuados para identificar procesos SISO, para sistemas MIMO se tiene una extensión del Método PEM [Ljung 1998], donde el modelo del proceso es representado en espacio de estados, que numéricamente es más robusto que la representación en función de transferencia. Sin embargo debido a que el algoritmo de solución es recursivo presentan complicaciones de no convergencia.

A finales de 1980 comenzaron a desarrollarse nuevas técnicas de identificación denominadas métodos de identificación basados en subespacios que permiten de una manera fiable y numéricamente consistente obtener modelos de sistemas en espacio de estados directamente de los datos medidos, [DeMoor, 1988] [Moonen, 1989] [Verhaegen, 1991]. Estos métodos presentan ventajas significativas frente a los métodos clásicos, por ejemplo, no es necesario definir un modelo a priori del sistema y no son iterativos por lo que no presentan problemas de no-convergencia.

En la siguiente sección se describe la representación en espacio de estados para sistemas LTI, en el siguiente capítulo se tratará con detalle las técnicas de identificación basadas en subespacios.

### 1.6.3. Métodos de subespacios

Los métodos de identificación basados en subespacios permiten identificar sistemas lineales invariantes en el tiempo, representado por la ecuación (1.25)

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) + v(k) \end{aligned} \quad (1.77)$$

siendo el objetivo de la identificación, estimar el orden  $n$  del sistema, las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , que describen el comportamiento dinámico del sistema y la covarianza de los disturbios  $w(k)$  y  $v(k)$ ; a partir de los datos experimentales de entrada y salida del proceso:  $u(k)$  y  $y(k)$ . La ecuación (1.77) describe el comportamiento un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas, MIMO, siendo  $m$  el número de entradas y  $l$  el número de salidas.

Con la finalidad de relacionar los datos experimentales de entrada/salida del sistema, se definen a continuación un conjunto de relaciones básicas que sirven para identificar el sistema.

- A partir del conjunto de  $i$  mediciones obtenidos experimentalmente del proceso podemos expresar las entradas y salidas como:

$$u_i(k) = \begin{pmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ \vdots \\ u(k+i-1) \end{pmatrix} \quad y_i(k) = \begin{pmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+i-1) \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

- La matriz de observabilidad extendida  $\Gamma_i$  se expresa como:

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \quad (1.79)$$

$\Gamma_i$  tendrá un rango igual al orden del sistema  $n$  sólo si  $i > n$  considerando que el sistema  $(A, B, C, D)$  es de realización mínima [Kailath, 1980].

- La matriz de controlabilidad hacia atrás  $\Delta_i^d$ .

$$\Delta_i^d = [A^{i-1}B \quad A^{i-2}B \quad \dots \quad AB \quad B] \quad (1.80)$$

- Y la Matriz Toeplitz  $H_i^d$ : con dimensión:  $(l \times i) \times (m \times i)$

$$H_i^d = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CB & D & \dots & 0 & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \dots & CB & D \end{pmatrix} \quad (1.81)$$

A partir de la ecuación de salida del sistema representado en (1.77)

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

y con las relaciones definidas en (1.78) (1.79) y (1.81) por recursividad podemos definir la  $i$  mediciones de salida del proceso como:

$$y_i(k) = \Gamma_i x(k) + H_i u_i(k) \quad (1.82)$$

La ecuación (1.82) relaciona la secuencia de datos obtenidos experimentalmente de entrada/salida,  $u_i(k)$  y  $y_i(k)$ , con el conjunto de matrices  $\{A, B, C, D\}$ , a través de las matrices  $\Gamma_i$  y  $H_i$ .



De igual forma podemos representar el vector de estados de dimensión  $n \times N$ :

$$\begin{aligned} X_{1,N} &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots \quad x_N] \\ X_{i,N} &= [x_{i+1} \quad x_{i+2} \quad x_{i+3} \quad \cdots \quad x_{i+N}] \end{aligned} \quad (1.85)$$

El vector  $x_j$  representa a los estados en el instante  $k = j$ , es decir  $x(j)$ .

Si consideramos las ecuaciones (1.77) y (1.82) la parte determinista del sistema puede ser descrita en función de las matrices:  $U_P$ ,  $U_F$ ,  $Y_P$  y  $Y_F$ .

$$Y_P = \Gamma_i X_{1,N} + H_i U_P \quad (1.86)$$

$$Y_F = \Gamma_i X_{i,N} + H_i U_F \quad (1.87)$$

$$X_{i,N} = A^i X_{1,N} + \Delta_i U_P \quad (1.88)$$

Usando las ecuaciones de (1.86) a (1.88) podemos expresar las secuencias de estados  $X_{i,N}$  en término de los datos pasados de entrada/salida.

$$\begin{aligned} X_{i,N} &= A^i \left[ \Gamma_i^\dagger (Y_P - H_i U_P) \right] + \Delta_i U_P \\ X_{i,N} &= \left[ \Delta_i - A \Gamma_i^\dagger H_i \right] U_P + A \Gamma_i^\dagger Y_P \\ X_{i,N} &= \left[ \Delta_i - A \Gamma_i^\dagger H_i \mid A \Gamma_i \right] \begin{bmatrix} U_P \\ Y_P \end{bmatrix} = L_P W_P \end{aligned} \quad (1.89)$$

Siendo  $(\cdot)^\dagger$  el símbolo que representa la Pseudo Inversa de Moore-Penrose. Sustituyendo el valor de  $X_{i,N}$  (1.89) en la ecuación (1.87) se obtienen las salidas futuras en función de las entradas/salidas pasadas y las entradas futuras:

$$Y_F = \Gamma_i L_P W_P + H_i U_F \quad (1.90)$$

Las ecuaciones (1.86), (1.87), (1.89) y (1.90) son la base para desarrollar los algoritmos de identificación basada en subespacios, algoritmos que estudiaremos en el capítulo 2.

El disturbio del proceso  $w(k)$  y el ruido de medición  $v(k)$  de la ecuación (1.77) se consideran no correlacionados con la entrada  $u(k)$ :

$$E \left[ \begin{pmatrix} x(k) \\ u(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(k)^T & v(k)^T \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (1.91)$$

Además, se asumen como secuencias de ruido blanco estacionarios con media cero y que satisfacen:

$$E \left[ \begin{pmatrix} w(k) \\ v(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(j)^T & v(j)^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} Q^s & S^s \\ (S^s)^T & R^s \end{pmatrix} \delta_{kj} \geq 0 \quad (1.92)$$

Donde  $E$  representa el valor esperado y  $\delta$  el parámetro delta de Kronecker [Kailath, 1980]. Las matrices de covarianza  $Q$ ,  $R$  y  $S$  son reales y constantes cuyas dimensiones son:  $Q: n \times n$ ,  $S: n \times l$  y  $R: l \times l$ .

Con las consideraciones hechas en (1.91) y (1.92) es necesario que la representación en espacio de estado descrito en (1.77) cumpla:  $\left( A, \begin{pmatrix} B & Q^{s1/2} \end{pmatrix} \right)$  sea controlable y que  $(A, C)$  sea observable. [Kailath, 1980].

Para la parte estocástica, el método de identificación basada en subespacios deberá determinar los valores de las matrices de covarianza  $Q$ ,  $R$  y  $S$ .

La representación de sistemas MIMO mediante modelos en espacio de estados, desde el punto vista numérico tienen la ventaja de ser más robustos que las funciones de transferencia. Modelar un proceso multivariable mediante función de transferencia, presupone tener como denominador un polinomio, que se obtiene a partir de las relaciones individuales de entrada/salida del proceso, puede ocurrir que la variación en décimas de un coeficiente de uno de los polinomios individuales, cambie totalmente la disposición de los polos del sistema. Como consecuencia el modelo que resulta ya no representa al proceso en estudio. Por el contrario, en los modelos en espacio de estados la dinámica del sistema es representada por una única matriz, donde la variación de uno de sus términos no afecta apreciablemente los polos del sistema.

Los métodos de identificación basados en subespacios son los más adecuados para obtener el modelo en espacio de estados de un sistema MIMO. Los métodos clásicos de mínimos cuadrados (LS), error de predicción (PEM) o variable instrumental (IVM), tienen la necesidad de definir a priori para el modelo una estructura de tipo caja negra, esto implica definir el orden de los polinomios de la estructura seleccionada. Los parámetros de los polinomios son determinados por métodos matemáticos de optimización, con los riesgos de no convergencia que presentan los métodos. Esto se complica si el sistema es multivariable.

La ventaja de poder obtener, mediante identificación por subespacios, un modelo en espacio de estados para un sistema multivariable, es muy importante frente a los que identifican un sistema multivariable como un sistema MISO, obtienen un modelo de manera independiente para cada salida, es decir una salida con todas las entradas por vez. Sin embargo, los métodos de subespacios permiten identificar todo el conjunto de entradas y salidas a la vez, lo que permite representar mejor la interdependencia entre las variables de un sistema MIMO.

En la aplicación de los métodos de identificación clásicos, el usuario primero debe de seleccionar un tipo de estructura del modelo a estimar a partir, de la ecuación (1.51), luego de lo cual debe parametrizar el modelo, es decir determinar el grado de los polinomios de la estructura seleccionada, con esto estará definiendo el orden del modelo; los parámetros de los polinomios son luego determinados por mínimos cuadrados (LS), error de predicción (PEM), entre otros. El tener que determinar a priori el orden del proceso hace muchas veces que se complique el proceso de identificación con los métodos clásicos. Sin embargo, en un modelo en espacio de estados la estructura es única, la cual queda definida por los valores de las matrices A, B, C y D, ecuación 1.77. Los métodos de identificación con subespacios determinan el modelo en espacio de estados directamente de los datos de entrada y salida del proceso. El orden del modelo es sugerido por el algoritmo de identificación facilitando la estimación del modelo.

Los modelos en espacio de estados, tienen la desventaja de no poder representar adecuadamente los retardos que pueden existir en un sistema MIMO. Dependiendo de la naturaleza de los retardos, existen modelos en espacio de estados para su

representación, Así por ejemplo, si los tiempos de retardos están directamente relacionados con las entradas la ecuación de estados sería:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t - \tau) \quad (1.93)$$

Para sistemas con retardos propios a los elementos que lo conforman, la ecuación de estados es:

$$\dot{x} = Ax(t) + A_1x(t - \tau) + Bu(t) \quad (1.94)$$

Si los retardos se presentan a la salida del sistema, generalmente debido a la disposición de sensores para la medición, la ecuación de salida del sistema en espacio de estados es:

$$y(t - \tau) = Cx(t) \quad (1.95)$$

Las representaciones de los retardos descritas en las tres ecuaciones anteriores, van muy bien para sistemas SISO o para aquellos procesos MIMO donde los retardos presentes sean muy similares en valor. Sin embargo en la industria suele suceder que los retardos son muy distintos dependiendo de los componentes del sistema, sobre todo de aquellos donde coexisten dinámicas lentas y rápidas. Los métodos de identificación paramétrica, que estiman el modelo a partir de un modelo de estructura de caja negra, ecuación (1.51), tienen la ventaja de modelar más fácilmente los retardos en un proceso multivariable, ya que lo consiguen a través de seleccionar adecuadamente los grados de los polinomios de la estructura seleccionada.

En el presente proyecto se presenta una alternativa para estimar por identificación en subespacios, el modelo en espacio de estados de un proceso con retardos operando a lazo cerrado.

El objetivo de la identificación basada en subespacios es estimar modelos en espacio de estados de sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo, ecuación (1.77), a partir de un conjunto de datos de entrada/salida obtenidos experimentalmente. Los métodos de identificación por subespacios (Subspace Model Identificaion SMI) obtienen los

modelos a partir de subespacios generados por los datos y utilizan operaciones geométricas como proyecciones ortogonales y oblicuas. Estos métodos no necesitan ninguna parametrización canónica ni tampoco métodos de optimización no lineal recursivas para determinar los parámetros del modelo, por el contrario utilizan herramientas numéricas fiables del álgebra lineal como la descomposición QR y la descomposición en valores singulares (SVD) que permiten obtener algoritmos numéricamente robustos. En la actualidad existen varias versiones de algoritmos, se caracterizan por estar orientados a identificar la parte determinística del modelo, otros a encontrar la componente estocástica y métodos combinados que identifican en forma conjunta las partes determinística y estocástica. Es decir las matrices A, B, C y D de la ecuación (1.77) y las matrices covarianza Q, R y S de la ecuación (1.92).

Las características más importantes de identificar en espacio de estados son:

- Se pueden identificar “fácilmente” sistemas Múltiple Entrada - Múltiple Salida (MIMO) de orden elevado.
- No es necesario una parametrización inicial del modelo. Los algoritmos proveen las matrices A, B, C, D del modelo estándar, ecuación (1.77).
- Los algoritmos de identificación estiman “directamente” el orden del sistema.
- Los métodos no son iterativos y no tienen el problema de no-convergencia que pueden presentar las técnicas basadas en optimización.

Los métodos de identificación usando subespacios tienen su origen en la *teoría de realización de espacio de estados*, desarrollado en los años 60. La idea es obtener el modelo en espacio de estados del proceso a partir de mediciones de su respuesta impulso, técnicamente referidos como los parámetros de Markov [Kailath 1980]. En los últimos años se ha profundizado en el desarrollo de algoritmos de identificación para obtener modelos en espacio de estados a partir de la respuesta impulso, esto se logra trabajando con una matriz Hankel construida a partir de los parámetros de Markov y haciendo uso de herramientas de factorización, como descomposición en valores singulares (SVD) para estimar el orden del sistema, y análisis de correlación

para reducir la sensibilidad de errores en la respuesta impulso [M. Viberg 1995]. Dentro de los algoritmos desarrollados basándose en los parámetros de Markov tenemos: El algoritmo de Kung [M. Viberg 1995], el algoritmo desarrollado por Zeiger-McEwen [T. McKelvey, 1995], el algoritmo q-Markov COVERS [A. M. King, 1988], Identificación vía la estimación de los Parámetros de Markov [N. L. Chik, 1998], entre otros. Estos métodos son conocidos como *Algoritmos de Realización* y tienen la “desventaja” de estimar en primer lugar los parámetros de Markov a partir de los datos de entrada/salida medidos. Una alternativa a la “desventaja” que presentan estos algoritmos, es la metodología *SMI Directa* que permite obtener el modelo en espacio de estados del proceso sin conocer su respuesta impulso.

Dentro de los métodos *SMI directos* que se tienen en la literatura [W. E. Larimore, 1983, 1990], [M. Viberg, 1995,1997], [T. McKelvey, 1995], [M. Jansson y B. Wahlberg, 1996], [T. Katayama y G. Picci, 1998], [A. Chiuso y G. Picci, 1999], [J. Wang y S. J. Qin, 2002], [A. Chiuso y G. Picci, 2003], [S. J. Qin, W. Lin y L. Ljung, 2004] entre otros; destacan dos que se caracterizan por ser los pioneros en este tipo de metodologías para la identificación: Multivariable Output Error State Space Model Identification (MOESP) desarrollado por Michel Verhaegen and Patrick Dewilde [M. Vergahen y P.Dewilde, 1992, 1993], y Numerical algorithm for Subspace State Space System Identification (N4SID) desarrollado por Van Overschee and Bart De Moor [V. Overschee y B. De Moor, 1993, 1994].

Otra manera de nombrar a los métodos SMI es Subspace-based State-Space System Identification (4SID – Identificación de sistemas en espacio de estados basados en subespacios), de allí el nombre del algoritmo desarrollado por Van Overschee y Bart De Moor, N4SID.

Aunque los algoritmos MOESP y N4SID son derivados usando diferentes argumentos, que se explicarán más adelante, está comprobado que guardan relación entre sí [T. Gustafsson, 2002], difieren básicamente en escoger funciones de peso para calcular la matriz de observabilidad extendida  $\Gamma_i$ , ecuación (1.79). [V. Overschee y B. De Moor, 1995].

Los algoritmos para la identificación en subespacios directos están basados en propiedades geométricas de proyección de espacio fila de las matrices Hankel, construidas a partir de los datos de entrada y salida, ecuaciones (1.83) y (1.84), para determinan directamente el modelo en espacio de estados de procesos MIMO. Los métodos son numéricamente fiables tienen como punto de partida la aplicación de herramientas del álgebra lineal en el tratamiento geométrico de matrices, principalmente el uso de proyecciones ortogonales para la solución de ecuaciones lineales [Strang, 1988]. Utilizan herramientas de factorización de matrices QR y SVD (descomposición de valores singulares), lo que permite implementarlos de manera efectiva.

El objetivo de obtener las matrices de estado del proceso es planteado en dos etapas, la primera consiste en determinar la matriz de observabilidad extendida  $\Gamma_i$ , ecuación (1.79), previa determinación del orden del sistema  $n$ . Para el segundo paso los algoritmos aplican diferentes estrategias, la figura 1.9 muestran los caminos que siguen el MOESP y el N4SID para encontrar el modelo del proceso en espacio de estados, ecuación (1.77).

Una vez calculada la matriz de observabilidad el MOESP determina las matrices  $A$  y  $C$  a partir de la propiedad de desplazamiento invariable que presentan la matriz  $\Gamma_i$ . Después de calcular las matrices  $A$  y  $C$  se obtienen las matrices restantes  $B$  y  $D$ , del modelo (1.77) y las matrices de covarianza  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  de la parte estocástica del modelo, ver la trayectoria izquierda la figura 1.9

En el lado derecho de la figura 1.9 se puede observar los cálculos realizados por el N4SID, luego de determinar la matriz de observabilidad extendida  $\Gamma_i$  se obtienen los estados del sistema y en combinación con las entradas y salidas se calculan todas las matrices del sistema.

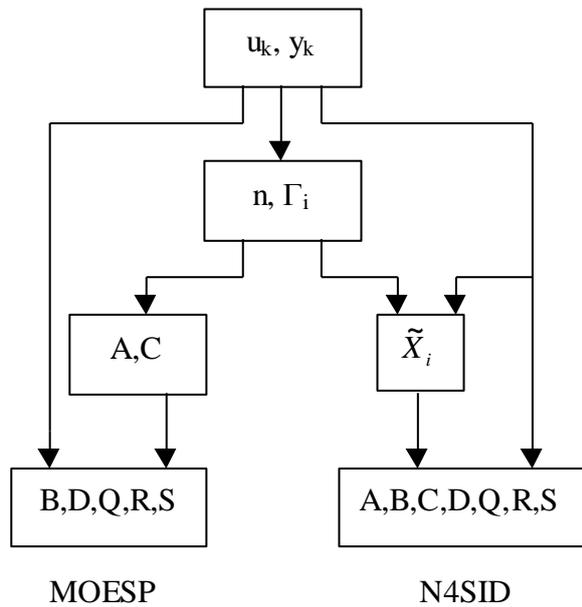


Figura 1.9. Algoritmos de identificación basados en subespacios

En el capítulo 2 se hace un estudio detallado de los métodos de identificación basados en subespacios. Se describen los principios matemáticos de los métodos, así como los procedimientos seguidos para obtener el modelo en espacio de estados.

### 1.7 Etapas para la identificación de sistemas lineales invariantes en el tiempo

Desde un punto de vista práctico el problema de *Identificación de Sistemas* puede ser descrito como una metodología basada en experimentos que nos permite, a partir del conocimiento previo de la dinámica y de mediciones realizadas a las variables de entrada/salida del proceso, encontrar un modelo que describa adecuadamente su comportamiento dinámico. En la ingeniería de control los modelos son utilizados en la predicción y simulación de procesos, análisis y diseño de controladores.

El procedimiento para la identificación de sistemas se puede dividir en cuatro etapas:

1. Diseño de experimento.
2. Adquisición de datos.
3. Estimación del modelo.
4. Validación del modelo.

La primera etapa del procedimiento consiste en diseñar el experimento, se debe elegir el tipo señal que servirá para estimular el proceso, para esto es necesario: a) tener un conocimiento previo de la dinámica del sistema, b) saber que tipo de información se desea recabar del proceso, que dependerá de la aplicación del modelo, y c) si el proceso se encuentra dentro de un estado de funcionamiento normal, por lo que se deberá evitar que la salida sea fuertemente perturbada. Necesariamente la señal de excitación debe ser suficientemente persistente [Ljung,1998].

El experimento consiste en inyectar al proceso la señal de entrada decidida,  $u(t)$ , y observar el comportamiento de las variables de salida del sistema,  $y(t)$ , ver figura 1.10.

La adquisición de los datos generalmente es por equipos electrónicos, sistema de medición con microprocesadores, que periódicamente “muestran” las variables de entrada/salida y las almacenan en memoria para su posterior procesamiento. El tiempo de muestreo es un parámetro importante y depende de la dinámica del proceso. Será necesario evaluar los datos, con la finalidad de examinar su contenido en frecuencia (espectro), remover los valores medios, seleccionar una porción de datos originales válidos para filtrarlos de posibles disturbios debido a los instrumentos de medida.

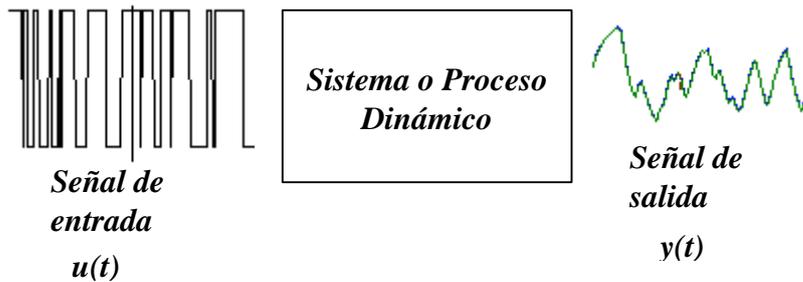


Figura 1.10. Experimento para la identificación de sistemas

La estimación del modelo, tercera etapa, consiste en encontrar un modelo del proceso a partir de las mediciones de las variables de entrada/salida, obtenidas durante la etapa de adquisición de datos. En la industria la mayoría de los procesos pueden ser modelados, con buena precisión, como sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) con un orden adecuado.

Los métodos utilizados para estimar el modelo dinámico del proceso en estudio pueden ser: *No paramétricos*, *paramétricos* y *basados en subespacios*. siendo el segundo el más utilizado para la identificación de sistemas SISO. Para la estimación de los parámetros del modelo utilizan los métodos de mínimos cuadrados (LS), de error de predicción (PEM) [Ljung, 1998] y variable instrumental (IVM) [Söderström y Stoica, 1989], basados en estructuras obtenidas a partir de *modelos de caja negra*, ecuación (1.17) y figura 1.4, que mediante ecuaciones diferencia relacionan las entradas y las salidas para describir el proceso. Definido el modelo se genera un vector de parámetros desconocidos de dimensión finita, los cuales deben ser estimados mediante algoritmos basados en criterios de optimización las metodologías más usadas son PEM o IVM. Estos métodos permiten obtener buenas soluciones para muchos problemas reales, sin embargo presentan limitaciones para el caso de representar sistemas MIMO.

Para la obtener el modelo en espacio de estados de un sistema MIMO se utilizan los métodos de identificación basados en subespacios, en el capítulo 2 se hace una descripción detallados de los principales algoritmos de identificación en subespacios.

Finalmente, en la etapa de validación del modelo, se decide si el modelo, obtenido en la etapa de estimación, es aceptable o no. Un método común para validar un modelo es dividir los datos de entrada/salida en dos partes. La primera parte de los datos se utilizan para estimar el modelo, mientras que la segunda parte se utiliza para validar el modelo. El modelo es aceptado o rechazado dependiendo de que tan bien es capaz de predecir la segunda parte de los datos de salida a partir de los datos de entrada. Otros métodos de validación del modelo incluyen análisis estadísticos, como la correlación entre las entradas y el error de predicción.

Las cuatro etapas que conforman el procedimiento de identificación, no son del todo independientes una de otra y de ser necesario el procedimiento puede ser iterativo, es decir, si el modelo no es aceptado en la etapa de validación, se puede decidir rediseñar el experimento y ejecutarlo nuevamente bajo condiciones diferentes. El procedimiento de identificación puede ser repetido varias veces has obtener un modelo aceptable para los fines deseados. En la figura 1.11, se ilustran las etapas.

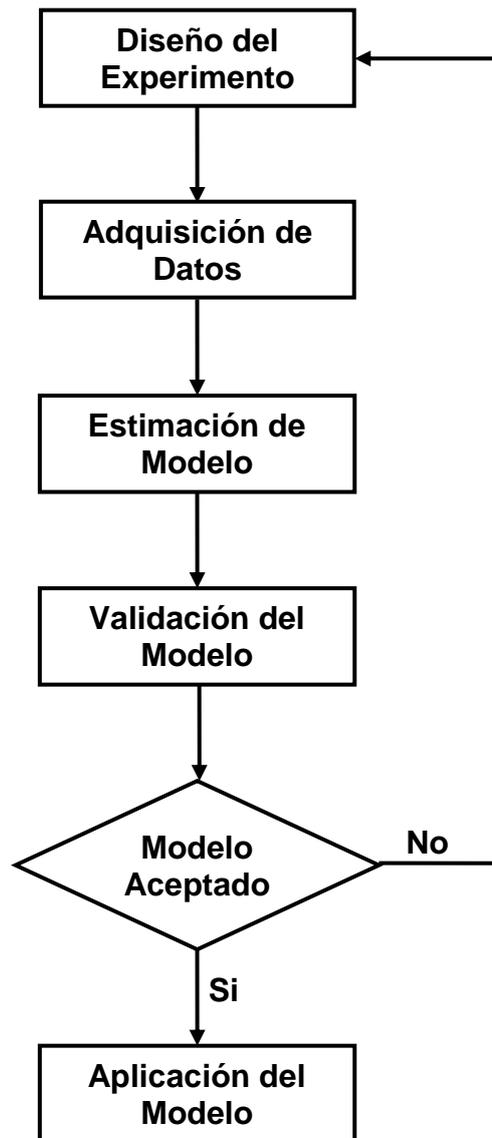


Figura 1.11. Etapas de Identificación de sistemas

## *Capítulo 2*

### *Identificación basada en subespacios*

En el presente capítulo se verá a manera de revisión las herramientas matemáticas principales utilizadas por los algoritmos y los principales métodos de identificación basados en subespacios:

- a) Los *algoritmos de realización*, que obtienen el modelo en espacio de estados a partir de respuesta impulso del sistema.
- b) Los métodos directos *MOESP* y *N4SID*, que obtienen el modelo sin estimar la respuesta impulsiva del sistema.
- c) Finalmente se presenta un método alternativo el *Moesp\_SID* que combina las prestaciones del *MOESP* y el *N4SID*. El método propuesto tiene la propiedad de obtener las matrices B y D del modelo de manera sencilla, utilizando como herramienta matemática mínimos cuadrados.

## 2.1 Herramientas geométricas.

El propósito de esta sección es introducir los conceptos de un operador de proyección ortogonal y un operador de proyección oblicua para un subespacio lineal. Usaremos las matrices  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{p \times j}$ ,  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{q \times j}$  y  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{r \times j}$  como variables prototipo, esto quiere decir que son solamente de uso local para esta sección. Los términos de una fila, en una de las matrices dadas, se pueden considerar como las coordenadas de un vector en el espacio *j-dimensional*, siendo *j* el número de columnas de la matriz.

### 2.1.1 Proyección ortogonal.

En la figura 2.1 se muestra la proyección ortogonal de las filas de la matriz  $\mathbf{P}$  sobre las filas de la matriz  $\mathbf{Q}$  para el caso en el espacio dimensional es 2.

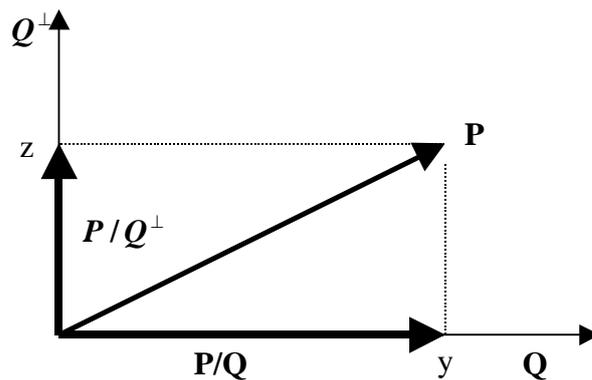


Figura 2.1

*Interpretación de la proyección ortogonal en un espacio j-dimensional (en este caso  $j=2$ ).  $\mathbf{P}/\mathbf{Q}$  está formado por la proyección del espacio de filas de  $\mathbf{P}$  de manera perpendicular en el espacio de las filas de  $\mathbf{Q}$ . Por otro lado  $\mathbf{P}/\mathbf{Q}^\perp$  está formado por la proyección de las líneas de  $\mathbf{P}$  en el complemento perpendicular filas espacio de  $\mathbf{Q}$ .*

Para la figura 2.1 el vector  $y$  es la proyección ortogonal del vector en  $P$  en  $Q$ ,  $(P/Q)$  y el vector  $z$  es la proyección de  $P$  la perpendicular de  $Q$ ,  $(P/Q^\perp)$ , de forma que :

$$P = y + z$$

Nuestro objetivo es encontrar expresiones para  $y$  y para  $z$  en función de  $P$  y  $Q$ . De la figura 2.1 tenemos:

$$y = kQ, \quad z = P - y$$

Debido a que  $z$  es perpendicular a  $Q$  tenemos que  $zQ^T = 0$ . Por lo tanto:

$$zQ^T = PQ^T - kQQ^T = 0, \quad PQ^T = kQQ^T$$

resolviendo para  $k$  tenemos:

$$k = PQ^T (QQ^T)^{-1}$$

Por consiguiente la proyección ortogonal  $P/Q$  sería:

$$P/Q = kQ = PQ^T (QQ^T)^{-1} Q$$

Llamemos  $\Pi_Q$  al operador que indica la proyección ortogonal del espacio fila de una matriz dentro del espacio fila de la matriz  $Q \in \mathbf{R}^{q \times j}$ :

$$\Pi_Q = Q^T (QQ^T)^{-1} Q$$

Para que exista la inversa en la expresión anterior la matriz  $Q$  debe tener el número de columnas mayor o igual que el número de filas,  $j \geq q$ . Por otro lado, si se cumple la condición anterior, la expresión:  $Q^T (QQ^T)^{-1}$  es la Pseudo Inversa de Moore-Penrose  $(\bullet)^\dagger$  de la matriz  $Q$ , por lo que podemos resumir:

$$\Pi_Q = Q^T (QQ^T)^{-1} Q = Q^\dagger Q$$

Entonces la proyección ortogonal de las filas de la matriz  $P$  sobre las filas de la matriz  $Q$ , se puede expresar como:

$$P/Q = P\Pi_Q = (P \times Q^\dagger) \times Q \quad (2.1)$$

Por lo tanto

$$y = P/Q = (P \times Q^\dagger) \times Q$$

Para calcular la proyección de  $P$  sobre la componente perpendicular de  $Q$ ,  $Q^\perp$ , encontraremos el valor de la componente  $z$

$$z = P - y$$

Entonces:

$$\begin{aligned} z &= P - PQ^T(QQ^T)^{-1}Q \\ z &= P(I - Q^T(QQ^T)^{-1}Q) \end{aligned}$$

Si llamamos  $\Pi_{Q^\perp}$  al operador que multiplica a  $P$  para obtener  $z$ , es decir la proyección de  $P$  sobre la perpendicular de  $Q$ ,  $(P/Q^\perp)$ , tendríamos:

$$z = P/Q^\perp = P\Pi_{Q^\perp}$$

Siendo el operador  $\Pi_{Q^\perp}$ :

$$\Pi_{Q^\perp} = I - \Pi_Q$$

Y nos indica la proyección del espacio fila de una matriz en la perpendicular del espacio fila de la matriz  $Q$ .

$$P/Q^\perp = P\Pi_{Q^\perp} = P - PQ^T(QQ^T)^{-1}Q \quad (2.2)$$

A partir de (2.1) y (2.2) podemos expresar:

$$P = P(\Pi_Q + \Pi_{Q^\perp})$$

### 2.1.2 Proyección oblicua

En lugar de descomponer las filas de  $P$  como una combinación lineal de las filas de dos matrices ortogonales ( $\Pi_{Q^\perp}$  y  $\Pi_Q$ ), se pueden descomponer como una combinación lineal de las filas de dos matrices no ortogonales  $Q$  y  $R$  y el complemento de la proyección ortogonal de  $P$  sobre  $Q$  y  $R$ . En la figura 2.2 el espacio filas de  $P$  se puede expresar como:

$$P = P/\begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix} + P/\begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix}^\perp$$

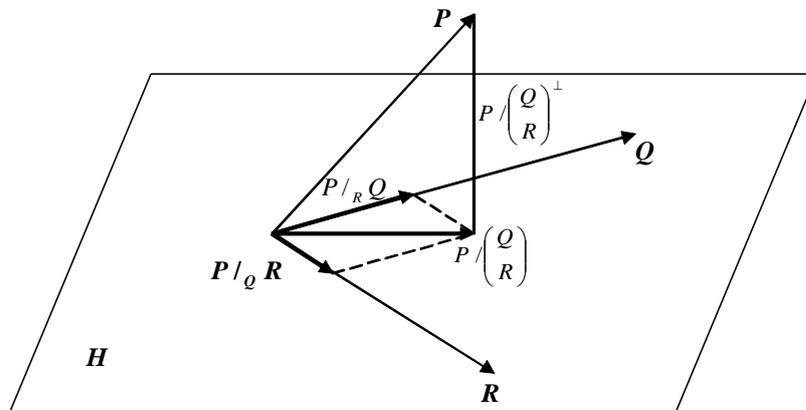


Figura. 2.2 Interpretación de la proyección oblicua en un espacio j-dimensional (en este caso j=3).

Donde la proyección ortogonal de las filas de  $P$  sobre el conjunto de filas  $Q$  y  $R$  :

$$P/\begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix},$$

matemáticamente puede ser indicada como:

$$P/\begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix} = P(Q^T \quad R^T) \begin{pmatrix} QQ^T & QR^T \\ RQ^T & RR^R \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix}$$

La proyección ortogonal de las filas  $P$  sobre el conjunto de filas formado por  $Q$  y  $R$ , no ortogonales, puede descomponerse en dos términos proyectados sobre las filas de  $Q$  y  $R$ :

$$P/\begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix} = P/_Q R + P/_R Q$$

Siendo el término  $P/_Q R$  la proyección de las filas de  $P$  sobre el espacio filas de  $R$ , siguiendo la dirección del espacio filas de  $Q$  y el término  $P/_R Q$  es la proyección de las filas de  $P$  sobre el espacio filas de  $Q$ , siguiendo la dirección del espacio filas de  $R$ , figura 2.2.

La proyección oblicua se puede interpretar también como la proyección ortogonal de las filas de la matriz  $P$  sobre el conjunto de filas de las matrices  $Q$  y  $R$  y la descomposición del resultado como la combinación lineal de las filas de  $Q$  y  $R$ , por lo tanto se puede expresar:

$$P = P/_Q R + P/_R Q + P/\begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix}^\perp$$

La proyección oblicua del espacio fila de  $P$  en la dirección del espacio fila de  $Q$  sobre el espacio fila de  $R$ ,  $P/_Q R$ , se puede expresar como:

$$P/_Q R = [P/Q^\perp] [R/Q^\perp]^\dagger R$$

Reemplazando:  $P/Q^\perp = P\Pi_{Q^\perp}$  y  $R/Q^\perp = R\Pi_{Q^\perp}$ , ecuación (2.2), se tiene:

$$P/_Q R = [P\Pi_{Q^\perp}] [R\Pi_{Q^\perp}]^\dagger R \quad (2.3)$$

## 2.2. Métodos basados en subespacios

En los últimos años, se han probado varios algoritmos 4SID tanto en aplicaciones prácticas como en simulaciones por ordenador. Los resultados se han comparado con los obtenidos a partir de las herramientas clásicas de identificación como son los métodos de error en la predicción (PEM) y variable instrumental (IVM). En general, los métodos 4SID parecen realizar muy bien, incluso cerca del óptimo, la identificación de procesos ya sea de tipo SISO como de tipo MIMO. En la presente sección estudiaremos los principales algoritmos 4SID los que se pueden dividir en dos grupos los: de *Realización*, que obtienen el modelo a partir de los parámetros de Markov del sistema, y los *Directos*, que estiman el modelo directamente de los datos de entrada/salida del sistema.

### 2.2.1 Algoritmo de realización

Estos algoritmos consideran aplicar al proceso una entrada de tipo impulso:

$$u(t) = \delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Si esta entrada la aplicamos a un proceso descrito por la ecuación en espacio de estados (1.77), considerando que no existen disturbios, que el proceso es controlable, observable y que se encuentra en condiciones iniciales cero,  $x_0 = 0$  (vector nulo), la salida del proceso  $y_k$  representará la respuesta impulso del proceso, a la que llamaremos  $h_k$ . Bajo las condiciones expresadas tendremos que la respuesta impulso calculada a partir del modelo determinístico en espacio de estados de la ecuación (1.77) sería:

$$y_k = h_k = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ D & k = 0 \\ CA^{k-1}B & k > 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Por consiguiente, la matriz  $D$  del sistema se obtiene directamente de  $h_0$ .

A partir de la respuesta impulso:  $\{h_k\}_{k=1}^{N_T}$ , que viene representada por la serie  $CA^{k-1}B$  ( $k = 1, 2, \dots, N_T$ ), podemos construir una matriz Hankel del tipo:

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \dots & \dots & h_N \\ h_2 & h_3 & h_4 & \dots & \dots & h_{N+1} \\ h_3 & h_4 & h_5 & \dots & \dots & h_{N+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ h_i & h_{i+1} & h_{i+2} & \dots & \dots & h_{N+i-1} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

Los términos de la serie  $CA^{k-1}B$  ( $k = 1, 2, \dots, N_T$ ) constituyen los *parámetros de Markov* [Kailath, 1980].

La matriz  $H$  es de dimensión:  $(l \times i) \times (m \times N)$ ,  $N \geq i$ , siendo el número total de datos:  $N_T = N + i - 1$ , y puede ser obtenida también a partir de la matriz de observabilidad extendida de la ecuación (1.79);

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

con dimensión:  $(\mathbf{l} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{n}$  y la matriz de controlabilidad del sistema:

$$\Omega_i = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{N-1}B], \quad (2.8)$$

de dimensión:  $\mathbf{n} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{N})$ . Es decir:

$$H = \Gamma_i \Omega_i \quad (2.9)$$

Si el orden del sistema es representado por  $\mathbf{n}$  y asumimos que  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{N}$  son mayores que  $\mathbf{n}$ , y consideramos que el proceso en estudio es controlable y observable, entonces el rango de las matrices de observabilidad y controlabilidad será  $\mathbf{n}$  para una realización mínima

del modelo en espacio de estados [Kailath, 1980], por consiguiente el rango de  $\mathbf{H}$  es también  $\mathbf{n}$ , igual al orden del sistema.

Por otro lado, si se factoriza la matriz (2.6) en dos matrices de rango  $\mathbf{n}$ , de la forma  $H = \hat{\Gamma}_i \hat{\Omega}_i$ , entonces  $\hat{\Gamma}_i$  es una matriz observable y  $\hat{\Omega}_i$  es una matriz controlable para “algún” modelo en espacio de estados. Esto debido a que si  $H = \Gamma_i \Omega_i$  representa a un modelo determinado, se demuestra que existe una matriz  $\mathbf{T}$  no singular  $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$  tal que:  $\hat{\Gamma}_i = \Gamma_i \mathbf{T}^{-1}$  y  $\hat{\Omega}_i = \mathbf{T} \Omega_i$  representan un modelo equivalente [McKelvey, 1995]. Por consiguiente:

$$\hat{\Gamma}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_T \\ \mathbf{C}_T \mathbf{A}_T \\ \mathbf{C}_T \mathbf{A}_T^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_T \mathbf{A}_T^{i-1} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$\hat{\Omega}_i = [\mathbf{B}_T \quad \mathbf{A}_T \mathbf{B}_T \quad \cdots \quad \mathbf{A}_T^{N-1} \mathbf{B}_T] \quad (2.11)$$

Donde las matrices  $\mathbf{A}_T$ ,  $\mathbf{B}_T$ ,  $\mathbf{C}_T$  y  $\mathbf{D}_T$  describen una realización de estados equivalente al sistema original descrito por las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$ .

La conclusión de lo anterior es que las matrices  $\hat{\Gamma}_i$  y  $\hat{\Omega}_i$  pueden ser calculados directamente de la medición de la respuesta impulso factorizando la matriz Hankel de la ecuación (2.6). Realizada la factorización, las matrices  $\mathbf{C}_T$  y  $\mathbf{B}_T$  pueden ser obtenidas directamente a partir de la primera fila de  $\hat{\Gamma}_i$  y de la primera columna de  $\hat{\Omega}_i$  respectivamente. Para calcular la matriz  $\mathbf{A}_T$  se puede aprovechar la propiedad de desplazamiento invariable de la matriz  $\Gamma_i$ . Se definen las submatrices  $\Gamma_{2:i}$  y  $\Gamma_{1:i-1}$ , que se obtienen eliminando de la matriz  $\Gamma_i$  la primera y la última fila respectivamente:

$$\hat{\Gamma}_{2:i} = \begin{bmatrix} C_T A_T \\ C_T A_T^2 \\ \vdots \\ C_T A_T^{i-1} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\hat{\Gamma}_{1:i-1} = \begin{bmatrix} C_T \\ C_T A_T \\ \vdots \\ C_T A_T^{i-2} \end{bmatrix}$$

Es claro ver que:

$$\hat{\Gamma}_{2:i} = \hat{\Gamma}_{1:i-1} A_T \quad (2.13)$$

por lo tanto:

$$A_T = \hat{\Gamma}_{1:i-1}^\dagger \hat{\Gamma}_{2:i} \quad (2.14)$$

Donde  $(.)^\dagger$  representa la pseudo inversa de Moore-Penrose:  $X^\dagger = (X^T X)^{-1} X^T$ . Esto debido a que  $\Gamma_i$  no es una matriz cuadrada.

En la práctica existen dos problemas para identificar procesos por medio de algoritmos de realización:

1. Es casi imposible estimular un proceso con una señal de tipo impulso, por lo tanto se acostumbra estimar la respuesta impulso  $\mathbf{h}_k$  a partir de los datos de medición de entrada/salida obtenidos experimentalmente.
2. Otro problema, derivado del anterior, es reducir los efectos de los errores producidos al estimar la respuesta impulsiva.

La técnica más utilizada para estimar la respuesta impulso es emplear métodos no paramétricos, como puede ser el método de identificación por análisis de correlación, que se basa en la ecuación de **Wiener-Hopf**, y que establece la relación entre las funciones de auto-correlación y correlación cruzada de las variables de entrada y salida

de un sistema lineal. [Rivas, 1999] [Ljung, 1998]. El método se describe en el capítulo 1, ecuación (1.43).

$$h(k) = \frac{R_{yu}(k)}{R_{uu}(0)} \quad (2.15)$$

Otro método no paramétrico para estimar la respuesta impulso es utilizar la transformada discreta inversa de Fourier (IDFT) de las mediciones de entrada/salida, una descripción detallada de la teoría y algoritmo de aplicación se puede encontrar en [McKelvey, 1995]. El método permite obtener los parámetros de Markov a partir de la respuesta en frecuencia del sistema.

Conocida la respuesta impulso del sistema, se calculan los parámetros de Markov y se procede a construir la matriz Hankel de la ecuación (2.6), para reducir los efectos de errores en la estimación de la matriz  $\mathbf{A}$ , es necesario que la matriz  $\mathbf{H}$  tenga una dimensión relativamente grande:  $\mathbf{N} \geq \mathbf{i} > \mathbf{n}$ .

Para factorizar  $\mathbf{H}$  se utiliza su descomposición en valores singulares (SVD):

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{V}^T \quad (2.16)$$

donde  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{V}$  son matrices ortogonales y  $\mathbf{S}$  es una matriz diagonal con los valores singulares en orden decreciente (de mayor a menor:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ ). El número de valores singulares diferentes de cero es precisamente el rango de  $\mathbf{H}$ . En el caso ideal  $\mathbf{H}$  es de rango  $\mathbf{n}$ , orden del sistema, esto quiere decir que solamente los primeros  $\mathbf{n}$  valores singulares,  $S_n$ , son diferente de cero. En el caso que las mediciones a partir de las cuales se obtiene la respuesta impulso son ruidosas, todos los valores singulares serán positivos. El usuario deberá entonces decidir en el número de valores singulares más significativos, lo cual determinará el orden del sistema.

Una vez determinado el orden se pueden dividir las matrices de la forma:

$$H = \begin{bmatrix} Q_n & Q_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & S_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_s^T \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

Es decir:

$$H = Q_n S_n V_n^T + Q_s S_s V_s^T$$

Debido a que  $S_n$ , de dimensión  $n \times n$ , es distinto de cero y para el caso de un sistema no ruidoso los valores  $S_s$  son iguales a cero, o en todo caso se asume como parte del error del modelo ya que son pequeños comparados con los valores  $S_n$ , la ecuación (2.17) puede ser representada por:

$$H = Q_n S_n V_n^T \quad (2.18)$$

A partir de la ecuación (2.18), se pueden definir las matrices estimadas de observabilidad extendida y controlabilidad:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_i &= Q_n S_n^{1/2} \\ \hat{\Omega}_i &= S_n^{1/2} V_n^T \end{aligned} \quad (2.19)$$

Como se explicó anteriormente las matrices  $\mathbf{B}_T$  y  $\mathbf{C}_T$  se leen directamente del primer bloque columna de  $\hat{\Omega}_i$  y del primer bloque fila de  $\hat{\Gamma}_i$  respectivamente.

Para obtener la matriz  $\mathbf{A}_T$  se resuelve la ecuación (2.14), ya sea por mínimos cuadrados (LS) o por mínimos cuadrados totales (TLS) para sistemas sobredeterminados. A continuación se explica de manera muy general la diferencia entre ambos métodos.

Si se tiene un sistema de ecuaciones sobredeterminada:

$$AX \approx B$$

donde,  $A$  ( $m \times p$ ) y  $B$  ( $m \times n$ ) son matrices dadas y  $X$  debe ser determinada; y además, se considera que  $m > p$ , de forma que (genéricamente) no exista una solución exacta.

Una de las maneras de encontrar  $X$  es mediante el método de mínimos cuadrados (LS), que minimiza la función:

$$\sum_{k=1}^n |b_k - Ax_k|^2 = \|B - AX\|_F^2$$

aquí,  $b_k$  y  $x_k$  denotan las columnas de  $B$  y  $X$  respectivamente. El método aproxima la solución a partir del modelo:

$$B + \Delta B = AX$$

donde  $\Delta B$  representa el término de error. Para estimar los valores del vector  $X$  se minimiza la expresión del error:

$$\min_x \|\Delta B\|_F^2$$

sujeto a la condición:  $B + \Delta B = AX$

Está claro que el método considera sólo los errores en la matriz  $B$ .

Otro método, el de Mínimos Cuadrados Totales (TLS), no solamente considera el error en la matriz  $B$  sino que también en la matriz  $A$ , de manera que la solución se calcula minimizando:

$$\min_x \|\Delta B\|_F^2 + \|\Delta A\|_F^2$$

sujeto a  $B + \Delta B = (A + \Delta A)X$

Un algoritmo de solución basada en Mínimos Cuadrados Totales es presentado en [Viberg, 1998].

Finalmente, la matriz  $D_T$  para un sistema equivalente es igual a la matriz  $D$ , que se obtiene directamente del primer valor de la respuesta impulso:

$$D_T = h(0)$$

El algoritmo de realización lo podemos resumir en el siguiente cuadro:

**Algoritmo de Realización:** Estimación del modelo a partir de la respuesta impulso

1. Calcular la respuesta impulso del sistema  $\mathbf{h}_k$  a partir de los datos de entrada/salida seleccionados para la identificación.
2. Determinar los parámetros de Markov  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{N_T}$ .
3. Obtener la matriz  $\mathbf{D}$  del sistema en espacio de estados:  $\mathbf{D} = \mathbf{h}_0$
4. Construir la matriz Hankel  $\mathbf{H}$  a partir de  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{N_T}$ , de dimensión  $(\mathbf{l} \times \mathbf{i}) \times (\mathbf{m} \times \mathbf{N})$ , con el número de filas  $\mathbf{i} > \mathbf{n}$  y de columnas  $\mathbf{N} \geq \mathbf{i}$ . Observar que  $N_T = N + i - 1$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \dots & \dots & h_N \\ h_2 & h_3 & h_4 & \dots & \dots & h_{N+1} \\ h_3 & h_4 & h_5 & \dots & \dots & h_{N+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ h_i & h_{i+1} & h_{i+2} & \dots & \dots & h_{N+i-1} \end{bmatrix}$$

5. Realizar la descomposición en valores singulares de  $\mathbf{H}$

$$H = QSV^T$$

6. Determinar el orden del sistema  $\mathbf{n}$  a partir de los valores singulares de mayor valor y dividir  $\mathbf{H}$  en:

$$H = [Q_n \quad Q_s] \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & S_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_s^T \end{bmatrix}$$

donde  $S_n$  contiene los valores singulares de mayor valor

7. Determinar las matrices de observabilidad extendida y de controlabilidad:

$$\hat{\Gamma}_i = Q_n S_n^{1/2}$$

$$\hat{\Omega}_i = S_n^{1/2} V_n^T$$

8. Se calculan las matrices  $C_T$  y  $B_T$  del sistema en espacios de estados:

$$C_T = J_1 \hat{\Gamma}_i$$

$$B_T = \hat{\Omega}_i J_2$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} I_l & 0_{l \times (i-1)l} \end{pmatrix} \text{ y } J_2 = \begin{pmatrix} I_m \\ 0_{(N-1)m \times m} \end{pmatrix}$$

siendo  $I_k$  es la matriz identidad  $k \times k$ ,  $0_{k \times j}$  la matriz cero  $k \times j$

9. La matriz  $A_T$  del sistema en espacio de estados se calcula a partir de:

$$\hat{\Gamma}_{2:i} = \begin{bmatrix} C_T A_T \\ C_T A_T^2 \\ \vdots \\ C_T A_T^{i-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Gamma}_{1:i-1} = \begin{bmatrix} C_T \\ C_T A_T \\ \vdots \\ C_T A_T^{i-2} \end{bmatrix}$$

donde:

$$A_T = \Gamma_{1:i-1}^\dagger \Gamma_{2:i}$$

### 2.2.2 Algoritmos directos

De los algoritmos que han sido desarrollados dos de ellos se han constituido en los métodos estándares para la identificación de procesos: MOESP y N4SID. Una discusión completa de las similitudes en ambos algoritmos se puede encontrar en [Van Overschee y De Moor, 1995], nosotros abordaremos los aspectos que diferencian ambas metodologías.

El objetivo de obtener las matrices de estado del proceso es planteado en dos etapas, la primera consiste en determinar la matriz de observabilidad extendida  $\Gamma_i$ , ecuación (1.79), previa determinación del orden del sistema  $n$ . Para el segundo paso los algoritmos aplican diferentes estrategias, la figura 2.3 muestran los caminos que siguen el MOESP y el N4SID para encontrar el modelo del proceso en espacio de estados, ecuación (1.77).

La matriz de observabilidad extendida  $\Gamma_i$  se obtiene aprovechando las herramientas geométricas explicadas en la sección 2.1, mientras el MOESP emplea la proyección ortogonal, para operar con las matrices Hankel de entrada/salida, el N4SID lo hace con proyección oblicua.

Una vez calculada la matriz de observabilidad el MOESP determina las matrices  $A_T$  y  $C_T$  a partir de la propiedad de desplazamiento invariable que presentan la matriz  $\Gamma_i$ , lo hace en forma similar al algoritmo realización ecuación (2.14). Después de calcular las matrices  $A_T$  y  $C_T$  se obtienen las matrices restantes  $B_T$  y  $D_T$ , del modelo (1.77) y las matrices de covarianza  $Q, R, S$  de la parte estocástica del modelo. Ver la trayectoria izquierda la figura 2.3

En el lado derecho de la figura 2.3 se puede observar los cálculos realizados por el N4SID, luego de determinar la matriz de observabilidad extendida  $\Gamma_i$  se obtienen los estados del sistema y en combinación con las entradas y salidas se calculan las cuatro matrices del sistema.

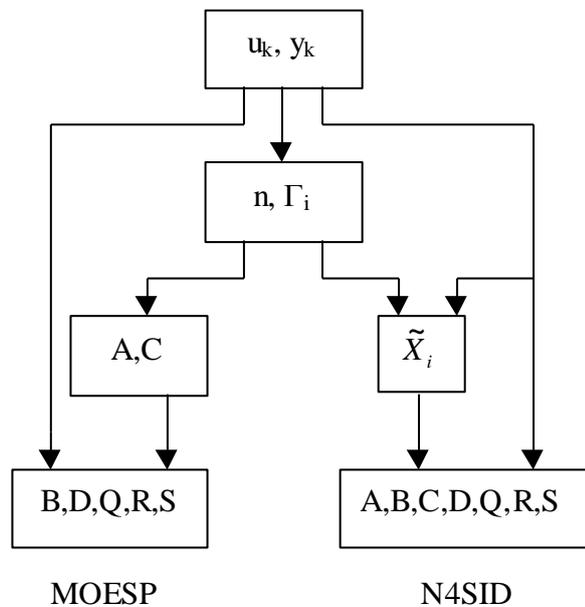


Figura 2.3. Algoritmos de identificación 4SID directos

### 2.2.2.1 Algoritmos MOESP (Multivariable Output Error State Space Model Identification)

Abordaremos dos de los algoritmos MOESP desarrollados por [M. Verhagen, 1993], el Ordinary-MOESP, por su sencillez y porque sirve de base para el siguiente algoritmo que estudiaremos el PO-MOESP.

#### Ordinary-MOESP

Para calcular las matrices del subsistema determinístico del sistema en espacio de estados, ecuación (1.77), el algoritmo resuelve la ecuación (1.86):

$$Y_{i,N} = \Gamma_i X_N + H_i U_{i,N} \quad (2.20)$$

Donde  $Y_{i,N}$  y  $U_{i,N}$  son las matrices Hankel de las ecuaciones (1.83) y (1.84),  $\Gamma_i$  la matriz de observabilidad extendida y  $H_i$  la matriz Toeplitz de la ecuación (1.81). Si multiplicamos la ecuación por la proyección dentro de la perpendicular del espacio fila de  $\mathbf{U}$ :  $\Pi_{U^\perp} = I - U^T (UU^T)^{-1} U$ , considerando que la entrada  $u(k)$  es lo suficientemente persistente, con el número de columnas de las matrices Hankel  $\mathbf{N} > \mathbf{i}$  y que

$$U_{i,N} \Pi_{U^\perp} = 0$$

la ecuación (2.20) quedaría expresada de la siguiente manera:

$$Y_{i,N} \Pi_{U^\perp} = \Gamma_i X_N \Pi_{U^\perp}, \quad (2.21)$$

Por otro lado, por definición, la señal de entrada debe ser lo suficientemente persistente [M. Viberg, 1995] [T. Mackelay, 1997] lo que hace que:  $\text{rango}(U_{i,N}) = mi$  y si consideramos que el orden del sistema es  $\mathbf{n}$ , entonces el rango de  $X_{i,N}$  será  $\mathbf{n}$ , por lo tanto:

$$\text{rango}(X_{i,N} \Pi_{U^\perp}) = n \quad (2.22)$$

Como consecuencia de (2.22), los términos  $Y_{i,N} \Pi_{U^\perp}$  de la ecuación (2.21) y  $\Gamma_i$  de la ecuación (2.20) tendrán el mismo espacio columna, hay que recordar que se ha considerado que el sistema es de realización mínima, ecuación (1.77), por lo tanto el rango de  $\Gamma_i$  es  $\mathbf{n}$ . Estas consideraciones nos permiten obtener la matriz de observabilidad extendida a partir de una descomposición truncada de valores singulares (SVD) de  $Y_{i,N} \Pi_{U^\perp}$ .

Si se aplica una descomposición en valores singulares (SVD) al operando izquierdo de la ecuación (2.21) y obtenemos el espacio columna de:  $Y_{i,N} \Pi_{U^\perp}$ , estaríamos calculando  $\Gamma_i$ .

$$Y_{i,N} \Pi_{U^\perp} = [U_n \quad U_o] \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & S_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_o^T \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Donde  $U_n$ , de dimensión  $(\mathbf{i} \times \mathbf{m}, \mathbf{n})$ , contiene los  $\mathbf{n}$  principales vectores singulares y la diagonal de la matriz  $S_n$  los correspondientes valores singulares. En ausencia de ruido  $S_o = \mathbf{0}$ . Sin embargo en la práctica, será necesario decidir cual es número de valores singulares más significativos. Entonces la matriz estimada de observabilidad extendida puede ser tomada como:

$$\hat{\Gamma}_i = U_n \quad (2.24)$$

existiendo una matriz no singular  $T$  ( $n \times n$ ) que cumple:

$$\hat{\Gamma}_i = \Gamma_i T^{-1} \quad (2.25)$$

por lo tanto la matriz de observabilidad extendida obtenida en la ecuación (2.24) contiene las matrices correspondiente a una transformación equivalente del sistema original. Otra alternativa a la relación (2.24) es usar

$$\hat{\Gamma}_i = U_n S_n^{1/2} \quad (2.26)$$

sin embargo, estaríamos en el caso de un sistema equivalente representado en la ecuación (2.25) donde la matriz de transformación es:  $T^{-1} = S_n^{1/2}$

La matriz  $C_T$  se obtiene directamente de  $\hat{\Gamma}_i$ , ecuación (2.10) y por el principio de desplazamiento invariable de la matriz de observabilidad extendida podemos calcular la matriz  $A_T$ , de manera similar a como se obtuvo en el algoritmo de realización, ecuación (2.14).

Una manera práctica y numéricamente eficiente de resolver la ecuación (2.23), es aplicar una factorización RQ a las matrices Hankel de los datos de entrada y salida, ecuaciones (1.83) y (1.84), previamente acomodados de la forma:  $\begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix}$ , siendo R una matriz cuadrada triangular inferior y Q una matriz Ortogonal, de forma que:

$$\begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix}_{\substack{(mi+li,N) \\ (mi+li,N)}} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}_{\substack{(mi+li,mi+li) \\ (mi+li,mi+li)}} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}_{\substack{(mi+li,N) \\ (mi+li,N)}}, \quad (2.27)$$

en la ecuación (2.27) se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} U &= R_{11}Q_1 \\ U^T &= Q_1^T R_{11}^T \\ Y &= [R_{21}Q_1 + R_{22}Q_2] \\ Q_1 \times Q_1^T &= I \\ Q_2 \times Q_1^T &= 0 \end{aligned}$$

A partir de la ecuación (2.2) y las relaciones anteriores podemos desarrollar el término  $Y \Pi_{U^T}$  de la ecuación (2.21) de la siguiente manera:

$$Y_{i,N} \Pi_{U^\perp} = Y - YU^T (UU^T)^{-1}U$$

$$Y \Pi_{U^\perp} = [R_{21} \quad R_{22}] \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} - [R_{21} \quad R_{22}] \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} Q_1^T R_{11}^T (R_{11} Q_1 Q_1^T R_{11}^T)^{-1} R_{11} Q_1$$

$$Y \Pi_{U^\perp} = [R_{21} \quad R_{22}] \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} - [R_{21} \quad R_{22}] \begin{pmatrix} Q_1 Q_1^T \\ Q_2 Q_1^T \end{pmatrix} R_{11}^T (R_{11} Q_1 Q_1^T R_{11}^T)^{-1} R_{11} Q_1$$

$$Y_{i,N} \Pi_{U^\perp} = [R_{21} Q_1 + R_{22} Q_2] - R_{21} [R_{11}^T (R_{11} Q_1 Q_1^T R_{11}^T)^{-1} R_{11}] Q_1$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{R}_{11}$  ( $mi \times mi$ ) es una matriz no singular, la expresión  $[R_{11}^T (R_{11} R_{11}^T)^{-1} R_{11}]$  es igual a  $R_{11}^T (R_{11}^T)^{\dagger} = I$ , entonces:

$$Y_{i,N} \Pi_{U^\perp} = [R_{21} Q_1 + R_{22} Q_2] - R_{21} Q_1$$

$$Y_{i,N} \Pi_{U^\perp} = R_{22} Q_2, \tag{2.28}$$

Además, de acuerdo con la ecuación (2.22), se puede comprobar que el espacio columna de  $\mathbf{R}_{22}$  es igual al espacio columna de  $Y_{i,N} \Pi_{U^\perp}$ , por lo que se puede usar  $\mathbf{R}_{22}$  en la descomposición singular de (2.23).

$$R_{22} = \begin{bmatrix} U_n & U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & S_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_0^T \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

A partir de la ecuación (2.24), del espacio columna  $U_n$ , podemos estimar la matriz de observabilidad extendida  $\hat{\Gamma}_i$ .

$$\hat{\Gamma}_i = U_n = \begin{pmatrix} C_T \\ C_T A_T \\ C_T A_T^2 \\ \vdots \\ C_T A_T^{i-1} \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

Ahora, aplicando la propiedad de desplazamiento invariable de  $U_n$  ( $li \times n$ ) se pueden obtener las matrices  $A_T$  y  $C_T$ :

$$\begin{aligned} A_T &= (J_1 U_n)^\dagger J_2 U_n \\ C_T &= J_3 U_n \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{J}_k$  son las matrices de selección definidas como:

$$J_1 = \begin{pmatrix} I_{(i-1)l} & 0 \\ & I_{(i-1)l \times l} \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & I_{(i-1)l} \\ I_{(i-1)l \times l} & 0 \end{pmatrix} \text{ y } J_3 = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & I_{l \times (i-1)l} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Siendo  $I_k$  la matriz identidad de  $k \times k$ , y la matriz  $0_{k \times j}$  representa la matriz cero  $\mathbf{k} \times \mathbf{j}$ .

Para determinar las matrices  $B_T$  y  $D_T$  partimos de las ecuación (2.20) y (2.27), además sabemos  $\Gamma_i = U_n$  por lo tanto:

$$\begin{aligned} Y_{i,N} &= \Gamma_i X_N + H_i U_{i,N} \\ \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} &= \Gamma_i X_N + H_i R_{11} Q_1 \\ \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} &= U_n X_N + H_i R_{11} Q_1 \\ R_{21} Q_1 + R_{22} Q_2 &= U_n X_N + H_i R_{11} Q_1 \end{aligned}$$

Si multiplicamos la expresión anterior por la derecha  $Q_1^T$  y por la izquierda  $U_0^T$  ( $li - n \times li$ ), ver ecuación (2.29), y teniendo en cuenta que  $(U_0^T)U_n = 0$  se tendría:

$$U_0^T H_i = U_0^T R_{21} R_{11}^{-1} \quad (2.32)$$

A partir de la ecuación anterior podemos obtener la expresión (2.33), donde  $\Xi = U_0^T R_{21} R_{11}^{-1}$  y  $U_n^{(1)} = J_1 U_n$ , ver ecuación (2.31).

$$\begin{bmatrix} \Xi(:,1:m) \\ \Xi(:,m+1:2m) \\ \vdots \\ \Xi(:,m(i-1)+1:mi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0^T(:,1:l) & U_0^T(:,l+1:2l) & \cdots & U_0^T(:,l(i-1):li) \\ U_0^T(:,l+1:2l) & \cdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ U_0^T(:,l(i-1):li) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & U_n^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ B_T \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Las matrices  $D$  y  $B_T$  se obtienen resolviendo la ecuación sobredeterminada (2.33) que se puede calcular por mínimos cuadrados.

**PO-MOESP: (Past Outputs - MOESP).**

Es la versión más completa de los algoritmos MOESP propuestos por [M. Verhaegen, 1994]. El algoritmo anterior, Ordinary-MOESP identifica al sistema en espacio de estados como si fuera puramente determinista, es decir con  $\mathbf{w}(\mathbf{k}) = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \mathbf{0}$ , ver ecuación (1.77). Sin embargo en la realidad todo proceso tiene perturbaciones tanto en el proceso como en la medición de la respuesta del sistema, esto hace que las propiedades geométricas asumidas en la ecuación (2.20) se pierdan, debido a la presencia del ruido.

Para salvar el inconveniente de las perturbaciones, construimos a partir de la ecuación (1.77), de manera similar a la ecuación (1.82), la expresión:

$$y_i(k) = \Gamma_i x(k) + H_i u_i(k) + n_i(k) \quad (2.34)$$

donde el término  $n_i(k) = \Psi_i w_i(k) + v_i(k)$  contiene los disturbios,  $\Psi_i$  se define como la matriz Toeplitz:

$$\Psi_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CA & C & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ CA^{i-2} & CA^{i-3} & \dots & C & 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

La ecuación (2.34) se puede representar, para un número de observaciones  $\mathbf{N}_T = \mathbf{N} + \mathbf{s} - \mathbf{1}$ , de forma similar a la ecuación (2.20), es decir usando las matrices Hankel de entrada y salida definidas en las ecuaciones (1.83) y (1.84):

$$Y_{s,N} = \Gamma_s X_{1,N} + H_s U_{s,N} + N_{s,N} \quad (2.36)$$

donde  $\mathbf{N}_{s,N}$  es la matriz Hankel de  $\mathbf{n}(\mathbf{k})$ , que se define igual que las ecuaciones (1.83) y (1.84). La matriz de estados  $X_{1,N}$  se encuentra definida en la ecuación (1.85).

Con la finalidad de remover los efectos de las perturbaciones se introduce el concepto de “variable instrumental” [Ljung, 1987]. Lo que se busca es que el vector de instrumentos sea no correlacionado con el ruido y altamente correlacionado con los estados y que además sea ortogonal a la entrada en la ecuación (2.36), [M. Viberg, 1995, 1997], [T. Gustafsson, 1997, 2002]. Esto permite además que el rango de la ecuación (2.22) se mantenga.

El algoritmo MOESP considera como vector de instrumentos las mediciones de entrada y salidas pasadas obtenidas de dividir las matrices Hankel de las ecuaciones (1.83) y (1.84) en submatrices  $\mathbf{U}_P$  y  $\mathbf{U}_F$ ,  $\mathbf{Y}_P$  y  $\mathbf{Y}_F$ , siendo

$$U_P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & \cdots & u_N \\ u_2 & u_3 & \cdots & \cdots & u_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_i & u_{i+1} & \cdots & \cdots & u_{N+i-1} \end{bmatrix} \quad (2.37a)$$

$$U_F = \begin{bmatrix} u_{i+1} & u_{i+2} & \cdots & \cdots & u_{i+N} \\ u_{i+2} & u_{i+3} & \cdots & \cdots & u_{i+N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2i} & u_{2i+1} & \cdots & \cdots & u_{2i+N-1} \end{bmatrix} \quad (2.37b)$$

De forma similar a las expresiones de (2.37) se representan  $\mathbf{Y}_P$ ,  $\mathbf{Y}_F$ ,  $\mathbf{N}_P$  y  $\mathbf{N}_F$ . Se considera en la división de las matrices  $s = 2 * i$ , siendo  $i > n$ . La matriz de variable instrumental es:

$$W_P = \begin{bmatrix} U_P \\ Y_P \end{bmatrix}$$

A partir de las expresiones anteriores se define el modelo para las salidas:

$$Y_F = \Gamma_i X_{i,N} + H_i U_F + N_F \quad (2.38)$$

Donde  $X_{i,N}$  es la matriz de estados definido en la ecuación (1.85):

$$X_{i,N} = [x_{i+1} \quad x_{i+2} \quad x_{i+3} \quad \cdots \quad x_{i+N}]$$

Con el objetivo de eliminar la entrada  $U_F$  de (2.38) usamos una proyección de las salidas sobre el complemento ortogonal de las espacio filas de las entradas futuras  $U_F$ ,  $\Pi_{U_F^\perp} = I - U_F^T (U_F U_F^T)^{-1} U_F$ , similar a la ecuación (2.21), obteniendo de (2.38):

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} + N_F \Pi_{U_F^\perp} \quad (2.39)$$

De acuerdo con las consideraciones iniciales las perturbaciones son estadísticamente independientes de la entrada  $u(k)$  y la salida  $y(k)$ , por lo tanto son no correlacionados. Bajo esta consideración no existe correlación entre  $N_F$  y las entradas  $U_F$  es decir:

$$N_F U_F^T = 0$$

por consiguiente el término:

$$N_F \Pi_{U_F^\perp} = N_F (I - U_F^T (U_F U_F^T)^{-1} U_F) = N_F$$

Además, si multiplicamos la ecuación (2.39) por  $W_P^T = [U_P^T \quad Y_P^T]$ :

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} W_P^T + N_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T, \quad (2.40)$$

y se considera que no existe correlación entre las entradas/salidas con el disturbio, es decir:

$$E[n_f u_p^T] = 0,$$

$$E[n_f y_p^T] = 0$$

entonces el factor que representa las perturbaciones tiende a cero cuando el número de mediciones tiende a infinito [M. Viberg, 1997], [M. Jansson, 1996]

$$\lim_{N_T \rightarrow \infty} \frac{1}{N_T} N_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T = 0 \quad (2.41)$$

Por lo tanto, se obtiene de la ecuación (2.40):

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} W_P^T \quad (2.42)$$

Bajo las mismas consideraciones hechas para la ecuación (2.22), con relación a las características de la señal de excitación [M. Verhaegen, 1993], podemos determinar que:

$$\text{rango} (X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} W_P^T) = n \quad (2.43)$$

Así, los  $n$  principales vectores singulares izquierdos de:

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T, \quad (2.44)$$

nos permiten obtener de manera consistente la matriz de observabilidad extendida  $\Gamma_i$ .

Una manera eficiente de descomponer en sus valores singulares la expresión (2.44) es propuesta por [M. Verhaegen, 1994], se trata de aplicar una factorización  $\mathbf{RQ}$  a los datos de entrada/salida previamente ordenados de la forma como se muestra a continuación.

$$\begin{pmatrix} U_F \\ U_P \\ Y_P \\ Y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & & & \\ R_{21} & R_{22} & & \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Utilizando la ecuación (2.45) y la proyección ortogonal:  $\Pi_{U_F^\perp} = I - U_F^T (U_F U_F^T)^{-1} U_F$ , podemos demostrar fácilmente, de manera similar a la deducción de la ecuación (2.28), que:

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T = [R_{42} \quad R_{43}] \begin{bmatrix} R_{22} & 0 \\ R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}^T, \quad (2.46)$$

por lo tanto de la ecuación (2.42):

$$\Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U^T} W_P^T = [R_{42} \quad R_{43}] \begin{bmatrix} R_{22} & 0 \\ R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}^T \quad (2.47)$$

La matriz de observabilidad extendida se obtiene de la descomposición en valores singulares (SVD) de:

$$[R_{42} \quad R_{43}] = \begin{bmatrix} U_n & U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & S_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_0^T \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\Gamma_i = U_n \quad (2.49)$$

$$X_{i,N} \Pi_{U^T} W_P^T = S_n V_n^T \begin{bmatrix} R_{22} & 0 \\ R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}^T \quad (2.50)$$

De manera similar al algoritmo Ordinary-MOESP, las matrices  $A_T$  y  $C_T$  (equivalentes de las matrices  $A$  y  $C$ ) se obtienen haciendo uso de la propiedad de desplazamiento invariable que presenta  $U_n$ , ecuaciones (2.30) y (2.31):

$$A_T = (J_1 U_n)^\dagger J_2 U_n$$

$$C_T = J_3 U_n$$

Para estimar las matrices  $B_T$  y  $D$  se propone en [M. Verhaegen, A. Varga, 1994] un método que ofrece mayor precisión que el empleado en el Ordinary-MOESP, ecuación (2.33). El procedimiento consiste en trabajar directamente con los elementos de las



La variable  $\mathbf{y}_k^{ij}$  se obtiene como salida del siguiente subsistema:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^{ij} &= Ax_k^{ij} + e_i u_k(j) \\ y_k^{ij} &= Cx_k^{ij} \end{aligned}, \quad (2.53)$$

donde  $\mathbf{e}_i$  es el vector formado por la  $i$ -ésima columna de la matriz identidad ( $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ ).

Resolviendo la ecuación (2.51) por mínimos cuadrados podemos obtener los elementos  $\mathbf{b}_{ij}$  y  $\mathbf{d}_{hj}$ , a partir de los cuales podemos determinar las matrices  $\mathbf{B}_T$  y  $\mathbf{D}$ .

### 2.2.2.2 El algoritmo N4SID

A diferencia de los algoritmos MOESP, que determinan las matrices del sistema a partir de la matriz de observabilidad extendida  $\Gamma_i$ , el algoritmo N4SID encuentra en su parte inicial un conjunto de estados estimados  $\tilde{X}_i$ . Una descripción completa del algoritmo N4SID se encuentra en [Van Overschee y De Moor, 1994].

Podemos considerar, de manera similar al algoritmo PO-MOESP, que el N4SID parte de la ecuación (2.38):

$$Y_F = \Gamma_i X_{i,N} + H_i U_F + N_F$$

con la finalidad de eliminar el término que corresponde a las entradas futuras  $U_F$ , la ecuación anterior es multiplicada por la derecha por la proyección ortogonal de  $U_F$  :

$\Pi_{U_F^\perp} = I - U_F^T (U_F U_F^T)^{-1} U_F$ , obteniendo la ecuación (2.39):

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} + N_F \Pi_{U_F^\perp}$$

Debido a que no existe correlación entre el ruido y las entradas se tiene:

$$N_F \Pi_{U_F^\perp} = N_F,$$

Por lo tanto:

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} + N_F \quad (2.54)$$

El siguiente paso consiste en asignar unas matrices de peso  $\mathbf{W}_1$  y  $\mathbf{W}_2$ :

$$W_1 Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_2 = W_1 \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} W_2 + W_1 N_F W_2 \quad (2.55)$$

Las matrices de peso deben ser escogidas de manera que cumplan los siguientes condiciones:

$$1. \text{rank}(\mathbf{W}_1 \Gamma_i) = \text{rank}(\Gamma_i) \quad (2.56)$$

$$2. \text{rank}(X_i) = \text{rank}(X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} W_2) \quad (2.57)$$

$$3. \mathbf{W}_1 \mathbf{N}_F \mathbf{W}_2 = \mathbf{0} \quad (2.58)$$

Las dos primeras condiciones garantizan que el rango  $n$ , propio de  $\Gamma_i X_{i,N}$ , se mantenga después de proyectar sobre  $U_F^\perp$  y ponderar la ecuación con las matrices  $\mathbf{W}_1$  y  $\mathbf{W}_2$ . La tercera condición expresa que  $\mathbf{W}_2$  deberá ser no correlacionada con la secuencias de ruido  $w_k$  y  $v_k$ .

Cumplidas las tres condiciones anteriores, podemos descomponer en valores singulares (SVD)  $W_1 Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_2$ , de forma que:

$$W_1 Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_2 = USV \quad (2.59)$$

$$W_1 Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_2 = [U_n \quad U_0] \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & S_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_0^T \end{bmatrix}$$

Al igual que en el algoritmo de realización de estados y en los algoritmos MOESP, la factorización SVD permite determinar el orden  $n$  del sistema, a partir de los valores mayores que cero de la diagonal de la matriz  $\mathbf{S}$ , por lo que se puede afirmar:

$$\text{rango}(W_1 Y_F \prod_{U_F^\perp} W_2) = n$$

$$W_1 \Gamma_i = U_n S_n^{1/2}$$

$$X_{i,N} \prod_{U_F^\perp} W_2 = S_n^{1/2} V_n^T$$

El algoritmo N4SID considera como matrices de peso [W. Favoreel, 1998], [Van Overschee y De Moor, 1997]:

$$\begin{aligned} W_1 &= I_{li} \\ W_2 &= (W_p \prod_{U_F^\perp})^\dagger W_p \end{aligned} \quad (2.60)$$

Por lo tanto, a partir de los vectores singulares del lado izquierdo, que corresponden a los valores singulares distintos de cero ecuación (2.59), se puede obtener la matriz de observabilidad extendida  $\Gamma_i$ . Además, el N4SID asume que la matriz de estados estimada es:

$$\tilde{X}_{i,N} = X_{i,N} \prod_{U_F^\perp} W_2 \quad (2.61)$$

Es decir,  $\tilde{X}_{i,N}$  es un filtro de Kalman estimado de los estados  $\mathbf{X}_i$ , [W. Favoreel, 1998],

Si se reemplaza en la ecuación(2.55) las matrices de peso  $W_1$  y  $W_2$ , definidas en la ecuación (2.60), que cumplen las condiciones necesarias dadas por las ecuaciones (2.56), (2.57) y (2.58) y teniendo en cuenta la ecuación (2.61) se tendrá:

$$Y_F \prod_{U_F^\perp} (W_p \prod_{U_F^\perp})^\dagger W_p = \Gamma_i \tilde{X}_{i,N} \quad (2.62)$$

En la ecuación (2.62) se puede observar que el término de la izquierda es la proyección oblicua de  $Y_F$ , ver ecuación (2.3). Es decir, el término representa la parte del espacio

fila de  $Y_F$  que se proyecta en la dirección del espacio fila de  $U_F$  sobre el espacio fila de  $W_p$ .

Para encontrar la proyección oblicua de  $Y_F$ , el N4SID realiza una factorización **RQ** del siguiente arreglo matricial:

$$\begin{pmatrix} U_P \\ U_F \\ Y_P \\ Y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & & & \\ R_{21} & R_{22} & & \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Luego a partir de la ecuación (2.62), y de forma similar a como se obtuvo (2.3), se procede a encontrar la proyección oblicua de  $Y_F$ ,  $Z_i$ :

$$Z_i = Y_F \Pi_{U_F^\perp} (W_p \Pi_{U_F^\perp})^\dagger W_p = [F \quad G] [K \quad M]^\dagger W_p \quad (2.64)$$

siendo:

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} R_{41} & R_{42} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{41} & R_{42} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}^\dagger * \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \\ G &= \begin{bmatrix} R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{31} & R_{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{31} & R_{32} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}^\dagger * \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \\ M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ R_{33} & 0 \end{bmatrix} \\ W_p &= \begin{bmatrix} U_P \\ Y_P \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A partir de la descomposición en valores singulares (SVD) de  $Z_i$ , ecuación (2.59), se determina la matriz de observabilidad extendida y la secuencia de estados estimados:

$$\Gamma_i = U_n S_n^{1/2} \quad (2.65)$$

$$\tilde{X}_{i,N} = \Gamma_i^\dagger Z_i \quad (2.66)$$

De manera similar a como se ha encontrado  $\tilde{X}_{i,N}$  se procede a determinar  $\tilde{X}_{i+1}$ , partiendo de:

$$Z_{i+1} = Y_{F^-} \Pi_{U_{F^-}^\perp} (W_{P^+} \Pi_{U_{F^-}^\perp})^\dagger W_{P^+} \quad (2.67)$$

Donde

$$U_{F^-} = \begin{bmatrix} u_{i+2} & u_{i+3} & \cdots & \cdots & u_{i+N+1} \\ u_{i+3} & u_{i+4} & \cdots & \cdots & u_{i+N+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2i} & u_{2i+1} & \cdots & \cdots & u_{N+2i-1} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

de igual forma se define  $Y_{F^-}$ , y  $W_{P^+}$  es:

$$W_{P^+} = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_N \\ \vdots & & \vdots \\ u_{i-1} & \cdots & u_{N+i-2} \\ y_1 & \cdots & y_N \\ \vdots & & \vdots \\ y_{i-1} & \cdots & y_{N+i-2} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Luego de determinar las secuencias de estados  $\tilde{X}_i$  y  $\tilde{X}_{i+1}$ , se puede escribir la ecuación de estados (1) como:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{i+1} \\ Y_{F^1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_i \\ U_{F^1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Siendo:

$$Y_{F^1} = [y_i \quad y_{i+1} \quad \cdots \quad y_N]$$

$$U_{F^1} = [u_i \quad u_{i+1} \quad \cdots \quad u_N]$$

y  $\rho_w$  y  $\rho_v$  matrices residuos.

La ecuación (2.70) puede ser resuelta mediante mínimos cuadrados, obteniéndose las matrices del sistema determinístico: A, B, C, y D.:

$$\min_{A,B,C,D} \left\| \begin{bmatrix} \tilde{X}_{i+1} \\ Y_{F^1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_i \\ U_{F^1} \end{bmatrix} \right\|_F^2 \quad (2.71)$$

El subsistema estocástico se determina a partir de los residuos:

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \approx \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_w^T & \rho_v^T \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

### 2.2.2.3 Algoritmo propuesto: *Moesp\_SID*

A partir de los algoritmos estudiados se presenta un método alternativo que combina las prestaciones de los métodos MOESP y N4SID. El algoritmo propuesto determina las matrices  $A_T$  y  $C_T$  de manera similar al método MOESP, luego se estiman los estados del sistema utilizando la proyección oblicua de la ecuación (2.64) y finalmente se determinan las matrices  $B_T$  y D resolviendo la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{i+1} \\ y_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_T \\ C_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_T \\ D \end{bmatrix} [u_i] \quad (2.73)$$

La solución de (2.73) se encuentra mediante mínimos cuadrados, ventaja que ofrece el algoritmo frente al MOESP.

El algoritmo permite estimar muy buenos modelos cuando las señales de entrada/salida obtenidas del experimento son poco ruidosas, restricción que puede ser superada con un adecuado tratamiento de las señales.

El algoritmo *Moesp\_SID* se describe en el siguiente cuadro:

**Método de Identificación Directa: Moesp\_SID:**

1. Construir las matrices Hankel  $U_P$ ,  $U_F$ ,  $Y_P$  y  $Y_F$ :

$$U_P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & \cdots & u_N \\ u_2 & u_3 & \cdots & \cdots & u_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_i & u_{i+1} & \cdots & \cdots & u_{N+i-1} \end{bmatrix}$$

$$U_F = \begin{bmatrix} u_{i+1} & u_{i+2} & \cdots & \cdots & u_{i+N} \\ u_{i+2} & u_{i+3} & \cdots & \cdots & u_{i+N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2i} & u_{2i+1} & \cdots & \cdots & u_{2i+N-1} \end{bmatrix}$$

De igual forma se definen las matrices  $Y_P$  y  $Y_F$

2. Se encuentra la factorización RQ del siguiente arreglo de matrices:

$$\begin{pmatrix} U_F \\ U_P \\ Y_P \\ Y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & & & \\ R_{21} & R_{22} & & \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix}$$

3. Encontrar la matriz de observabilidad extendida mediante descomposición de valores singulares:

$$[R_{42} \quad R_{43}] = \begin{bmatrix} U_n & U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & S_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_0^T \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_i = U_n$$

4. Estimar las matrices  $A_T$  y  $C_T$ :

$$A_T = (J_1 U_n)^\dagger J_2 U_n$$

$$C_T = J_3 U_n$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} I_{(i-1) \ l} & 0 \\ & I_{(i-1) \ l \times l} \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & I_{(i-1) \ l} \\ I_{(i-1) \ l \times l} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ & I_{l \times (i-1) \ l} \end{pmatrix}$$

5. Encontrar la Proyección Oblicua:  $Z_i = Y_F \Pi_{U_F^\perp} (W_P \Pi_{U_F^\perp})^\dagger W_P$ :

$$Z_i = L_i \times \begin{bmatrix} U_P \\ Y_P \end{bmatrix}$$

$$Z_i = [R_{42} \quad R_{43}] \begin{bmatrix} R_{22} & 0 \\ R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}^\dagger$$

6. Estimar los estados:

$$\tilde{X}_T = \Gamma_i^\dagger Z_i$$

donde  $(\cdot)^\dagger$  es la Pseudo Inversa de Moore-Penrose

7. Definir:

$$\tilde{X}_i = \tilde{X}_T(:, 1:N-1),$$

$$\tilde{X}_{i+1} = \tilde{X}_T(:, 2:N),$$

$$u_i = U_F(1:m, 1:N-1),$$

$$y_i = Y_F(1:l, 1:N-1)$$

8. Determinar  $B_T$  y  $D$  resolviendo por mínimos cuadrados:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{i+1} \\ y_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_T \\ C_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_T \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \end{bmatrix}$$

9. Determinar el vector de residuos:

$$\begin{bmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_{i+1} \\ y_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_i \\ u_i \end{bmatrix}$$

10. Estimar la matriz de covarianza del subsistema estocástico:

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_w^T & \rho_v^T \end{bmatrix}$$

### 2.3 Aplicación práctica:

Como aplicación de las técnicas de identificación basadas en subespacios, se presenta un caso práctico de encontrar el modelo de unas de las plantas del laboratorio del Departamento de Ingeniería Automática y de Sistemas de la Universidad de Valladolid. La planta experimental trata sobre dos tanques que se encuentran comunicados entre si, cada tanque es llenado con agua a través de una bomba con alimentación independiente, en la figura 2.4 se muestra un esquema de la planta.

Para la identificación se utilizan como señales de entrada al proceso la tensión de alimentación a las bombas y como salida los niveles de cada tanque, es decir es un

sistema de 2 entradas y dos salidas. Como punto de operación de la planta se considera un 40 % de señal de comando para cada bomba y un nivel de 60% de llenado para los tanques, en la figura 2.5 se muestra las características de las señales de alimentación a las bombas.

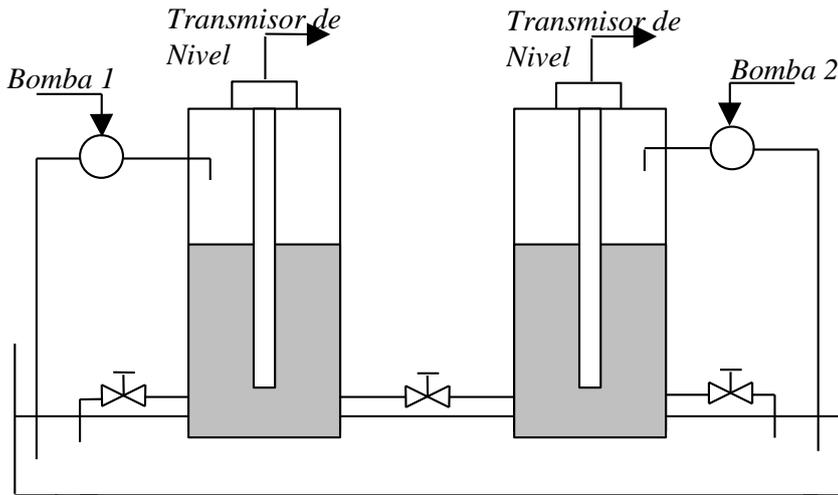


Figura 2.4 Planta Experimental

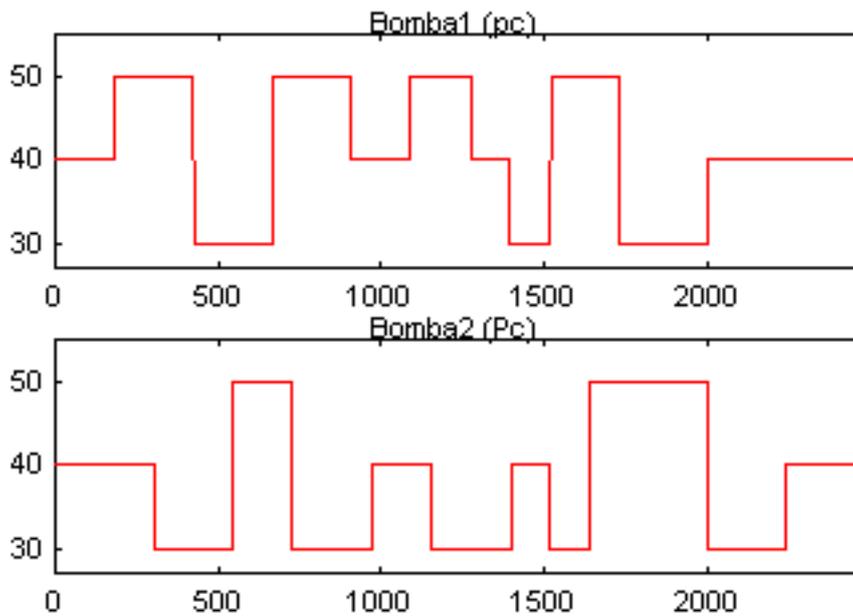


Figura 2.5. Señales de comando a las bombas

La variación del nivel para cada tanque se presenta en la figura 2.6. Cómo se puede apreciar las gráficas de los niveles tienen un comportamiento muy similar a pesar que las señales de excitación de las bombas son diferentes, esto se debe a que los tanques están trabajando a lazo abierto e interconectados, por lo tanto los niveles son mantenidos por vasos comunicantes. Otro aspecto importante, es que durante el experimento no se logra alcanzar el estacionario en el nivel de los tanques, ya que esto se lograría si el caudal de entrada es igual al caudal de salida, condición que no puede ser lograda fácilmente cuando el sistema está a lazo abierto.

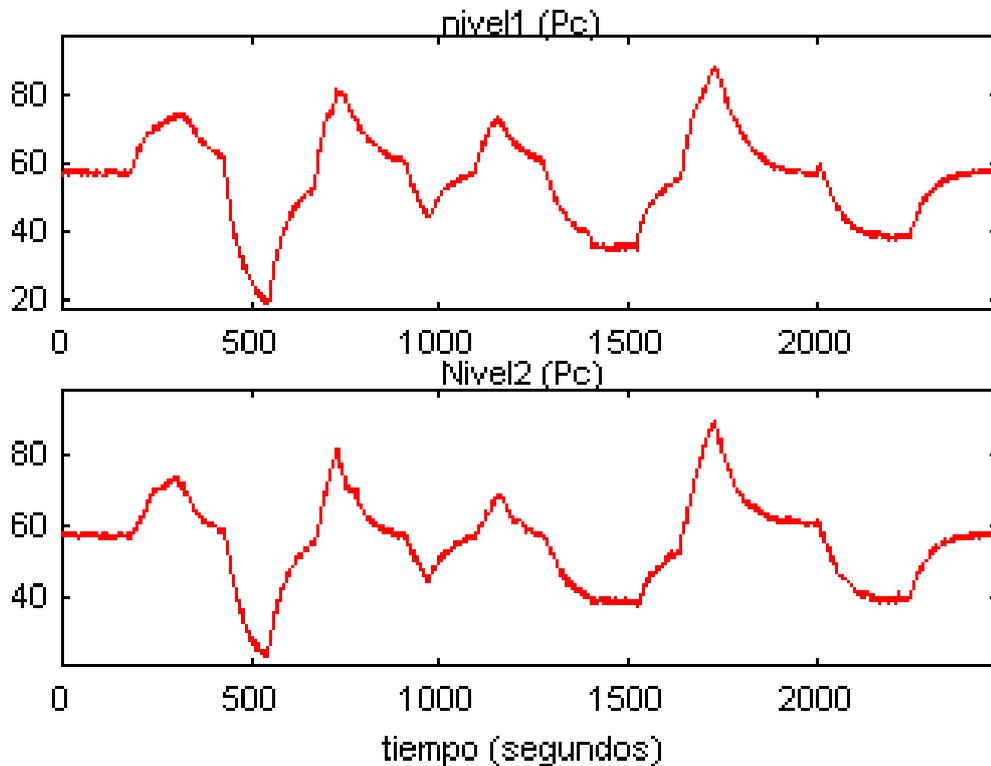


Figura 2.6 Variación del nivel en cada tanque.

Para la identificación con los métodos de identificación basados en subespacios, los datos son previamente tratados a través de un filtro pasa alto a una frecuencia  $\omega = 0$ . En primer lugar se estima el orden del proceso a partir de los valores singulares. En la figura 2.7 se muestran los valores singulares para el método de realización de estados.

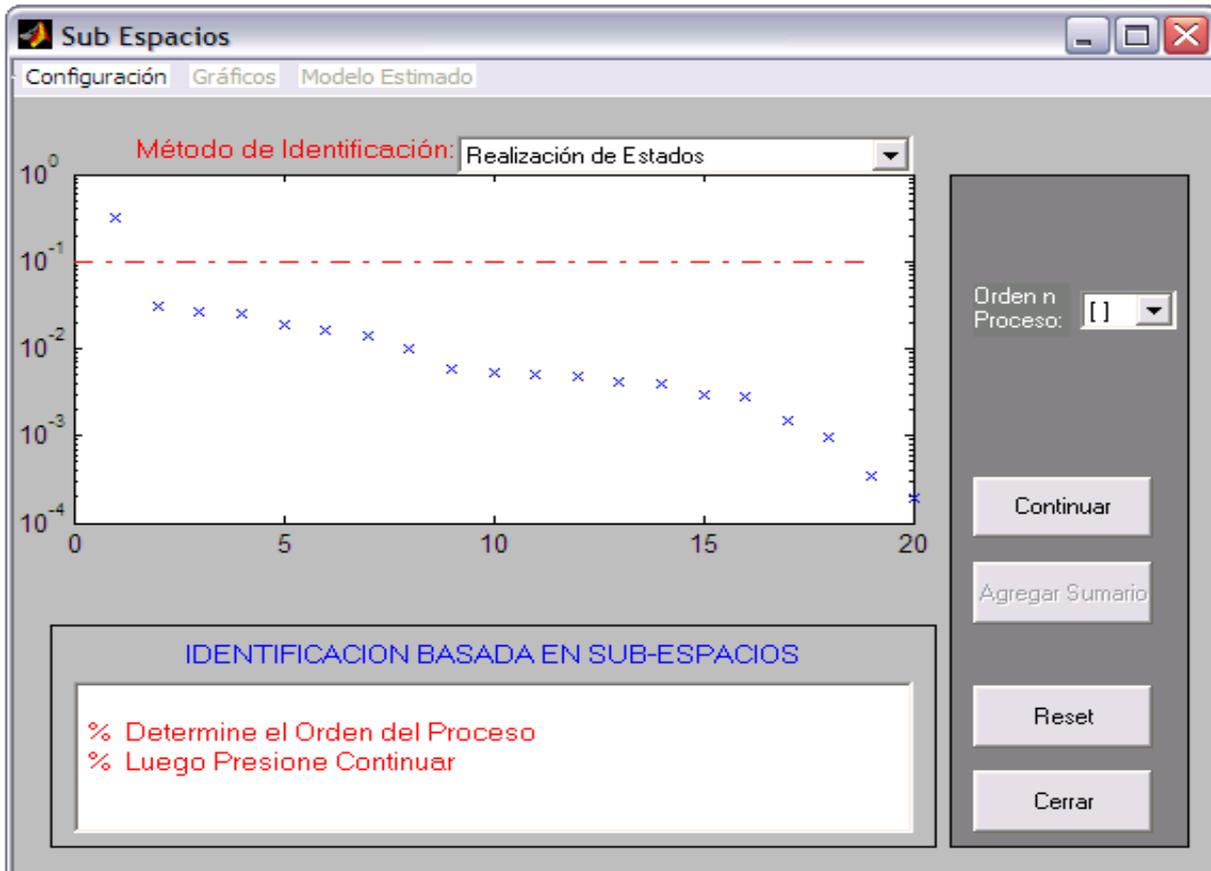


Figura 2.7. Valores singulares, método de realización de estados

De acuerdo con los valores singulares el orden del proceso es estimado en 1. En las figuras 2.8 y 2.9 se muestran los resultados de la comparación de las señales reales y las obtenidas a partir del modelo.

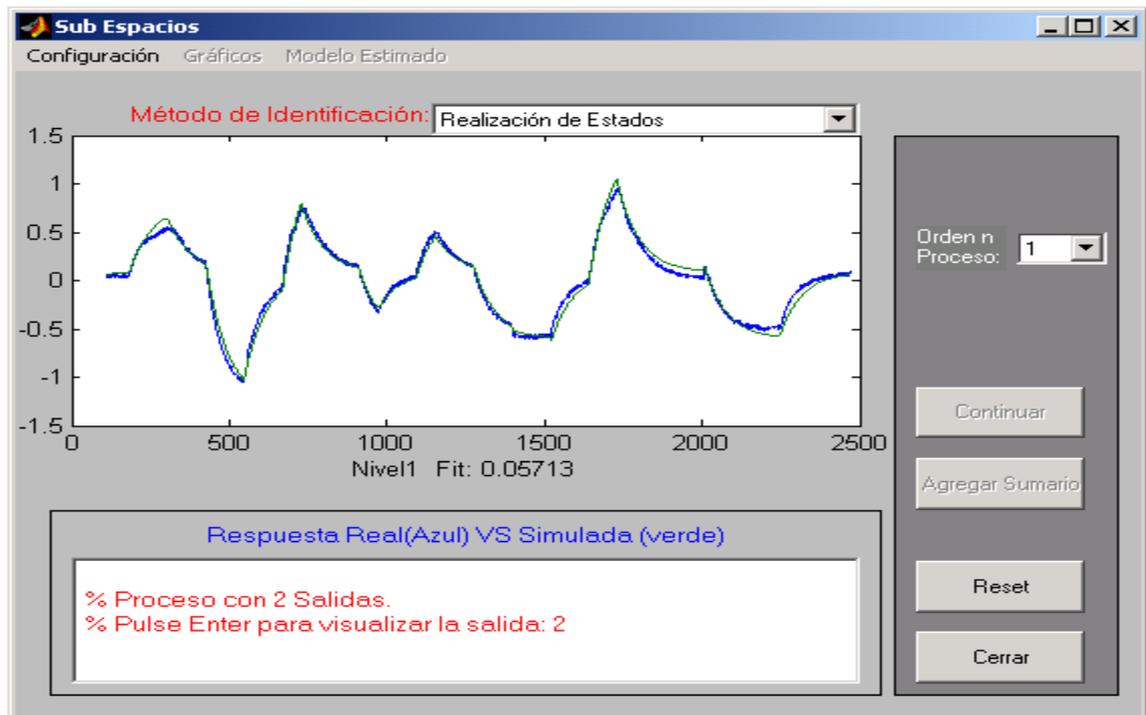


Figura 2.8. Método de realización de estados respuesta para el Nivel 1

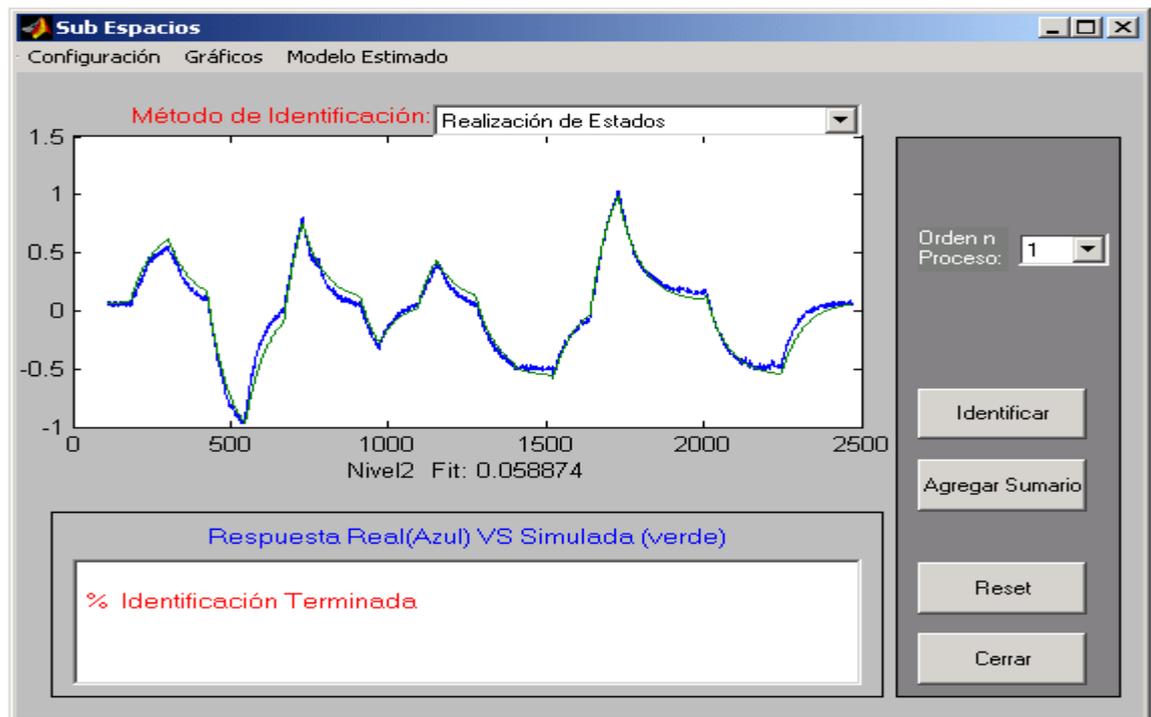


Figura 2.9. Método de realización de estados respuesta para el Nivel 2

Los valores singulares para el método Moesp\_SIM se presentan en la figura 2.10. A diferencia del método de realización de estados, con el método Moesp\_SIM el usuario

puede elegir el orden del proceso dentro de un mayor número de opciones, en este caso cuatro valores. El resto de valores singulares representarían la componente de ruido presente en las señales de medición. De acuerdo con la figura 2.10, se puede optar por elegir un orden 2, ya que serían los valores singulares de mayor valor.

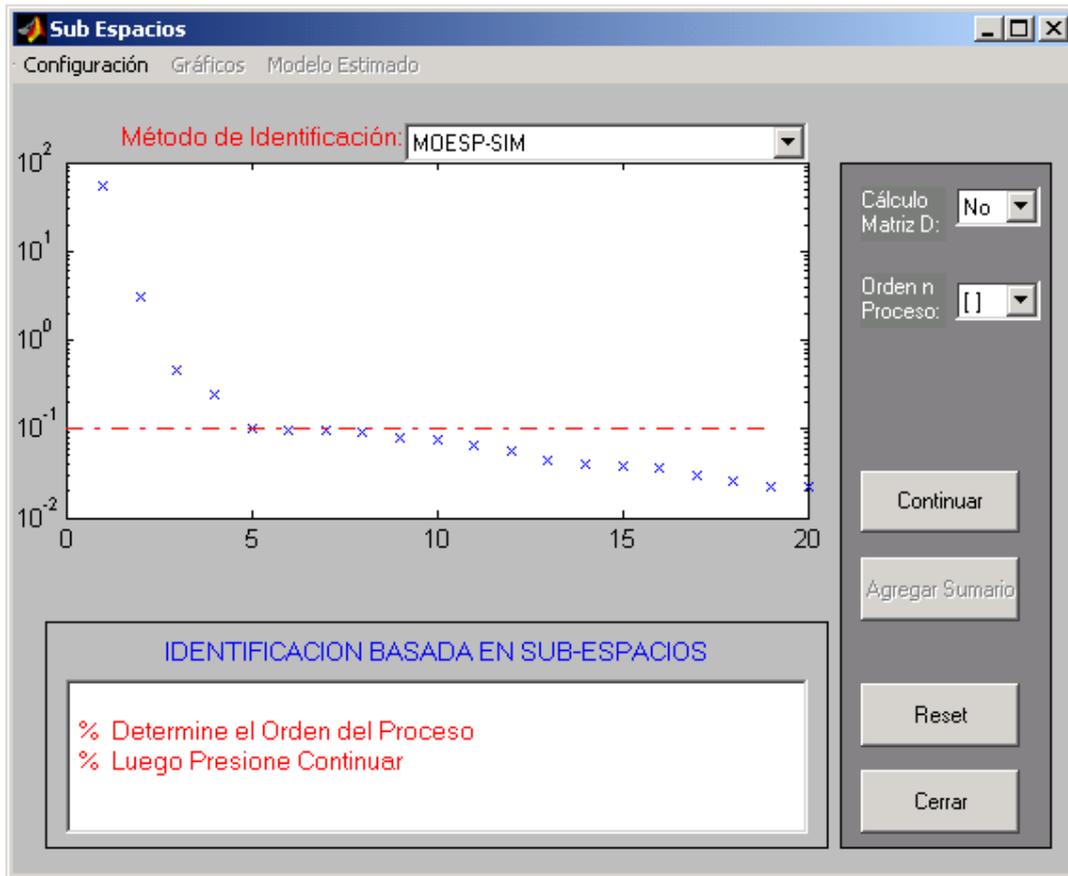


Figura 2.10. Valores singulares para el método Moesp\_SIM

Para el orden seleccionado 2, las respuestas del modelo son comparadas con sus correspondientes señales reales en las figuras 2.11 y 2.12. Como se puede observar los resultados obtenidos son mejores que en el caso de la identificación por el método de realización. La comprobación de los datos experimentales  $y(t)$  con los datos del modelo  $y_m(t)$  es medido por el valor cuadrático medio del error :

$$Fit = \sqrt{\frac{\sum (y(t) - y_m(t))^2}{N}} \quad (2.74)$$

y queda especificado por el parámetro Fit en cada una de las gráficas.

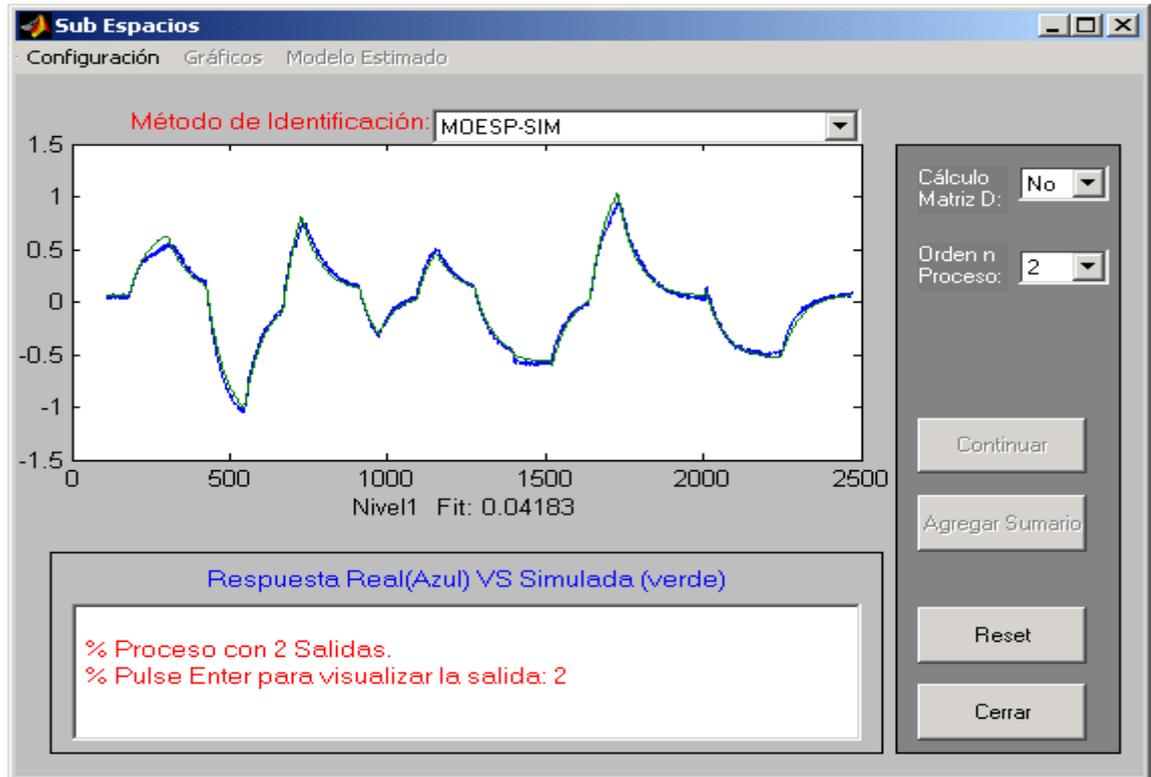


Figura 2.11. Método Moesp\_SIM respuesta para el Nivel 1.

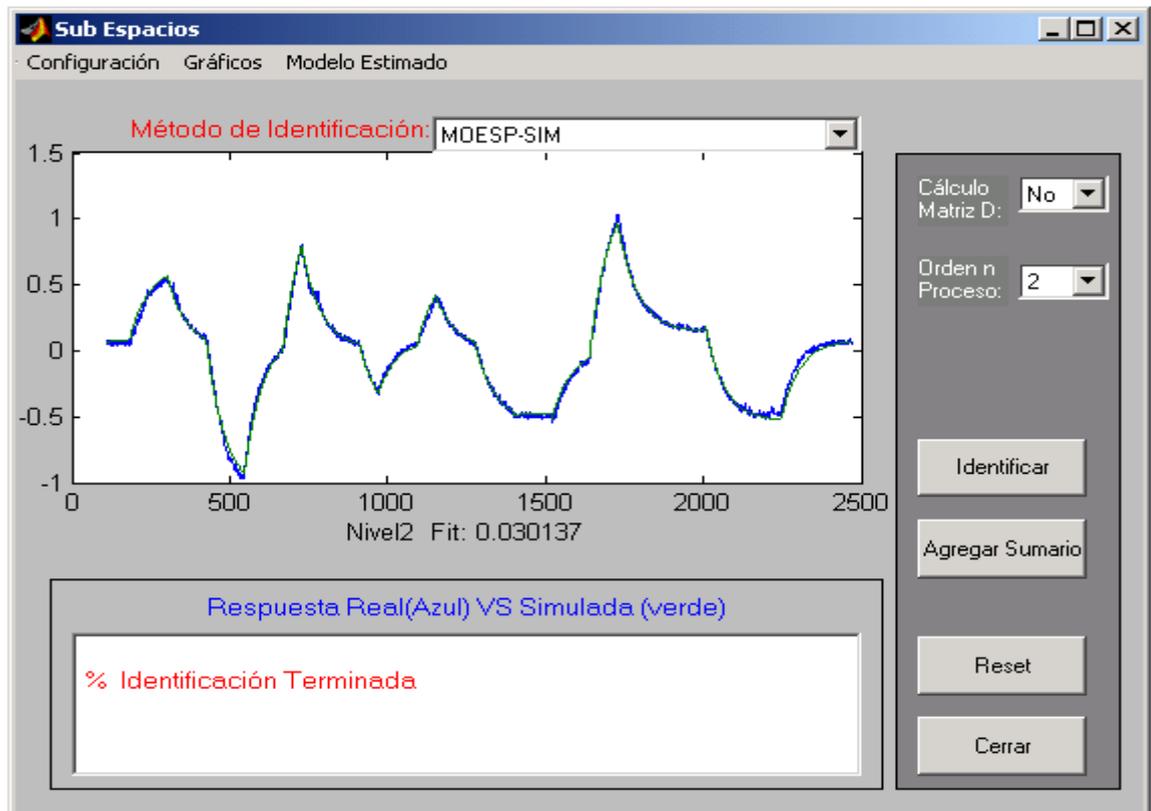


Figura 2.12. Método Moesp\_SIM respuesta para el Nivel 2.

El método propuesto Moesp\_SID estima el orden del proceso de manera similar al método Moesp\_SIM, como se puede apreciar en la figura 2.13 los valores singulares obtenidos son los mismos que los mostrados en la figura 2.10. Las consideraciones para seleccionar el orden del proceso son las mismas que las explicadas para el método Moesp\_SIM, por lo tanto se elige un orden 2.

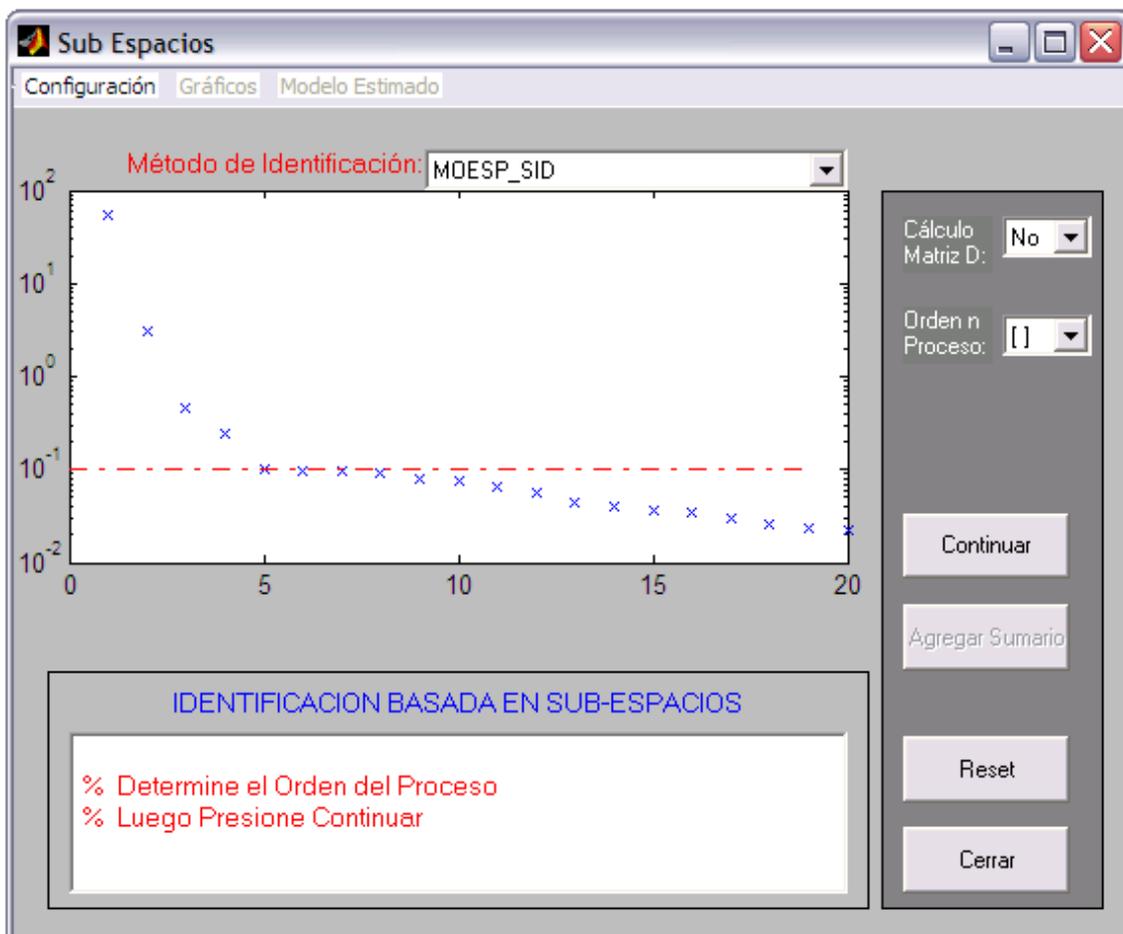


Figura 2.13. Valores singulares para método Moesp\_SID

En las figuras 2.14 y 2.15 se pueden observar las respuestas correspondientes al modelo obtenido con el algoritmo Moesp\_SID. Las respuestas son muy similares a las obtenidas con el método Moesp\_SIM, sin embargo, el error de comparación entre las señales

reales y las estimadas con el modelo, es relativamente menor para el algoritmo Moesp\_SIM, esto debido a que el algoritmo obtiene con mayor precisión la matriz B.

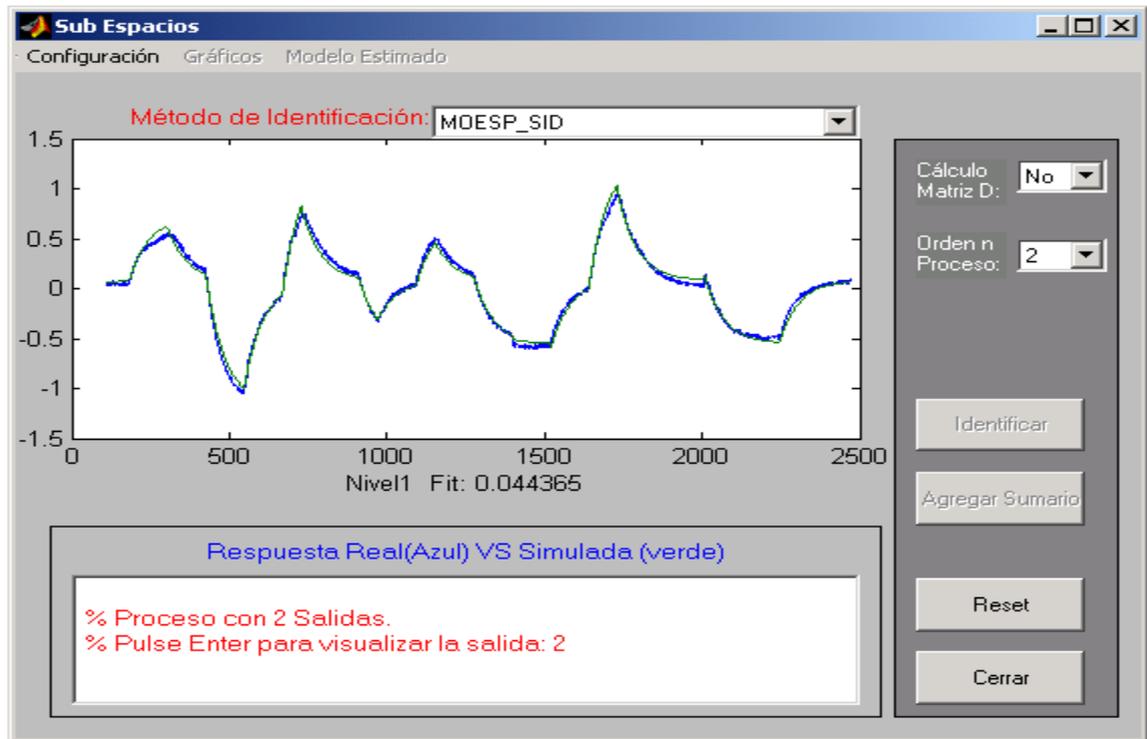


Figura 2.14. Método Moesp\_SID respuesta para el Nivel 1.

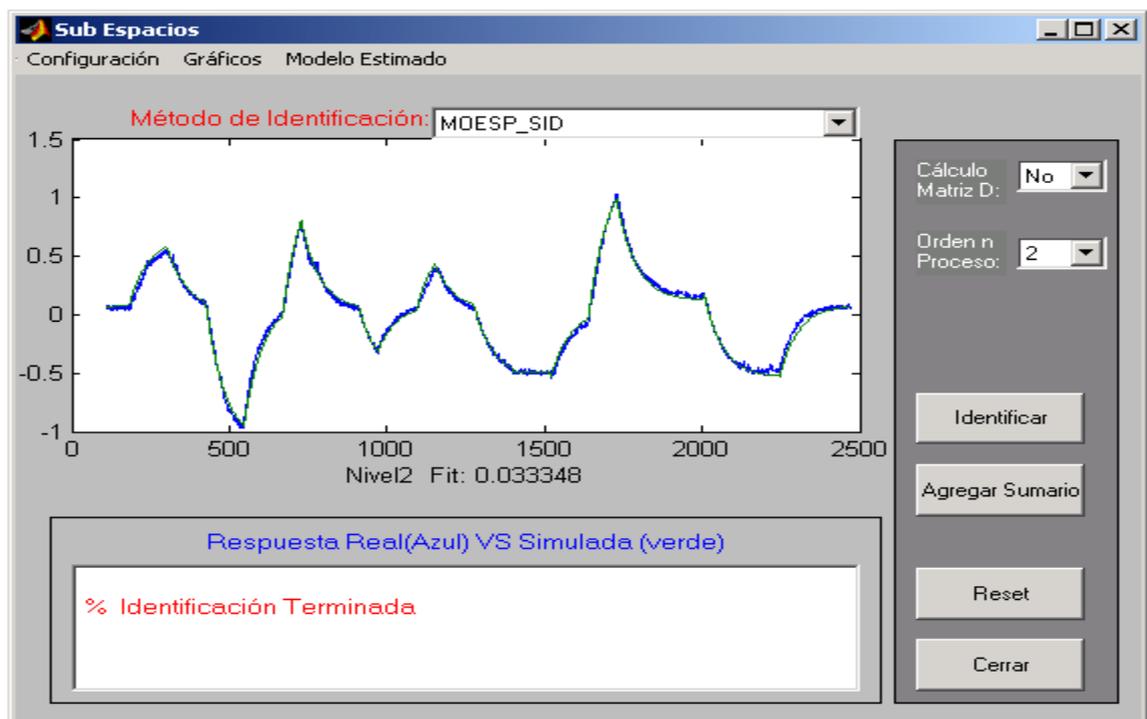


Figura 2.15. Método Moesp\_SID respuesta para el Nivel 2.

Para el caso de los dos últimos métodos de identificación a lazo abierto, se ha podido seleccionar un orden mayor a 2, ya que como podemos observar en las figura 2.10 y 2.13 el número de valores singulares mayores a cero son cuatro. En la tabla 2.1 se presentan los valores del error cuadrático medio, parámetro Fit, para cada uno de los niveles, considerando los tres métodos de identificación y variando el orden de 2 a 4.

	Realización de Estados			Moesp_SIM			Moesp_SID		
	2	3	4	2	3	4	2	3	4
Nivel 1	0.057	0.053	0.053	0.04	0.04	0.03	0.04	0.04	0.03
Nivel 2	0.058	0.052	0.049	0.03	0.02	0.02	0.03	0.03	0.02

Tabla 2.1. Parámetros de error para los tres métodos de identificación.

Como se puede apreciar en la tabla 2.1 al aumentar el orden los errores de comparación disminuyen ligeramente, para los métodos Moesp\_SIM y Moesp\_SID permanecen muy similares. Se debe tener en cuenta que el método de realización de estados estima las matrices B y D como parte del algoritmo, sin embargo, los otros dos métodos pueden o no estimar la matriz D, en los casos estudiados sólo han estimado la matriz B. El modelo estimado para el método Moesp\_SID de orden 2 de muestra en la figura 2.16.

Los métodos de identificación basados en subespacios ofrecen la alternativa de realizar una identificación cultivar iable, es decir las señales de excitación son cambiadas de manera simultánea, de esta forma el modelo que se obtiene representa mejor las características de acoplamiento que puedan existir entre las entradas y las salidas, esto es demostrado con la respuesta al salto del modelo estimado, figura 2.17.

Se puede advertir en la figura 2.17, el fuerte acoplamiento existente entre el caudal de la bomba 1 y el nivel del tanque 2, de igual forma el caudal de la bomba 2 y el nivel del tanque 1, esto es debido a que los tanques están interconectados y operando a lazo abierto. El tiempo de establecimiento es de aproximadamente 350 segundos, hay que considerar que los datos utilizados en la identificación no dan la suficiente información para determinar con precisión el tiempo de establecimiento, ya que sería necesario

regular el caudal de entrada igual al caudal de salida, condición difícil de cumplir trabajando a lazo abierto.

**Modelo del Proceso. Orden: 2**

A:

```

0.98359 0.00028673
-0.00052557 0.97469
    
```

B:

```

-0.00056254 -0.00058063
3.7551e-005 -7.4639e-005
    
```

C:

```

-62.7883 14.8043
-57.2759 -14.9571
    
```

D:

```

0 0
0 0
    
```

Figura 2.16. Modelo en espacio de estados para el proceso identificado

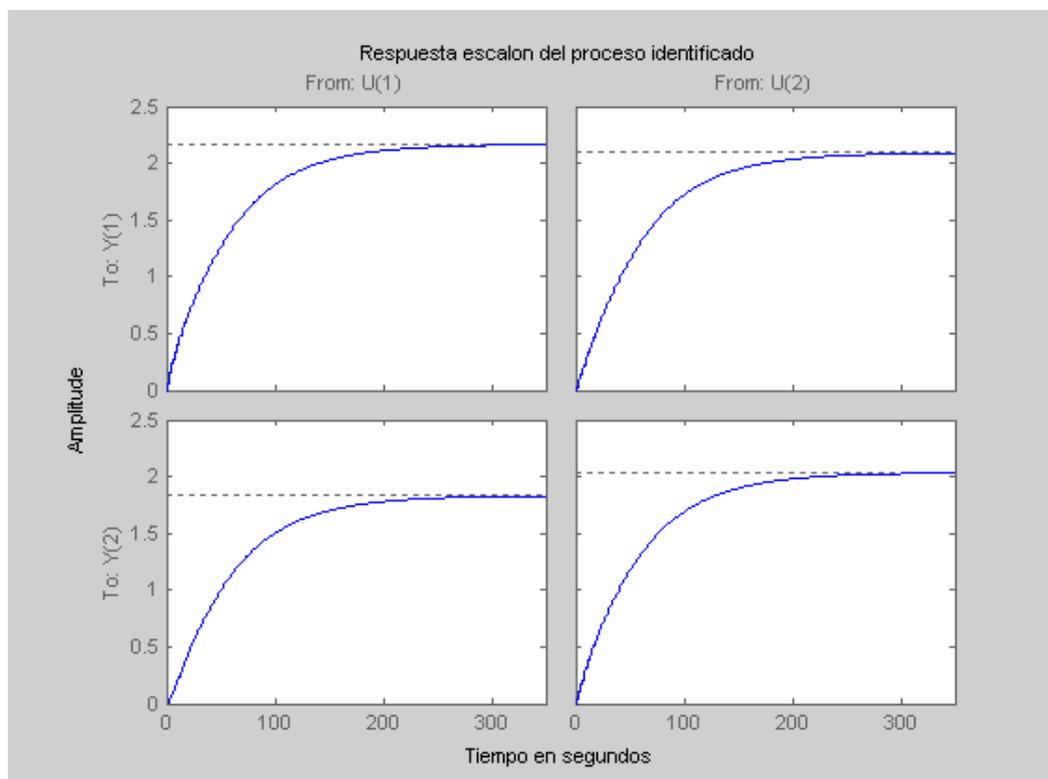


Figura 2.16. Respuesta escalón de proceso identificado.

## *Capítulo 3*

### *Identificación a lazo cerrado*

En la industria es casi normal que los procesos se encuentren operando bajo control, es decir con retroalimentación, esto se debe generalmente a razones de seguridad (es el caso de los sistemas inestables), de producción y económicas. Estas circunstancias de operación de los procesos, ha incrementado el interés por buscar técnicas que permitan estimar el modelo que describa la dinámica del proceso, a partir de datos en funcionamiento a lazo cerrado. Las metodologías desarrolladas para este fin se conocen como métodos de identificación a lazo cerrado.

Los métodos de identificación a lazo abierto exigen que los sistemas a lazo cerrado, tengan que desacoplarse del controlador para poder hacer los experimentos, esto puede originar problemas en procesos que por naturaleza deben operar a lazo cerrado, como es el caso de sistemas inestables y de aquellos que tienen integradores, ya que los experimentos para obtener el modelo pueden originar fuertes perturbaciones provocando inestabilidades y funcionamientos no deseados en el proceso. Estimar el modelo a lazo cerrado, permite mantener el proceso bajo control y estimar mejor el modelo alrededor del punto de funcionamiento; las señales que excitan al proceso pueden ser manipuladas sin que el proceso sea fuertemente perturbado ya que gracias a los controladores en el sistema, las variables controladas se pueden mantener dentro de rangos de operación permitidos.

Por otro lado, las técnicas de control avanzado, como es el caso del Control Predictivo Basado en Modelos (MBPC), necesitan conocer el modelo del proceso para poder desarrollar su estrategia de control; sin embargo, realizar la estimación del modelo a lazo abierto tiene los inconvenientes explicados anteriormente, los cuales se verían superados si la estimación se hace a lazo cerrado. Los sistemas de supervisión y diagnóstico de fallos al obtener el modelo de un proceso operando en lazo cerrado podrían supervisar mejor el funcionamiento del controlador y determinar posibles fallas en la operación del proceso.

Lamentablemente las técnicas de identificación a lazo abierto no pueden ser aplicadas directamente sobre la planta ya que para un sistema a lazo cerrado las señales de entrada al proceso están correlacionadas con los ruidos de proceso y de medición, condición que se supone no se debe dar para poder aplicar las técnicas de identificación a lazo abierto.

Un sistema lineal invariante en el tiempo con perturbaciones, figura 3.1, es representado con la ecuación (3.1)

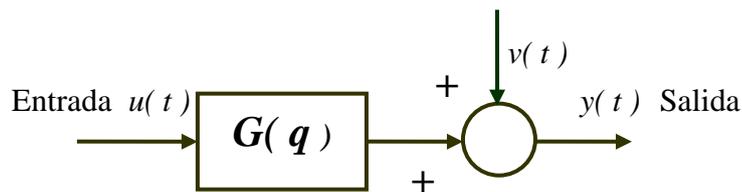


Figura 3.1 Sistema lineal invariante en el tiempo con perturbaciones

$$y(t) = G(q^{-1})u(t) + v(t) \quad (3.1)$$

La estimación de un modelo para un sistema representado por la figura (3.1), mediante técnicas de identificación, considera que la señal de entrada  $u(t)$  tiene que ser lo suficientemente persistente para estimular el proceso en los modos de funcionamiento que interesa conocer a través del modelo.

Si el sistema de la ecuación (3.1) es representado mediante un modelo paramétrico en función de las entradas  $u(t)$  y salidas  $y(t)$  pasadas:

$$y_m(t) = \varphi(t)^T \theta \quad (3.2)$$

Donde

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \dots -y(t-n_a) \quad u(t-1) \dots u(t-n_b)]^T$$

$$\theta = [a_1 \dots a_{n_a} \quad b_1 \dots b_{n_b}]^T$$

El vector de parámetros  $\theta$  es calculado a partir de la minimización del error entre el la salida del proceso real  $y(t)$  y la salida del modelo  $y_m(t)$ , figura 3.2.

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)^2 \quad (3.3)$$

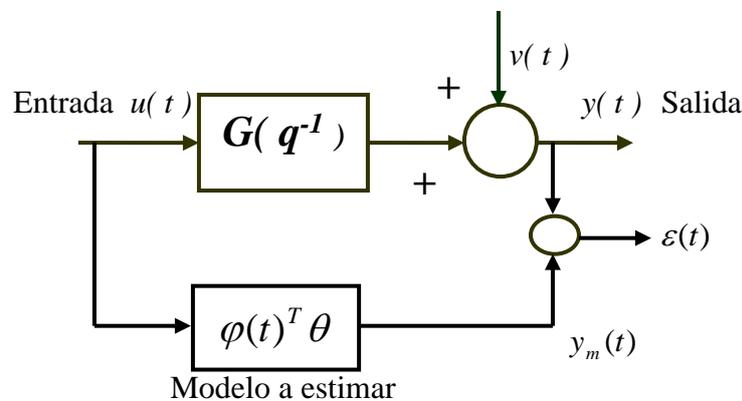


Figura 3.2 Error entre el modelo y el sistema real

La ecuación (3.3) puede ser resuelta por mínimos cuadrados como queda expresada en la ecuación (1.61) del capítulo 1:

$$\hat{\theta} = \left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi(t)^T \right]^{-1} \left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t) \right] \quad (3.4)$$

De forma que si consideramos que el modelo paramétrico de (3.2) describe de manera exacta al sistema representado en (3.1), se tendría que:

$$y(t) = \varphi(t)^T \theta + v(t) \quad (3.5)$$

El vector de parámetros estimados  $\hat{\theta}$  en (3.4) se puede representar reemplazando el término  $y(t)$  por la relación dada en (3.5):

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi(t)^T \right]^{-1} \left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t)(\varphi(t)^T \theta + v(t)) \right] \\ \hat{\theta} &= \left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi(t)^T \right]^{-1} \left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi(t)^T \right] \theta + \left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi(t)^T \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t)v(t) \\ \hat{\theta} &= \theta + \left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi(t)^T \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t)v(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$E\{\hat{\theta}\} = \theta + E\left\{ \left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi(t)^T \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t)v(t) \right\} \quad (3.6)$$

Para que el valor esperado del vector de parámetros estimados  $\hat{\theta}$  corresponda a los parámetros que representan de manera exacta el modelo, ecuación (3.5), se debe cumplir que:

$$E\{\hat{\theta}\} = \theta$$

entonces:

$$E\left\{\sum_{t=1}^N \varphi(t)v(t)\right\} = 0 \quad (3.7)$$

Es decir, el sistema representado por la ecuación (1.10), figura 1.10, podrá ser estimado sólo si los datos experimentales  $\varphi(t)^T$  están incorrelacionados con las perturbaciones  $v(t)$ .

Si consideramos el caso más general para la representación paramétrica de un sistema lineal invariante, ecuación (1.52)

$$y(t) = G(q^{-1})u(t) + H(q^{-1})e(t) \quad (3.8)$$

Una alternativa para estimar los parámetros del modelo, es el método de error de predicción (PEM), tratado en el capítulo 1, donde el error de predicción es expresado por la ecuación (1.65), entonces la ecuación (3.3) sería:

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[ \frac{1}{H(q^{-1})} (y(t) - G(q^{-1})u(t)) \right]^2 \quad (3.9)$$

Los parámetros del modelo estimado se obtienen minimizando (3.9) con respecto a  $\theta$ . Para ello se utilizan rutinas de búsqueda numérica. Los métodos de optimización numérica son muy adecuados para encontrar la solución de minimización de la función  $V_N(\theta)$ .

Para sistemas a lazo cerrado, figura 3.3, la condición de la ecuación (3.7) no se cumple ya que la entrada al proceso  $u(t)$  está correlacionada con el ruido  $v(t)$ , debido a la retroalimentación. No obstante con los métodos PEM es teóricamente posible estimar los parámetros sin sesgo en el caso de lazo cerrado siempre y cuando la optimización numérica encuentre el óptimo global, sin embargo esto en la práctica es difícil de garantizar debido a la no convexidad del problema.

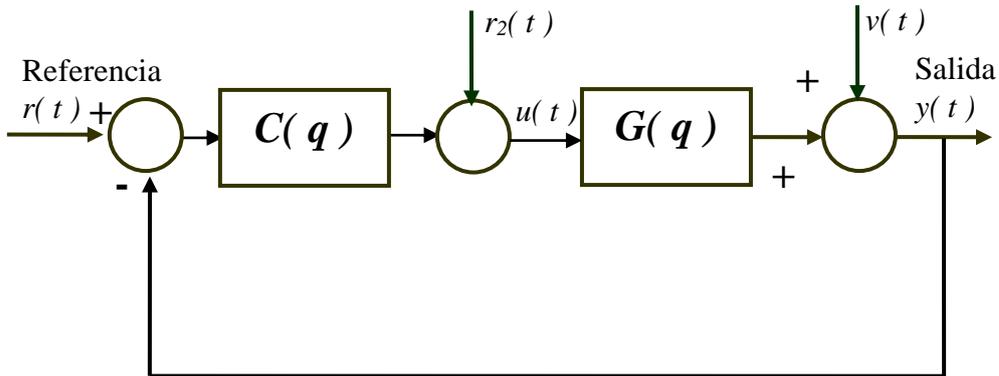


Figura 3.3. Sistema a lazo cerrado

Otra desventaja que presenta el método de error de predicción para estimar el modelo de un proceso a lazo cerrado, es la complejidad de la función de minimización, también conocida de costo, cuando el sistema a lazo cerrado es multivariable. La estrategia que se utiliza en los sistemas MIMO es hacer una identificación para cada salida y todas las entradas del sistema, es decir como si se tratase de un sistema MISO. En la ecuación (3.10) se representa el caso de un sistema MIMO 2 x 2

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= \frac{B_{11}(q^{-1})}{A_1(q^{-1})}u_1(t) + \frac{B_{12}(q^{-1})}{A_1(q^{-1})}u_2(t) \\
 y_2(t) &= \frac{B_{21}(q^{-1})}{A_2(q^{-1})}u_1(t) + \frac{B_{22}(q^{-1})}{A_2(q^{-1})}u_2(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

En el presente capítulo se hará una clasificación de las técnicas convencionales para identificar un proceso a lazo cerrado y nos centraremos en aquellas basadas en los métodos de subespacios. Como aporte del presente proyecto, se presenta un método alternativo de identificación a lazo cerrado basado en subespacios, que nos permite estimar el modelo del proceso sin necesidad de conocer el tipo de controlador que se tiene. Se evalúan las prestaciones del algoritmo propuesto frente a procesos con retardos y se aplica a la identificación de una planta experimental de dos tanques comunicados entre sí.

### 3.1 Métodos de identificación a lazo cerrado

En la figura 3.4 se muestra la estructura en bloques de un sistema a lazo cerrado.

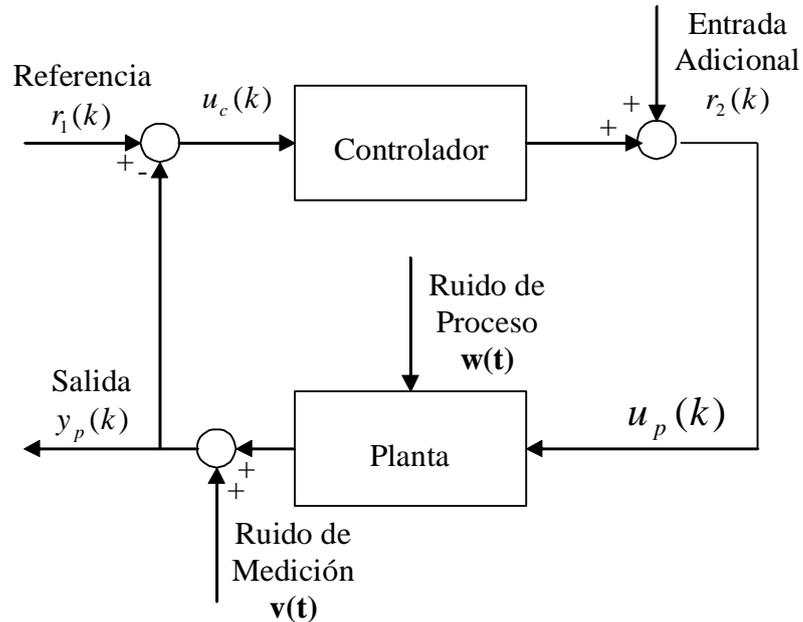


Figura 3.4. Sistema a lazo cerrado

Los métodos desarrollados para determinar el modelo dinámico de la planta en un sistema a lazo cerrado se pueden agrupar en tres:

- a) **Métodos directos** Asumen no conocer la naturaleza de la retroalimentación y estiman el modelo de la planta aplicando técnicas de identificación a lazo abierto, utilizando solamente como señales de medición las entradas y salidas a la planta, ignorando la referencia.
- b) **Métodos indirectos** Asumen que se conoce la retroalimentación, estructura y parámetros del controlador. Inicialmente se determina una función de transferencia a lazo cerrado del sistema, utilizando la referencia,  $r_1(k)$ , y/o la

señal adicional de entrada,  $r_2(k)$ , como excitación del sistema en el proceso de identificación y luego, conociendo el controlador lineal, se determinan los parámetros de la planta.

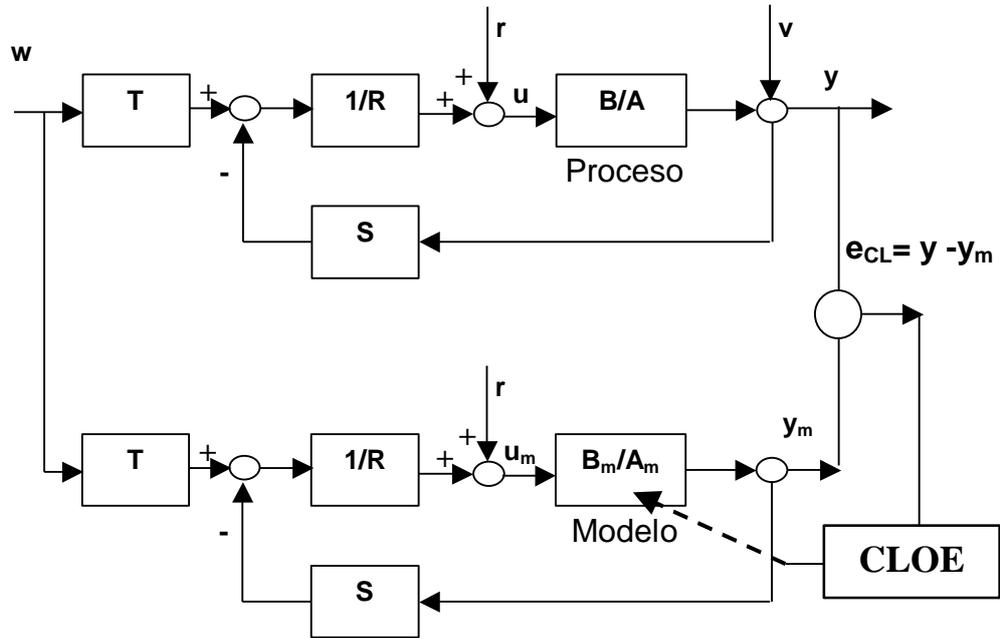
c) **Métodos de entrada – salida.** En este caso la entrada y la salida de la planta,  $u_p(k)$  y  $y_p(k)$ , son considerados como salidas de un sistema que es manejado por la referencia,  $r_1(t)$ , y/o una entrada adicional,  $r_2(t)$ , y el ruido de medición  $v_k(t)$ . Con esta información se identifica un *sistema aumentado* a partir del cual se estima el modelo de la planta.

Para el análisis y estudio de los sistemas a lazo cerrado, se puede partir de un tratamiento matemático similar al realizado en los algoritmos a lazo abierto, de manera de estimar el modelo del sistema a lazo cerrado. Es decir se pueden usar los métodos de error de predicción (PEM), de variables instrumental (IVM) y basados en subespacios (N4SID).

Uno de los métodos aplicados a la identificación de procesos para el diseño de controladores a lazo cerrado, es el método de identificación del error de la salida

Una descripción detallada de la aplicación de los métodos de error de predicción en una identificación de un proceso a partir de información obtenida a lazo cerrado, para los métodos directos, indirectos y de entrada – salida, se puede encontrar en [U. Forsell, L. Ljung, 1999] y en [U. Forsell, 1999].

Uno de los métodos utilizados para la identificación de procesos a lazo cerrado orientados a diseño de controladores es el de error de la salida (Closed Loop Output Error - CLOE), cuya configuración se muestra en la siguiente figura:



Método de identificación del error de la salida en lazo cerrado,

El modelo del proceso es definido por los polinomios  $B_m$  y  $A_m$ , es estimado a partir del error entre la señal de salida del sistema a lazo cerrado y la salida del modelo del proceso también a lazo cerrado. El método considera que el controlador es conocido. Se asume que el proceso puede ser modelado de manera paramétrica siendo su salida:

$$y_m(t) = \varphi(t)^T \theta(t)$$

donde  $y_m$  es una función no lineal de  $\theta$  y :

$$\begin{aligned} \varphi(t)^T &= [-y_m(t-1), \dots, -y_m(t-n), u_m(t-1), \dots, u_m(t-m)] \\ \theta(t)^T &= [\hat{a}_1(t), \dots, \hat{a}_n(t), \hat{b}_1(t), \dots, \hat{b}_m(t)] \end{aligned}$$

y la entrada al modelo del proceso es:

$$u_m(t) = \frac{T}{R}w - \frac{S}{R}y_m + r$$

El algoritmo CLOE obtiene los parámetros del vector  $\theta(t)$  que definen en modelo del proceso minimizando la función:

$$\min_{\theta} V = \min_{\theta} \sum_{t=1}^N e_{CL}(t)^2 = \min_{\theta} \sum_{t=1}^N [y(t) - y_m(t)]^2$$

proporciona un predictor óptimo, es asintóticamente estable para cualquier condición de inicio y da estimas no sesgadas. Puede ser también aplicado para rediseñar el controlador de manera iterativa si se conoce el modelo del proceso.

El método CLOE está orientado a proceso electromecánicos, donde se pueden realizar ensayos a lazo cerrado,

En el presente capítulo enfocaremos la identificación a lazo cerrado a partir de técnicas basadas en subespacios, que nos permiten estimar directamente el modelo del sistema en espacio de estados

### 3.2 Modelo en espacio de estados de un sistema a lazo cerrado.

El modelo en espacio de estados de un sistema a lazo cerrado se puede representar a través de la figura 3.5.

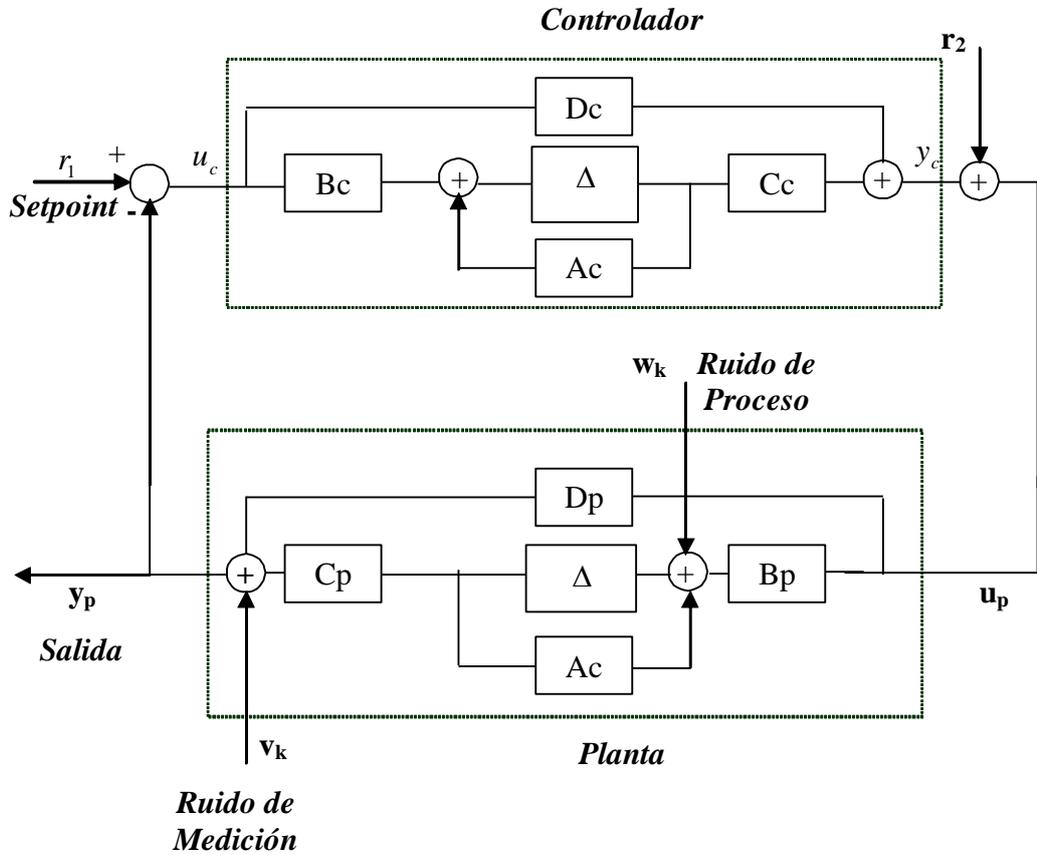


Figura 3.5. Representación en espacio de estados de un sistema a Lazo Cerrado

Para la configuración de la figura 3.5. el modelo en espacio de estados para la planta sería:

$$\begin{aligned}
 x_p(k+1) &= A_p x_p(k) + B_p u_p(k) + w(k) \\
 y_p(k) &= C_p x_p(k) + D_p u_p(k) + v(k)
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

y para el controlador:

$$\begin{aligned}x_c(k+1) &= A_c x_c(k) + B_c u_c(k) \\y_c(k) &= C_c x_c(k) + D_c u_c(k)\end{aligned}\tag{3.12}$$

A partir de las ecuaciones (3.11) y (3.12), se puede encontrar el modelo global en espacio de estados del sistema a lazo cerrado. Para esto, consideramos como señales de entrada:  $r_1(k)$  (señal de referencia.) y  $r_2(k)$  (señal adicional de entrada al proceso); como salidas  $u_p(k)$  (señal de control, entrada al proceso) y  $y_p(k)$  (salida del proceso). El modelo en espacio de estados del sistema a lazo cerrado tendría la forma:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + (B_1 \ B_2) \begin{pmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{pmatrix} + \sigma_w(k) \\ \begin{pmatrix} u_p(k) \\ y_p(k) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{pmatrix} + \sigma_v(k)\end{aligned}\tag{3.13}$$

Donde  $x(k+1) = \begin{pmatrix} x_p(k+1) \\ x_c(k+1) \end{pmatrix}$ , son los estados y  $\sigma_w(k)$  con  $\sigma_v(k)$  vienen hacer las características del ruido para el caso de lazo cerrado.

Para determinar las matrices del modelo en la ecuación (3.13), representamos la salida del proceso  $y_p(k)$ , en función de las entradas  $r_1(k)$  y  $r_2(k)$  y de los estados del proceso y del controlador. Según la ecuación (3.11) la salida del proceso es:

$$y_p(k) = C_p x_p(k) + D_p u_p(k) + w_k(k)$$

Si reemplazamos en la expresión anterior  $u_p(k)$ , por la relación  $u_p(k) = y_c(k) + r_2(k)$ , ver figura (3.5), entonces la salida del proceso a lazo cerrado sería:

$$y_p(k) = C_p x_p(k) + D_p (y_c(k) + r_2(k)) + v_k(k)\tag{3.14}$$

De la ecuación (3.12), podemos reemplazar  $y_c(k)$  en la ecuación (3.14):

$$y_p(k) = C_p x_p(k) + D_p C_c x_c(k) + D_p D_c u_c(k) + D_p r_2(k) + v_k(k) \quad (3.15)$$

Finalmente, de la figura 3.5 se puede observar que la salida del controlador es  $u_c(k) = r_1(k) - y_p(k)$ , si reemplazamos esta expresión en la ecuación (3.15), la salida del proceso se representaría como:

$$\begin{aligned} y_p(k) = & \left[ (I + D_p D_c)^{-1} C_p \quad (I + D_p D_c)^{-1} D_p C_c \right] \begin{bmatrix} x_p(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} + \\ & \left[ (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c \quad (I + D_p D_c)^{-1} D_p \right] \begin{bmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0 & (I + D_p D_c)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k(k) \\ v_k(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

De manera similar al caso anterior, determinamos la entrada al proceso  $u_p(k)$ .

Partiendo de la ecuación (3.11):

$$\begin{aligned} u_p(k) &= y_c(k) + r_2(k) \\ u_p(k) &= C_c x_c(k) + D_c u_c(k) + r_2(k) \\ u_p(k) &= C_c x_c(k) + D_c (r_1(k) - y_p(k)) + r_2(k) \\ u_p(k) &= C_c x_c(k) + D_c r_1(k) - D_c y_p(k) + r_2(k) \end{aligned}$$

Sustituimos  $y_p(k)$  por la expresión de la ecuación (3.16):

$$\begin{aligned} u_p(k) = & \left[ -D_c (I + D_p D_c)^{-1} C_p \quad (I - D_c (I + D_p D_c)^{-1} D_p) C_c \right] \begin{bmatrix} x_p(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} + \\ & \left[ D_c (I - (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c) \quad (I - D_c (I + D_p D_c)^{-1} D_p) \right] \begin{bmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0 & -D_c (I + D_p D_c)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k(k) \\ v_k(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para obtener los estados del proceso reemplazamos en la ecuación (3.11) la expresión de la señal de entrada al proceso  $u_p(k)$ , ecuación (3.17)

$$\begin{aligned}
 x_p(k+1) = & \left[ A_p - B_p D_c (I + D_p D_c)^{-1} C_p \quad B_p C_c - B_p D_c (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c \right] \begin{bmatrix} x_p(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} + \\
 & \left[ B_p D_c (I - (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c) \quad B_p (I - (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c) \right] \begin{bmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{bmatrix} + \\
 & \left[ I \quad -B_p D_c (I + D_p D_c)^{-1} \right] \begin{bmatrix} w_k(k) \\ v_k(k) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Los estados del controlador se obtienen sustituyendo  $y_p(k)$  de la ecuación (3.16), en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 x_c(k+1) &= A_c x_c + B_c u_c \\
 x_c(k+1) &= A_c x_c + B_c (r_1(k) - y_p(k))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_c(k+1) = & \left[ -B_c (I + D_p D_c)^{-1} C_p \quad A_c - B_c (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c \right] \begin{bmatrix} x_p(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} + \\
 & \left[ B_c (I - (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c) \quad -B_c (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c \right] \begin{bmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{bmatrix} + \\
 & \left[ 0 \quad -B_c (I + D_p D_c)^{-1} \right] \begin{bmatrix} w_k(k) \\ v_k(k) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

A partir de las ecuaciones: (3.16), (3.17), (3.18) y (3.19) encontramos que las matrices del modelo global del sistema a lazo cerrado, ecuación (3.13) son:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c (I + D_p D_c)^{-1} C_p & B_p C_c - B_p D_c (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c \\ -B_c (I + D_p D_c)^{-1} C_p & A_c - B_c (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c \end{bmatrix} \\
 B &= [B_1 \quad B_2] = \begin{bmatrix} B_p D_c (I - (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c) & B_p (I - D_c (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c) \\ B_c (I - (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c) & -B_c (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_c (I + D_p D_c)^{-1} C_p & (I - D_c (I + D_p D_c)^{-1} C_c) \\ (I + D_p D_c)^{-1} C_p & (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c \end{bmatrix} \\
 D &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_c (I - (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c) & (I - D_c (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c) \\ (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c & (I + D_p D_c)^{-1} D_p D_c \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Comparando las ecuaciones (3.13) y (3.20), podemos ver que la dinámica identificada a lazo cerrado se puede representar en términos de las matrices de la planta y del controlador. Para efectos de cálculo se debe considerar que la expresión  $(I + D_p D_c)$  es invertible. Además, debemos considerar que la representación no es única ya que se puede obtener un sistema equivalente con alguna matriz de transformación  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{aligned} A_T &= TAT^{-1} \\ B_T &= [B_1 \quad B_2] = TB \\ C_T &= \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = CT^{-1} \\ D_T &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = D \end{aligned} \tag{3.21}$$

A partir de la ecuación (3.20) se han desarrollado varios métodos basados en subespacios con la finalidad de estimar los modelos en espacio de estados de la planta y del controlador. En la siguiente sección abordaremos las características más importantes de los métodos desarrollados

### **3.3 Métodos de identificación para sistemas a lazo cerrado basados en subespacios.**

La identificación a lazo cerrado en muchos casos es ventajoso y/o necesario debido a circunstancias de operación de la planta. Sin embargo, dada las características propias de retroalimentación algunos métodos convencionales para estimación de modelos a lazo abierto no se puedan utilizar. En cambio, los métodos basados en subespacios se muestran bastante prometedores para obtener modelos fiables en espacio de estados a partir de experimentos a lazo cerrado.

En la presente sección se revisarán, los algoritmos más importantes desarrollados en base a técnicas de subespacios, para estimar el modelo en espacio de estados de una planta operando a lazo cerrado, los algoritmos se agrupan dentro de las tres categorías que se han descrito en la sección 3.1.

### 3.3.1. Métodos directos

La estimación del modelo de un proceso a lazo cerrado a partir de métodos directos, se realiza asumiendo que la retroalimentación propia de los sistemas a lazo cerrado no existe, la identificación del proceso se ejecuta con métodos de identificación a lazo abierto. El modelo se obtiene a partir de las señales de entrada y salida del proceso, de acuerdo con la figura 3.6 serían las salidas del controlador  $u(k)$  y las salidas propias del sistema a lazo cerrado  $y(k)$ . El modelo en espacio de estados quedaría expresada por la ecuación (3.11):

$$\begin{aligned}x_p(k+1) &= A_p x_p(k) + B_p u(k) + w(k) \\ y(k) &= C_p x_p(k) + D_p u(k) + v(k)\end{aligned}$$

Las matrices del proceso:  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$ ,  $D_p$  se obtienen utilizando los algoritmos de subespacios para sistemas a lazo abierto, algunos se han estudiado en el capítulo 2.

### 3.3.2. Métodos indirectos

Los métodos indirectos son aquellos que estiman el modelo de la planta asumiendo conocido el modelo del controlador. En [V. Overschee y B. De Moor, 1996] se exponen algoritmos que pueden ser clasificados como métodos indirectos. Estiman el modelo en espacio de estados de la planta a partir de las mediciones de  $u_k$  y  $y_k$ , ver figura 3.6, y suponen conocidos los primeros  $i$  parámetros de Markov del controlador:  $h_i = C_c A_c^{i-1} B_c$  para  $i \neq 0$  y  $h_0 = D_c$ . Es decir es necesario conocer la respuesta impulsiva del controlador, la cual se puede obtener a partir del modelo en espacio de estados del controlador, lo cual no siempre es posible. Si bien es cierto los parámetros del controlador son ajustados para operar el proceso y se conocen sus valores a priori, el problema se presenta en la industria cuando los parámetros son manipulados durante la operación del proceso de acuerdo a circunstancias de funcionamiento, muchas veces sin criterios de ingeniería sino por decisión propia del operador y los cambios no son debidamente registrados, de manera que el proceso termina funcionando con parámetros diferentes a los iniciales y de los que se desconocen sus valores. Otro problema muy frecuente que se presenta en la industria, es que los equipos que se utilizan para controlar los procesos, son suministrados con

algoritmos o estructuras de control que son desconocidas para el usuario; normalmente el operador ingresa al equipo de control parámetros estándares como pueden ser los valores de las constantes proporcional, integral y derivativa de un control PID, sin embargo se desconoce la estructura de control que tiene incorporado el equipo controlador.

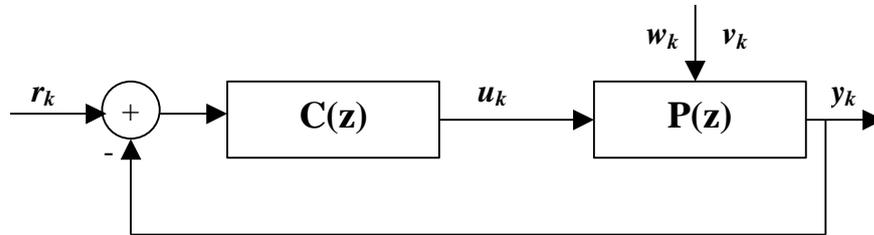


Figura 3.6. Representación estándar de un sistema a Lazo cerrado

La razón principal por la que los algoritmos basados en subespacios descritos en el capítulo 2 del presente proyecto, no pueden trabajar directamente con las señales obtenidas a lazo cerrado es que las perturbaciones  $w_k$ ,  $v_k$  y la entrada al proceso  $u_k$  están correlacionadas. Para salvar este problema los algoritmos para lazo cerrado, desarrollados en [V. Overechee y B. De Moor, 1996], introducen dos nuevas matrices:

$$M_{i/2i-1} = U_{i/2i-1} + H_i^c Y_{i/2i-1} \quad (3.22)$$

$$M_{i+1/2i-1} = U_{i+1/2i-1} + H_{i-1}^c Y_{i+1/2i-1} \quad (3.23)$$

Donde:

$$H_i^c \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} D_c & 0 & \dots & 0 \\ C_c B_c & D_c & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ C_c A_c^{i-2} & C_c A_c^{i-3} B_c & \dots & D_c \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$U_{0/i-1} \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ u_{i-1} & u_i & u_{i+1} & \cdots & u_{i+j-2} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$Y_{0/i-1} \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{j-1} \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ y_{i-1} & y_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+j-2} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

La matriz definida en (3.24) contiene los parámetros de Markov del controlador, se asume que  $j \rightarrow \infty$ , y que el índice  $i$ , definido por el usuario, debe ser mayor que el orden del sistema a ser identificado.

Las matrices de datos de las ecuaciones (3.22) y (3.23) no están correlacionadas con los ruidos  $v_k$  y  $w_k$ , este hecho facilita la aplicación de proyecciones ortogonales a partir de las cuales se estiman los estados del proceso y finalmente se obtienen las matrices  $A_p, B_p, C_p, D_p$  que representan el modelo del proceso.

Una descripción detallada de los algoritmos se encuentra en [V. Overschee y B. De Moor, 1996]. La versión completa del programa en Matlab que implementa los algoritmos es: **CLID.M**, *Closed loop subspace system identification*, y se puede encontrar en: <ftp://ftp.esat.kuleuven.ac.be/pub/sista/vanoverschee/>

### 3.3.3. Métodos de entrada – salida.

Se caracterizan por identificar el modelo global del sistema a lazo cerrado, considerarlo como un sistema *aumentado*, y a partir de éste, estimar el modelo de la planta.

En [M. Verhaegen, 1993], se desarrolla un método basado en la reducción analítica del modelo global del sistema a lazo cerrado, ecuación (3.20). El método supone conocido el orden del controlador  $n_c$  y considera como incógnita el orden del proceso  $n_p$ , siendo los estados del sistema a lazo cerrado:  $x(k) \in R^{n_p+n_c}$ . Utilizando

reglas de concatenación y de inversión se obtiene analíticamente, de la ecuación (3.20), una expresión para el proceso, [M. Verhaegen, 1993], de la forma:

$$P = \left[ \begin{pmatrix} A & -B_1 D_{11}^{-1} C_1 \\ 0 & A - B_1 D_{11}^{-1} C_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 D_{11}^{-1} \\ B_1 D_{11}^{-1} \end{pmatrix}, (C_2 \quad -D_{21} D_{11}^{-1} C_1), (D_{21} D_{11}^{-1}) \right] \quad (3.27)$$

Las representaciones en espacio de estado de la planta que se han obtenido en la ecuación (3.27), es *no mínima*. Si analizamos el modelo de la planta, y obtenemos una representación equivalente aplicando una matriz de transformación:

$T = \begin{pmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{pmatrix}$ , el proceso se representaría como:

$$P = \left[ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A - B_1 D_{11}^{-1} C_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 D_{11}^{-1} \end{pmatrix}, (C_2 \quad C_2 - D_{21} D_{11}^{-1} C_1), D_{21} D_{11}^{-1} \right]$$

En este caso tenemos un sistema con  $n_p + n_c$  modos no controlables. Descartando estos modos el modelo de la planta se reduce a:

$$P = \left[ (A - B_1 D_{11}^{-1} C_1), (B_1 D_{11}^{-1}), (C_2 - D_{21} D_{11}^{-1} C_1), D_{21} D_{11}^{-1} \right] \quad (3.28)$$

Esta reducción del modelo de la planta es válida cuando se hace uso de un modelo global en espacio de estados, estimado bajo las consideraciones descritas en la sección 3.2, es decir basado en el modelo de la ecuación (3.13). Sin embargo, si conociéramos el modelo global en espacio de estados exacto del sistema a lazo cerrado, nos daríamos cuenta que el modelo en (3.28) es *no mínimo*. Para salvar esto, sustituimos las expresiones obtenidas para  $A$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_{11}$ , y  $D_{21}$  en la ecuación (3.20) del modelo global, en la ecuación (3.28), obteniendo:

$$P = \left[ \begin{pmatrix} A_p & 0 \\ -B_c C_p & A_c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_p \\ -B_c D_p \end{pmatrix}, (C_p \quad 0), D_p \right] \quad (3.29)$$

La parte observable de este modelo en espacio de estados *no mínimo*, es el modelo original de la planta en espacio de estados de la ecuación (3.22).

En resumen, el método descrito identifica primero un modelo global en espacio de estados de la parte determinística del sistema representado en la figura 3.5. Para este propósito se puede utilizar los métodos de identificación utilizados en lazo abierto. Será necesario definir el orden total del sistema, es decir la suma del orden del proceso y del orden del controlador. El orden de la planta y su modelo se obtienen reduciendo o truncando el modelo global, utilizando las ecuaciones (3.28) y (3.29).

El método descrito es evaluado y comparado con los algoritmos presentados en [V. Overschee y B. De Moor, 1996], y presenta desventajas debido al truncamiento del modelo global ya que esto presupone conocer el orden del controlador y estimar el orden del proceso a partir del modelo del sistema obtenido identificando en forma conjunta el sistema a lazo cerrado.

### 3.3.4. Método propuesto: IdCL.

En el presente trabajo se propone un método alternativo para la identificación de un proceso a lazo cerrado. El algoritmo considera la identificación del proceso a lazo cerrado como un sistema MIMO, considerando como entradas:  $r_1(k)$  (señal de referencia.); como salidas  $u_p(k)$  (señal de control, entrada al proceso) y  $y_p(k)$  (salida del proceso), ver figura 3.5.

El método se desarrolla en tres etapas:

- a) Se identifica el sistema a lazo cerrado como un sistema MIMO, utilizando el algoritmo PI-MOESP (Past Inputs – MOESP) cuya característica principal es utilizar como variables instrumental las entradas pasadas, con la finalidad obtener un modelo libre de perturbaciones. Se consideran como *entradas* las señales de referencia del sistema a lazo cerrado  $r_1(k)$  y como *salidas* la señal de control  $u_p(k)$  y la salida del proceso  $y_p(k)$ , figura 3.7.

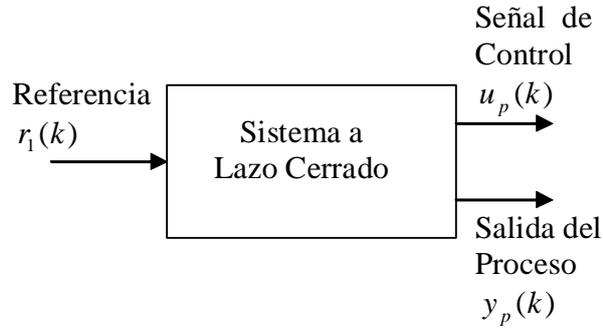


Figura 3.7. Identificación del sistema a Lazo Cerrado

La ecuación matemática que describe el sistema a lazo de la figura 3.7 es:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + (B_1 \ B_2)r_1(k) + \sigma_w(k) \\ \begin{pmatrix} u_p(k) \\ y_p(k) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} r_1(k) + \sigma_v(k) \end{aligned} \quad (3.30)$$

obtenida a partir de las ecuaciones (3.11), (3.12); de manera similar a la ecuación (3.13)

De la ecuación (3.30) se construye una expresión recursiva similar a la ecuación (2.36), para  $s$  mediciones de las entradas y salidas, siendo el número total de muestras:  $N_T = N + s - 1$ :

$$Y_{s,N} = \Gamma_s X_{i,N} + H_s U_{s,N} + \Phi_{s,N} \quad (3.31)$$

donde  $\Phi_{s,N}$ , es la matriz Hankel del ruido del sistema a lazo cerrado y está en

función de  $\begin{bmatrix} w_k(k) \\ v_k(k) \end{bmatrix}$ , ver ecuaciones (3.16), (3.17), (3.18) y (3.19). Para salvar el

inconveniente del ruido utilizamos el algoritmo de identificación PI-MOESP, que introduce como variable instrumental las mediciones pasadas de las entradas, obtenidas de dividir las matrices Hankel de las ecuaciones (3.32) y (3.33) en submatrices.

$$U_{s,N} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & & & u_N \\ u_2 & u_3 & & & u_{N+1} \\ & & & & \\ & & & & \\ u_i & u_{i+1} & & & u_{N+i-1} \\ u_{i+1} & u_{i+2} & & & u_{N+i} \\ u_{i+2} & u_{i+3} & & & u_{N+i+1} \\ & & & & \\ & & & & \\ u_s & u_{s+1} & & & u_{N+s-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \overline{\hspace{1cm}} \\ \updownarrow U_P \\ \overline{\hspace{1cm}} \\ \updownarrow U_F \\ \overline{\hspace{1cm}} \end{matrix} \quad (3.32)$$

$$Y_{s,N} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & & & y_N \\ y_2 & y_3 & & & y_{N+1} \\ & & & & \\ & & & & \\ y_i & y_{i+1} & & & y_{N+i-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & & & y_{N+i} \\ y_{i+2} & y_{i+3} & & & y_{N+i+1} \\ & & & & \\ & & & & \\ y_s & y_{s+1} & & & y_{N+s-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \overline{\hspace{1cm}} \\ \updownarrow Y_P \\ \overline{\hspace{1cm}} \\ \updownarrow Y_F \\ \overline{\hspace{1cm}} \end{matrix} \quad (3.33)$$

Las matrices  $\Gamma_s$  y  $H_s$  de la ecuación (3.31) son la matriz de observabilidad extendida, ecuación (1.79), y la matriz Toeplitz de la ecuación (1.81) respectivamente.

Luego de dividir las matrices de las ecuaciones (3.32) y (3.33) en las submatrices  $U_p$  y  $U_F$ ,  $Y_p$  y  $Y_F$ , de forma que:  $s = 2 * i$ , siendo  $i > n$ ,

$$U_P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & \cdots & u_N \\ u_2 & u_3 & \cdots & \cdots & u_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_i & u_{i+1} & \cdots & \cdots & u_{N+i-1} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$U_F = \begin{bmatrix} u_{i+1} & u_{i+2} & \cdots & \cdots & u_{i+N} \\ u_{i+2} & u_{i+3} & \cdots & \cdots & u_{i+N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2i} & u_{2i+1} & \cdots & \cdots & u_{2i+N-1} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

podemos construir la expresión:

$$Y_F = \Gamma_i X_{i,N} + H_i U_F + \Phi_F \quad (3.36)$$

Con el objetivo de eliminar la entrada  $U_F$  de (3.36) usamos una proyección de las salidas sobre la perpendicular del espacio fila de la matriz  $U_F$ ,  $\Pi_{U_F^\perp} = I - U_F^T (U_F U_F^T)^{-1} U_F$ , similar a la ecuación (2.39)

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} + N_F \Pi_{U_F^\perp} \quad (3.37)$$

De acuerdo con la figura 3.7 y con las consideraciones hechas en los algoritmos de identificación basados en subespacios, capítulo 2, podemos decir que los disturbios son estadísticamente independientes de la entrada  $r_1(k)$ , por lo tanto son no correlacionados. Esto permite que si multiplicamos la ecuación (3.32) por la variable instrumental  $W_p = U_p$ :

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_p^T = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U_F^\perp} W_p^T + N_F \Pi_{U_F^\perp} W_p^T, \quad (3.38)$$

y se considera que no existe correlación entre las entradas con el disturbio:

$$E[\Phi_f u_p^T] = 0,$$

entonces el factor que representa al disturbio tiende a cero cuando el número de mediciones tiende a infinito [M. Viberg, 1997], [M. Jansson, 1996]

$$\lim_{N_T \rightarrow \infty} \frac{1}{N_T} N_F \Pi_{U_F^\perp} W_p^T = 0 \quad (3.39)$$

Por lo tanto, se obtiene la ecuación:

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T = \Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U^T} W_P^T \quad (3.40)$$

Bajo las mismas consideraciones hechas para la ecuación (2.22), con relación a las características de la señal de excitación [M. Verhaegen, 1993], podemos determinar que:

$$\text{rango} (X_{i,N} \Pi_{U^T} W_P^T) = n \quad (3.41)$$

Así, los  $n$  principales vectores singulares izquierdos de:

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T, \quad (3.42)$$

nos permite obtener de manera consistente la matriz de observabilidad extendida  $\Gamma_i$ .

A partir de la ecuación (3.42) y aplicando una factorización **RQ** de los datos de entrada y salida previamente ordenados de la forma:

$$\begin{pmatrix} U_F \\ U_p \\ Y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

podemos encontrar una relación para el operador geométrico  $\Pi_{U_F^\perp} = I - U_F^T (U_F U_F^T)^{-1} U_F$ :

$$\Pi_{U_F^\perp} = I - Q_1^T R_{11}^T (R_{11} Q_1 Q_1^T R_{11}^T)^{-1} R_{11} Q_1 \quad (3.44)$$

además, considerando la ortogonalidad de las matrices  $Q$  en la ecuación (3.43) tenemos que:

$$\begin{aligned} Q_x Q_x^T &= I \\ Q_y Q_x^T &= 0 \end{aligned}$$

y dado que  $R_{11}$  ( $m_i \times m_i$ ) es una matriz no singular, la expresión  $[R_{11}^T (R_{11} R_{11}^T)^{-1} R_{11}]$  es igual a  $R_{11}^T (R_{11}^T)^{\dagger} = I$ , entonces el operador geométrico sería igual a:

$$\Pi_{U_F^\perp} = I - Q_1^T Q_1 \quad (3.45)$$

Por lo tanto la ecuación (3.42) se puede expresar como:

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T = \begin{bmatrix} R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - Q_1^T Q_1 & \\ & Q_1^T & Q_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{21}^T \\ R_{22}^T \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

y resolviendo tenemos que:

$$Y_F \Pi_{U_F^\perp} W_P^T = R_{32} R_{22}^T \quad (3.47)$$

Es decir, de la ecuación (3.40):

$$\Gamma_i X_{i,N} \Pi_{U^T} W_P^T = R_{32} R_{22}^T$$

podemos obtener la matriz de Observabilidad extendida, descomponiendo en valores singulares (SVD) la matriz  $R_{32}$  de la ecuación (3.43):

$$R_{32} = \begin{bmatrix} U_n & U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & S_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_0^T \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

En la ecuación anterior  $S_n$  contiene los valores singulares de mayor valor que determinan el orden del sistema global a lazo cerrado propuesto en la ecuación (3.30), por lo tanto la matriz de observabilidad extendida se puede obtener de  $U_n$ :

$$\Gamma_i = U_n \quad (3.49)$$

quedando los siguientes términos de la ecuación (3.40) expresados como:

$$X_{i,N} \Pi_{U^T} W_P^T = S_n V_n^T R_{22}^T \quad (3.50)$$

Luego de determinar la matriz de observabilidad extendida  $\Gamma_i$  podemos, de manera similar al algoritmo PO-MOESP explicado en el capítulo 2, obtener las matrices  $\mathbf{A}_T$  y  $\mathbf{C}_T$  (equivalentes de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{C}$ ) haciendo uso de la propiedad de desplazamiento invariable que presenta  $U_n$ , ecuaciones (2.30) y (2.31):

$$\begin{aligned} A_T &= (J_1 U_n)^\dagger J_2 U_n \\ C_T &= J_3 U_n \end{aligned} \quad (3.51)$$

Las matrices  $\mathbf{B}_T$  y  $\mathbf{D}$ , se estiman conforme al algoritmo *Moesp\_SID*, descrito en el capítulo 2. Es decir resolviendo la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{i+1} \\ y_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_T \\ C_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_T \\ D \end{bmatrix} [u_i] \quad (3.52)$$

Se estiman primero los estados  $\tilde{X}_i$ ,  $\tilde{X}_{i+1}$  y las señales  $u_i$  y  $y_i$  a partir de:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_i &= \tilde{X}_T(:, 1 : N - 1), \\ \tilde{X}_{i+1} &= \tilde{X}_T(:, 2 : N), \\ u_i &= U_F(1 : m, 1 : N - 1), \\ y_i &= Y_F(1 : l, 1 : N - 1) \end{aligned} \quad (3.53)$$

siendo  $\tilde{X}_T$ :

$$\tilde{X}_T = \Gamma_i^\dagger Z_i \quad (3.54)$$

donde  $(\cdot)^\dagger$  es la Pseudo Inversa de Moore-Penrose y  $Z_i$ :

$$Z_i = R_{32} R_{22}^\dagger U_p \quad (3.55)$$

Otra alternativa para calcular las matrices  $\mathbf{B}_T$  y  $\mathbf{D}$ , es mediante los algoritmos propuestos en [M. Verhaegen, A. Varga, 1994] y que se describen en las ecuaciones (2.51), (2.52) y (2.53). Estas ecuaciones están implementadas como las funciones: DAC2B y DAC2BD, en la Toolbox sobre identificación de modelos en espacio de estados (State-Space Model Identification –SMI-Toolbox) desarrollado por [M. Verhaegen, A. Varga, 1994].

- b) El segundo paso consiste en estimar, a partir de la referencia  $r_1(k)$  y el modelo obtenido en el paso anterior, las señales de control  $\tilde{u}_p(k)$  (entrada al proceso) y la salida del proceso  $\tilde{y}_p(k)$ , las cuales se encontrarían libres de la influencia de perturbaciones, es decir no están correlacionadas con los ruidos  $v_k(k)$  y  $w_k(k)$ .

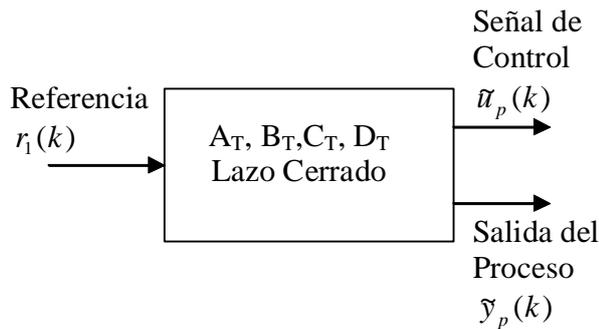


Figura 3.8. Obtención de las señales de control  $\tilde{u}_p(k)$  y se salida  $\tilde{y}_p(k)$  a partir del modelo del sistema a lazo cerrado

Conociendo las matrices del modelo estimado en el paso anterior:  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $C_T$  y  $D_T$ , podemos simular el funcionamiento del proceso a lazo cerrado sin influencia de ruido externo, de modo que las salidas que se obtengan:  $\begin{pmatrix} \tilde{u}_p(k) \\ \tilde{y}_p(k) \end{pmatrix}$ , no estén correlacionadas con los ruidos  $v_k(k)$  y  $w_k(k)$ , ecuación (3.56).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_T x(k) + B_T r_1(k) \\ \begin{pmatrix} \tilde{u}_p(k) \\ \tilde{y}_p(k) \end{pmatrix} &= C_T x(k) + D r_1(k) \end{aligned} \quad (3.56)$$

- c) En el tercer paso se estima el modelo del proceso a partir de las señales de control y las salidas del sistema a lazo cerrado, obtenidas en el paso b).

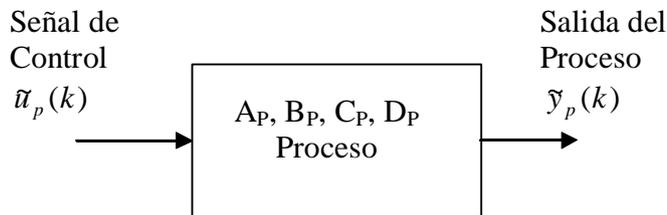


Figura 3.9. Identificación del modelo del proceso

En este caso se trata de identificar el proceso como un sistema a lazo abierto, de la forma:

$$\begin{aligned} x_p(k+1) &= A_p x_p(k) + B_p \tilde{u}_p(k) \\ \tilde{y}_p(k) &= C_p x_p(k) + D \tilde{u}_p(k) \end{aligned} \quad (3.57)$$

siendo las señales  $\tilde{u}_p(k)$  y  $\tilde{y}_p(k)$ , las señales estimadas en el paso b). Las matrices del modelo del proceso  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  y  $D$ , se obtienen aplicando algoritmos de identificación a lazo abierto, Se puede aplicar cualquiera de los métodos descritos en el capítulo 2 del presente trabajo. Sin embargo, para

efectos de algoritmo ***IdCL*** propuesto, se ha creído conveniente utilizar el Moesp\_SID, desarrollado en la sección 2.3.3 del capítulo 2, ya que trabaja mejor cuando las señales no son ruidosas.

La principal ventaja del método ***IdCL*** es que no se necesita conocer el controlador. El orden del sistema a lazo cerrado es estimado directamente del algoritmo, al igual que el orden del proceso determinado en el paso c. Existen diversos casos prácticos en los cuales no es posible conocer el controlador. Por ejemplo, aquellos sistemas que son operados manualmente, donde un operador cambia las variables de control de manera de mantener los parámetros del proceso dentro de un rango de operación, es claro que bajo estas circunstancias el proceso está a lazo cerrado, pero no se tiene un modelo que describa el controlador, es decir la toma de decisiones del operador.

### **3.4 Caso de Aplicación del Algoritmo IdCL**

Como aplicación práctica del algoritmo propuesto IdCL, se presenta la identificación de un sistema a lazo cerrado. El sistema es una planta experimental y está propuesto en [R. Hakvoort, 1990]. Consiste de dos platos circulares girados por un servo motor con un eje flexible. El proceso discreto tiene como función de transferencia:

$$P(z) = \frac{10^{-3}(0.98z^4 + 12.99z^3 + 18.59z^2 + 3.30z - 0.02)}{z^5 - 4.4z^4 + 8.09z^3 - 7.83z^2 + 4z - 0.86}$$

Se considera que la salida del proceso es perturbada por un ruido blanco de media cero, filtrado por un filtro lineal:

$$D(z) = \frac{0.01(2.89z^2 + 11.13z + 2.74)}{z^3 - 2.7z^2 + 2.61z - 0.9}$$

El controlador es sintonizado con la técnica  $H_\infty$  que se describe es [Bongers y Bosgra, 1990] y es igual a:

$$C(z) = \frac{0.61z^4 - 2.03z^3 + 2.76z^2 - 1.83z + 0.49}{z^4 - 2.65z^3 + 3.11z^2 - 1.75z + 0.39}$$

Para la simulación del proceso a lazo cerrado se elaboró el diagrama de bloques que se muestra en la figura 3.8. La simulación se realizó en Simulink y se hicieron pruebas con ruido y sin ruido.

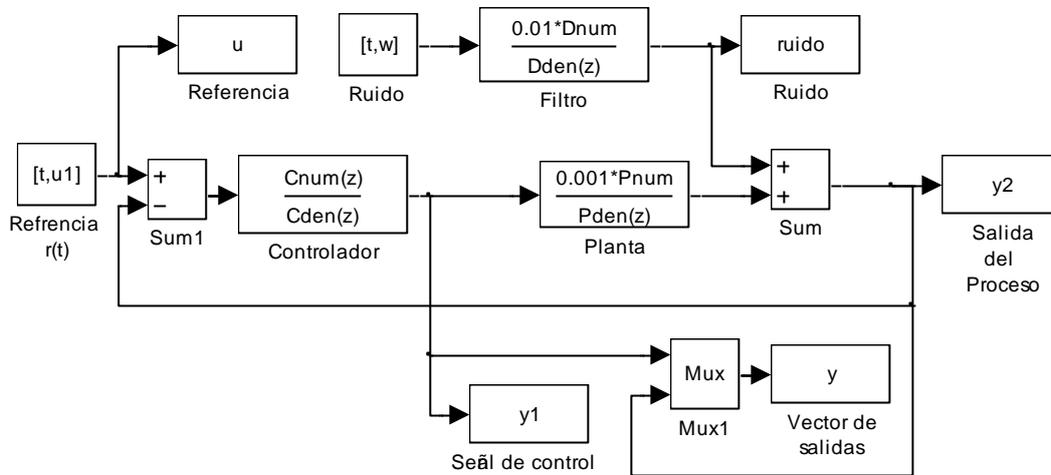


Figura 3.8. Modelo del sistema a lazo cerrado usado en la Identificación

### Identificación sin Ruido

Para la simulación se utiliza como señal de entrada la referencia del sistema a lazo cerrado, en la figura 3.9 se presenta la característica de la señal:

$$u_1 = idinput(Ndat, 'prbs', [3 \ 0.005], [0 \ 1]);$$

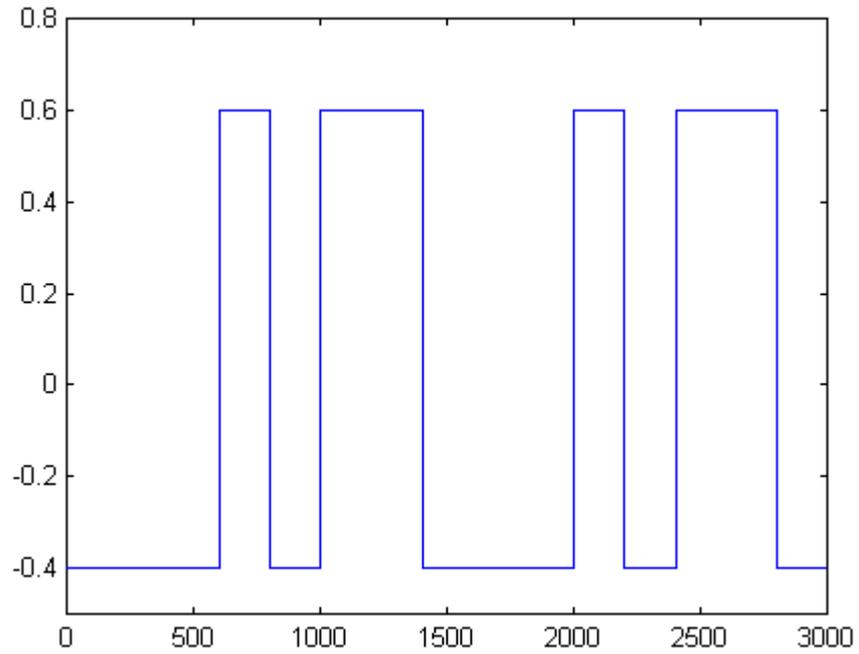


Figura 3.9. Señal de referencia para la simulación

La respuesta del sistema simulado a lazo cerrado se muestra en la figura 3.10, se pueden observar las señales de control y la salida del proceso

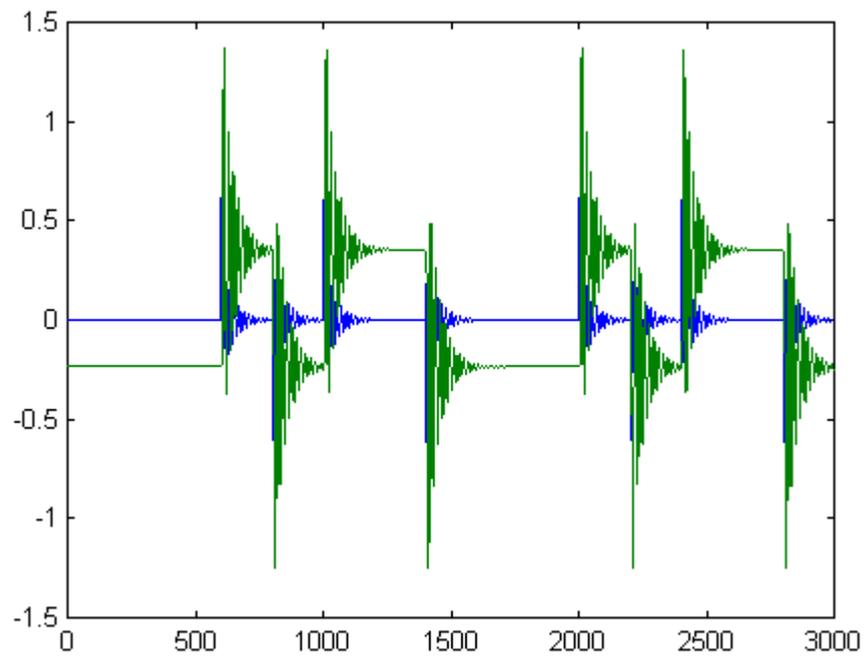


Figura 3.10. Salida de la simulación del sistema a lazo cerrado.  
Señal de Control: Azul  
Respuesta del Proceso: Verde

El primer paso es determinar el modelo global del sistema a lazo cerrado. El orden se determina a partir de los valores singulares que se muestran en la figura 3.11.

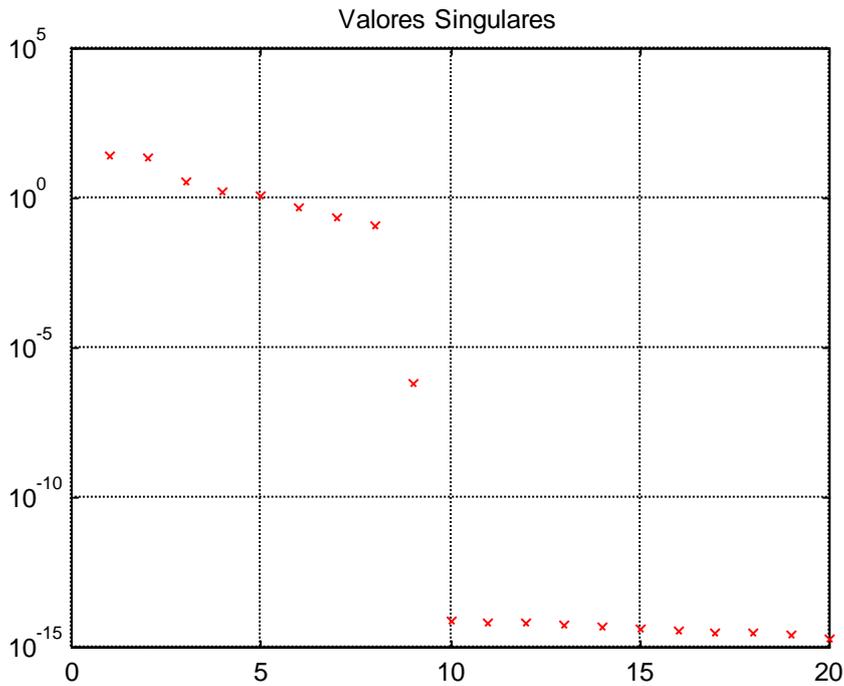


Figura 3.11. Valores singulares del sistema global a lazo cerrado

El orden del sistema es el número de valores singulares que son relativamente grandes, en nuestro caso, de acuerdo con la figura 3.11, podemos notar dos grupos claramente distanciados, asumimos como orden del sistema a lazo cerrado el número de valores singulares del primer grupo:  $n_s = 8$ . Luego, el algoritmo estima las matrices  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$  y  $D_s$  del modelo global del sistema.

El segundo paso de la identificación es simular el funcionamiento del sistema global identificado, estimulándolo con la de referencia, ver figura 3.9 La respuesta de la simulación se presenta en la figura 3.12.

El modelo del proceso se estima a partir de una identificación a lazo abierto de la señal de control y la respuesta que se obtienen de la simulación anterior, señales de la figura 3.12. El orden del proceso se calcula a partir de los valores singulares de la figura 3.13. En la figura se puede apreciar tres zonas para los valores singulares, el número de valores singulares de la primera zona, que serían los de mayor valor, son cinco, por lo tanto consideramos el orden del proceso  $n_p = 5$ .

En las figuras 3.14 se muestra una comparación entre el diagrama de Bode del modelo estimado y del proceso real. Igualmente, en la figura 3.15 se compara la posición de los polos del proceso real con el obtenido por identificación. En ambas figuras se puede observar que el desempeño del algoritmo de identificación es aceptable y da buenos resultados.

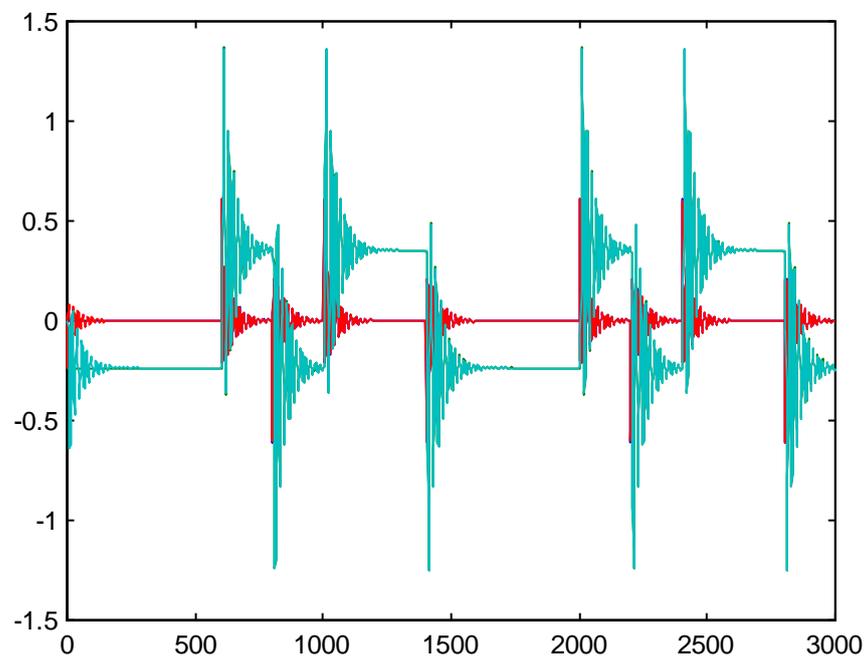
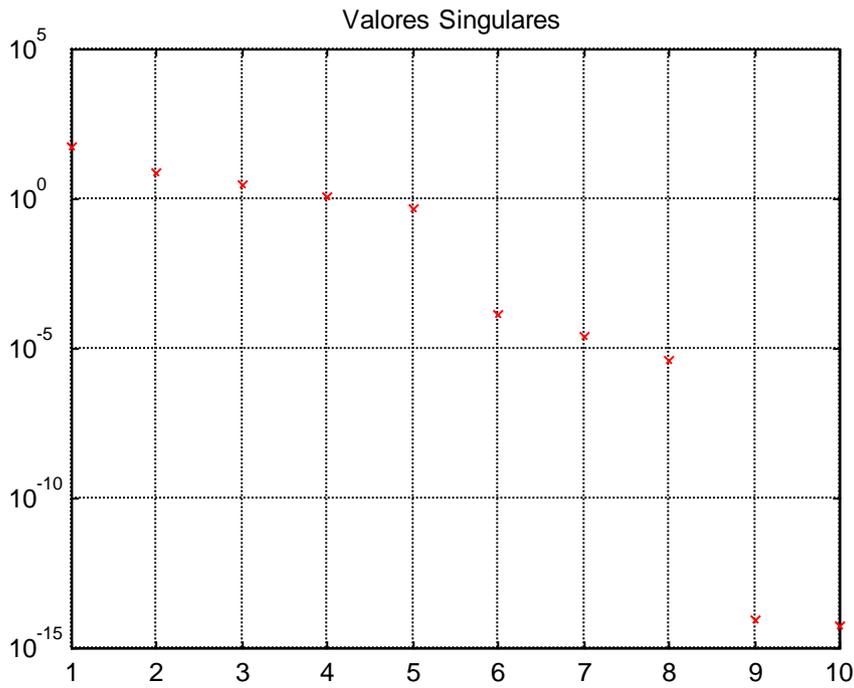


Figura 3.12. Respuesta del modelo del sistema global identificado  
Rojo: Señal de control  
Celeste: Salida del proceso



3.13. Valores singulares para seleccionar el orden del proceso.

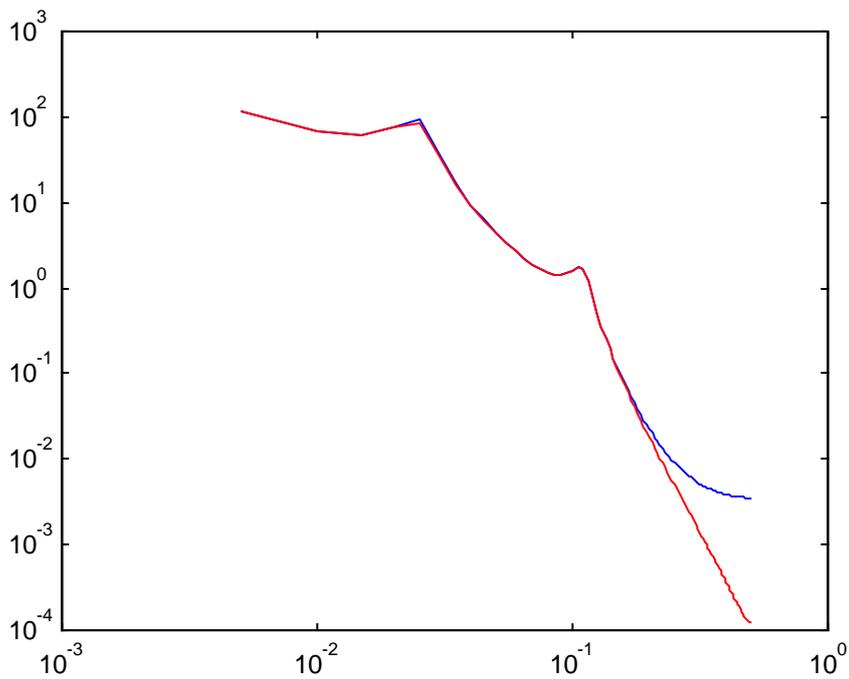


Figura 3.14. Comparación del diagrama de Bode.  
Proceso real : Rojo  
Proceso estimado: Azul

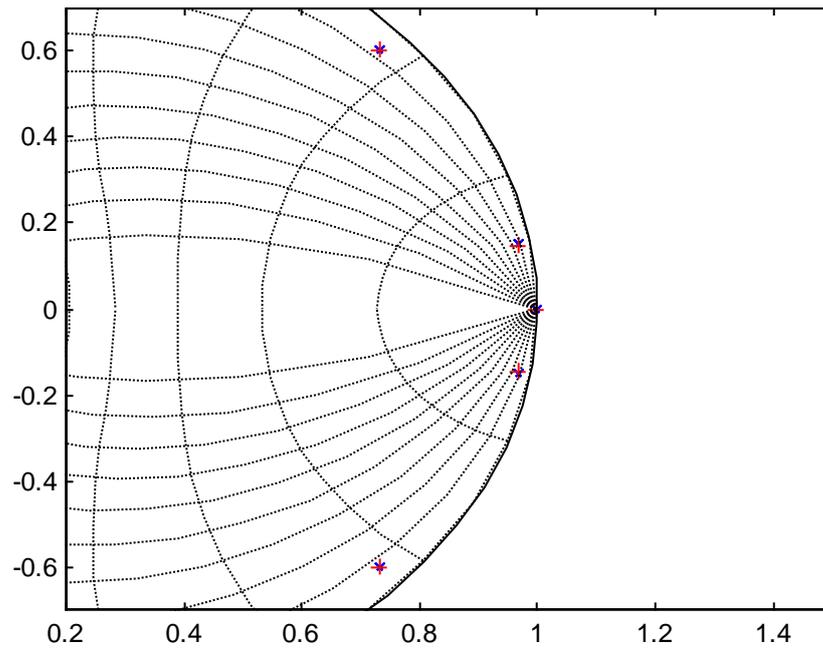
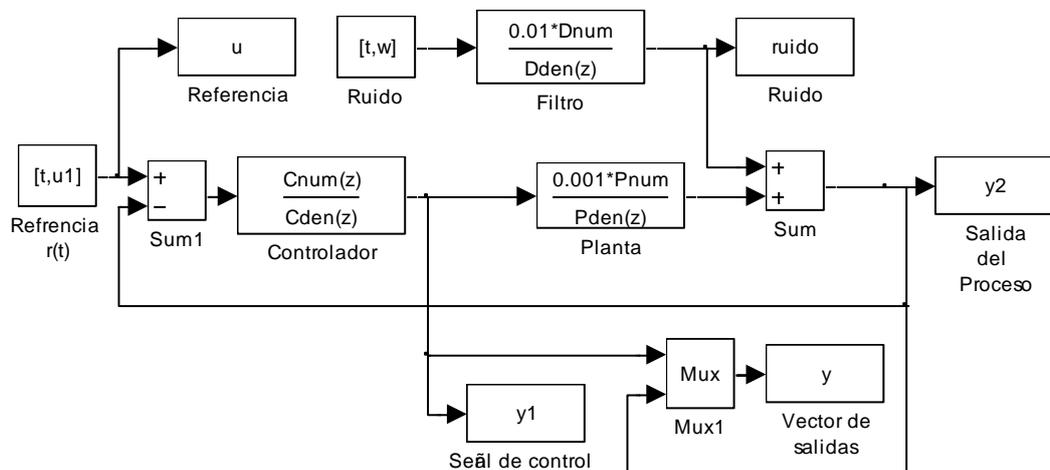


Figura 3.15. Comparación de la Posición de los polos.  
 Proceso real : Rojo  
 Proceso estimado: Azul

### Identificación con ruido

Ahora inyectamos un ruido blanco a la entrada del filtro, figura 3.8, de forma que perturbe al sistema. La señal de referencia se muestra en la figura 3.9, y las señales de control y salida se presentan en la figura 3.16.



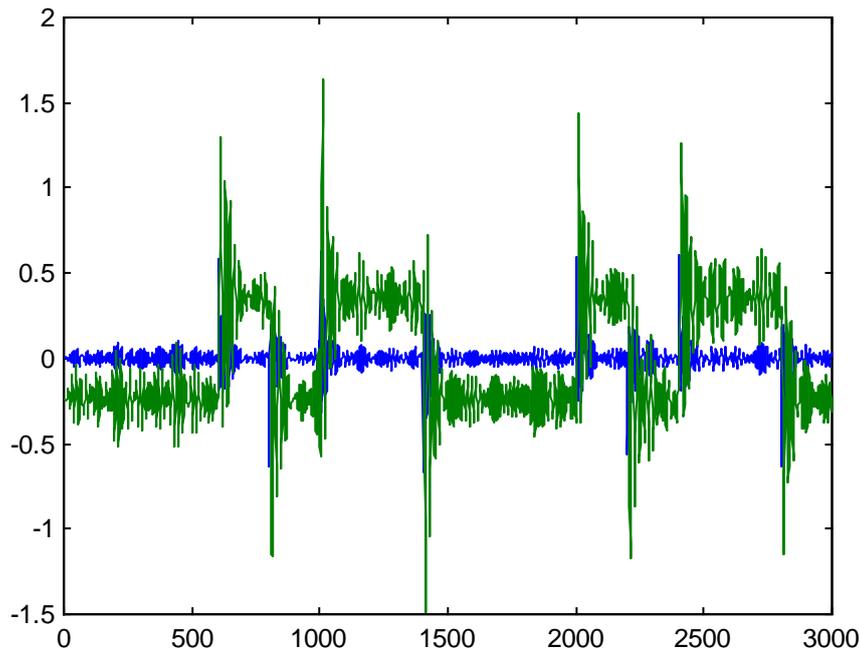


Figura 3.16. Salida del sistema a lazo cerrado con ruido a la salida  
Azul: Señal de control  
Verde: Señal de salida

Se identifica primero el sistema global, el orden de sistema se obtiene a partir de los valores singulares mostrados en la figura 3.17, teniendo en cuenta el número valores singulares relativamente grandes se considera el orden  $n_s = 8$ . Identificado el sistema global se procede a simular su funcionamiento con la entrada de referencia. En la figura 3.18 se muestran las señales de salida de la simulación, se puede observar la diferencia con las señales originales, ver figura 3.16. Luego de la simulación se estima el modelo del proceso mediante las técnicas de lazo abierto a partir de los resultados obtenidos en la simulación anterior, figura 3.18. El orden del proceso se obtiene a partir de los valores singulares mostrados en la figura 3.19, asumimos  $n_p = 5$ . En las figuras 3.20 y 3.21 se muestran dos comparaciones entre el proceso real y el estimado, en la primera de ellas se compara los diagramas de Bode y en la segunda la posición de los polos del proceso.

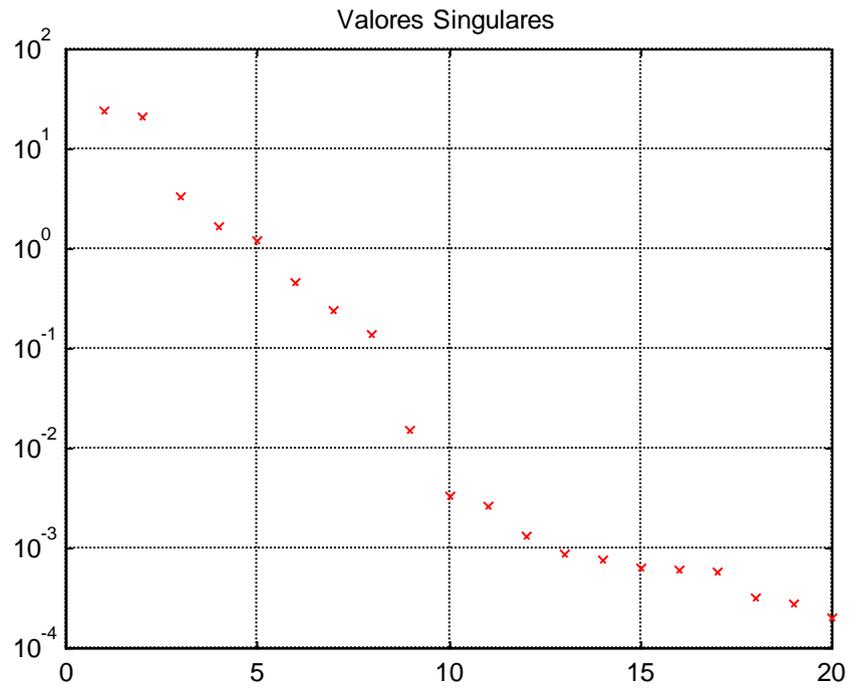


Figura 3.17. Valores singulares del sistema global.

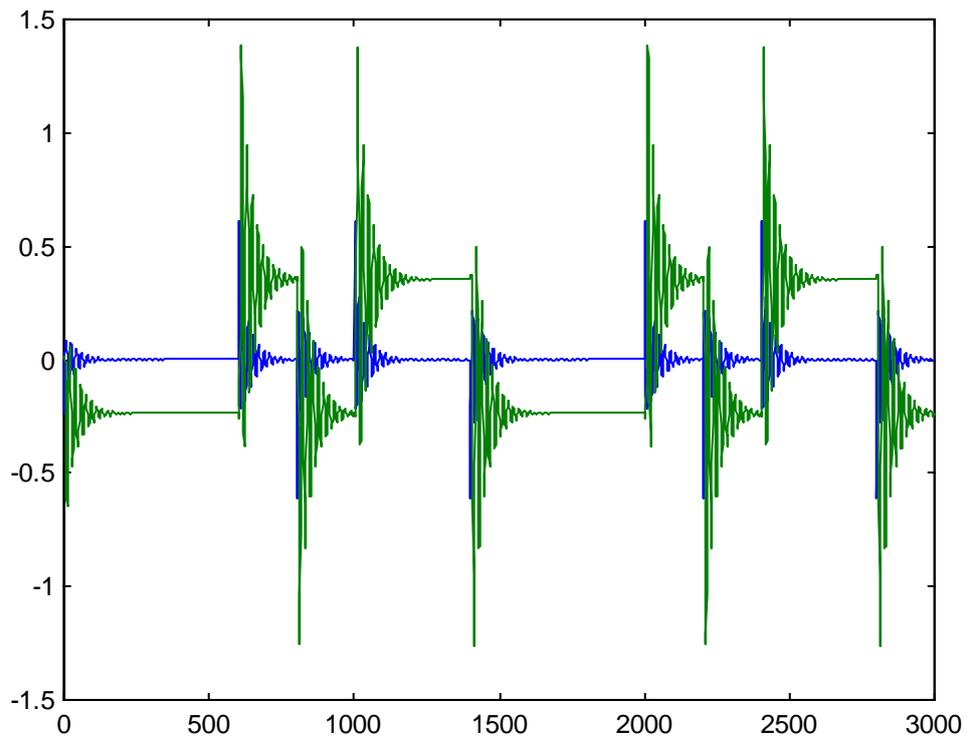
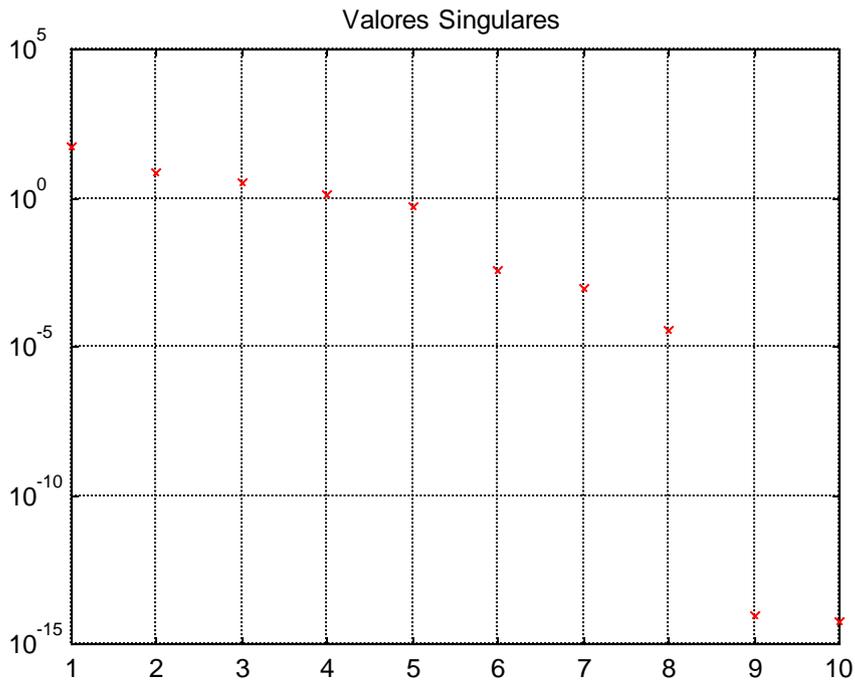


Figura 3.18. Respuesta del sistema global simulado  
Azul: Señal de control  
Verde: Señal de salida



Figuras 3.19. Valores singulares del proceso

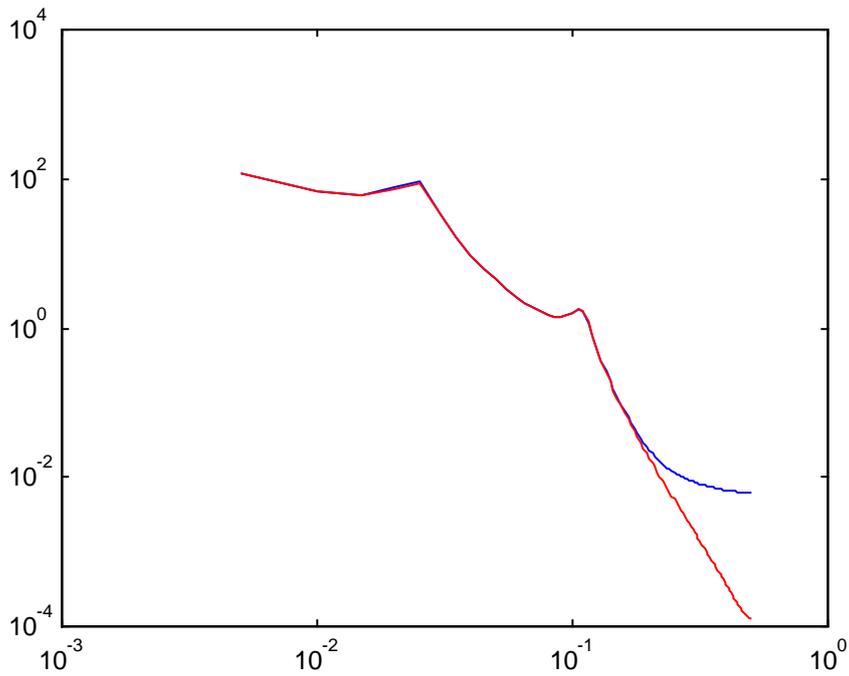


Figura 3.20. Comparación del diagrama de Bode.  
Proceso real : Rojo  
Proceso estimado: Azul

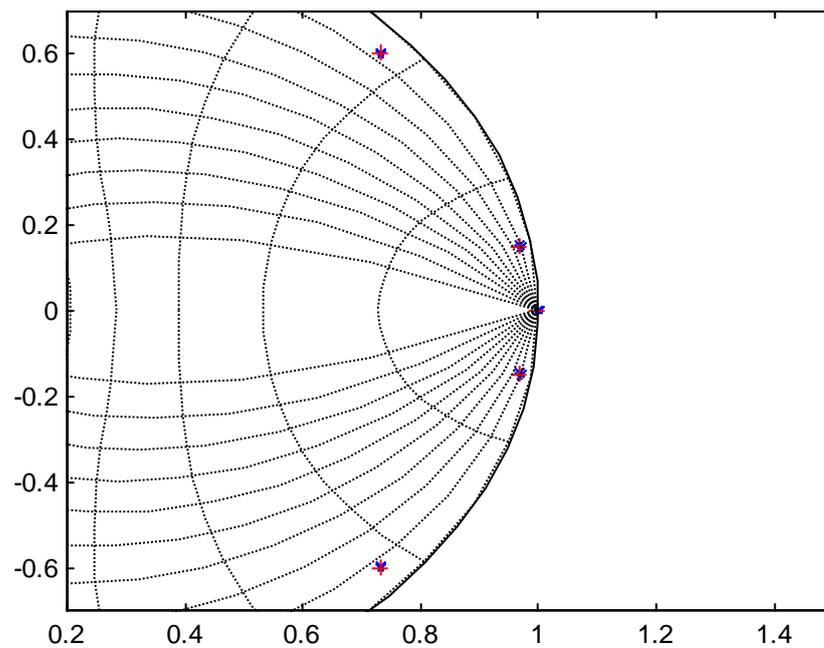


Figura 3.21. Comparación de la Posición de los Polos.  
 Proceso real : Rojo  
 Proceso estimado: Azul

### 3.5 Comparación de los algoritmos IdCL y CLID.M

Se ha realizado una evaluación del método propuesto en el presente capítulo *IdCL* frente al algoritmo **CLID.M**, *Closed loop subspace system identification* desarrollado por [V. Overschee y B. De Moor, 1996], descrito en la sección 3.3.2. El análisis se realiza con ruido y sin ruido acoplado en la salida del proceso. Se han realizado varias simulaciones, considerando la misma señal de referencia pero variando el ruido de manera aleatorio. Debido a que el método CLID.M necesita los parámetros de Markov del controlador, será necesario encontrar su respuesta impulsiva, para efectos de la simulación se consideran 10 respuestas impulsivas.

### Identificación sin ruido

En las figuras 3.22 y 3.23 se muestran las comparaciones para el diagrama de Bode y la posición de los polos, entre los dos métodos de identificación y las características reales del proceso. Se puede observar que con el método CLID se obtiene una respuesta muy precisa, el diagrama de Bode obtenido con el modelo estimado por el método CLID coincide con el correspondiente al sistema real. La respuesta del modelo obtenido con el método IdCL responde muy bien pero para frecuencias relativamente altas tiene problemas. En la figura 3.23, se puede apreciar que la posición de los polos y ceros para los dos métodos coincide con la del sistema real.

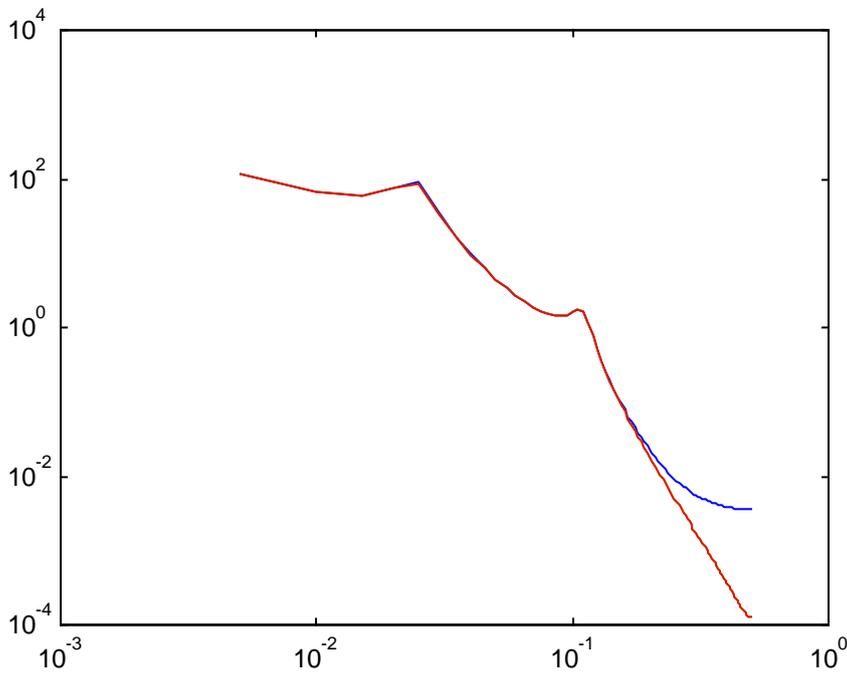


Figura 3.22. Diagrama de Bode.  
Proceso real: Rojo.  
IdCl: Azul,  
CLID.m: verde



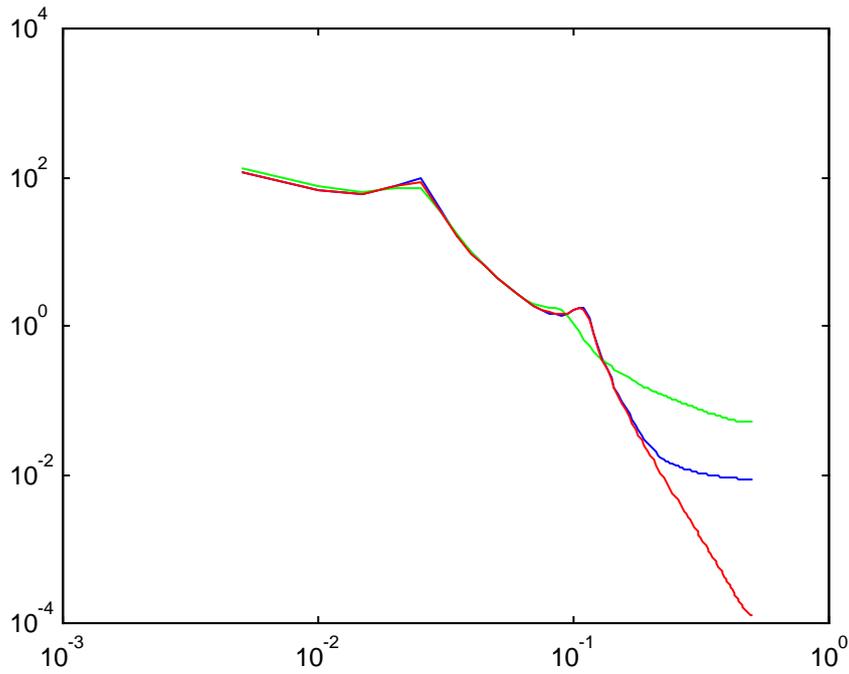


Figura 3.24. Diagrama de Bode.  
 Proceso real: Rojo  
 IdCl : Azul,  
 CLID.m : verde

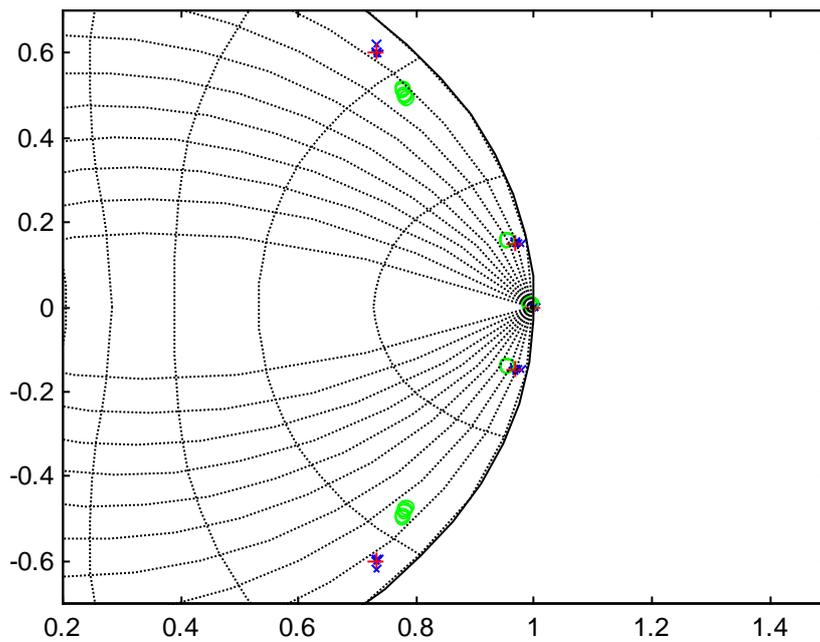


Figura 3.25. Lugar de las Raíces.  
 Proceso real: '+'Rojo  
 IdCl : '+'Azul,  
 CLID.m : 'o' verde

### 3.6 Estimación del tiempo de retardo de un proceso a lazo cerrado

Los tiempos de retardos son propios de muchos procesos industriales, ya sean químicos, mecánicos, térmicos, hidráulicos, etc. Es muy importante conocer el valor de los retardos para el diseño de los controladores, debido a que los sistemas a lazo cerrado podrían resultar inestables o presentar características inaceptables en los transitorios, si para el diseño del controlador se utiliza un modelo del proceso con un tiempo de retardo que no corresponde al valor real.

En sistemas de control los tiempos de retardos de los proceso dependen de diversos factores, por ejemplo, debido a la transmisión de la señal de control a lo largo de una distancia determinada, a la ubicación de los sensores que miden las señales de salida de los procesos, a los propios elementos que determinan la dinámica del proceso, etc.

La representación en espacio de estados de los retardos de un proceso dependerá del tipo de retardo que se presente en el sistema, por ejemplo para un retardo en las entradas, la ecuación de estados del sistema se representa mediante la ecuación (3.58), mientras que, para el caso de un sistema con retardo debido a los propios elementos del sistema, conocido también como retardo en los estados del sistema, se representa con la ecuación (3.59).

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t - \tau) \quad (3.58)$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1x(t - \tau) + Bu(t) \quad (3.59)$$

Las representaciones anteriores son útiles para sistemas SISO o para aquellos MIMO donde los tiempos de retardo sean casi el mismo en cada una de las entradas o en los estados. Sin embargo, los sistemas industriales de tipo MIMO tienen retardos muy distintos, hay elementos que pueden tener dinámicas rápidas mientras que otros dinámicas lentas, esto hace que sea complicado modelarlo en espacio de estados.

Una de las técnicas que se utiliza en el control clásico, para modelar los retardos presentes en un sistema, es mediante aproximaciones de Padé del término

exponencial que describe el retardo. Las aproximaciones de primer y segundo orden quedan definidas como:

$$e^{-ds} = \frac{1 - \frac{d}{2}s}{1 + \frac{d}{2}s} \quad \text{Aproximación de Primer orden}$$

$$e^{-ds} = \frac{1 - \frac{d}{2}s + \frac{d^2}{12}s^2}{1 + \frac{d}{2}s + \frac{d^2}{12}s^2} \quad \text{Aproximación de Segundo orden}$$

Al representar el término exponencial mediante una aproximación en series de Padé, se está aumentando el grado del denominador. Esto debido a que se añaden polos y ceros a la función de transferencia del sistema, provocando que el orden del proceso aumente.

Para ilustrar el tratamiento de los retardos en el modelamiento de sistemas, utilizaremos un proceso MIMO presentado como ejemplo para el estudio de algoritmos de control multivariable que se encuentra en la página web: <http://www.eas.asu.edu/~che461/>, del laboratorio de ingeniería de sistemas de control de la Universidad del Estado de Arizona, y ha sido desarrollado por el Profesor Daniel Rivera. El proceso es un sistema de 2 entradas / 2 salidas y utiliza como control dos PI descentralizados con desacoplador en el estado estacionario, el modelo de la planta y su control están representado por el modelo en Simulink shellssdec.mdl y el archivo de simulación es el decuoplertest461.m, ambos se encuentra en la mencionada página web. En la figura 3.26 se muestra el diagrama en Simulink de la planta a lazo cerrado: shellssdec.mdl.

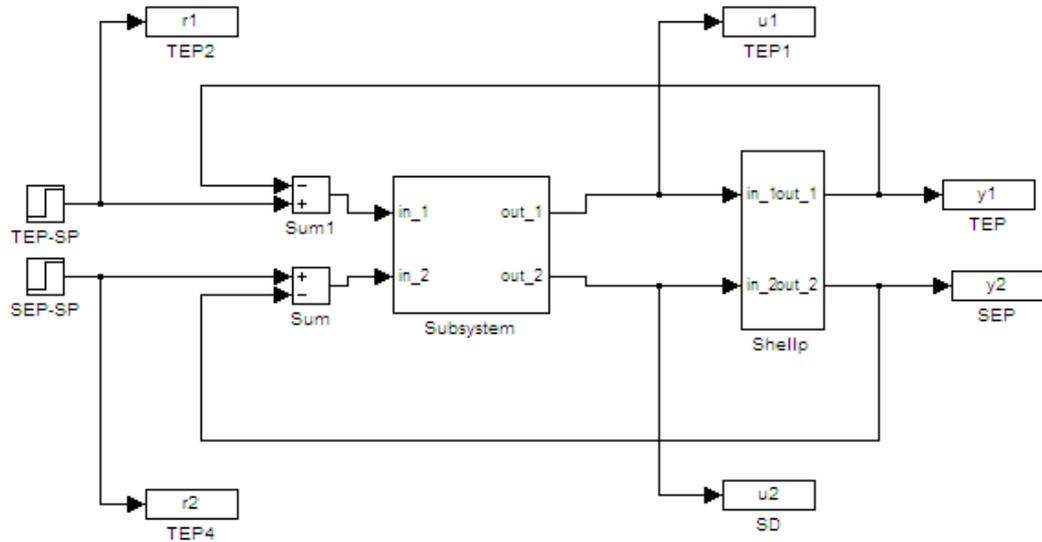


Figura 3.26. Modelo del sistema de control a lazo cerrado: shellsdec.mdl

El bloque Shellp representa la planta, siendo las funciones de transferencia que describen el proceso las siguientes:

$$p_{11}(s) = \frac{4.05}{50s + 1} e^{-27s} \quad p_{12}(s) = \frac{1.77}{60s + 1} e^{-28s}$$

$$p_{21}(s) = \frac{5.39}{50s + 1} e^{-18s} \quad p_{22}(s) = \frac{5.72}{60s + 1} e^{-14s}$$

Los subíndices de  $p_{ij}$  representan:  $i$ : salida  $j$ : entrada. Los retardos presentes en la planta son de: 14, 18, 27 y 28 segundos; notándose una gran diferencia entre los retardos de las funciones de transferencia:  $p_{11}(s)$ ,  $p_{22}(s)$  y  $p_{12}(s)$ ,  $p_{21}(s)$ .

En la Figura 3.27 se puede observar la planta de dos entradas / dos salidas y la interacción entre sus entradas y salidas.

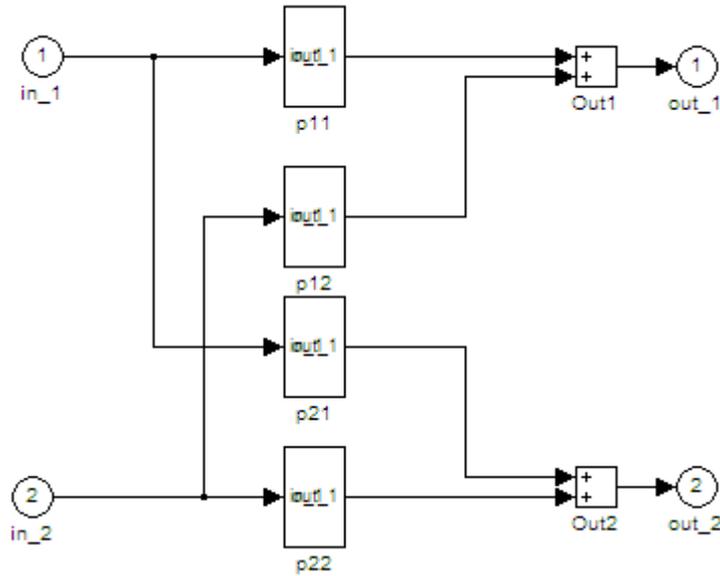


Figura 3.27. Diagrama de bloques de la planta MIMO 2x2

En la gráfica 3.28 se muestra la respuesta escalón para el proceso MIMO representado en la figura 3.27. En la primera gráfica de la figura 3.28, se muestra la respuesta real del sistema, apreciándose los retardos de cada una de las salidas. En las otras tres gráficas se presentan las aproximaciones de los retardos del sistema mediante aproximaciones Padé, se ha considerado una variación del orden de la aproximación de 2 a 4, siendo las aproximaciones de tercer grado la que mejor describe el tiempo de retardo. En las gráficas también se puede observar que el tiempo de establecimiento del sistema real no es el mismo que en las aproximaciones mediante series de Padé, esto se debe a que con las aproximaciones se agregan tanto polos como ceros.

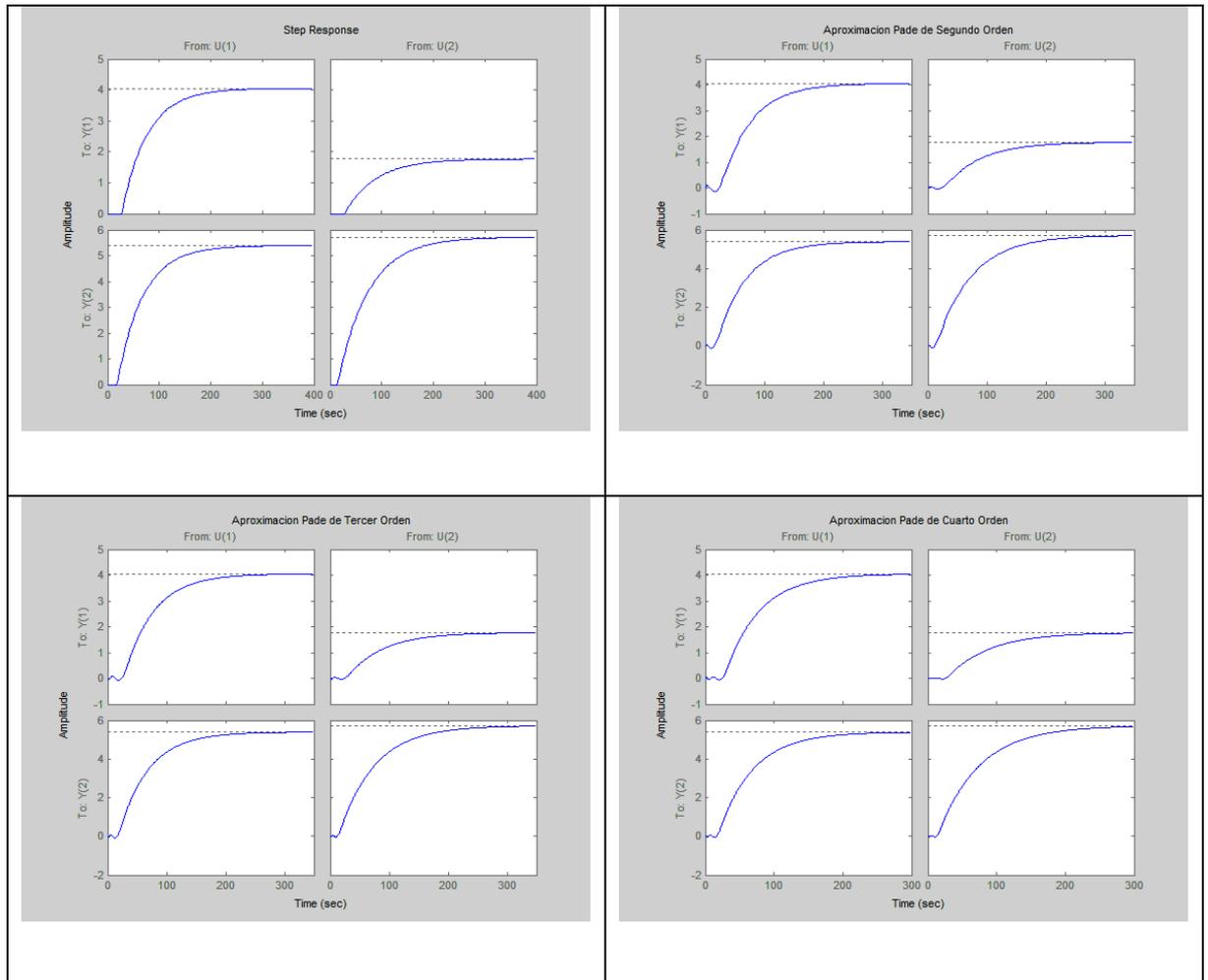


Figura 3.28. Respuesta escalón de de la planta MIMO

Una alternativa para modelar en espacio de estados los retardos es mediante el incremento del número de estados, o lo que es mismo aumentar el orden del proceso, como es el caso de la aproximación mediante series de Padé, que al aproximar el retardo con una serie de tercer grado, lo que se hace es incrementar el orden del proceso en 3.

El método de identificación de procesos a lazo cerrado propuesto *IdCL*, basado en técnicas de subespacios, *facilita la selección del incremento del número de estados a partir de los valores singulares que se utilizan para seleccionar el orden del proceso*. Para demostrar esta afirmación, se procede con la identificación de planta representada por el modelo de la figura 3.27, trabajando a lazo cerrado de acuerdo con el modelo de la figura 3.26.

Las pruebas de identificación se realizan sin considerar y considerando un ruido adicional a la salida del proceso. En ambos casos las entradas utilizadas tienen la forma que se muestran en la figura 3.29. Se debe considerar que las entradas deben estimular al sistema de manera de poder obtener la información suficiente de los modos de operación que se desean modelar de la planta. La simulación del funcionamiento del sistema a lazo cerrado es por un total de 90 minutos, de forma de tener datos para la identificación y para la validación del modelo del proceso. El tiempo de muestreo es de 4 segundos, de esta manera se logrará tener por lo menos tres muestras del tiempo de retardo más pequeño, 14 segundos. La variación de las referencias de los controladores son de 0 a 1 para el lazo 1 y de 0 a -0.5 para el lazo 2, esto teniendo en cuenta las referencias dadas en la simulación original del proceso en el archivo decouplertest461.m

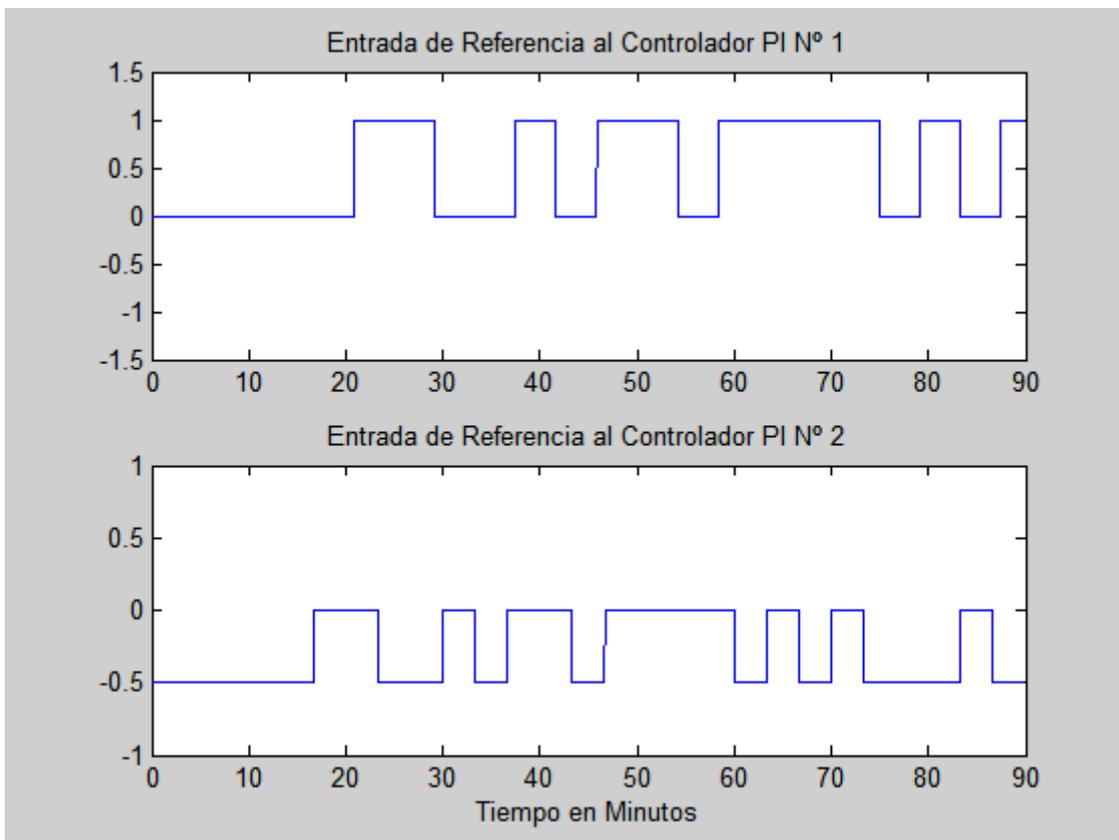


Figura 3.29. Señales de referencia para el funcionamiento de la planta.  
 $T_s = 1$  segundo

Luego de la simulación del proceso a lazo cerrado, se obtienen los 1350 datos para proceder con la identificación del proceso, figura 3.30.

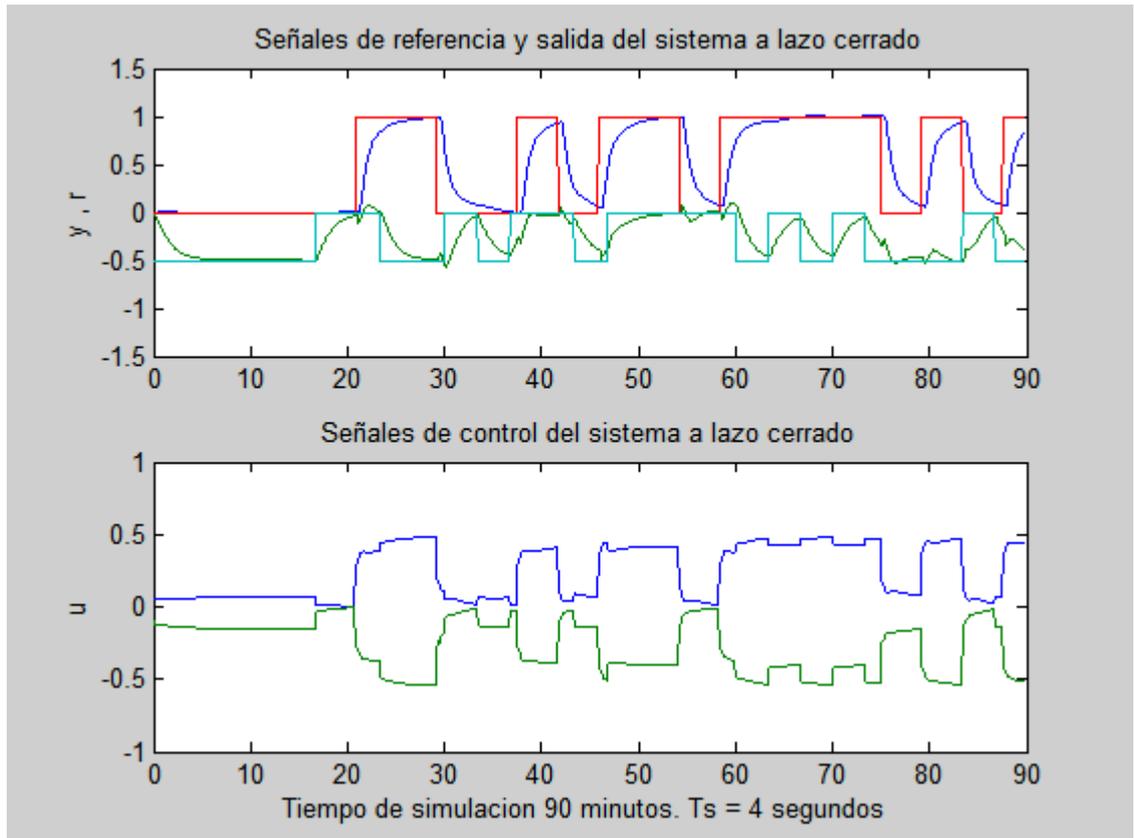


Figura 3.30. Datos obtenidos de la simulación de la planta a lazo cerrado.

La identificación se realiza con el método propuesto *IdCL* y se realiza con los primeros 675 datos, es decir los primeros 45 minutos de funcionamiento de la planta.

El orden del modelo global a lazo cerrado se obtiene a partir de los valores singulares mostrados en la figura 3.31. Se puede apreciar la existencia de cuatro valores singulares relativamente mayores. Sin embargo, debido a que debemos considerar un aumento de los estados para poder modelar los retardos del proceso, seleccionamos el orden del sistema global a lazo cerrado en 8. Hay que tener en cuenta que la selección del orden es decisión del usuario y dependerá de los resultados que se obtengan, es decir que si el modelo estimado no satisface se puede identificar cambiando el orden. El orden del proceso se estima a partir de los valores singulares de la figura 3.32, con las mismas consideraciones hechas para el sistema global a lazo cerrado, es decir teniendo en cuenta los retardos; el orden del proceso se determina en 6.

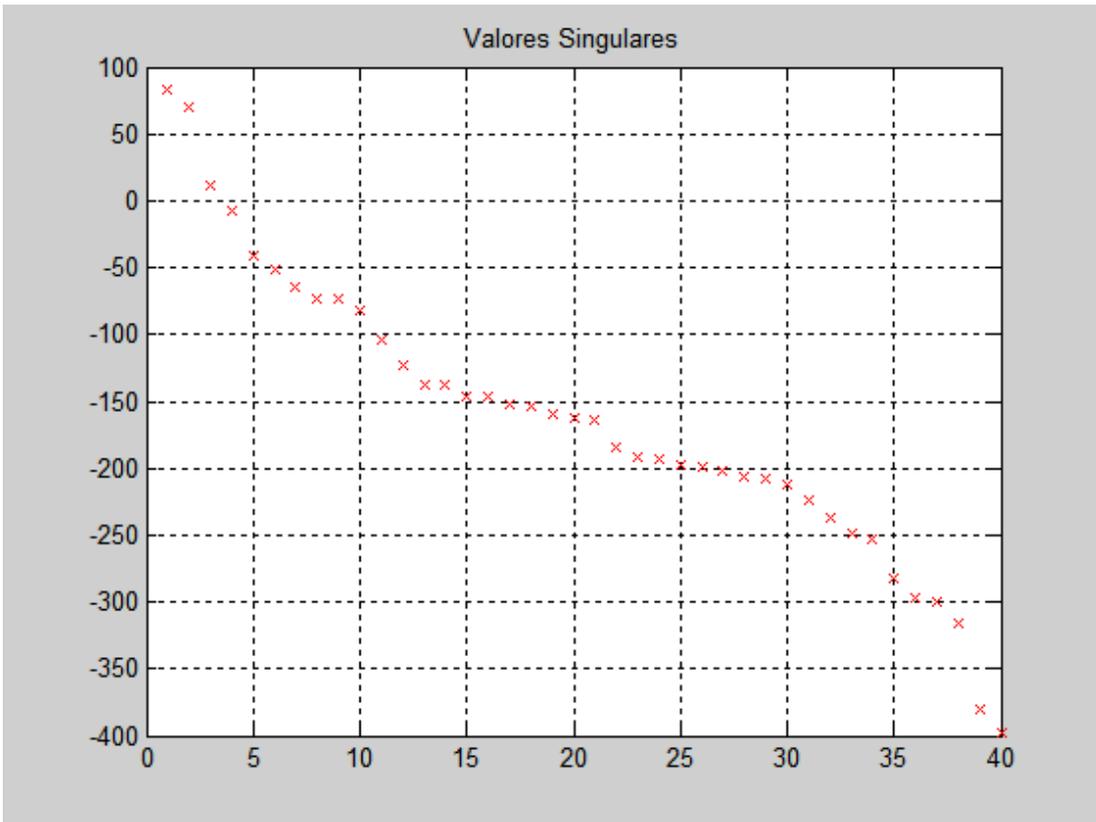


Figura 3.31. Determinación del orden de sistema global a lazo cerrado

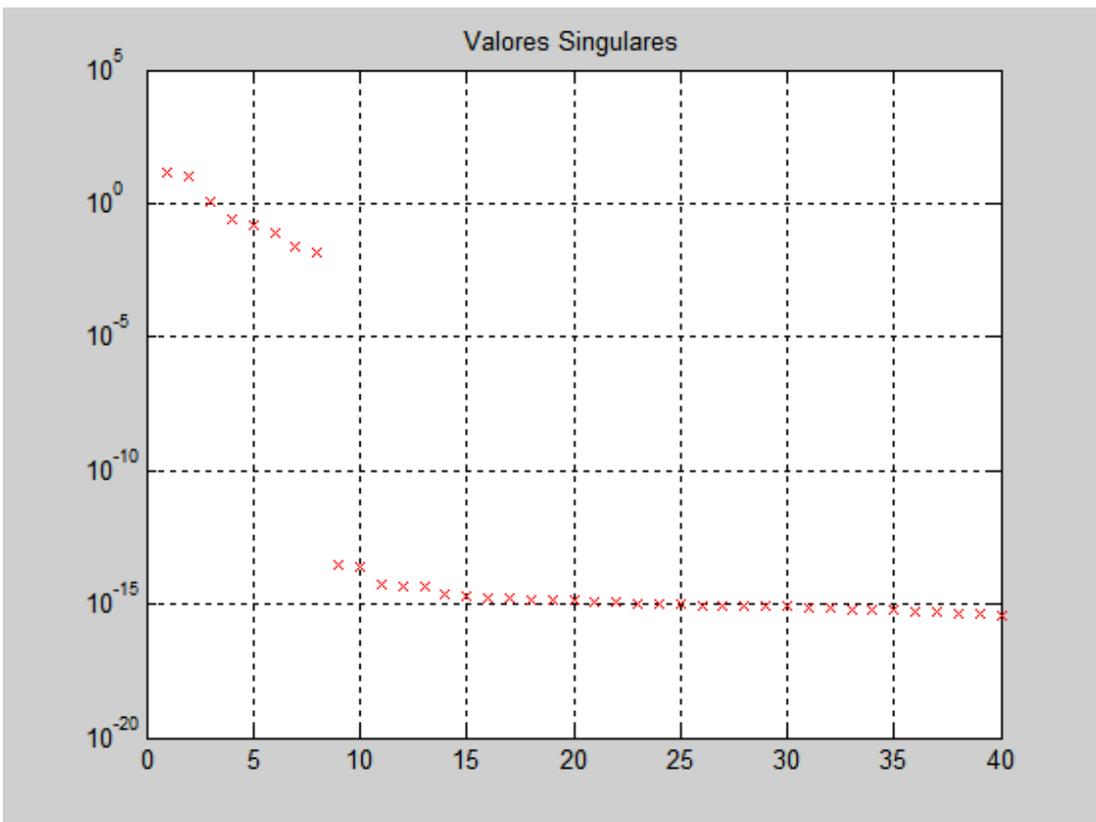


Figura. 3.32. Determinación del orden del proceso

Una manera de evaluar si la selección tanto del orden del sistema global como del proceso ha sido acertada, es analizar la respuesta escalón del proceso estimado.

La respuesta escalón del modelo obtenido es comparada con la respuesta escalón de la planta, figura 3.33. Se puede verificar que los retardos son seguidos adecuadamente y que el tiempo de establecimiento es el mismo.

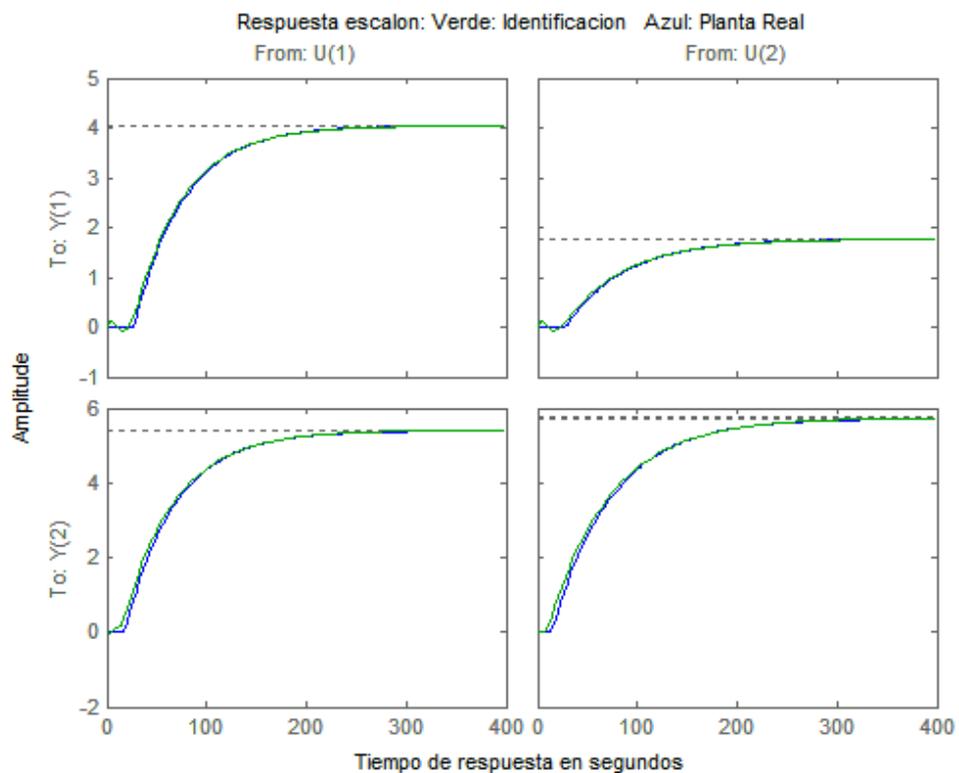


Figura 3.33 Respuesta escalón del modelo estimado v.s. respuesta escalón de la planta

Para validar el modelo obtenido con el método de identificación *IdCL*, simulamos el comportamiento de la planta a lazo cerrado, es decir bajo la acción de los controladores. En la figura 3.34 se presenta el diagrama de la simulación en Simulink. El modelo en continuo de la planta se obtiene a partir del modelo identificado considerando un tiempo de muestreo de 4 segundos.

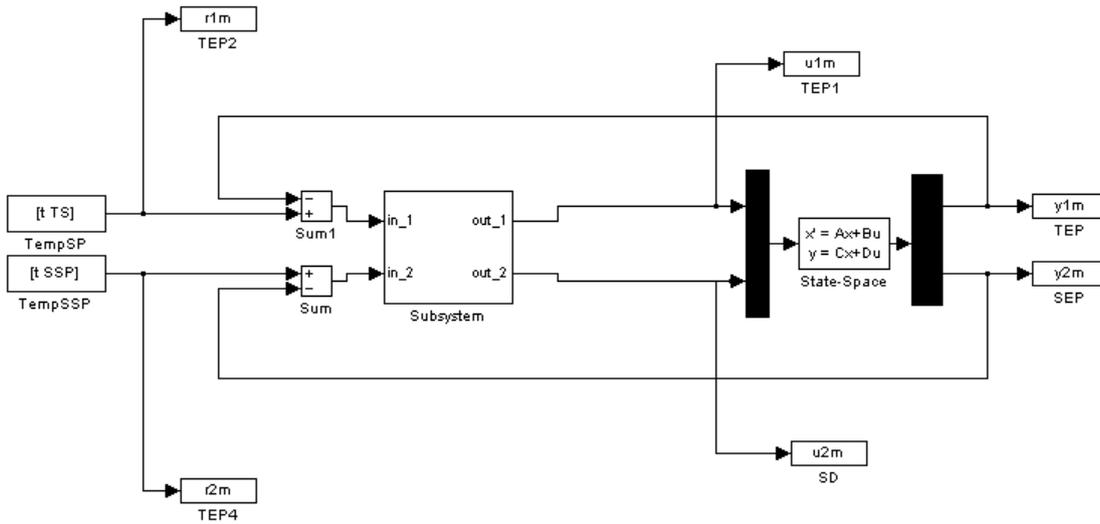


Figura 3.34. Diagrama de bloques utilizado para la validación del modelo del proceso obtenido

El modelo es excitado con los últimos 45 minutos de las señales de referencias utilizadas para simular el funcionamiento de la planta, figura 3.29, los cuales son generados cada segundo. Las señales de salida de la prueba de validación son obtenidas con un tiempo de muestreo de 4 segundos y comparadas con las salidas correspondientes a los últimos 45 minutos de la figura 3.30. Vale recordar que los primeros 45 minutos de estos datos se utilizaron en la identificación. El resultado de la validación se muestra en la figura 3.35.

Para el caso de la identificación de la planta con ruido, se utilizan las mismas señales de referencia que para el caso de la obtención del modelo sin ruido, es decir las señales de la figura 3.29. Se añade un ruido aleatorio a cada salida. El diagrama de bloques en Simulink para la simulación del proceso a lazo cerrado con ruido se muestra en la figura 3.36. Las señales que se obtienen de la simulación del sistema a lazo cerrado se muestran en la figura 3.37, el periodo de muestreo es de 4 segundos.



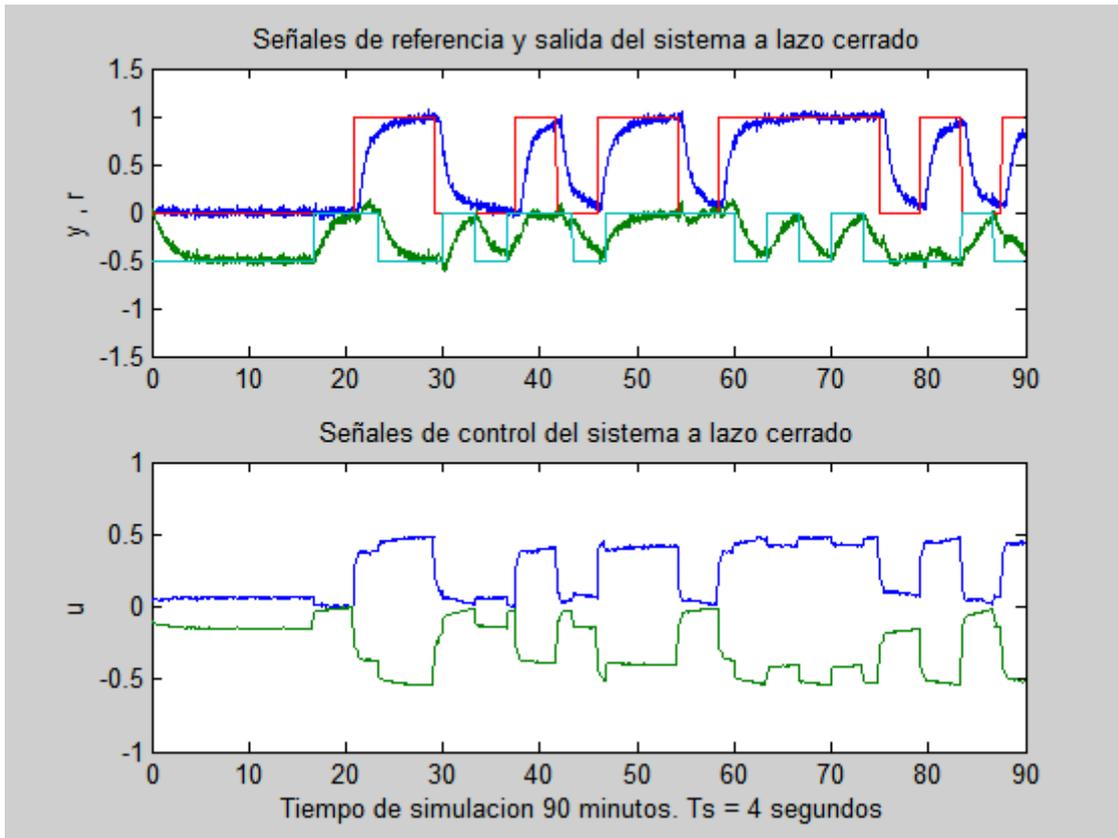


Figura 3.37. Datos obtenidos de la simulación con ruido de la planta a lazo cerrado

Para la Identificación de proceso con el método a lazo cerrado *IdCL*, utilizamos los primeros 45 minutos de la simulación, figura 3.37. La selección del orden del sistema global a lazo cerrado se hace a partir de los valores singulares mostrados en la figura 3.38. El orden debe ser escogido considerando la necesidad de modelar el tiempo de retardo del proceso, el orden seleccionado es 8. De igual forma determinamos el orden del proceso, esto de los valores singulares de la figura 3.39, el orden elegido es de 6. En la figura 3.40 se hace una comparación entre la respuesta escalón del proceso estimado y la respuesta escalón del sistema real. Los resultados de una validación del proceso, similar a la realizada para el caso sin ruido, se muestran en la figura 3.41. Se compara la salida obtenida de simular el modelo proceso a lazo cerrado, incluyendo los controladores, con la salida de los últimos 45 minutos de la figura 3.37.

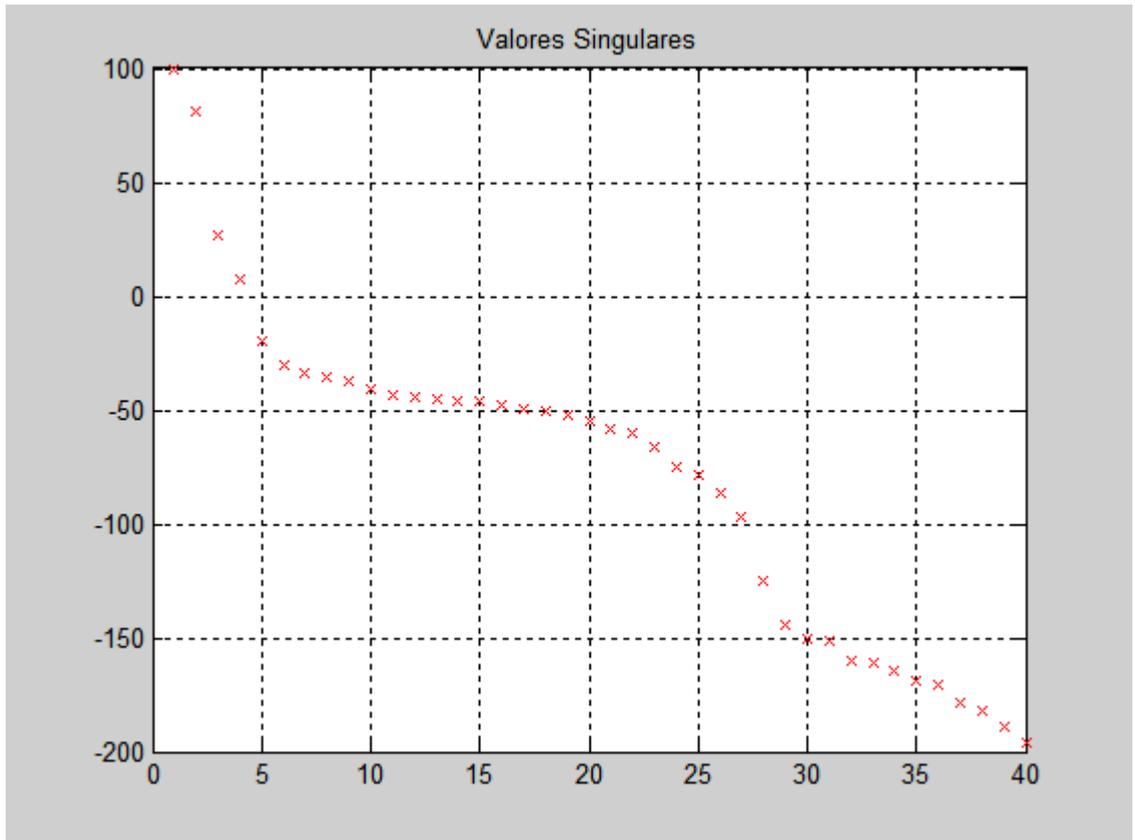


Figura 3.38 Determinación del orden del sistema global a lazo cerrado

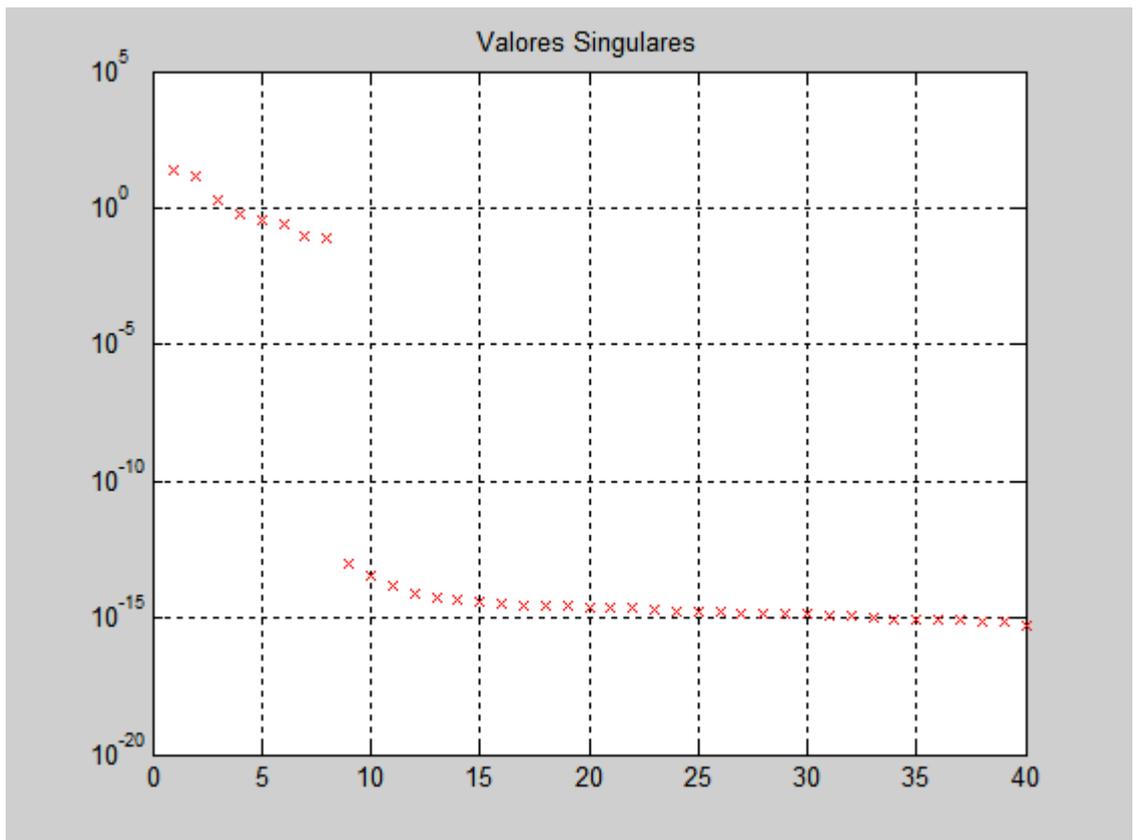


Figura 3.39 Determinación del orden del proceso.

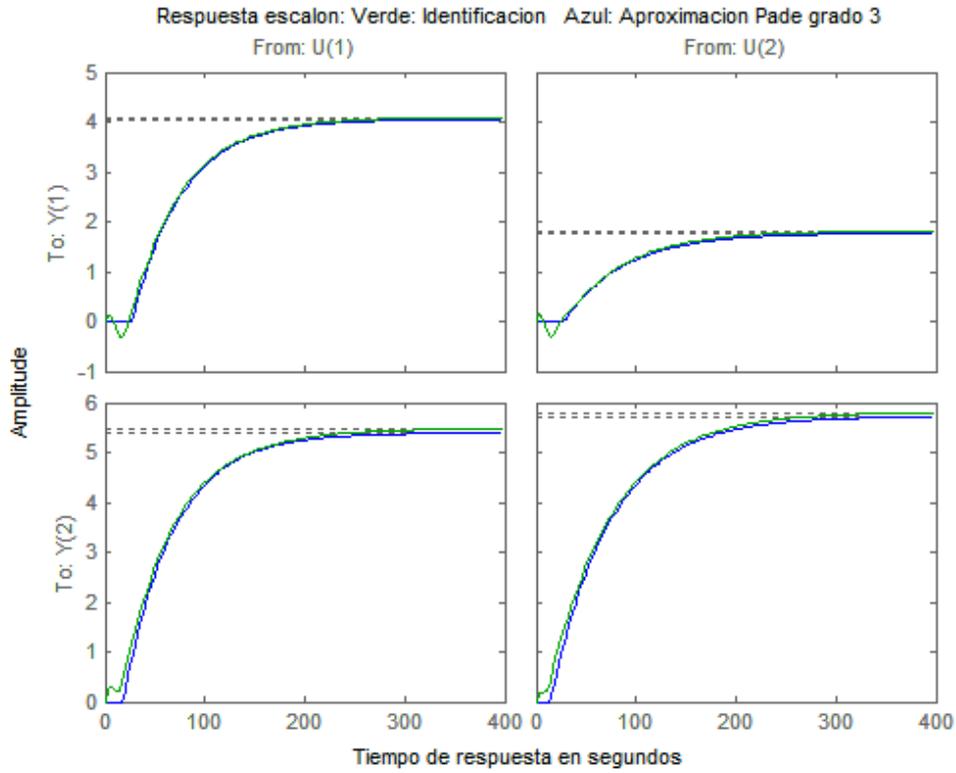


Figura 3.40 Respuesta escalón del modelo estimado v.s. modelo de la planta.

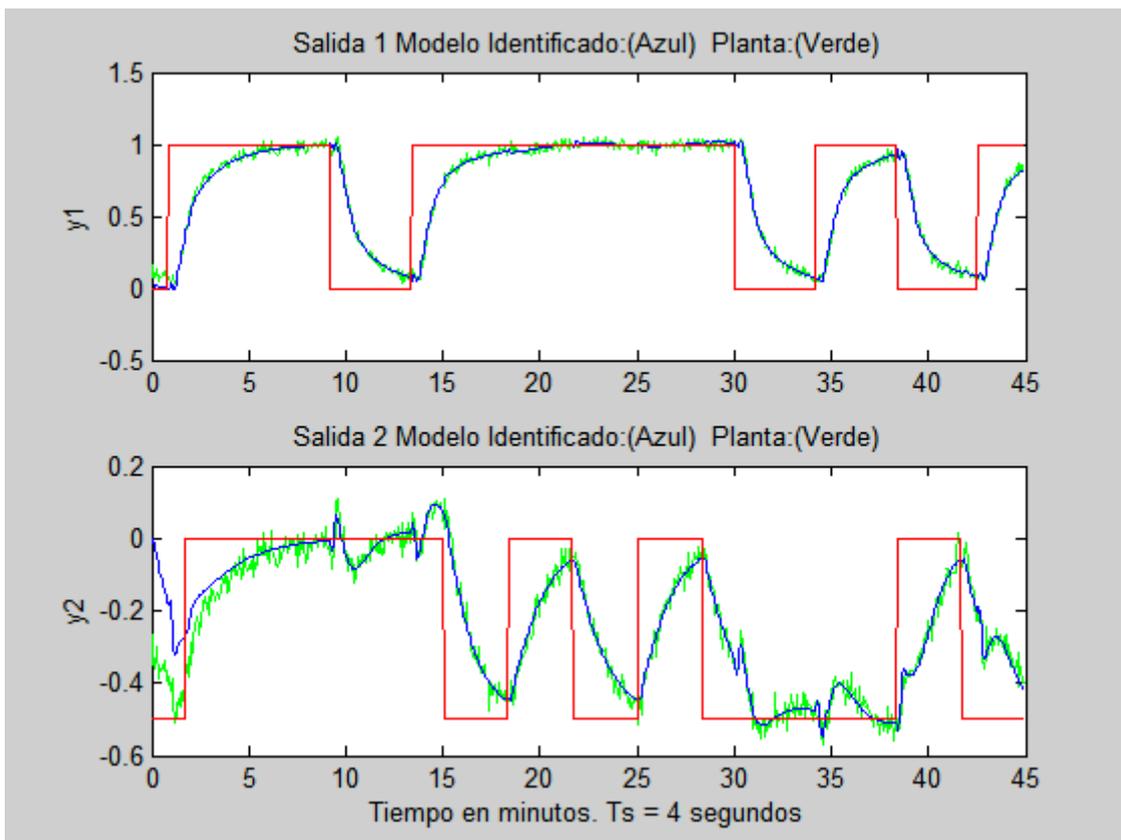
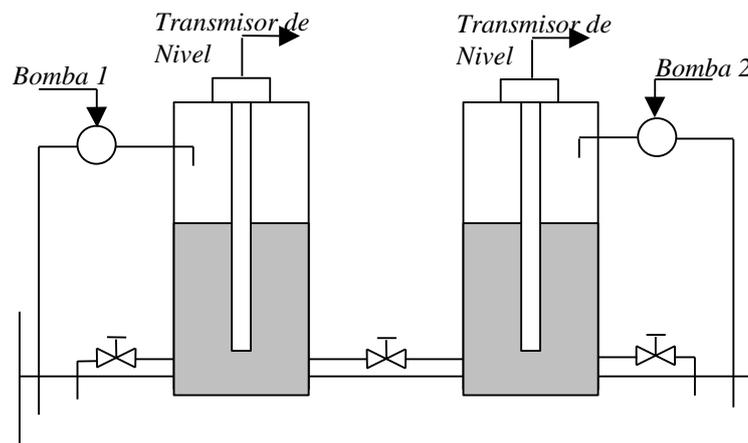


Figura. 3.41. Validación del modelo obtenido por identificación

La selección del orden para poder modelar el retardo, deberá de hacerse con mucho cuidado cuando se trate de identificar el proceso con ruido, ya que se corre el riesgo de modelar el ruido. De allí la importancia de escoger adecuadamente el orden del modelo global, que nos permita hacer un buen filtrado del ruido en las señales de control y salida del proceso.

### **3.7 Identificación de una planta de dos tanques interconectados funcionando a lazo cerrado.**

En el capítulo 2, como aplicación práctica de los algoritmos de identificación a lazo abierto, se encontró el modelo de una planta de dos tanques interconectados, de que se dispone en el Laboratorio del Departamento de Automática y de Sistemas de la Universidad de Valladolid. La planta se considera como un sistema MIMO de dos entradas y dos salidas. El esquema de la planta se muestra en la figura 2.4



Esquema de la planta de dos tanques interconectados

En esta sección se abordará la identificación de la planta experimental de dos tanques interconectados funcionando a lazo cerrado. La planta experimental cuenta con un sistema de control y supervisión realizado en una computadora personal, que está implementada con un software de interface, Java Regula, que permite al usuario manejar las referencias de los controladores, hacer la adquisición de datos de las

señales de referencia, control y salida de la planta y grabarlas en una archivo de datos.

Para la identificación del proceso a lazo cerrado utilizamos el algoritmo propuesto *IdCL*, se considera variar las referencias de los lazos de control en  $\pm 10\%$  de manera independiente cada uno, buscando que el proceso sea excitado en varios modos de operación. Los datos almacenados para la identificación son las señales de referencia, control y nivel de cada lazo.

El tiempo de muestreo seleccionado es de 0.5 segundos, esto para poder identificar los retardos de la planta que están alrededor de 2 segundos.

En las figuras 3.42 y 3.43 se muestran un registro gráfico de las señales obtenidas del experimento a lazo cerrado y se utilizan para obtener el modelo en espacio de estados de la planta.

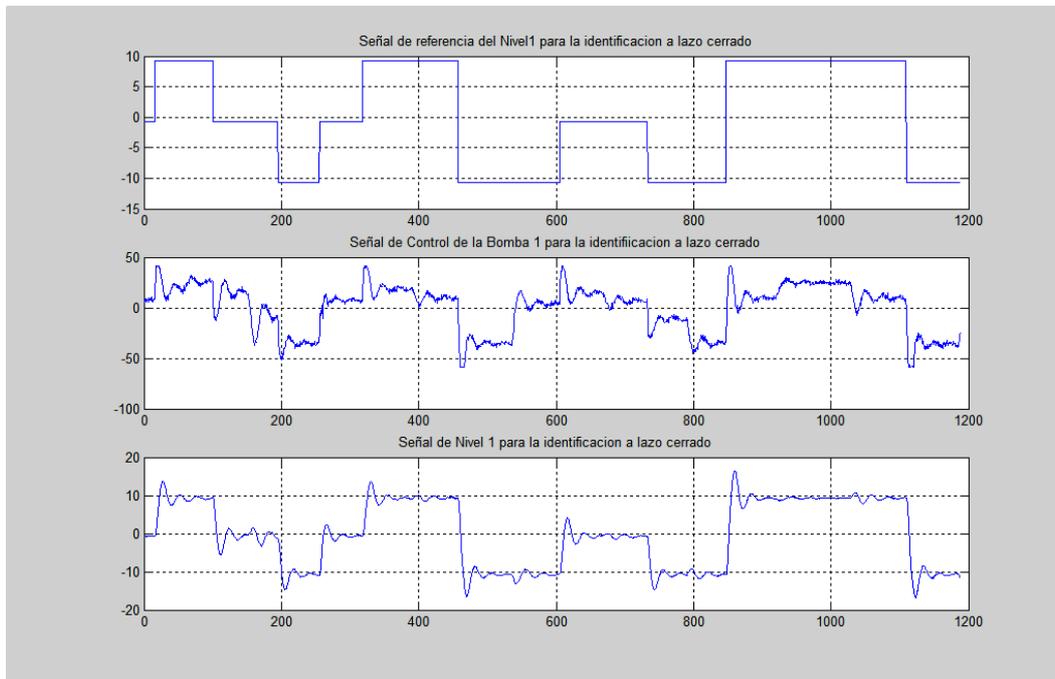
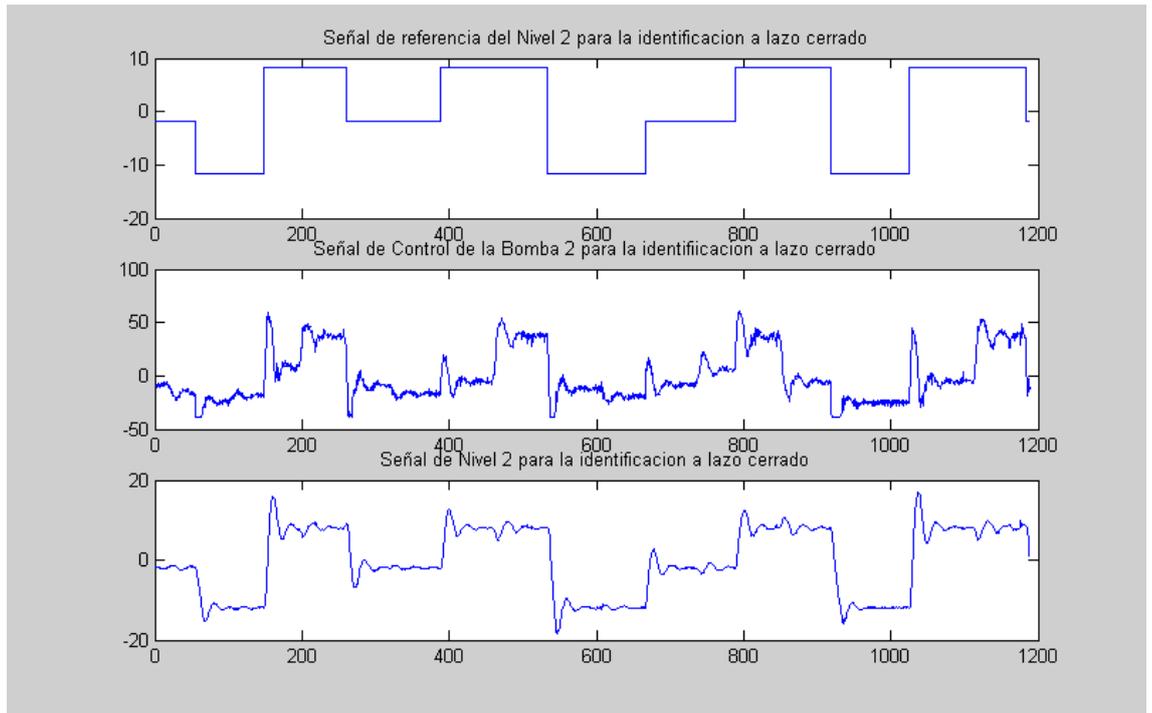


Figura 3.42. Señales que corresponden al control de nivel del tanque 1



3.43. Señales que corresponden al control de nivel del tanque 2

El algoritmo de identificación a lazo cerrado *IdCL* considera obtener primero el modelo del sistema a lazo cerrado descrito por la ecuación (3.13). En la figura 3.44 se muestran los valores singulares que nos permiten determinar el orden del sistema. Podemos observar que el número de valores singulares relativamente mayores son 4, sin embargo para poder estimar los retardos en el proceso el orden seleccionado es 6.

El orden del proceso se obtiene a partir de los valores singulares mostrados en la figura 3.45, si consideramos el número de los valores singulares mayores que cero, el orden del proceso se elige en 5.

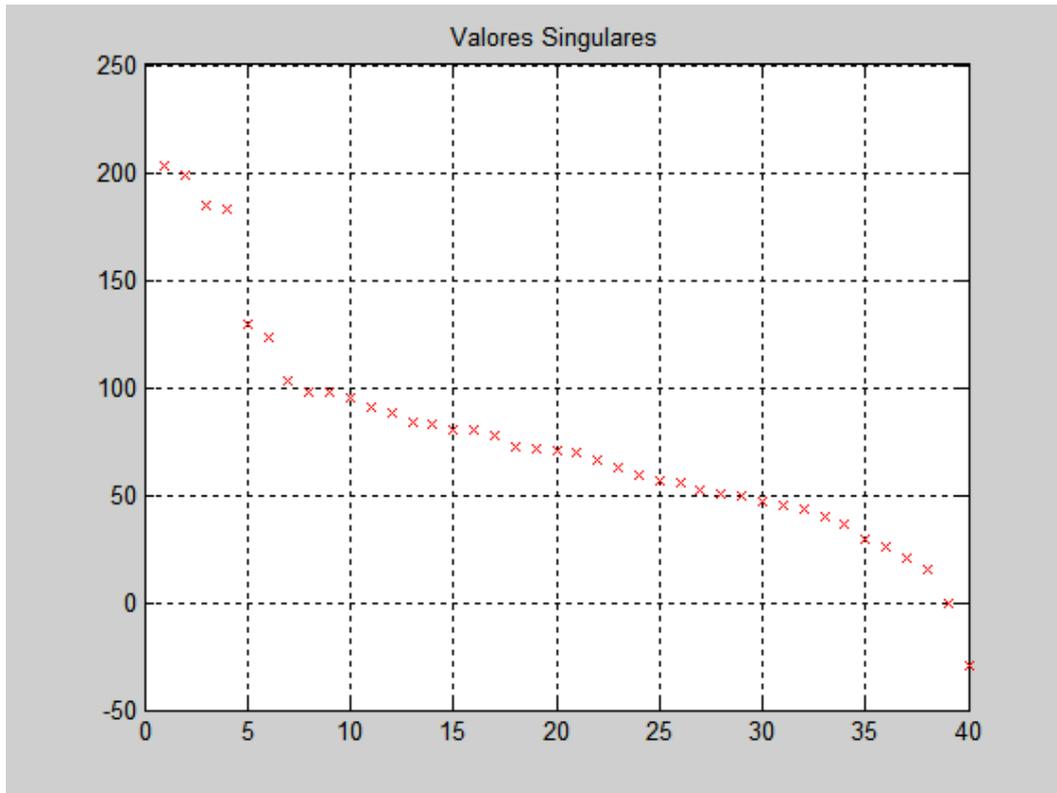


Figura 3.44. Estimación del orden del sistema global a lazo cerrado

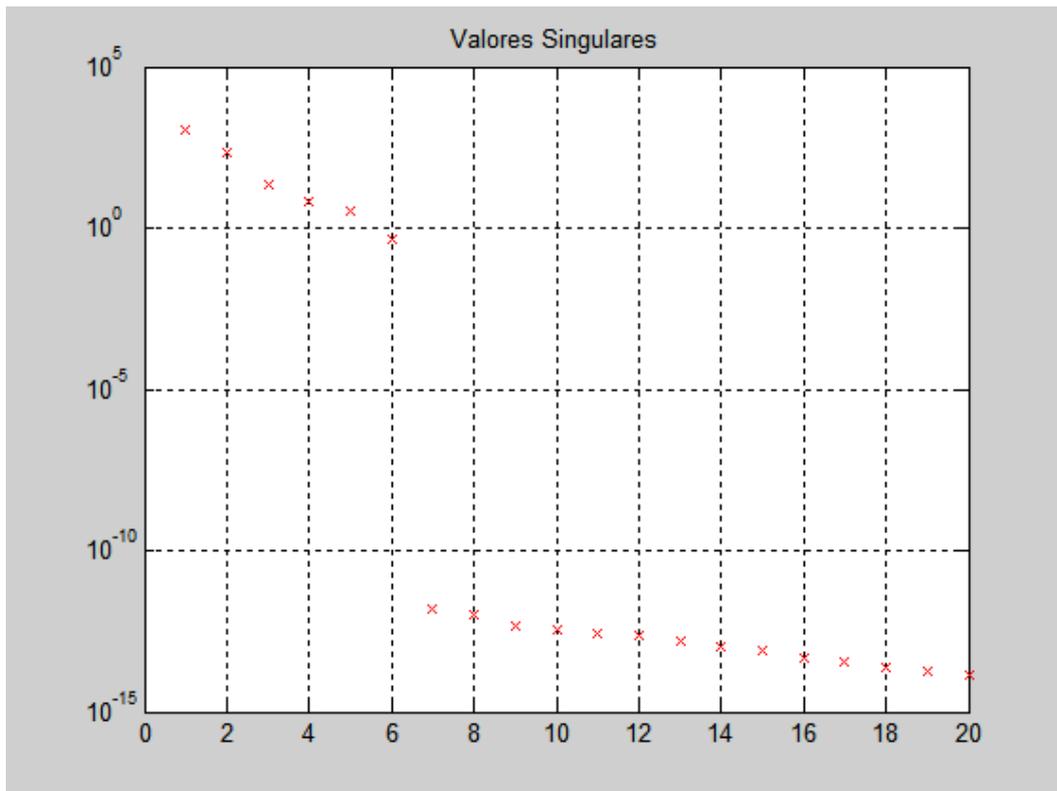


Figura 3.45. Estimación del orden del proceso

En la figura 3.46 se compara la respuesta obtenida del modelo del proceso estimado con la respuesta de los datos experimentales, además, para efectos ilustrativos, se añade la referencia. Se puede apreciar que las salidas de la identificación siguen a las del proceso real.

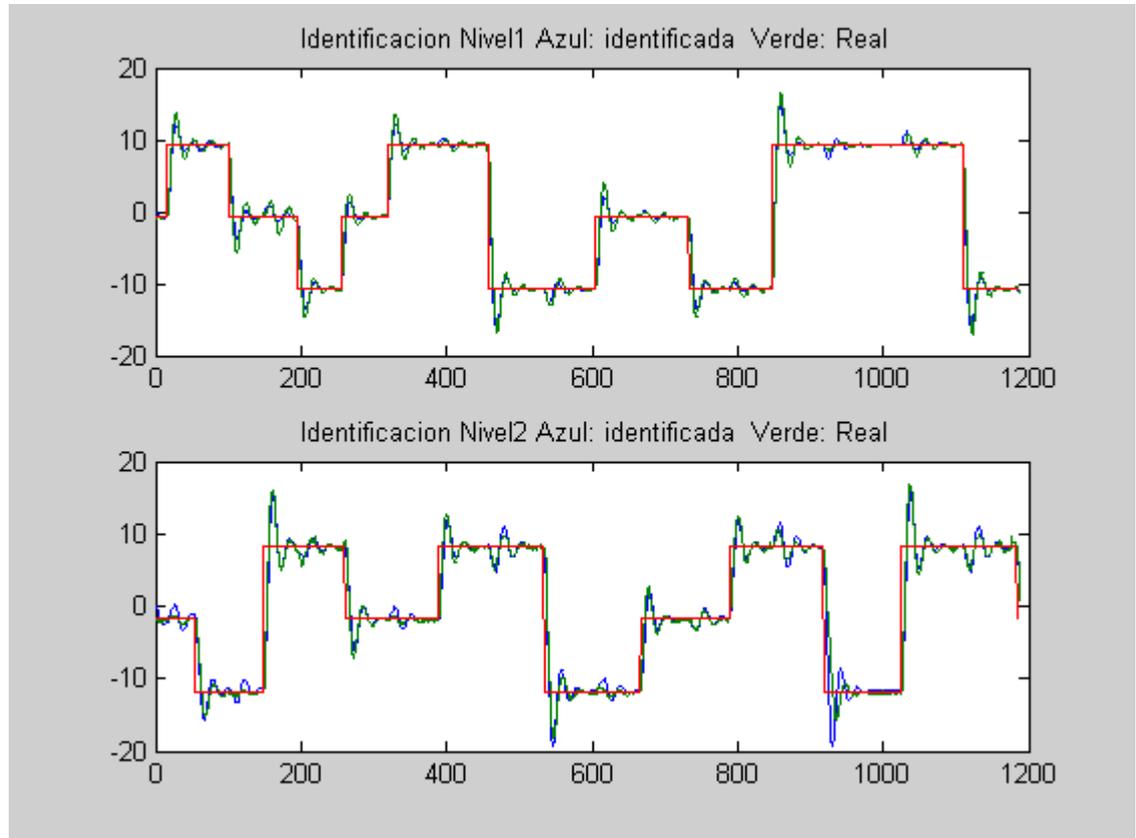


Figura 3.46. Comparación de la señal de salida de la identificación

La respuesta escalón del proceso identificado, se presenta en la figura 3.47, se puede apreciar la fuerte interacción entre la entrada 1 y la salida 2, así como de la entrada 2 y la salida 1. Esta interacción es propia del sistema identificado: dos tanques interconectados. El tiempo de establecimiento del sistema es aproximadamente 4 minutos. En la respuesta escalón se puede observar el retraso en la respuesta de la de la salida 1 frente a una variación en la entrada 2 y el retraso en la respuesta de la salida 2 cuando se produce un cambio en la entrada 1.

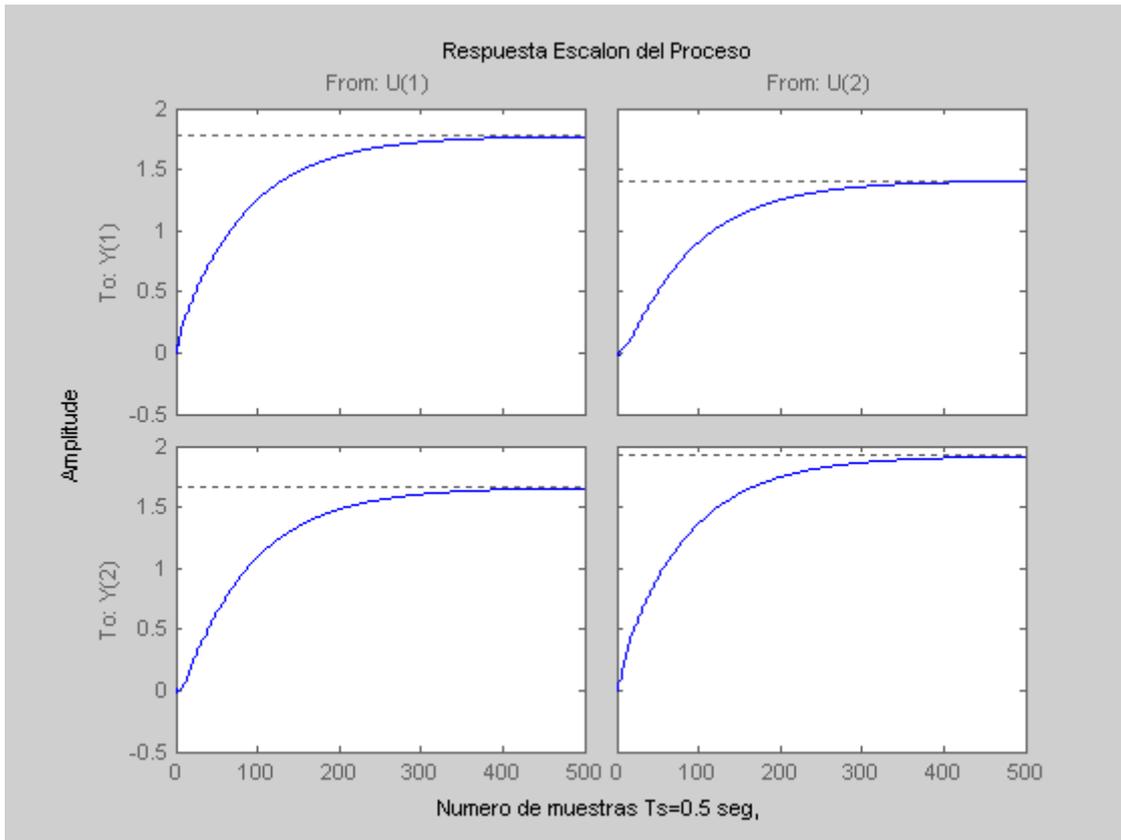


Figura 3.47. Respuesta escalón de la planta identificada

Para validar el modelo del proceso obtenido con el método de identificación *IdCI*, se utilizan datos experimentales de la planta funcionando a lazo cerrado distintos a los utilizados para la identificación.

Existen dos métodos por simulación que nos permiten comprobar las prestaciones del modelo del proceso obtenido. El primero es considerando el modelo de los controladores utilizados en la planta experimental y el segundo asumiendo que no se conocen los controladores.

Los datos de la planta en funcionamiento a lazo cerrado necesarios para la validación son: las referencias utilizadas en los controladores y las señales de salidas del proceso, estas últimas para la validación del modelo del proceso.

La validación conociendo el modelo del controlador, consiste en hacer “funcionar” a lazo cerrado, mediante simulación, el modelo del proceso obtenido. La figura 3.48 ilustra el método de *validación a lazo cerrado*.

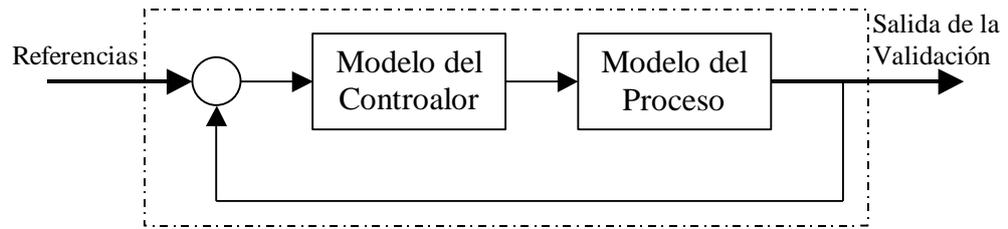


Figura 3.48 Validación a lazo cerrado

Las señales de referencias utilizadas en el experimento son inyectadas en la simulación y obtenemos las salidas del proceso funcionando a lazo cerrado.

Para la validación del modelo de la planta de dos tanques, las entradas de las referencias se muestran en la siguiente figura 3.49

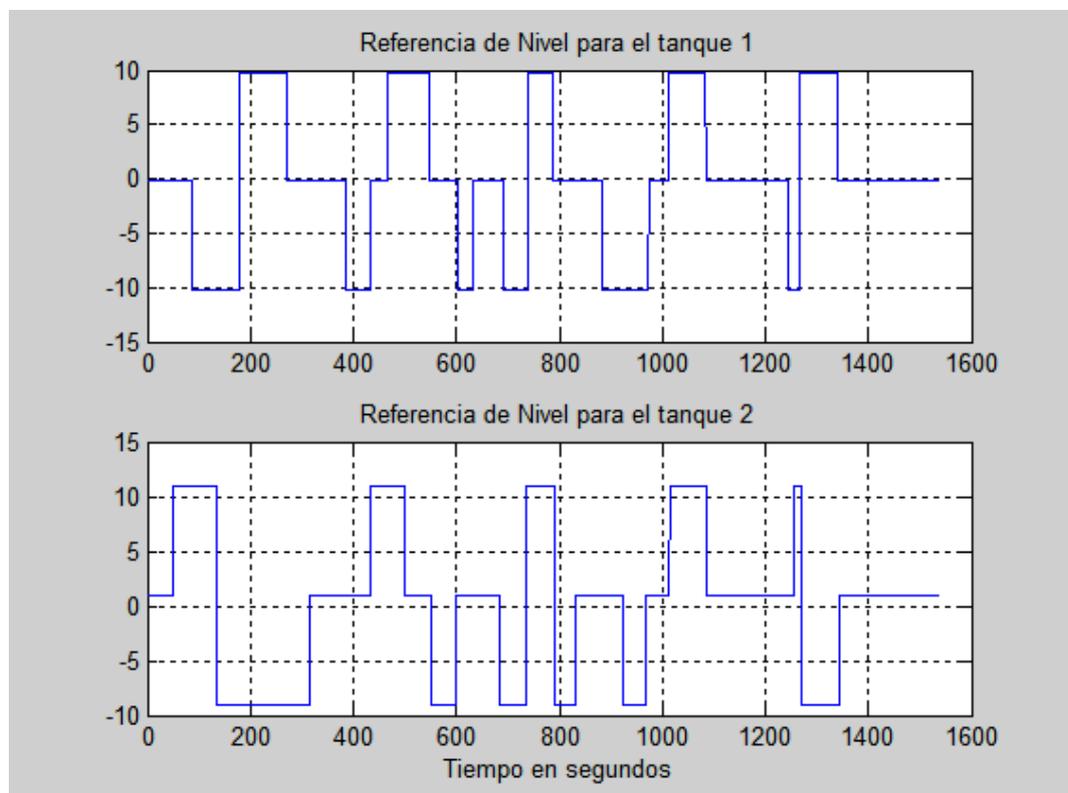


Figura 3.49. Señales de referencia utilizadas para la validación del modelo del proceso

Los controladores utilizados en el control de nivel de los tanques, son dos lazos PID digitales de tipo velocidad con filtrado en el término derivativo, que controlan de

manera independiente el nivel de cada tanque. Los parámetros de ambos controladores son:  $K_p = 2$ ,  $T_i = 0.01$  y  $T_d = 0.3$ . La simulación del funcionamiento a lazo cerrado de la planta se realiza en Simulink, figura 3.50.

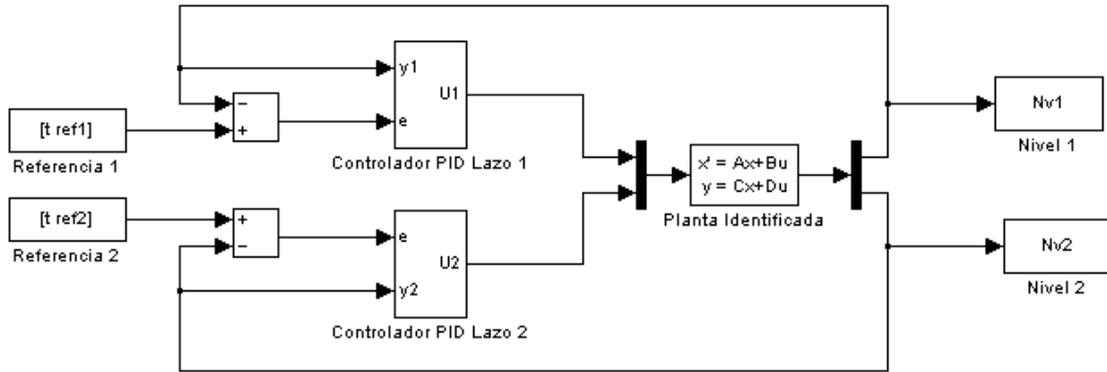


Figura 3.50. Simulación del proceso a lazo cerrado.

En la figura 3.51 se pueden observar las señales de salida experimental de nivel de ambos tanques, comparadas con los niveles obtenidos de la simulación de la planta en lazo cerrado, incluye también las señales de referencia.

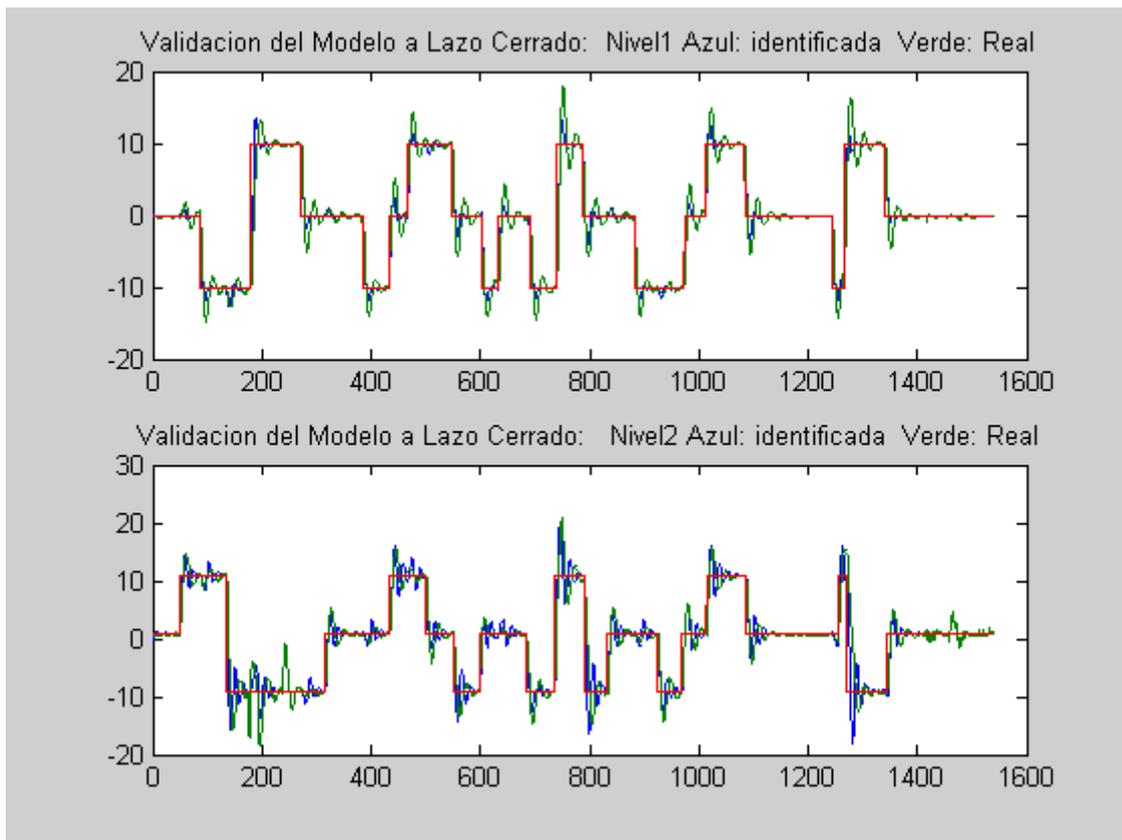


Figura 3.51. Resultados de la validación a lazo cerrado.

En el caso que no se dispusiera del modelo de los controladores, se puede hacer la validación del modelo del proceso mediante dos pasos. El primero es obtener las señales de control que deberán ser inyectadas al modelo de proceso. Para ello el modelo del sistema a lazo cerrado, obtenido como parte del procedimiento de identificación, es excitado con la señales de referencia del experimento, de forma de obtener las señales de control no correlacionadas con las perturbaciones de medición y de funcionamiento del proceso, es decir desacopladas.

Finalmente, como segundo paso, la señal de control desacoplada se utiliza para excitar el modelo del proceso de manera de obtener la salida del proceso identificado. En la figura 3.52 se explica la metodología para la validación:

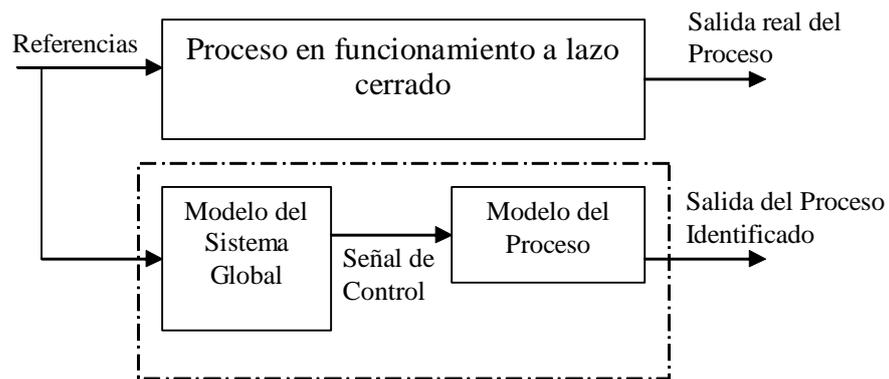


Figura. 3.52. Validación del proceso sin conocer los controladores

El resultado de la validación sin controladores se muestra en la figura 3.53

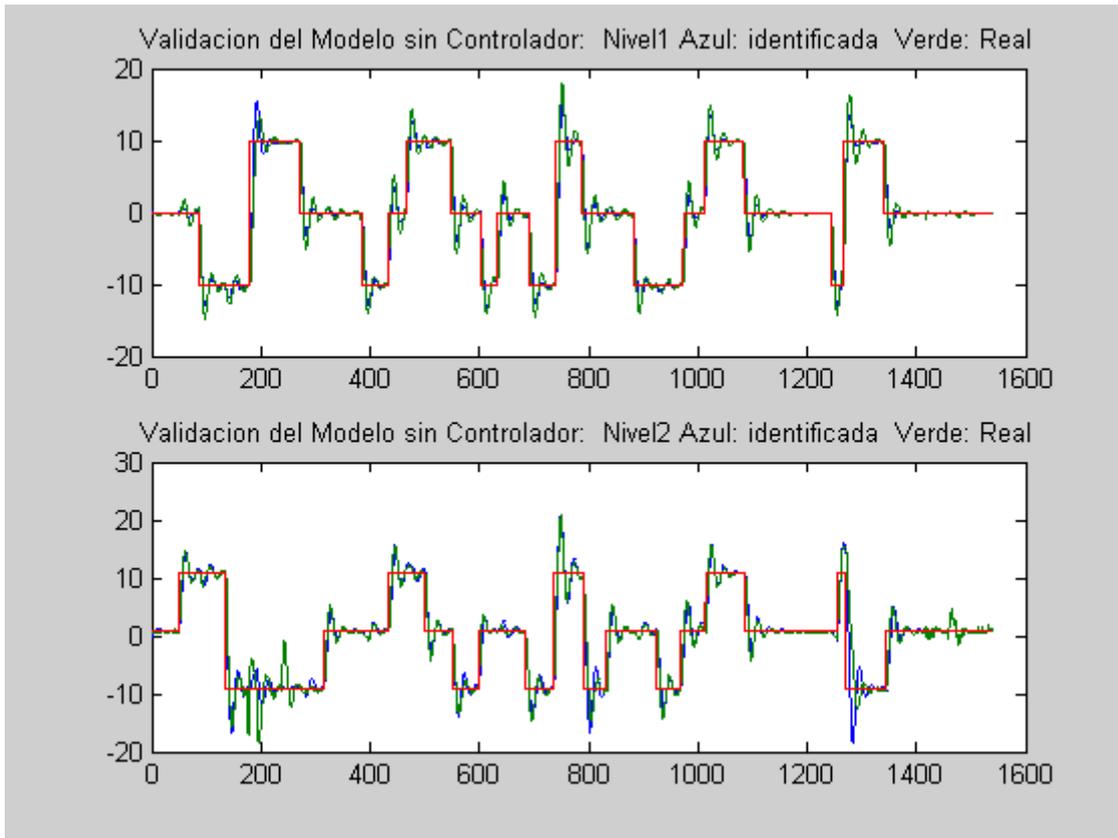


Figura 3.53 Validación del proceso sin controladores.

Del análisis comparativo entre la validación realizada simulando el proceso a lazo cerrado y el método sin considerar el controlador, podemos concluir que éste último ofrece mejores resultados. La diferencia está en el uso del controlador para la simulación a lazo cerrado, figura 3.50, ya que el controlador es representado como un algoritmo PID de velocidad, sin tener en cuenta las restricciones de programación numérica que el controlador tiene en la planta real. Sin embargo en la validación sin controlador, figura 3.52, el modelo del sistema global es utilizado para generar la señal de control que va al modelo del proceso, es claro que de acuerdo con las ecuaciones (3.13) y (3.20), el modelo global incluye el modelo del controlador utilizado en la planta real.

Es importante notar, que el modelo estimado con el algoritmo de identificación a lazo cerrado *IdCIL*, está desacoplado de perturbaciones en el proceso y de ruidos de medición. Es por esto que en algunas zonas de la comparación de la respuesta real del sistema con la obtenida por simulación del proceso estimado existan diferencias.

Si analizamos la última parte de los datos reales utilizados para la validación del modelo, figura 3.54, que corresponden a partir de los 1000 segundos, podemos observar que existen perturbaciones en el proceso y ruidos de medición, que quedan evidenciadas principalmente en la señal de medición: Nivel2, y en la señal de control: Control2.

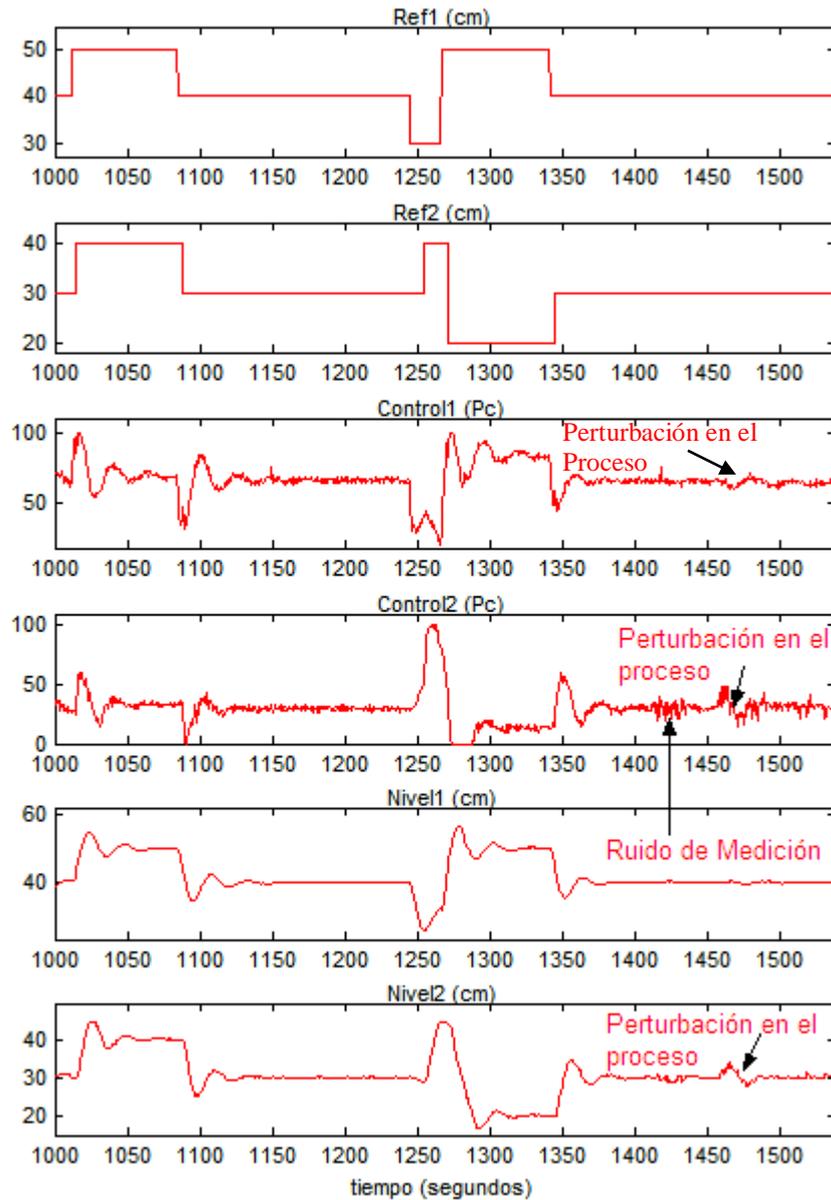


Figura 3.54 Datos de validación a partir de los 1000 segundos

Las perturbaciones mostradas en la figura 3.54 no se presentan en la simulación de validación, como se puede constatar en las figura 3.55 y 3.56, donde las señales de medición y control están libres de ruido tanto de proceso como de medición. Otro hecho importante es la saturación que presenta la señal: Control2 entre los instantes 1250 y 1300, que origina un atraso en la variación del Nivel2; sin embargo, el atraso no se presenta en la señal correspondiente a la simulación.

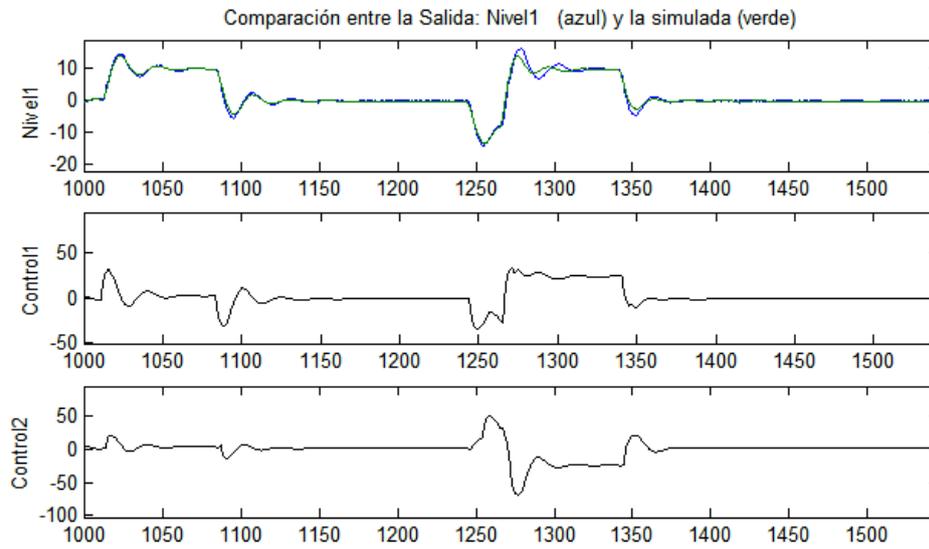


Figura 3.55. Comparación del Nivel1

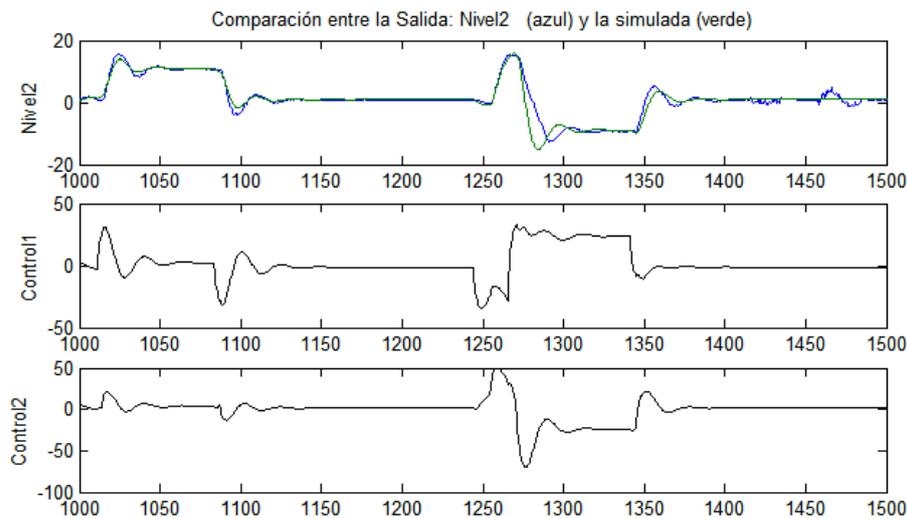


Figura 3.56. Comparación del Nivel2

### 3.8 Comparación del método de identificación propuesto con el método de identificación directo:

Para efectos de comparar las prestaciones del método de identificación a lazo cerrado con otros métodos de identificación basados en subespacios, se trató de identificar el proceso de dos tanques intercomunicados con el método CLID desarrollado por [V. Overschee y B. De Moor, 1996], descrito en la sección 3.3.2. Lamentablemente, el método requiere la respuesta impulso de los controladores, en este caso de los dos controladores PI digitales PI de velocidad, es decir el término derivativo está en la retroalimentación. La complejidad de los controladores hace imposible obtener una respuesta impulso tal como el algoritmo lo requiere. Ante al imposibilidad de usar el algoritmo CLID se realiza la identificación de la planta mediante el método de identificación directo, es decir tratando a la planta como si estuviese a lazo abierto, utilizando como entrada las señales de control y como salida las respuestas de la planta. El algoritmo que se ha seleccionado para identificación a lazo abierto es el Moesp\_SID, algoritmo basado en subespacios. Los datos utilizados corresponden a las señales de control y salida de la planta, presentados en las figuras 3.42 y 3.43. El orden del modelo se obtiene a partir de los valores singulares de la figura 3.57. El orden seleccionado es 5.

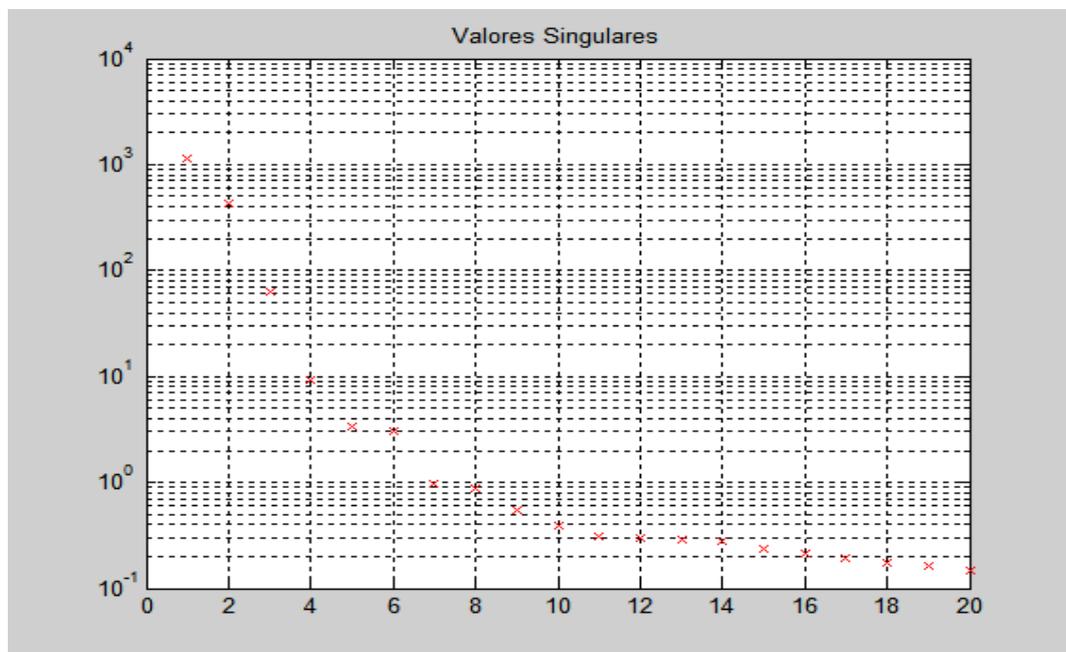


Figura 3.57. Orden del modelo para el método de identificación indirecto

En la figura 3.58 se compara la salida de la identificación con la salida real de la planta. Se puede apreciar el “bias” en la señal de salida, debido a que las señales de control están correlacionadas con el ruido. La respuesta escalón del modelo del proceso se presenta en la figura 3.59, se puede ver que el tiempo de establecimiento es de aproximadamente 4 minutos, similar al encontrado con el método de identificación a lazo cerrado.

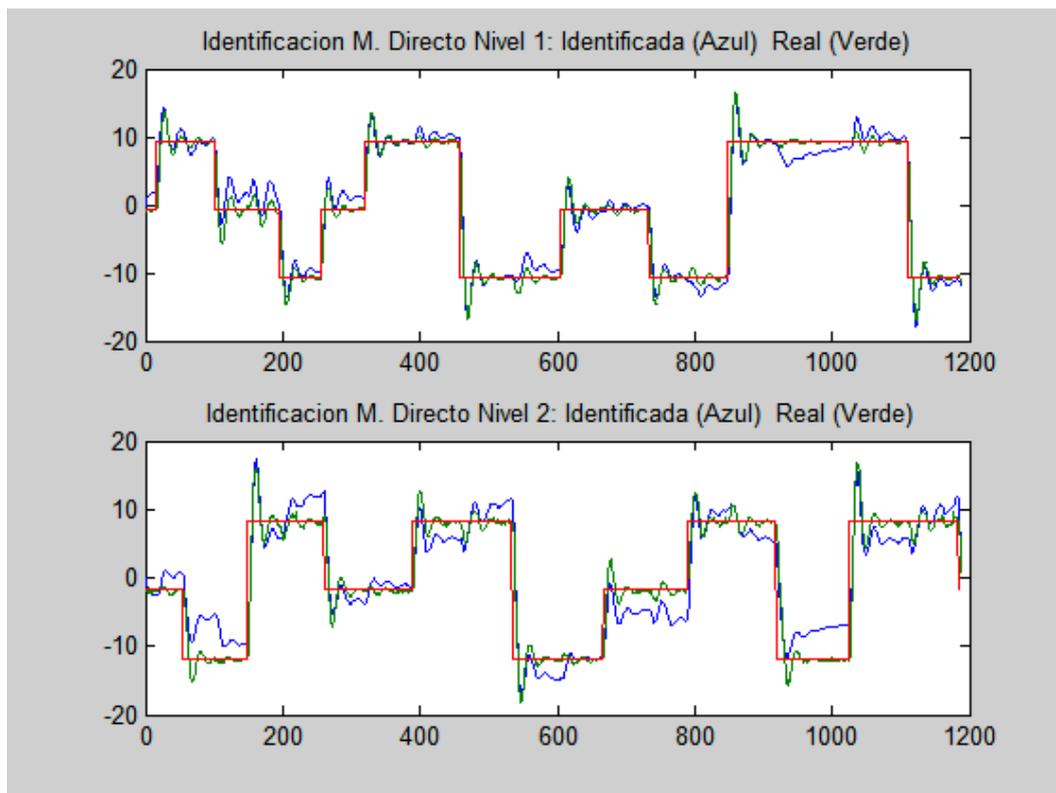


Figura 3.58. Comparación de la señal de salida de la identificación

La validación del método directo con datos experimentales, distintos a los utilizados en la identificación, se realiza con los datos correspondientes a la señal de control de la figura 3.60, a diferencia del método de identificación a lazo cerrado que utiliza las señales de referencia de los controladores. La figura 3.61 es una comparación de la señal de salida real del proceso con la señal obtenida de la validación, se añade las señales de referencia para ilustrar mejor la comparación.

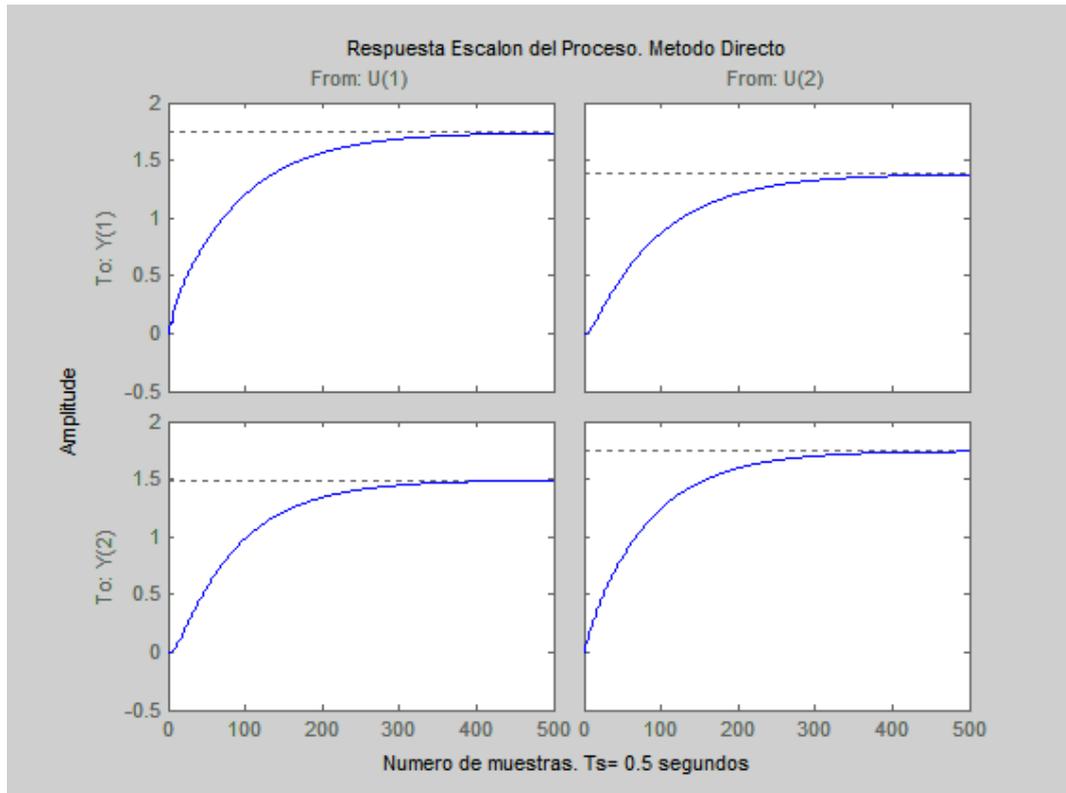


Figura 3.59 Respuesta escalón del modelo por identificación directa.

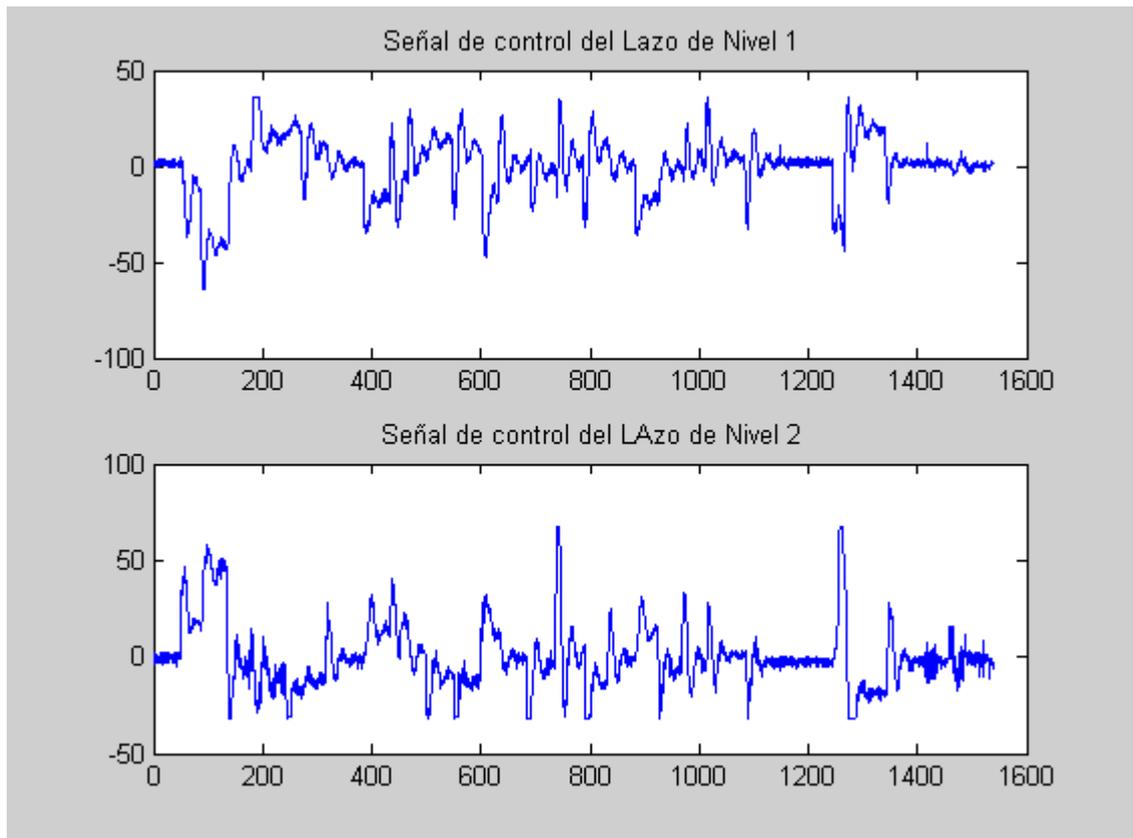


Figura 3.60. Señales de entrada para el método de identificación directo

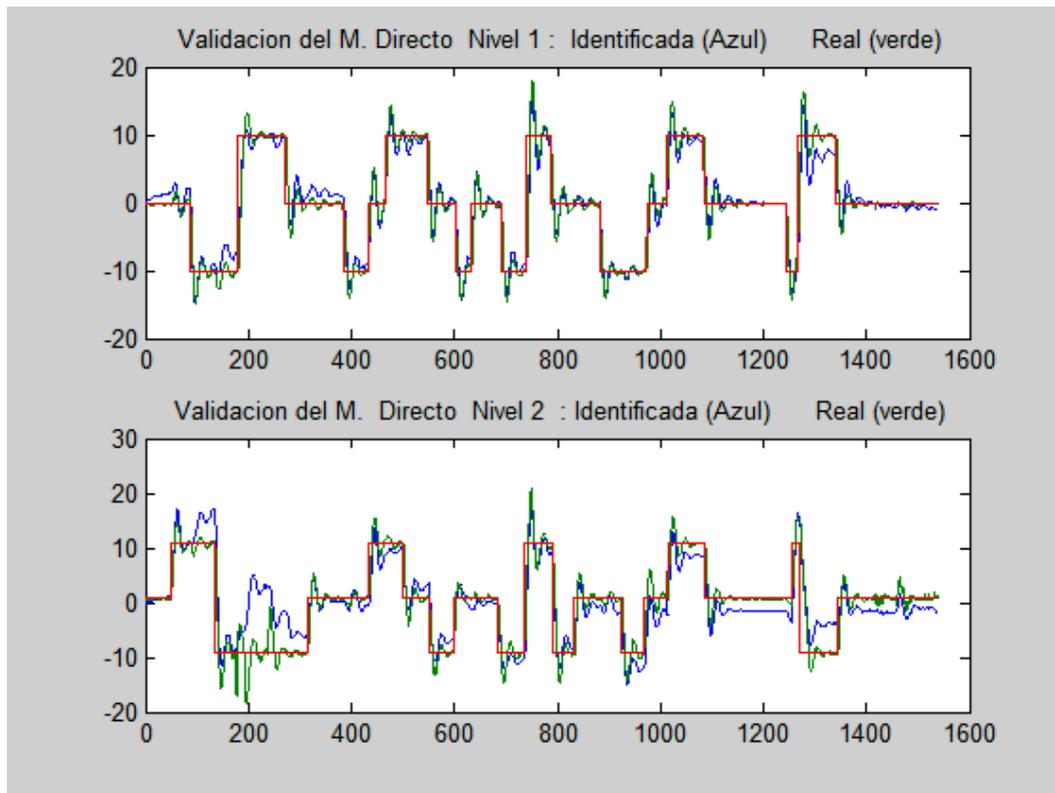


Figura 3.61. Validación del método de identificación directo

Si comparamos los resultados de la validación del método directo, figura 3.61 y los representados en las figuras 3.51 y 3.53, obtenidos por el método de identificación a lazo cerrado, podemos observar el problema del “bias” presentado en el estacionario del método directo.

El método de identificación a lazo cerrado propuesto nos permite obtener un modelo fiable de la planta, a pesar de que las variables de proceso tengan tiempos de retardos, ya que estos se pueden modelar aumentando el orden del proceso. Una de las ventajas principales del método propuesto es que no se necesita conocer el tipo de controlador que se tiene a lazo cerrado. La dinámica del controlador queda representada en el modelo global a lazo cerrado que se obtiene como parte del algoritmo. También queda superado el bias presente en la identificación de procesos a lazo cerrado utilizando métodos directos, debido al desacoplamiento de la señal de control de los ruidos externos.

## *Capítulo 4*

### *Identificación de una unidad despropanizadora de butano y propano*

Una de las técnicas de control avanzado que se utiliza con mucho éxito en la industria petroquímica, son los controladores multivariables predictivos basados en modelos (Model Based Predictive Control MBPC), especialmente por su capacidad de poder manejar procesos con dinámicas relativamente complejas y con fuertes interacciones. Estos controladores basan su estructura de control en el conocimiento de un modelo dinámico de la planta, normalmente obtenido mediante pruebas escalón (step-tests) del proceso en funcionamiento. Estas pruebas presentan la desventaja que tienen que realizarse bajo condiciones especiales de operación de la planta, requieren personal altamente capacitado, la calidad de datos recogidos dependerán de la experiencia técnica tanto de los ingenieros de control como de los operadores, esto debido a que será necesario abrir algunos lazos de control, existiendo el riesgo de poner a oscilar el sistema o provocar grandes perturbaciones que van en decremento de la calidad del producto que se está obteniendo. Las pruebas escalón normalmente toman varios días, durante los cuales el planeamiento de la producción puede sufrir alteraciones, significando altos costos de dinero en pérdidas. La identificación de la columna se realiza utilizando mínimos cuadrados,

obteniendo para cada salida un modelo referido a todas las entradas, es decir como un sistema MISO..

Las técnicas de identificación a lazo cerrado son una alternativa muy atractiva para modelar procesos que se encuentran trabajando bajo control. Se puede obtener el modelo dinámico de una planta sin necesidad de tener que abrir los lazos de control, evitando perturbaciones en el sistema y permitiendo mantener la planta dentro de los rangos normales de operación, garantizando la calidad de la producción. Las pruebas de identificación a lazo cerrado se realizan sin necesidad de perturbar de manera excesiva las variables del proceso, se mantienen dentro de sus límites de funcionamiento. El modelo que se obtiene describe mejor el comportamiento multivariable de la planta, ya que la identificación se hace considerando todas las salidas y entradas a la vez.

En el presente capítulo se describe, como aplicación de los métodos de identificación basados en subespacios de los capítulos 2 y 3, la estimación del modelo dinámico de la despropanizadora de una unidad de recuperación de ligeros de una refinería, la cual se encuentra operando bajo un sistema de control multivariable predictivo.

#### **4.1 Descripción del proceso.**

La despropanizadora de una unidad de recuperación de ligeros, es una columna de destilación que separa una mezcla de propano y butanos (butano normal e isobutano) en dos corrientes líquidas:

- Por cabeza, como destilado, se obtiene propano como producto final.
- Por el fondo de la columna se obtiene butano como producto final.

En la figura 4.1 se muestra un esquema de los principales lazos de control de control presentes en la despropanizadora.

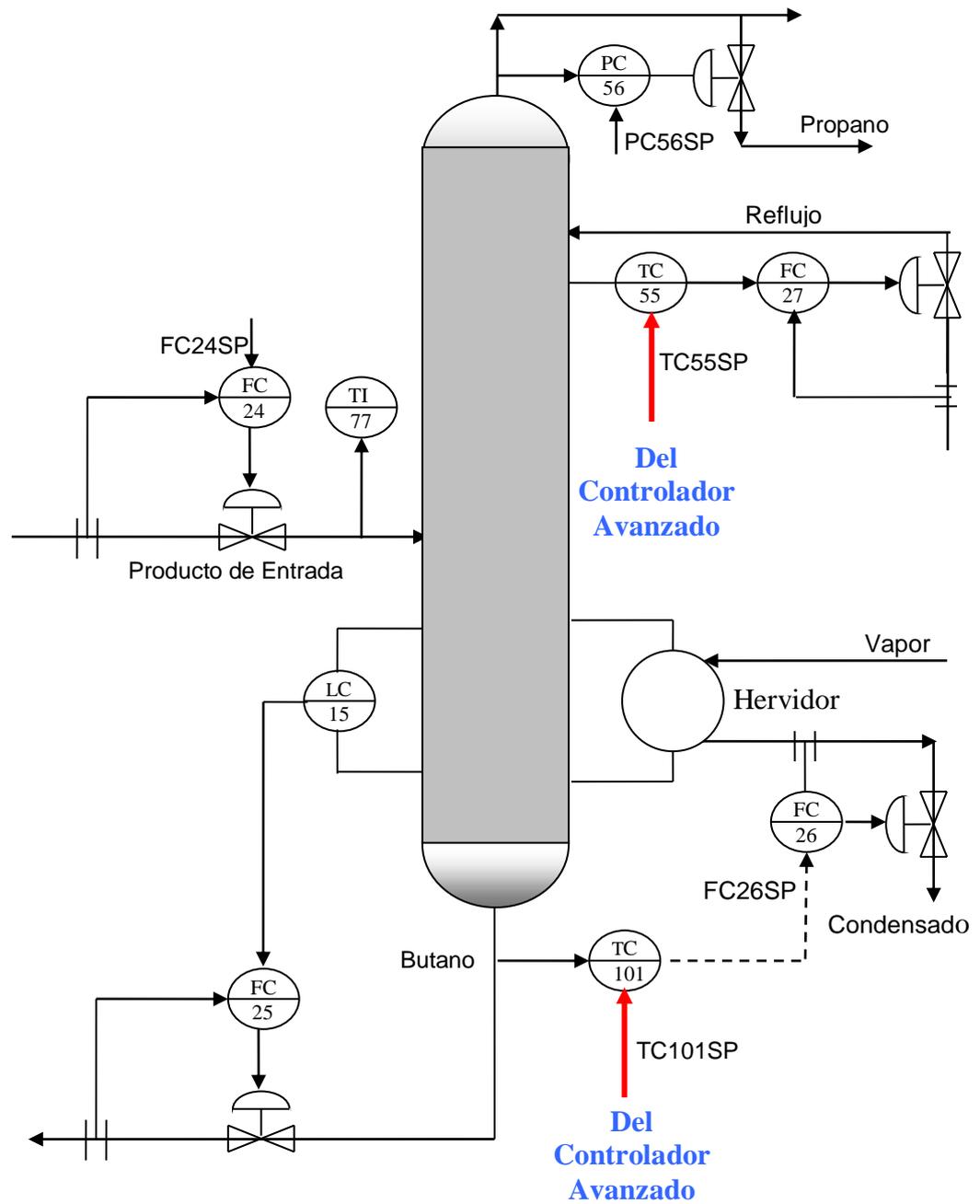


Figura 4.1 Esquema de la columna despropanizadora

## *Identificación de una unidad despropanizadora de butano y propano*

El producto de entrada está compuesto principalmente por corrientes de hidrocarburos líquidos ligeros saturados; mezclas de propano y butanos con componentes más ligeros y nunca alcanos más pesados que los hexanos, proveniente de la unidad Merox de GLP (Gases Licuados de Petróleo). La mezcla de ingreso es previamente almacenada en un tanque pulmón de alimentación, a partir de cual se bombea hacia la columna; el nivel del tanque pulmón es controlado a través de un controlador en cascada, siendo el lazo interno el control de flujo FC24.

El propano que sale por cabeza contiene impurezas de butano, C<sub>4</sub>. De igual forma el producto que se extrae por fondo de la columna, butano, se encuentra con impurezas de propano C<sub>3</sub>. El sistema de control de la columna deberá garantizar que las impurezas de cabeza y de fondo se mantengan dentro de especificaciones comerciales. Para lograr esto, será necesario controlar fundamentalmente cuatro variables de operación de la columna: el nivel de líquido y la temperatura de fondo de la columna, la temperatura en el plato sensible y la presión de la columna.

Las cuatro variables de operación de la columna son controladas mediante los siguientes controladores:

- **Control de nivel de líquido de fondo de la columna, LC15.** Se encuentra en cascada con el controlador de flujo FC25, el nivel en el fondo es mantenido constante controlando el caudal de butano extraído.
- **Control de temperatura de fondo de columna, TC101.** En cascada con el controlador de flujo FC26, la temperatura de fondo de la columna es mantenida en su rango de operación controlando el ingreso de vapor al hervidor. El lazo en cascada es abierto para poder realizar las pruebas escalón sobre la señal de referencia del flujo de vapor, FC26SP.
- **Control de temperatura del plato sensible, TC55.** Está en cascada con el controlador de flujo FC27, la temperatura en el plato sensible se controla a través del reflujo de propano que reingresa a la columna.
- **Control de la presión de la columna, PC56.** Mantiene presión de la columna dentro de un valor que garantice una operación segura.

El control de la columna se puede ver como un sistema jerarquizado de dos niveles, el primero orientado a un control básico, formado por controladores PID que se ejecutan en los lazos mostrados en la figura 4.1; el segundo nivel un control avanzado, en este caso un control multivariable predictivo basado en modelos.

El sistema de control que en la actualidad se está empleando para operar la unidad, permite garantizar la seguridad y estabilidad de la columna, mantener dentro de rangos de operación a los distintos equipos e instrumentos de medición y control, y la calidad final del butano y del propano.

## 4.2 Modelo dinámico de la planta

El control multivariable predictivo basado en modelos, necesita para su funcionamiento un modelo matricial de la planta, donde se representan las respuestas escalón, obtenidas mediante mínimos cuadrados. En la figura 4.2 se representa un modelo matricial de un controlador MPBC comercial.

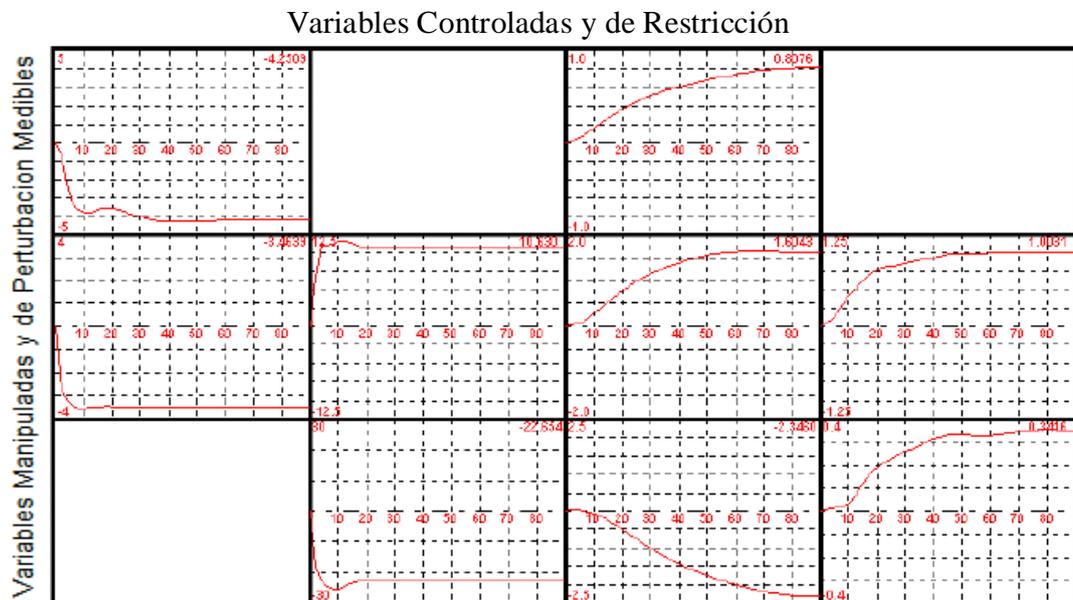


Figura 4.2 Modelo matricial de un controlador MPBC

Para el controlador las **variables manipuladas** son aquellas variables, independientes que el controlador puede ajustar, dentro de límites permitidos para

efectuar el control del proceso. De acuerdo con el control jerarquizado, las variables manipuladas serán las referencias de los controladores PID que conforman el control básico de la columna. Para efectos del modelo dinámico de la planta en estudio, se consideran como variables manipulables.

Las **variables de perturbación medibles**, son variables que influyen en el control del proceso pero que no pueden ser manipuladas por el control avanzado. Sin embargo son medibles y debido a su importancia en el funcionamiento del proceso se incorporan en la estrategia de control

Las **variables controladas** son aquellas que responden a cambios en las variables manipuladas y de perturbación del modelo. El controlador deberá mantener las variables controladas en valores determinados, de forma que la planta se mantenga en un punto de operación que garantice un funcionamiento seguro y que los productos finales sean de buena calidad. Para ello el controlador deberá ajustar de manera simultánea las variables manipuladas teniendo en cuenta el valor que puedan tener las variables de perturbación. Dentro de las variables controladas, se consideran también aquellas **variables** de la planta que son de **restricción**, es decir, que para su normal funcionamiento su valor de operación debe estar dentro de un rango; es el caso típico de señales de comando a válvulas de control de flujo.

### **4.3. Identificación de la columna despropanizadora**

El objetivo de la identificación es obtener un modelo dinámico de la columna. El método clásico utilizado en los controladores avanzados de control predictivo basado en modelos, las pruebas experimentales se realizan con variaciones tipo escalón de las señales manipulables para obtener el modelo. El modelo matricial de la columna se estima mediante mínimos cuadrados tomado la columna como un sistema MISO, es decir se encuentra el modelo de una salida con respecto a todas las entradas. Las pruebas son realizadas a lazo abierto y las variables manipuladas y de perturbaciones medibles son excitadas de manera independiente, de manera de registrar el comportamiento de las variables controladas y de restricción. Para la columna en estudio el sistema de control avanzado considera como variables manipuladas: TC55SP, FC26SP y de perturbación: FC24SP, FC56SP, sobre las que se tienen que

hacer las pruebas escalón. La temperatura de ingreso del producto TI77PV se considera como una perturbación, pero sólo se puede registrar ya que no puede ser excitada mediante una entrada escalón. Para esta columna se consideran 90 minutos de horizonte de tiempo estacionario, tiempo en que la variable controlada más lenta llegará al estacionario, de manera que una identificación utilizando el método de escalón para cuatro entradas puede durar como mínimo  $4 \times 10 \times 90 / 60 = 60$  horas, suponiendo que cada variable manipulada se mueva una media de 10 veces, que es normal en este tipo de pruebas. Se habla de un tiempo mínimo de 60 horas, ya que suelen durar más, porque entre escalones hay que esperar un tiempo de estabilización mayor. Este tipo de pruebas requiere personal capacitado en ingeniería de control y en operación de la columna, ya que un mal manejo de las variables de excitación puede originar que la columna se desestabilice y obtener una calidad pésima de propano y butano. Hay que considerar que en la práctica una prueba escalón de cuatro variables puede durar de 4 a 6 días. A parte de los inconvenientes de tiempo y costo que significan las pruebas, el modelo que se obtiene no describe completamente la dinámica multivariable de la columna, es decir la interacción entre la variación simultánea de las variables manipuladas y la reacción de las variables controladas y de restricción.

Una alternativa al método de identificación a lazo abierto, es hacer una identificación a lazo cerrado, considerando el lazo de temperatura de fondo, TC101, cerrado. De esta manera garantizamos que la temperatura de fondo se mantenga dentro de valores que no pongan en riesgo la estabilidad de la columna y la calidad del producto a pesar de variaciones que se puedan hacer en las variables de perturbación: FC24SP, PC56SP y en las referencias de los lazos de temperatura de plato sensible, TC55SP y de temperatura de fondo TC101SP.

En la presente sección se procede a la identificación de la columna despropanizadora haciendo uso de datos reales obtenidos de planta. Los datos se han obtenido en dos modos de funcionamiento del sistema de control de la columna.

Considerando el lazo de temperatura de fondo abierto, TC101. La excitación se hace directamente sobre la referencia del lazo de flujo de vapor que entra al hervidor, FC26SP. Se manipulan las variables de perturbación medible: FC24SP, PC56SP y la

## Identificación de una unidad despropanizadora de butano y propano

referencia del lazo de control del plato sensible TC55SP, figura 4.3. Se registran todas las variables controladas y de restricción.

1. Considerando el lazo de temperatura de fondo cerrado, TC101. La excitación se hace sobre la referencia de la temperatura de fondo, TC101SP. Las variables manipuladas son las de referencia de los dos lazos de temperatura: TC101SP y TC55SP; las variables de perturbación medible son: FC24SP, PC56SP, figura 4.4. Se registran todas las variables controladas y de restricción.
2. Considerando el lazo de temperatura de fondo cerrado, TC101. La excitación se hace sobre la referencia de la temperatura de fondo, TC101SP. Las variables manipuladas son las de referencia de los dos lazos de temperatura: TC101SP y TC55SP; las variables de perturbación medible son: FC24SP, PC56SP, figura 4.4. Se registran todas las variables controladas y de restricción.

En ambas pruebas no se considera el sistema de control avanzado, es decir sale de servicio y el tiempo de muestreo empleado es de 1 minuto.

### **4.3.1. Identificación a lazo abierto**

A partir del primer conjunto de datos, se obtiene el modelo dinámico de la planta de forma matricial, necesario para el control avanzado MPBC. La identificación se realiza utilizando algoritmos basados en subespacios a lazo abierto. El modelo se obtiene en espacio de estados y se encuentra su respuesta escalón, validado para los 90 minutos de horizonte de establecimiento.

En la tabla 4.1. se resumen las variables utilizadas para obtener el modelo dinámico de la columna despropanizadora a lazo abierto. En el modelo no se considera ninguna variable asociada al control de nivel del fondo de la columna, por ser este un lazo independiente que mantiene el nivel constante.

**Identificación de una unidad despropanizadora de butano y propano**

Variables Manipuladas	
Referencia de la temperatura del plato sensible	TC55SP
Referencia del flujo de vapor en el hervidor	FC26SP
Variables de Perturbación Medibles	
Referencia del flujo de entrada	FC24SP
Referencia de la presión de la columna	FC56SP
Temperatura de ingreso	TI77PV
Variables Controladas y de Restricción	
C <sub>4</sub> en Propano	AU6D
C <sub>3</sub> en Butano	AU6A
Comando de apertura a la válvula de vapor	FC26OP
Comando de apertura a la válvula de reflujo	FC27OP
Comando de apertura a la válvula de presión	PC56OP

Tabla 4.1. Variables utilizadas en el modelo dinámico de la columna

En la figura 4.3 se muestra un esquema de las variables de entrada y las perturbaciones medibles para el modelo a lazo abierto de la columna.

Las señales de entrada usadas para la identificación corresponden a las consignas TC55SP y FC26SP, y a las perturbaciones medibles: FC24SP, PC56SP y TI77PV. Las salidas del modelo son: la concentración de impurezas de butano en el propano, AU6D; la concentración de impurezas de propano en el butano, AU6A; las variables de restricción asociadas a las señales de comando de apertura de las válvulas: FC26OP, válvula de control de flujo de vapor; FC27OP, válvula de control de reflujo y PC56OP, válvula de regulación de la presión en la cabeza de la columna. En la figura 4.4, se muestran las entradas para la identificación. Las señales de salida utilizadas en la identificación se presentan en la figura 4.5

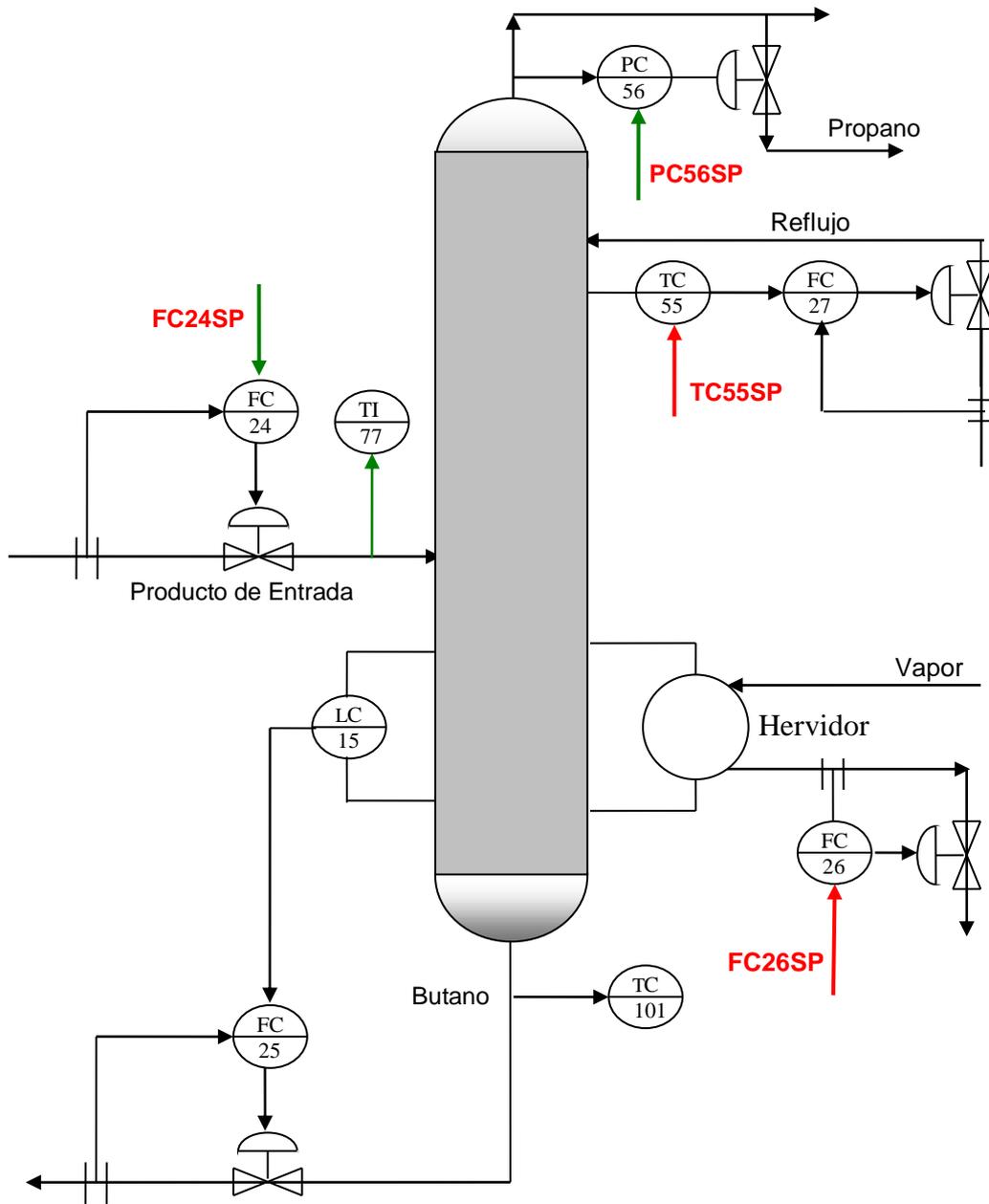


Figura 4.3 Variables manipulables y perturbaciones medibles para la identificación lazo abierto

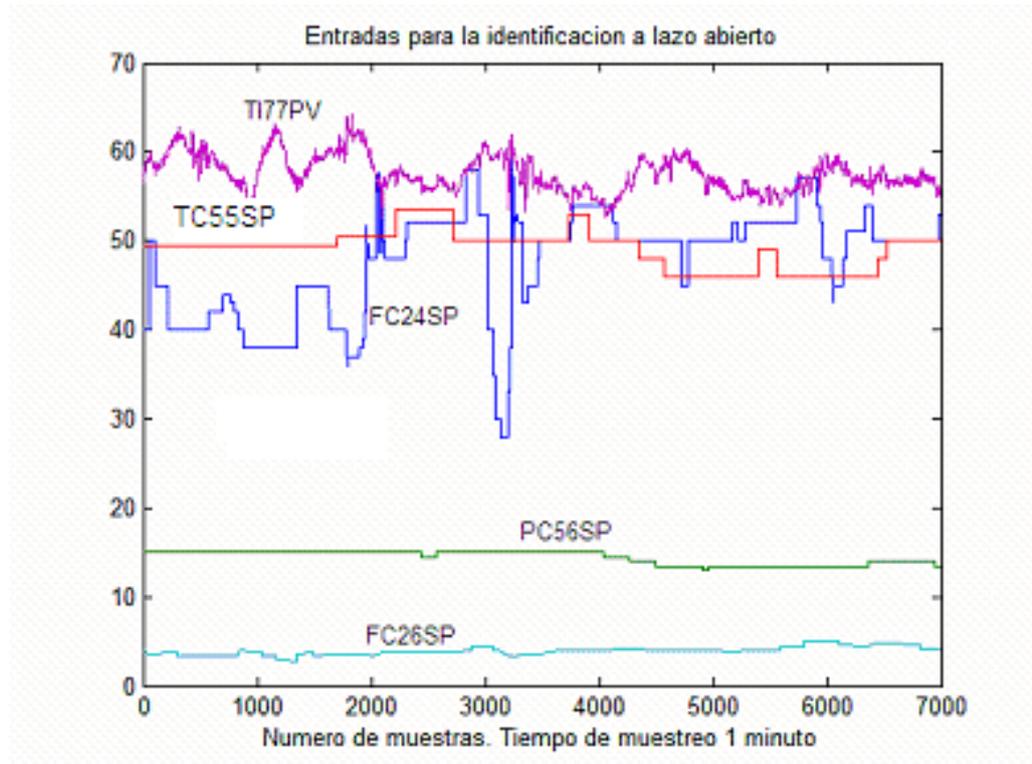


Figura 4.4. Entradas para la identificación a lazo abierto

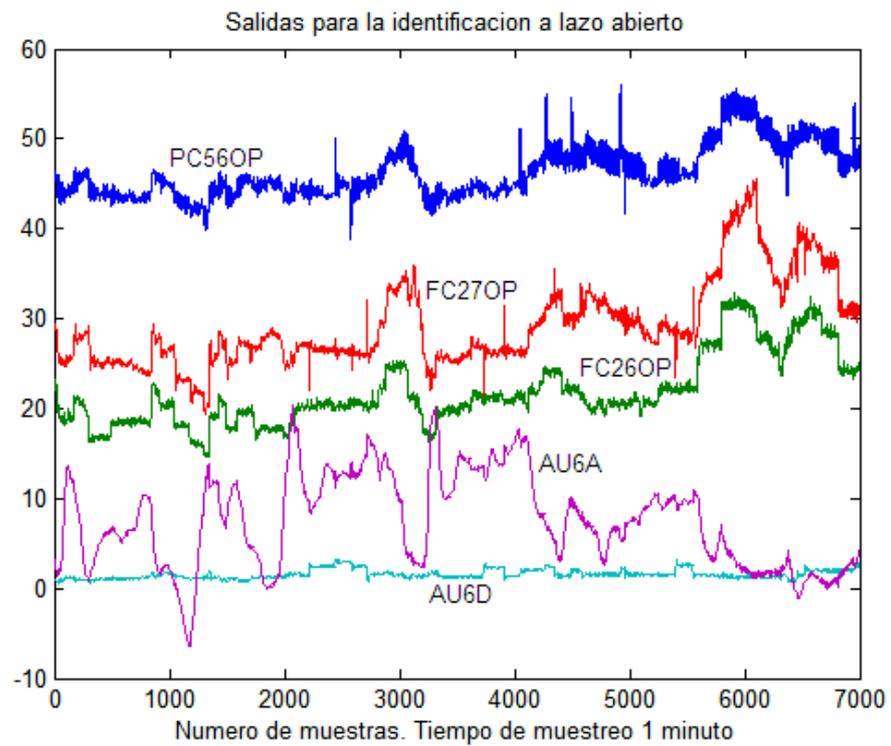


Figura 4.5 Salidas para la identificación a lazo abierto.

### *Identificación de una unidad despropanizadora de butano y propano*

La identificación es realizada utilizando el algoritmo Moesp\_SID y el modelo tiene un orden de 12. El orden es elevado debido a que debemos considerar los retardos propios de algunas variables del proceso de despropanización. El modelo se obtiene en espacio de estados, donde la matriz A, describe el comportamiento dinámico del sistema, hay que destacar que la identificación se hace de manera multivariable, es decir se consideran todas las variables de entrada y salida en conjunto, mostrando una ventaja frente a los métodos de identificación con mínimos cuadrados, donde el modelo se encuentra para cada una de las salidas referida a todas las entradas.

A partir del modelo en espacio de estados se obtiene la respuesta escalón del sistema, en las figuras 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 y 4.10 se grafican las respuestas escalón de cada variable controlada y de restricción en función de la entrada excitada.

Identificación de una Unidad Despropanizadora de Butano y Propano

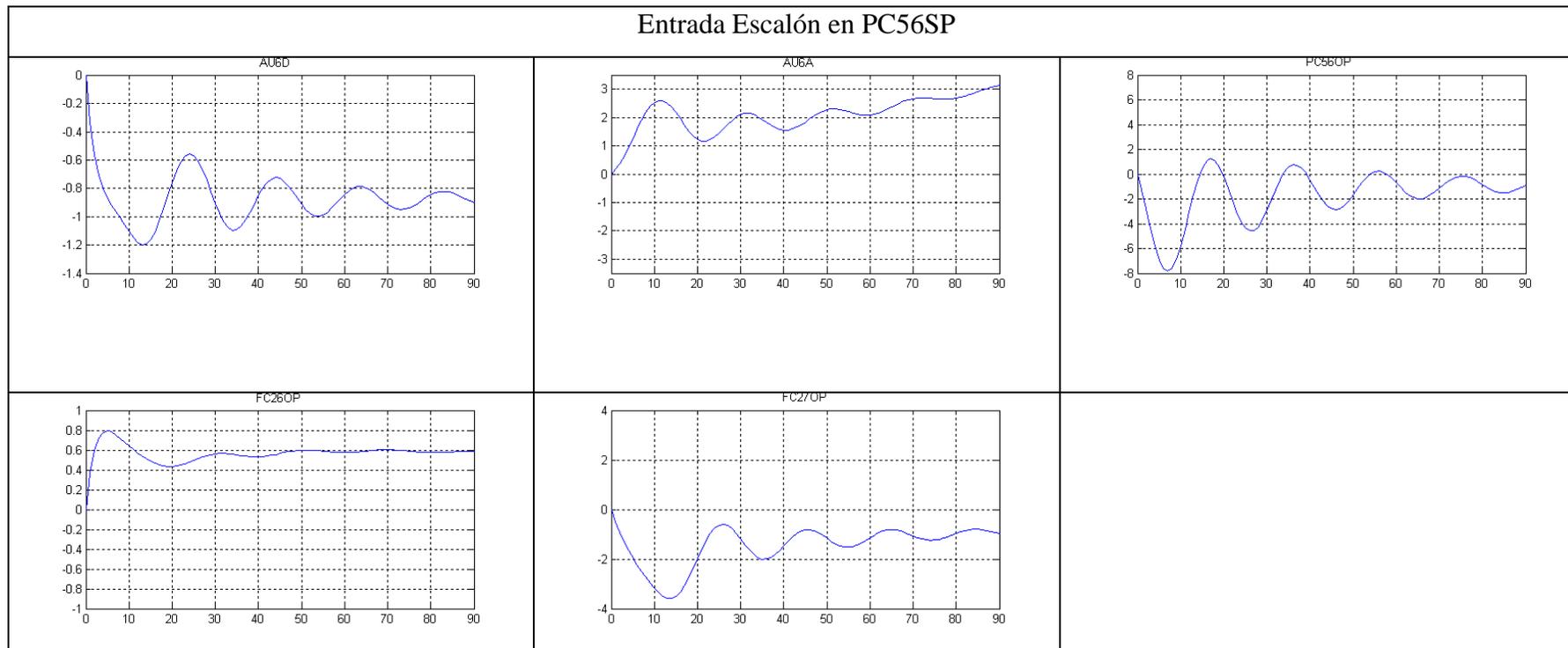


Figura 4.6 Modelo matricial. Entrada PC56SP

Identificación de una Unidad Despropanizadora de Butano y Propano

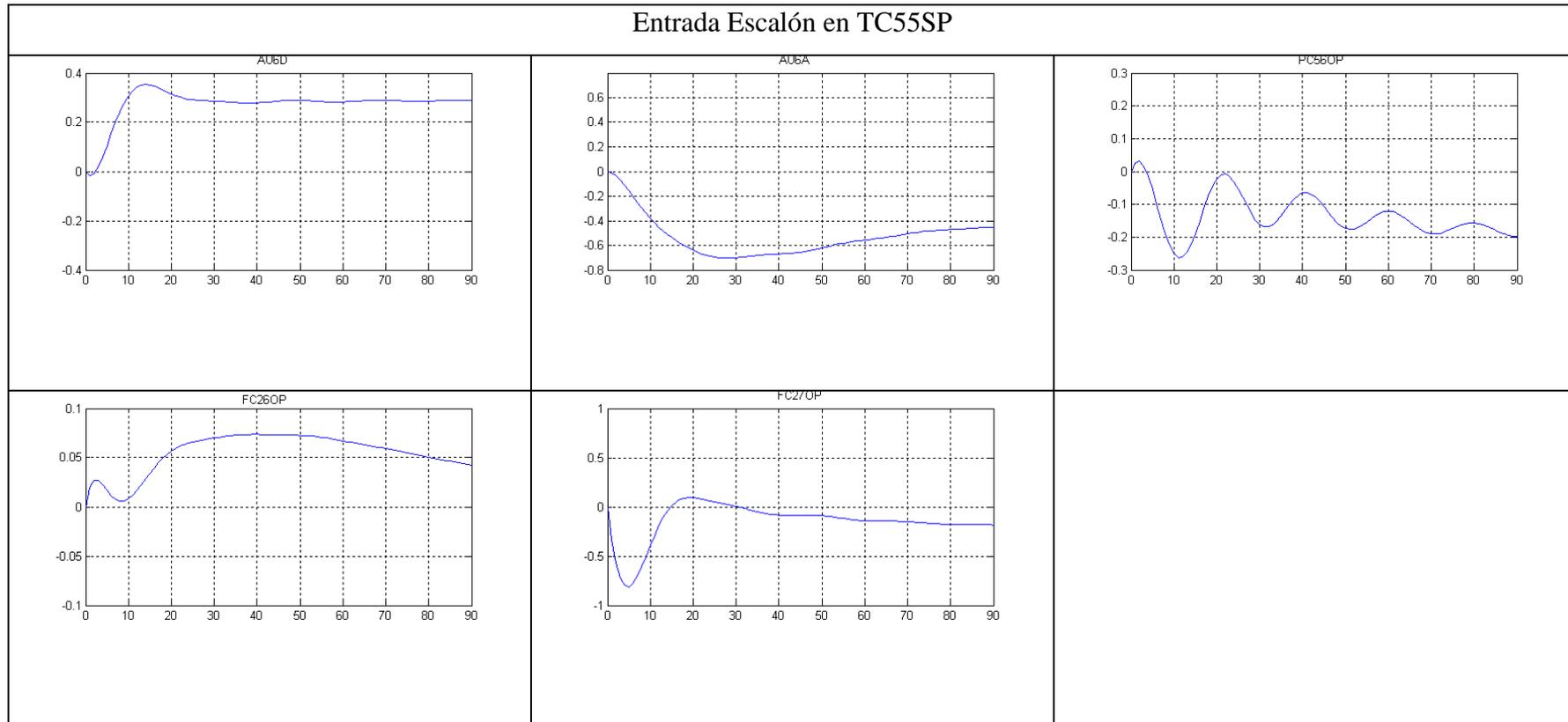


Figura 4.7 Modelo matricial. Entrada TC55SP

Identificación de una Unidad Despropanizadora de Butano y Propano

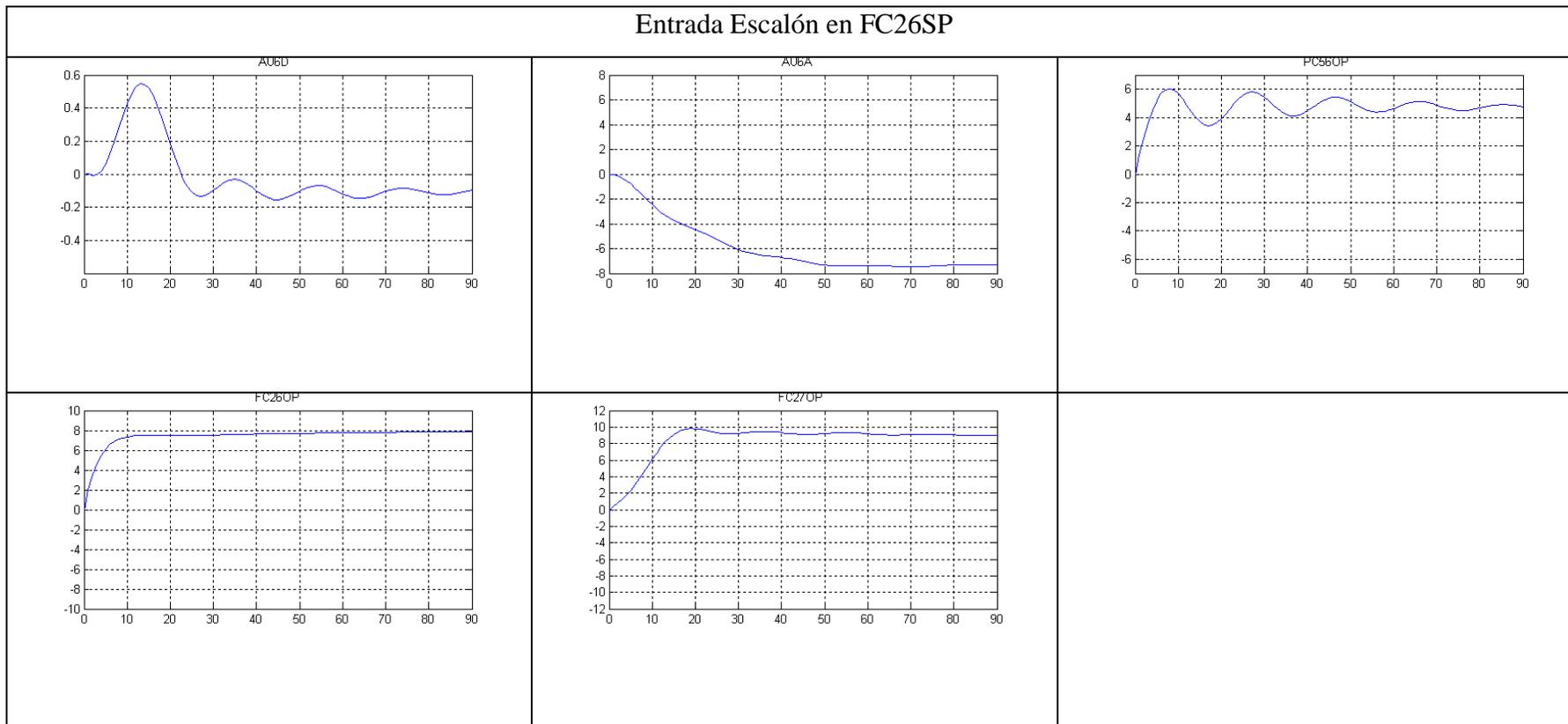


Figura 4.8 Modelo matricial. Entrada FC26SP

Identificación de una Unidad Despropanizadora de Butano y Propano

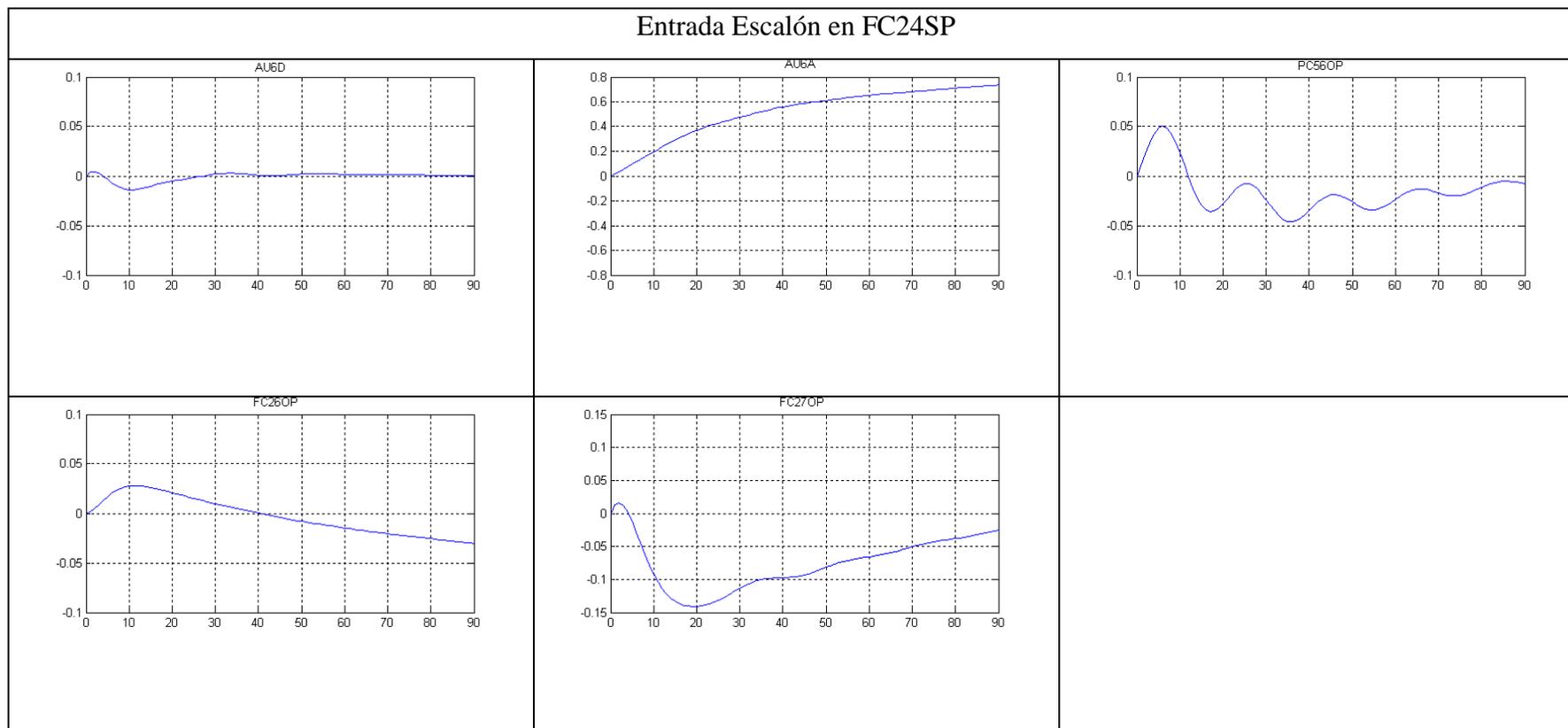


Figura 4.9 Modelo matricial. Entrada FC24SP

***Identificación de una Unidad Despropanizadora de Butano y Propano***

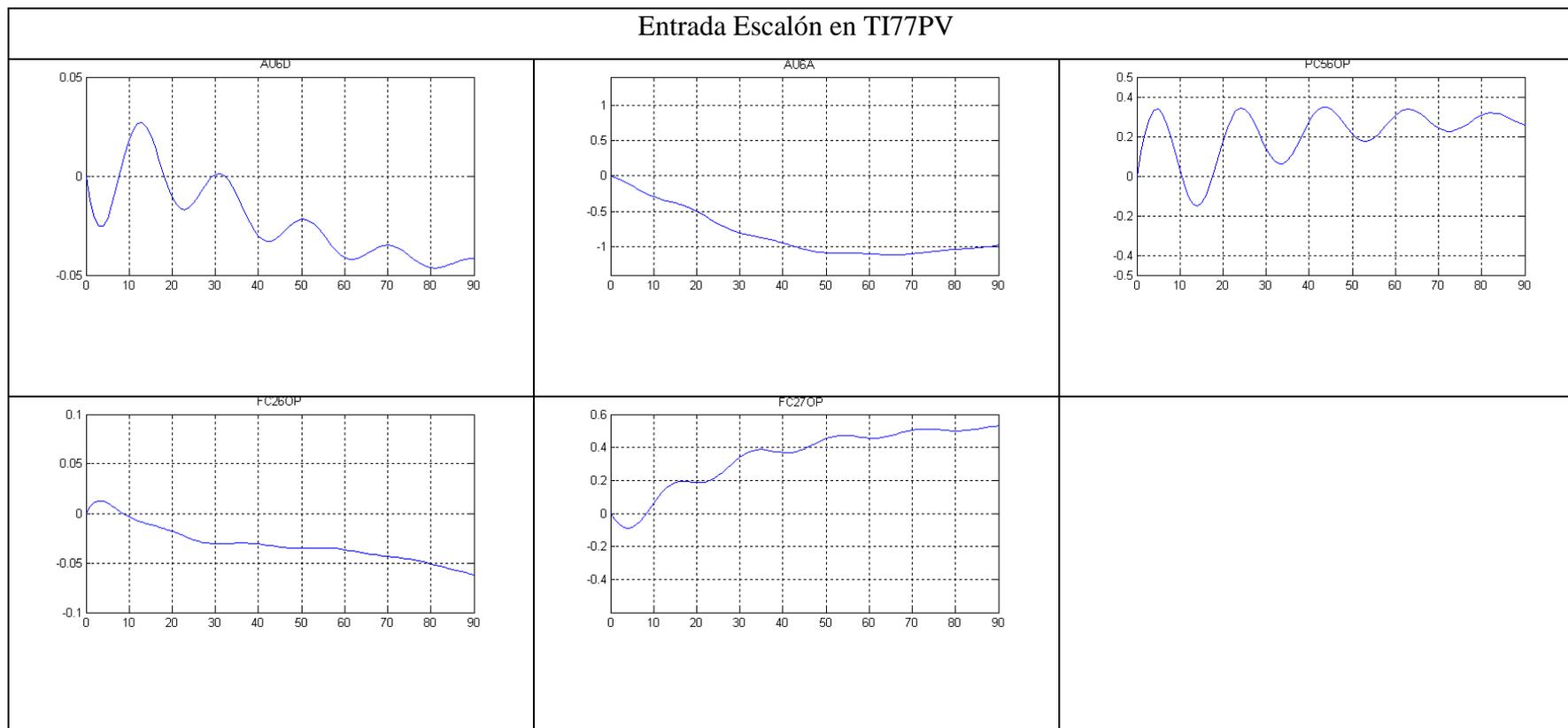


Figura 4.10 Modelo matricial. Entrada TI77PV

## *Identificación de una Unidad Despropanizadora de Butano y Propano*

La evaluación del modelo matricial se debe hacer considerando que el lazo de la temperatura del plato sensible, TC55, se encuentra cerrado.

Se puede apreciar, en las figuras que representan el modelo matricial, que los tiempos de retardo de las variables lentas quedan modelados al incrementar el orden del modelo. Los resultados obtenidos han sido evaluados por profesionales que conocen el proceso y consideran que el modelo estimado mediante el algoritmo en subespacios, responde de acuerdo con el comportamiento dinámico de una columna despropanizadora. Algunas variables de salida tiene una respuesta relativamente pequeña al salto de una determinada variable manipulada, esto significa que un cambio en la señal manipulada no afecta la variable controlada.

### **4.3.2. Identificación a lazo cerrado**

La identificación a lazo cerrado de la columna despropanizadora se realiza utilizando el segundo grupo de datos reales de la planta, es decir aquellos que han sido tomados con el lazo de temperatura de fondo TC101 cerrado, en la figura 4.4 se muestra un esquema de las variables manipulables y de perturbación medibles que se han tenido en cuenta para el experimento a lazo cerrado.

El esquema de la columna mostrando las variables para la identificación a lazo cerrado se muestra en la figura 4.11.

El modelo de la columna despropanizadora que se estima a lazo cerrado, tiene como entradas la referencia del controlador de temperatura el plato sensible: TC55SP y la referencia del controlador de flujo del hervidor: FC26SP.

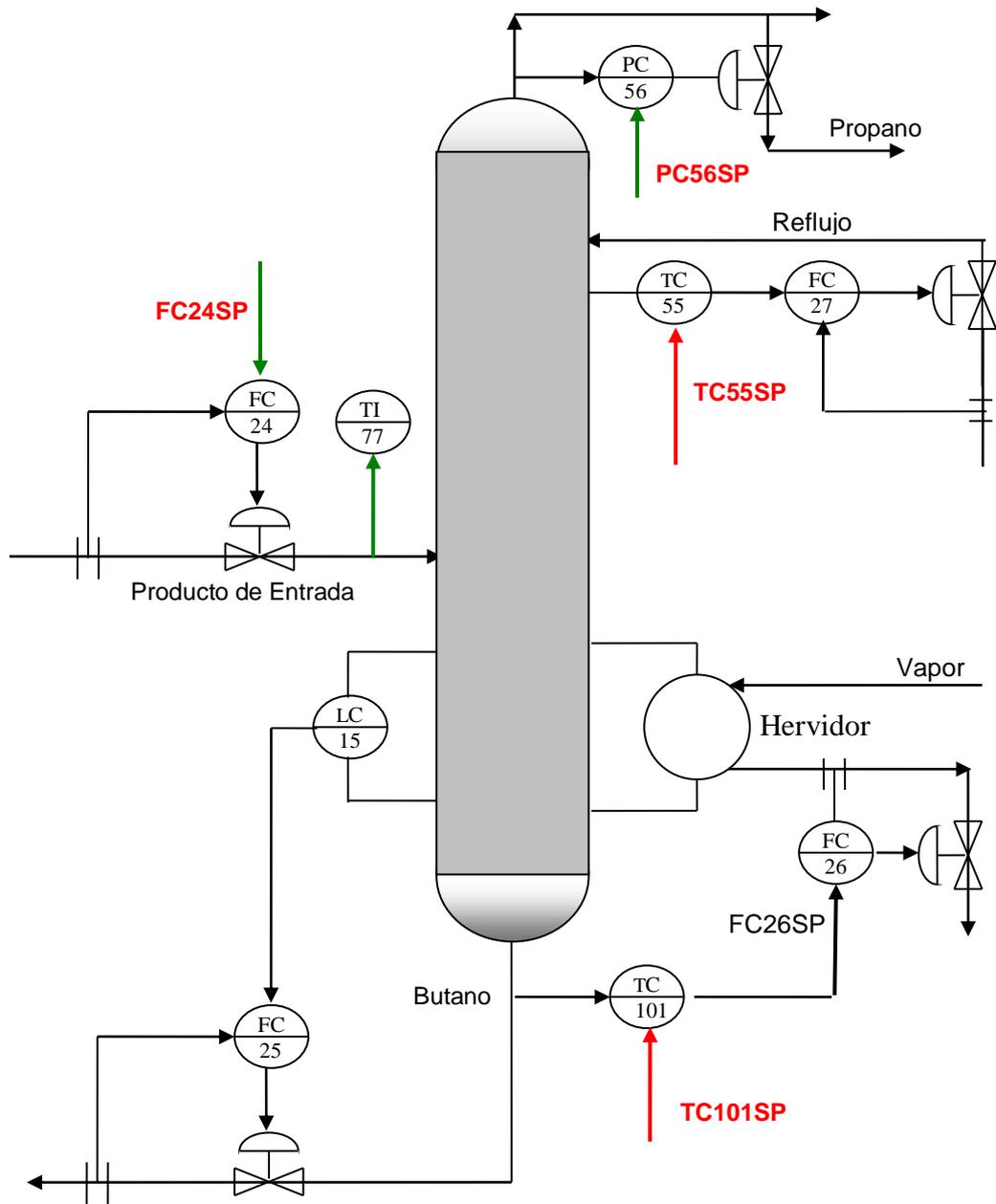


Figura 4.11. Variables manipulables y de perturbación medibles para identificación a lazo cerrado

### *Identificación de una Unidad Despropanizadora de Butano y Propano*

Las variables de entrada para la identificación a lazo cerrado son: las referencias de los lazos de temperatura del plato sensible y de fondo de la columna, TC55SP y TC101SP, y las variables de perturbación medible, FC24SP, PC56SP y TI77PV. En la figura 4.12 podemos observar que en las variables de entrada, lamentablemente el contenido de excitación de algunas variables no es el adecuado para una buena identificación. Las señales de salida para la identificación a lazo cerrado son representadas en la figura 4.13 y la figura 4.14 se muestra la señal de control para identificar el modelo del proceso.

La identificación a lazo cerrado se ha optado por escoger como señales de salidas sólo las variables controladas: AU6D y AU6A, y la señal de restricción PC56OP. Las otras señales no son representativas para el modelo y no están convenientemente excitadas, la FC27OP depende de la consigna TC55SP, esta variable permanece casi constante durante la prueba. La señal FC26OP para el modelo matricial no es representativa.

Con el fin de aprovechar lo mejor posible los datos se consideran sólo los primeras 1000 muestras.

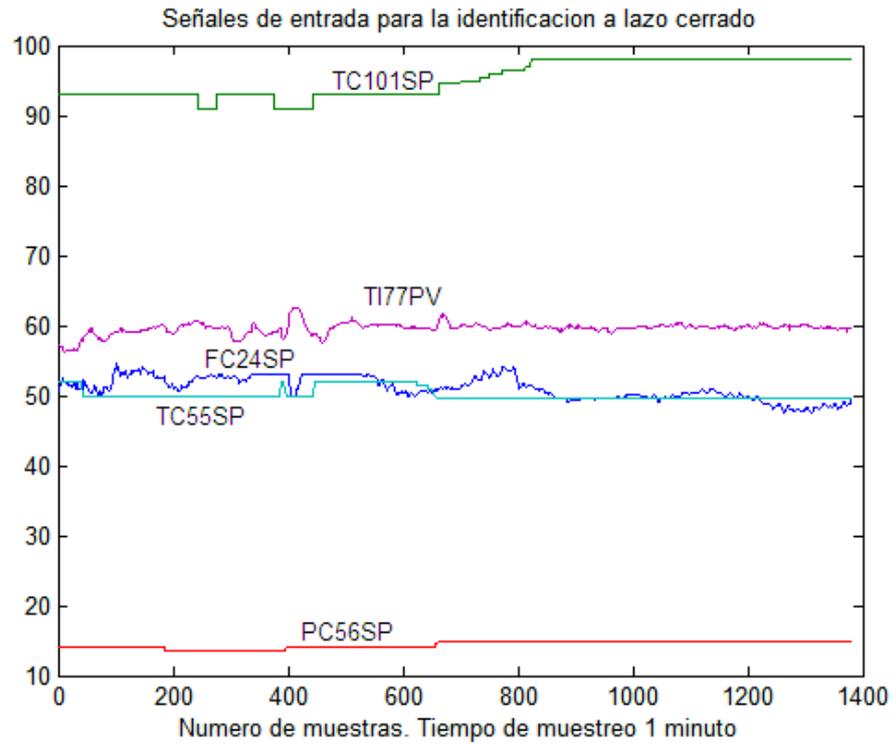


Figura 4.12 Señales de entrada para la identificación a lazo cerrado

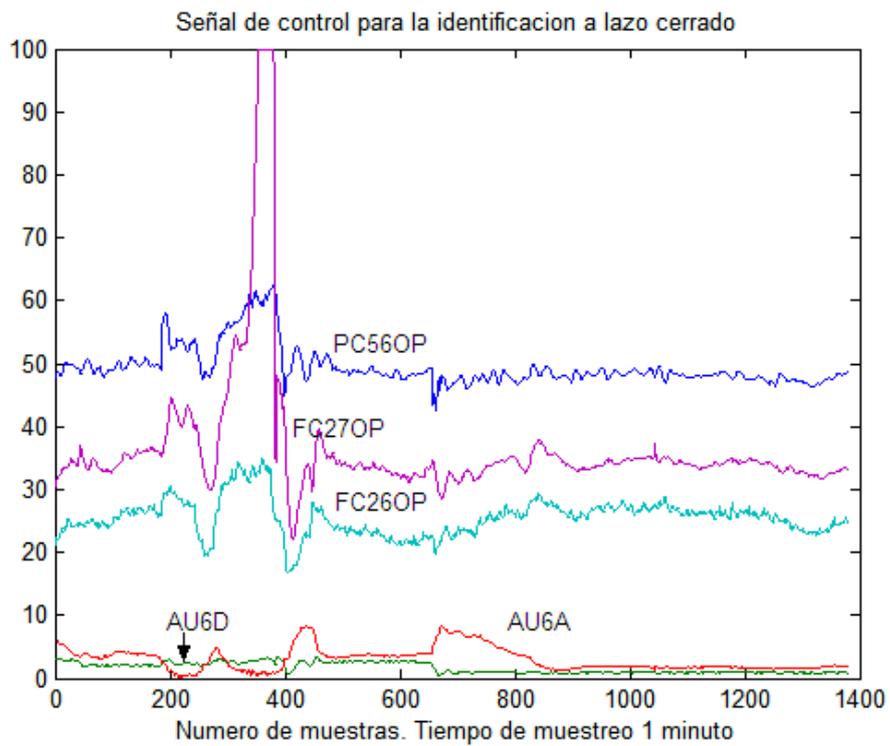
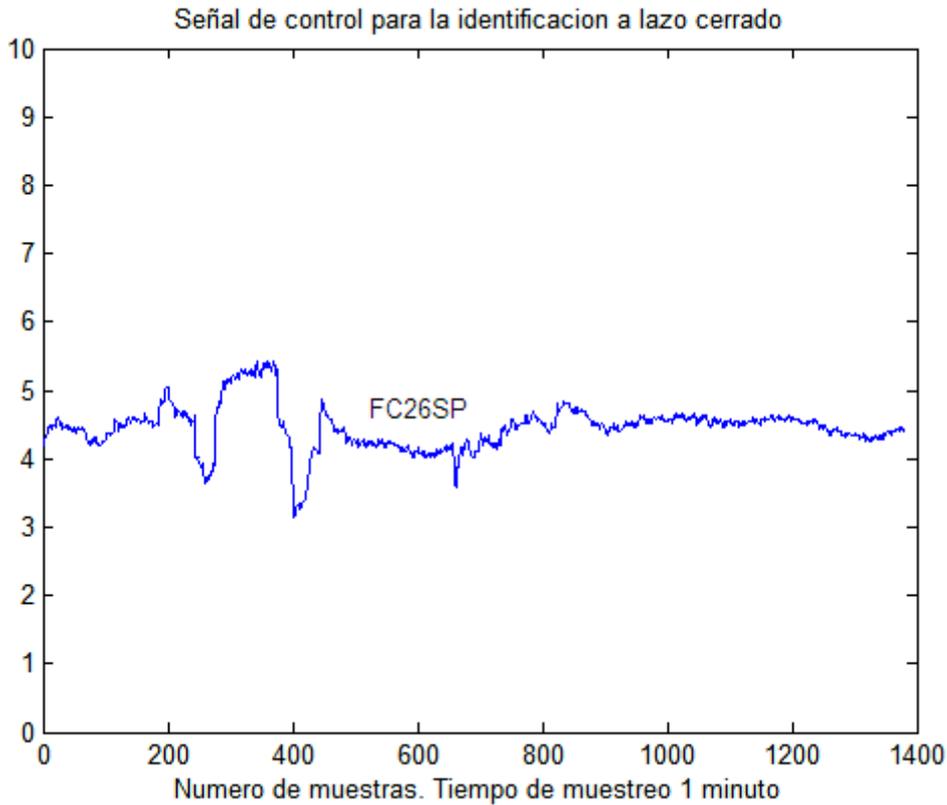


Figura 4.13. Señales de salida para la identificación a lazo cerrado

F



4.14. Señal de control para la identificación a lazo cerrado

Como parte de la identificación a lazo cerrado, se obtiene primero el modelo global del sistema a lazo cerrado, el orden se determina a partir de los valores singulares de la figura 4.15. Se selecciona el orden en 8.

Para estimar el proceso se considera que las señales de entrada son las variables manipuladas: TC55SP y FC26SP, y las variables de perturbación: PC56SP, FC24SP y TI77PV. El orden del proceso es estimado de los valores singulares de la figura 4.16, se escoge un orden 8. La respuesta escalón del proceso obtenido para cada una de las entradas, se presentan en las figuras 4.17, 4.18 y 4.19.

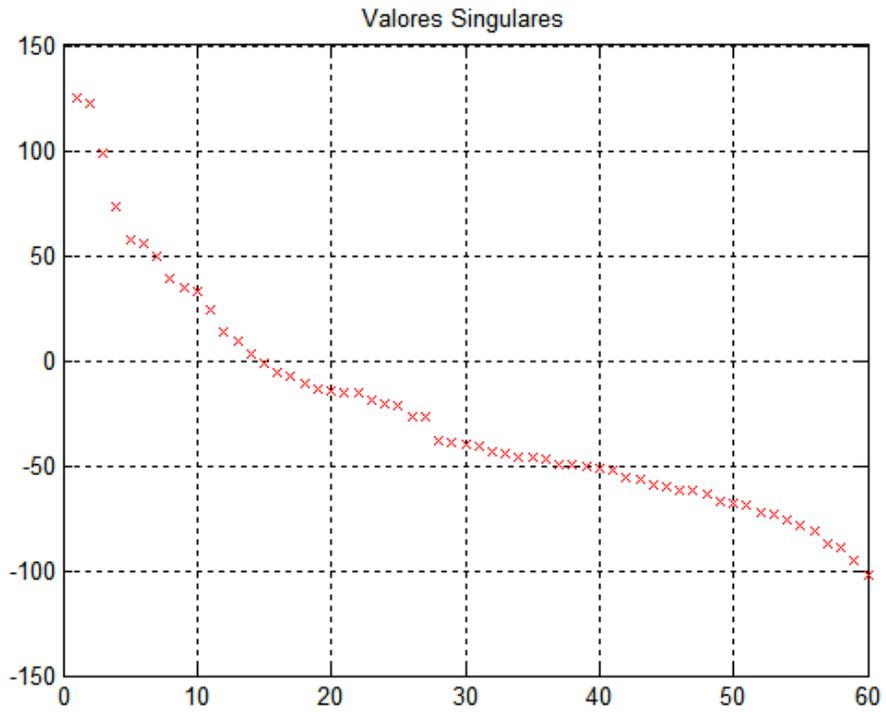


Figura 4.15. Orden sistema global a lazo cerrado: 8

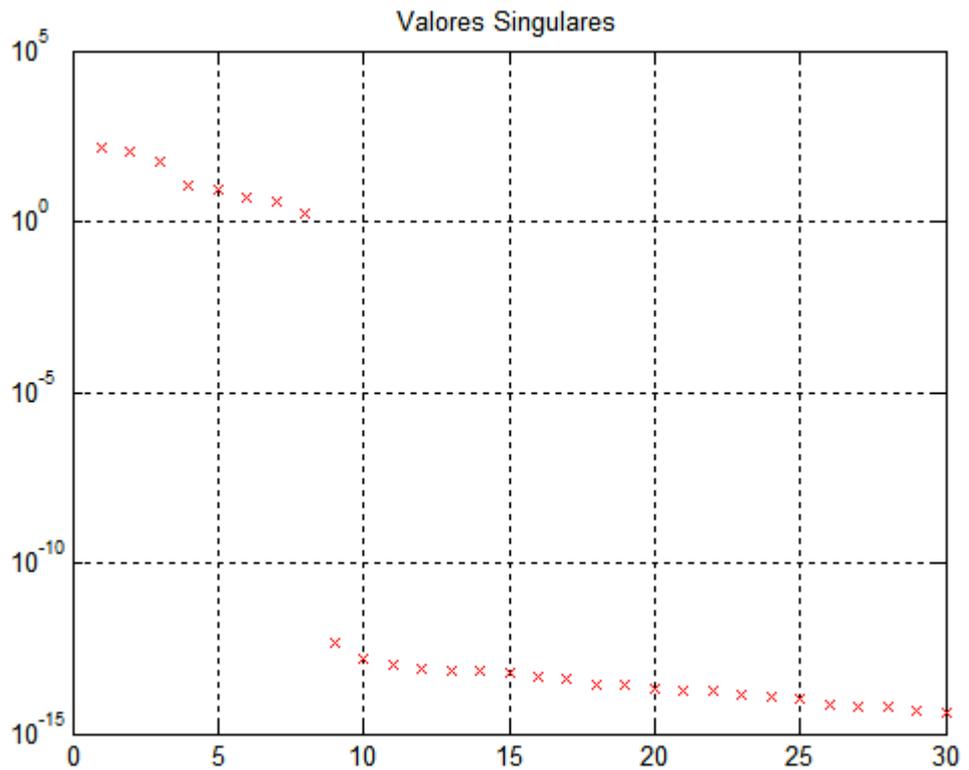
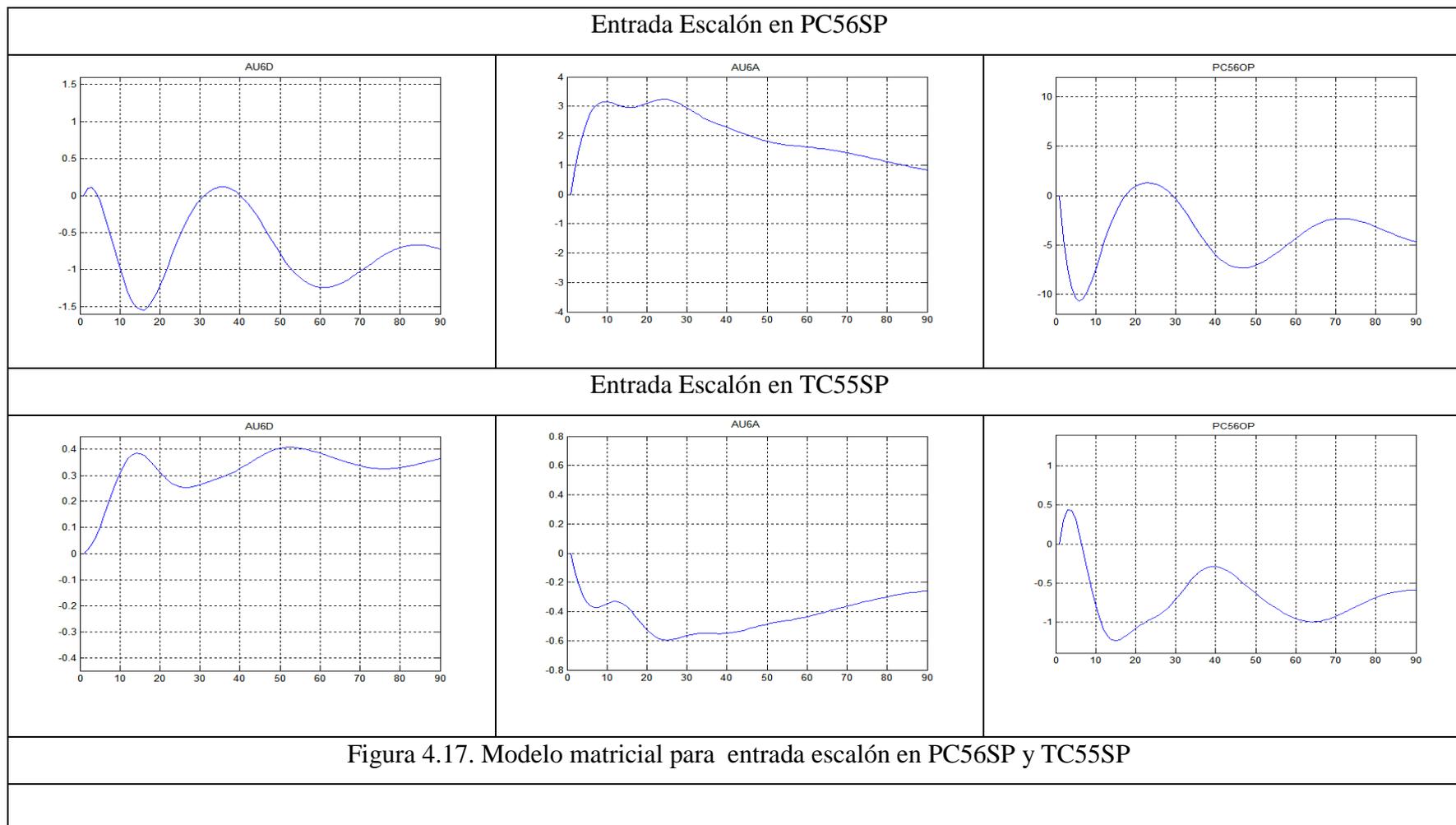
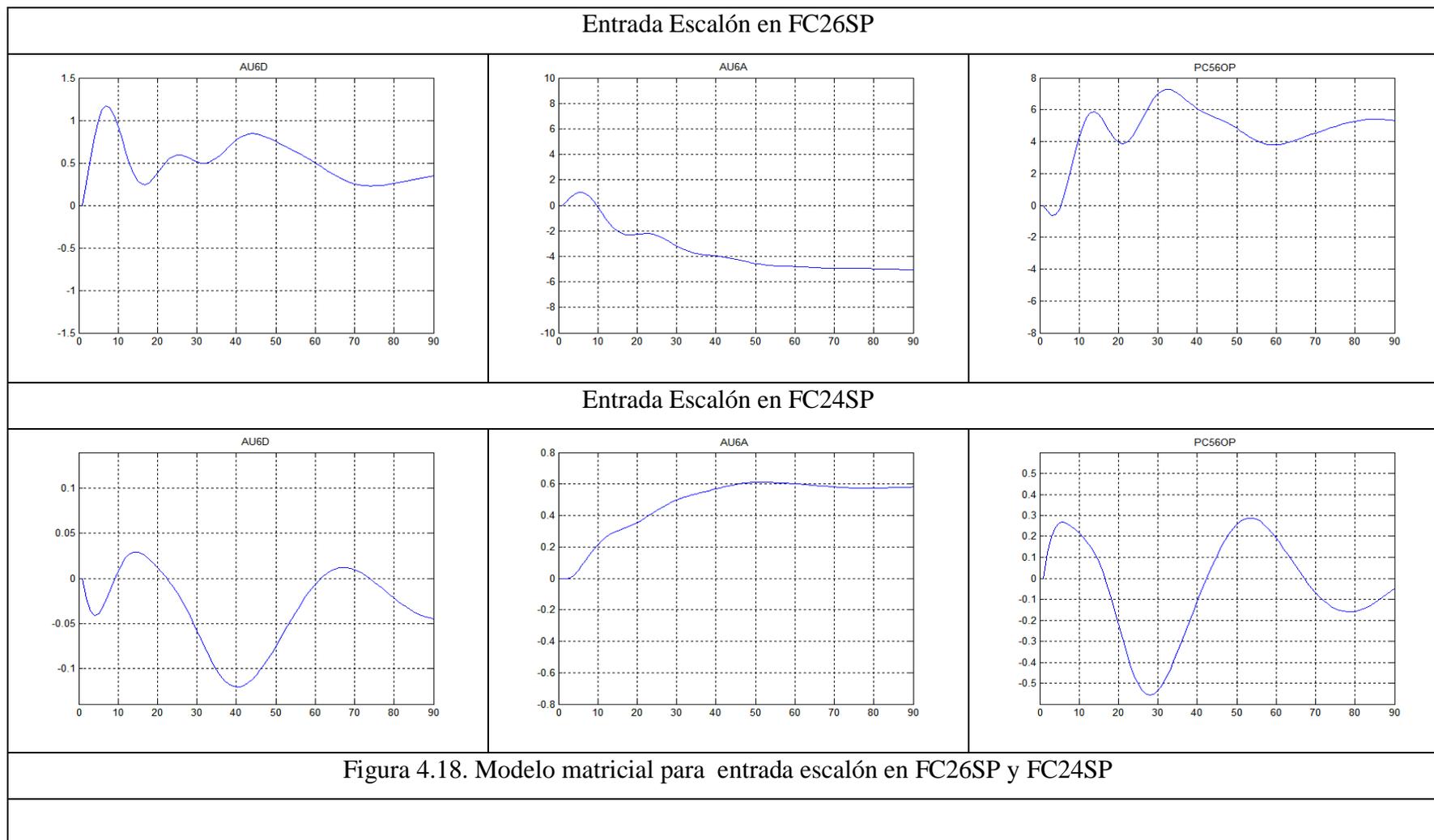


Figura 4.16. Determinación del orden del proceso: 8





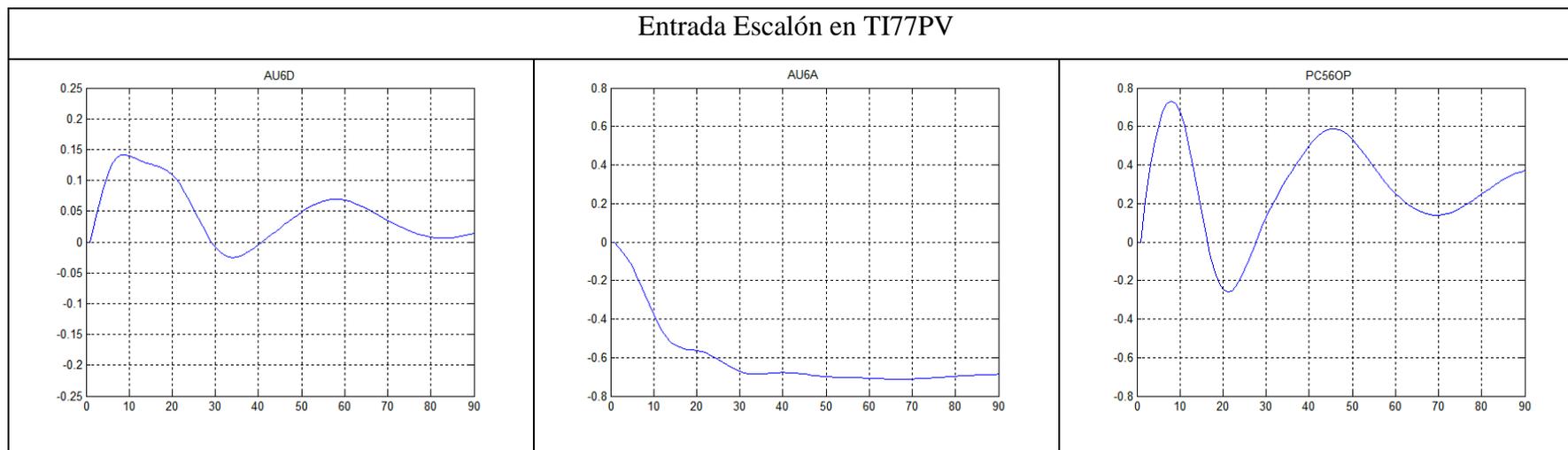


Figura 4.19. Modelo matricial para entrada escalón en TI77PV

El modelo matricial que se obtiene del proceso identificado lo podemos comparar con el obtenido a lazo abierto. Se puede observar que el comportamiento dinámico de las variables son en cierta medida parecidos, sin embargo, existen discrepancias en los valores estacionarios. Esto se debe a la diferencia en los datos utilizados. Los datos reales de planta que se utiliza en la identificación a lazo abierto, figuras 4.5 y 4.6, permiten identificar mejor la componente estacionaria del modelo, cosa que no sucede con los datos reales empleados para la identificación a lazo cerrado, figuras 4.12, 4.13 y 4.14

Para validar el modelo del proceso obtenido a lazo cerrado, se evalúa su comportamiento utilizando los datos reales de la planta empleados para la identificación a lazo abierto, figuras 4.5 y 4.6. Con los datos de entrada de la identificación a lazo abierto TC55SP, FC26OP, FC24SP, PC56SP y TI77PV, se excita el modelo proceso. Las salidas: AU6D, AU6A y PC56OP son comparadas con las correspondientes salidas de los datos reales, figura 4.20.

El modelo de proceso obtenido a lazo cerrado responde de manera satisfactoria a las señales manipuladas y de perturbación medible. En las señales AU6D y PC56OP se puede observar una componente de alta frecuencia, se debe a la acción de control de los lazos PC56 y TC55, los cuales se encuentran cerrados y corrigen cualquier perturbación en la columna, en este caso generada por los señales manipuladas.

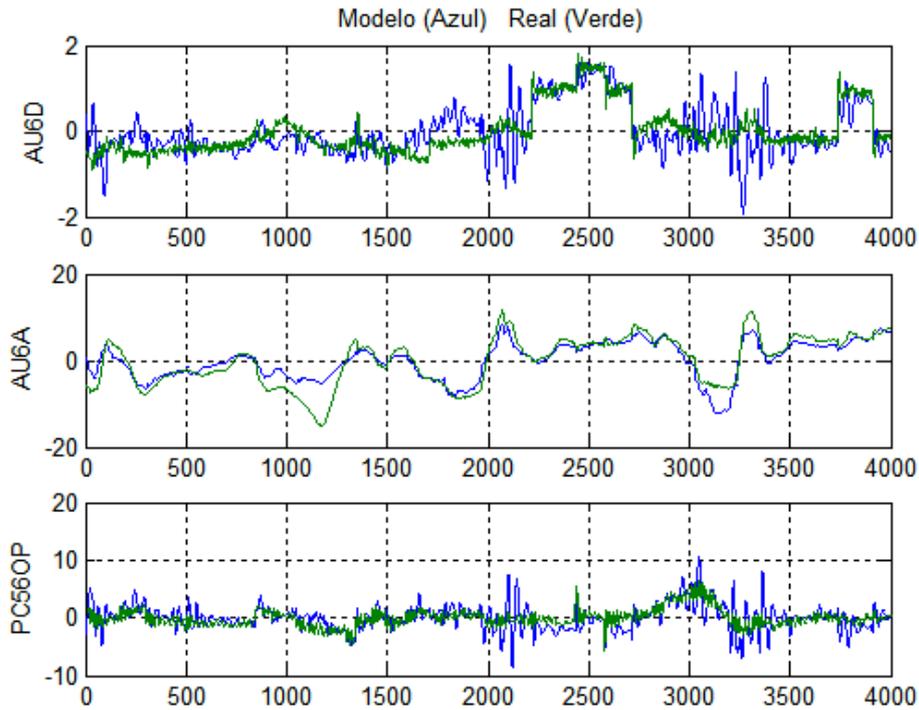
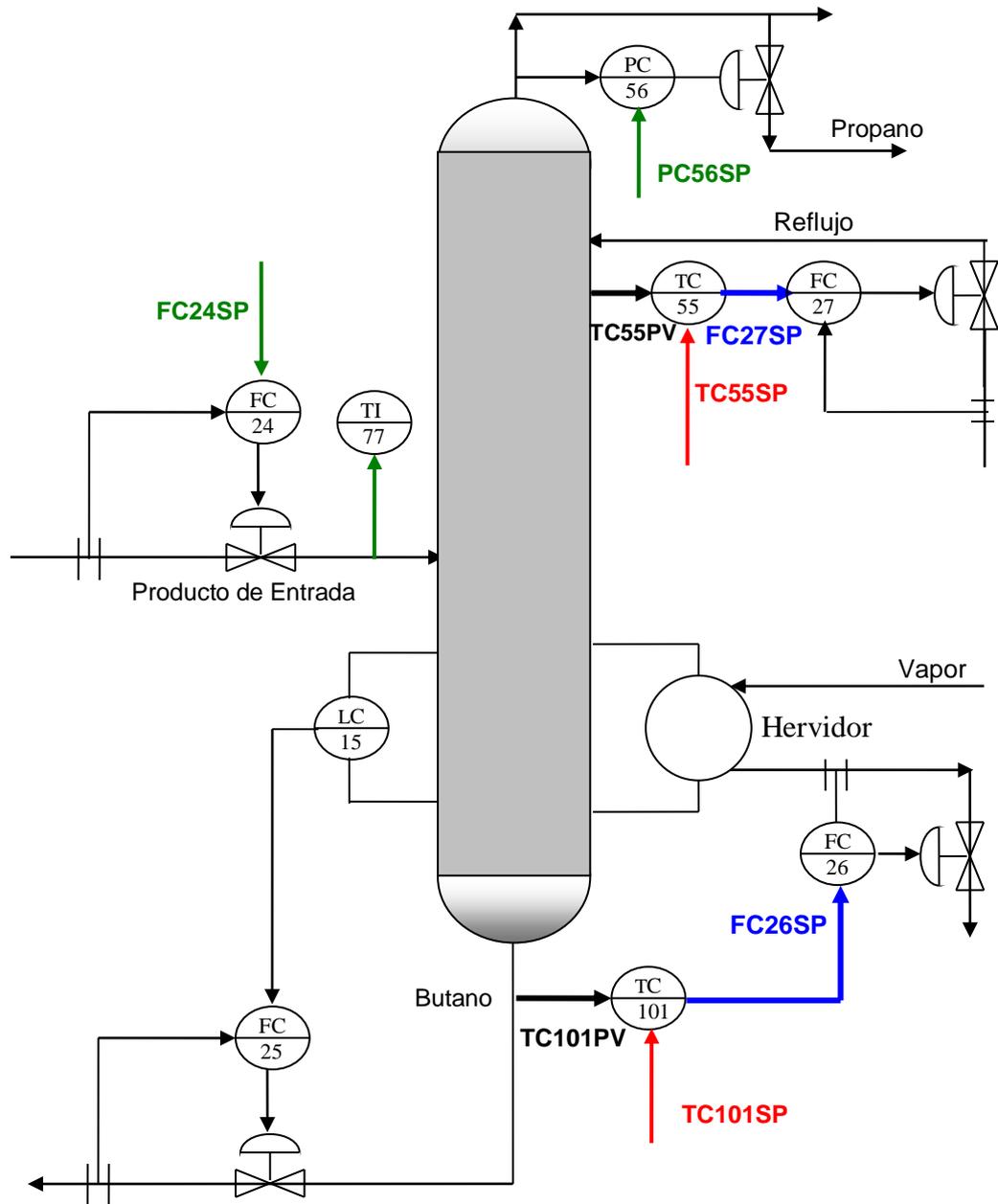


Figura 4.20 Validación del modelo obtenido a lazo cerrado.

En los casos de identificación a lazo abierto y a lazo cerrado que se han estudiado para la columna despropanizadora, se ha obtenido un modelo donde se considera como parte de la columna el lazo de control de temperatura del plato sensible TC55. Esto por requerimiento del controlador avanzado, ya que por necesidad del controlador el modelo de la columna debe considerar como entradas la referencia de temperatura del plato sensible, TC55SP y la referencia del flujo de vapor FC26SP; siendo las salidas principales las concentraciones de impurezas en cabeza AU6D y las impurezas en fondo AU6A. Sin embargo, usualmente se considera como modelo de la columna una estructura donde las variables de entrada son las consignas de los controladores de flujo de vapor del hervidor, FC26SP y de reflujo, FC27SP; y sus salidas las temperaturas de fondo de la columna, TC101PV y la temperatura del plato sensible: TC55PV.

***Identificación de una Unidad Despropanizadora de Butano y Propano***

El algoritmo de identificación a lazo cerrado *IdCL*, es aplicado para obtener un modelo en espacio de estaos de una columna despropanizadora, a partir de una identificación a lazo cerrado, las variables consideradas para la identificación se muestran en la figura 4.21.



4.21. Esquema de la columna para la identificación a lazo cerrado.

### Identificación de una Unidad Despropanizadora de Butano y Propano

Para la identificación las entradas son las consignas de los controladores de temperatura de fondo, TC101SP, y de la temperatura del plato sensible, TC55SP. Se consideran como variables de perturbación medibles las variables FC24SP, TI77PV y PV56SP. En la tabla 4.2 se detallan las variables para la identificación a lazo cerrado.

Variables Manipuladas	
Referencia de la temperatura del plato sensible	TC55SP
Referencia de la temperatura de fondo	TC101SP
Variables de Perturbación Medibles	
Referencia del flujo de entrada	FC24SP
Referencia de la presión de la columna	FC56SP
Temperatura de ingreso	TI77PV
Variables de control	
Referencia de flujo para el reflujo	FC27SP
Referencia de flujo del hervidor	FC26SP
Variables Controladas	
Temperatura del plato sensible	TC55PV
Temperatura del fondo de la columna	TC101SP

Tabla 4.2. Variables utilizadas para la identificación de la columna a lazo cerrado.

Para la identificación del sistema a lazo cerrado las señales de referencia a los controladores de temperatura de fondo, TC101SP, de plato sensible se muestran, TC55SP, en la figura 4.22

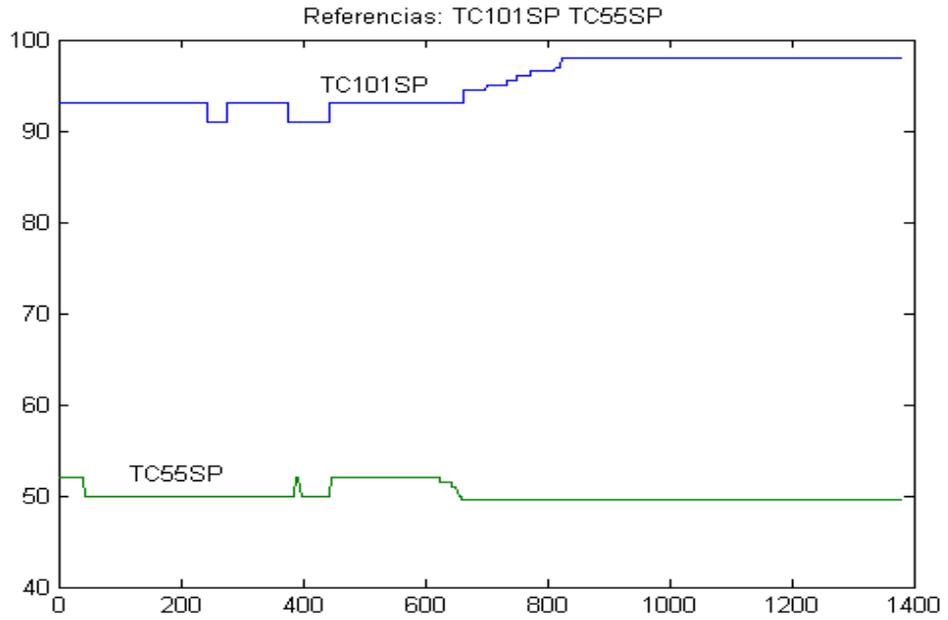


Figura 4.22. Referencias de los controladores de temperaturas.

Las variables de perturbación medibles que se consideran en la identificación de la columna a la cerrado, se presentan en la figura 4.23.

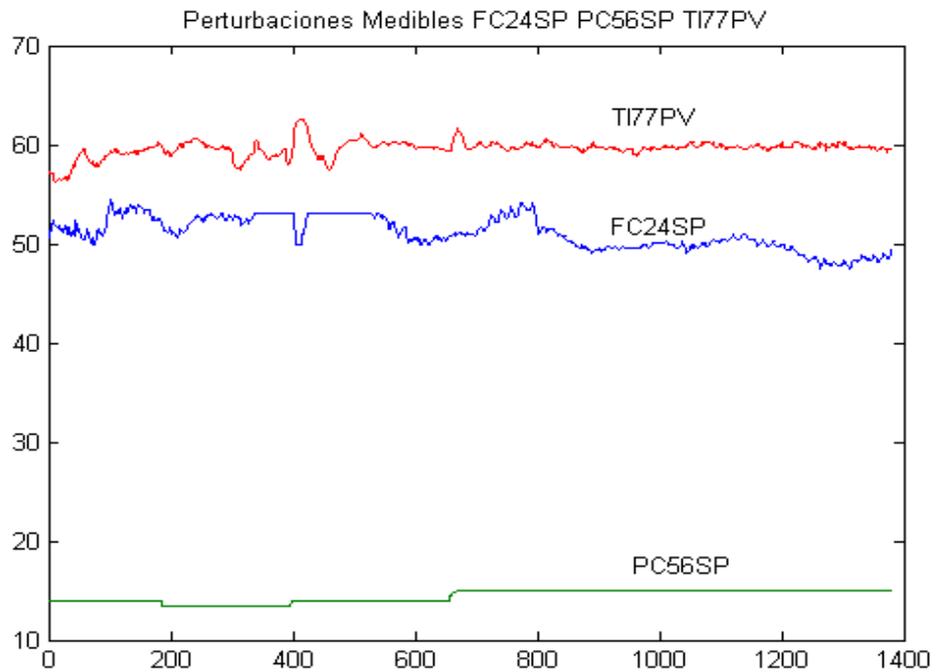


Figura 4.23. Perturbaciones medibles

Las señales de referencia de los controladores de flujo: FC26SP y FC27SP, se muestran en la figura 4.24.

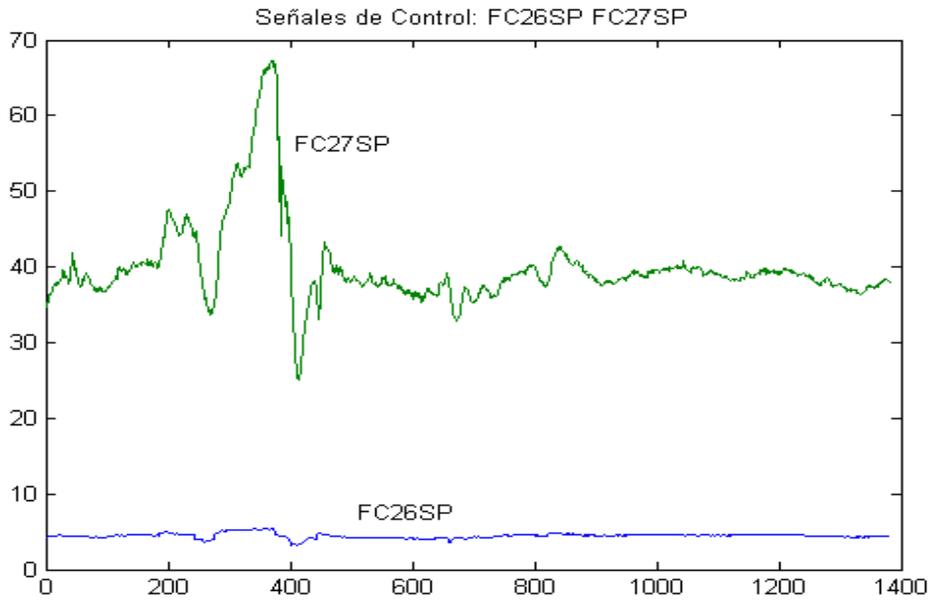


Figura 4.24. Referencias de los controladores de flujo.

Las salidas del sistema a lazo cerrado, las temperaturas del plato sensible: TC55SP y de fondo de la columna se presentan en la figura 4.25. Una comparación entre las referencias y las variables de salida de la columna se muestran en la figura 4.26.

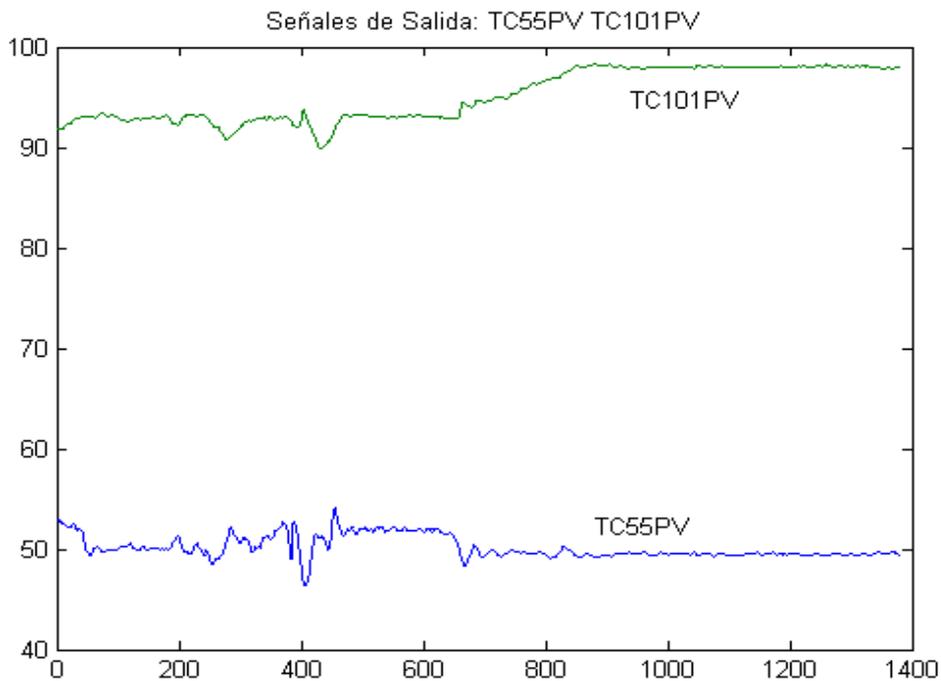


Figura 4.25. Variables de salida del sistema a lazo cerrado.

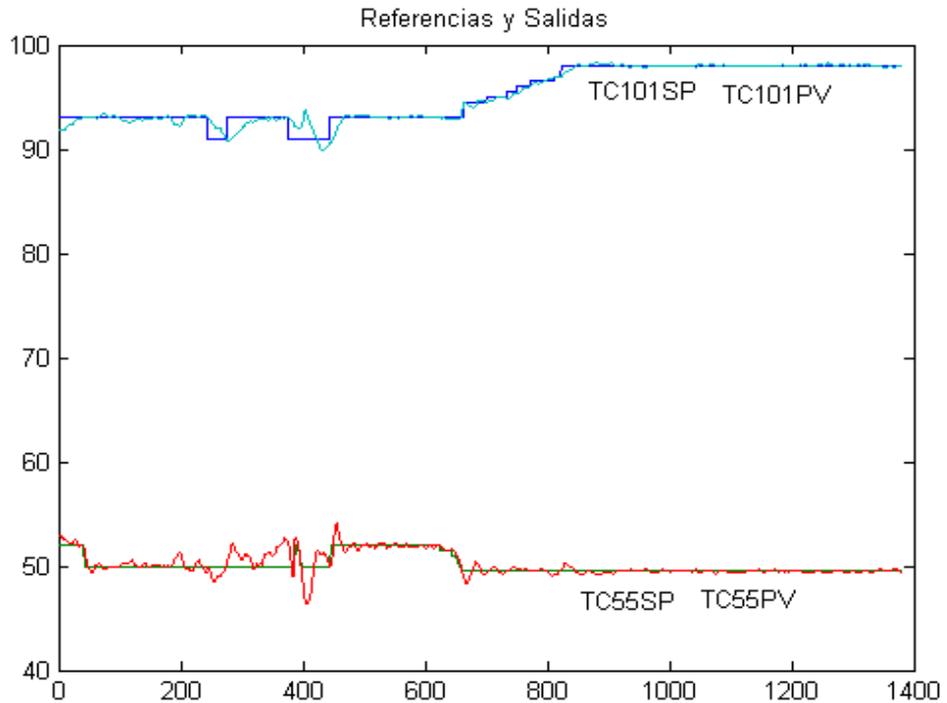


Figura 4.26. Variables de referencia y salida de la columna a lazo cerrado

El algoritmo de identificación a lazo cerrado, **IdCL**, estima primero un modelo del sistema global a lazo cerrado, considerando como entradas las señales de referencia de los lazos de control de temperatura del plato sensible: TC55SP y de la temperatura de fondo: TC101SP y como variables medibles: TI77PV, PC56SP y FC24SP; como salidas se consideran las referencias de los controladores de flujo: FC26SP y FC27SP y las temperaturas de salida de la columna TC55PV y TC101PV. En la figura 4.27 se muestran los valores singulares del sistema global a lazo cerrado, a partir de los cuales se estima el orden del sistema, considerando los valores de mayor valor, seleccionamos como orden del sistema 6.

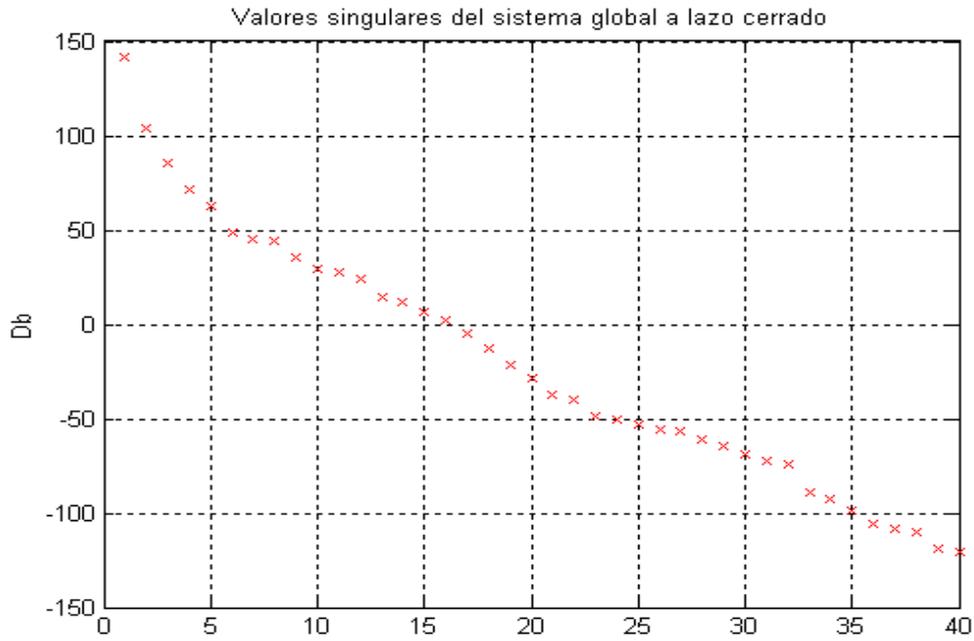


Figura 4.27. Selección del orden del sistema global a lazo cerrado.

Identificado el sistema global se estima el modelo de la columna, a partir de las señales de referencia de los controladores de flujo: FC27SP y FC27SP; y las salidas de temperaturas de la columna: TC101SP y TC55SP. El orden del proceso es estimado de los valores singulares de la figura 4.28. El orden seleccionado es 4.

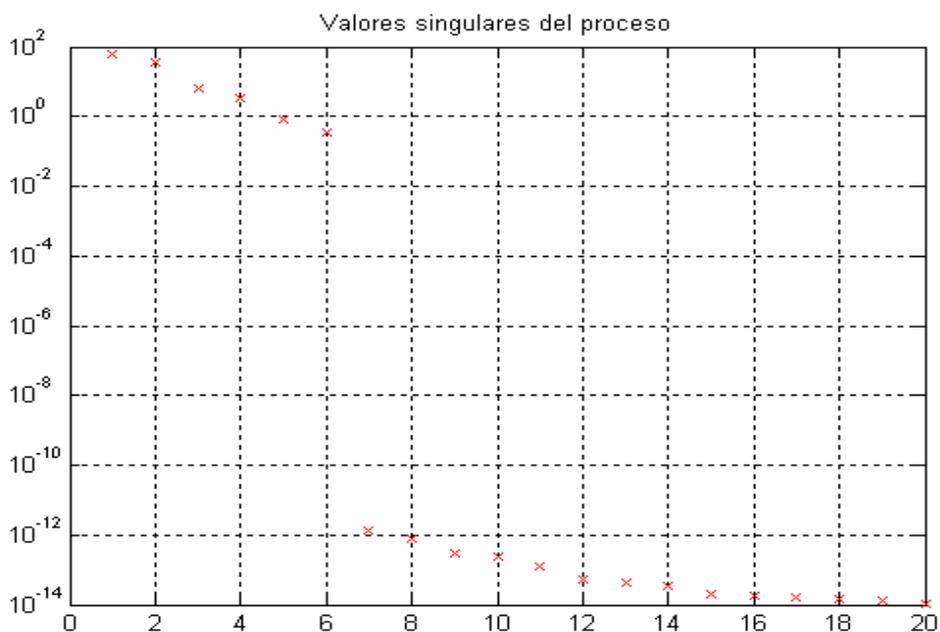


Figura 4.28. Selección del orden del proceso.

La respuesta del modelo obtenido es comparada con las temperaturas reales de salida de la columna, figuras 4.29. y 4.30. Se puede observar que las señales del modelo estimado siguen satisfactoriamente las salidas del modelo real.

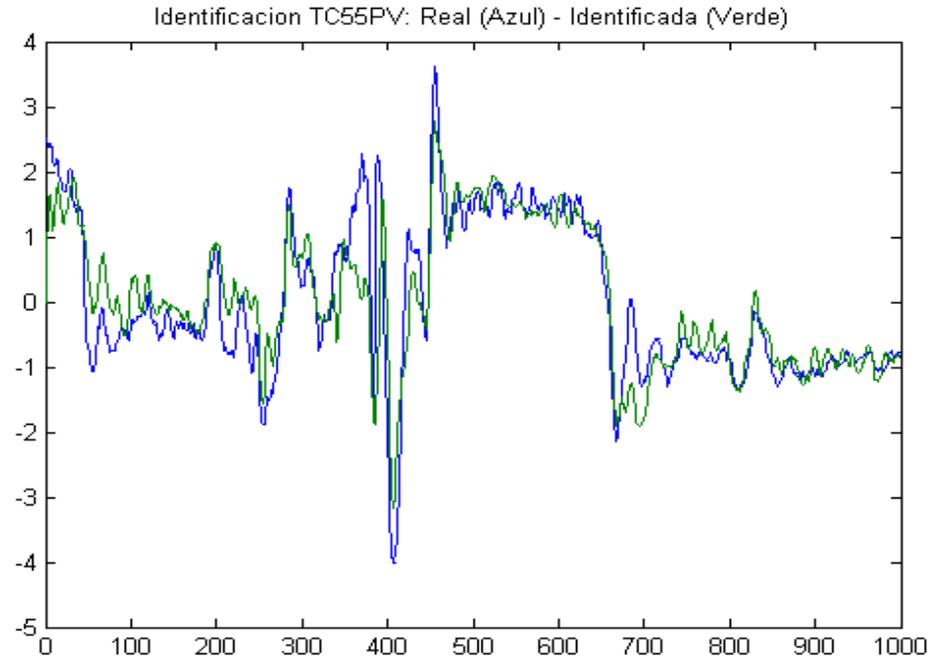
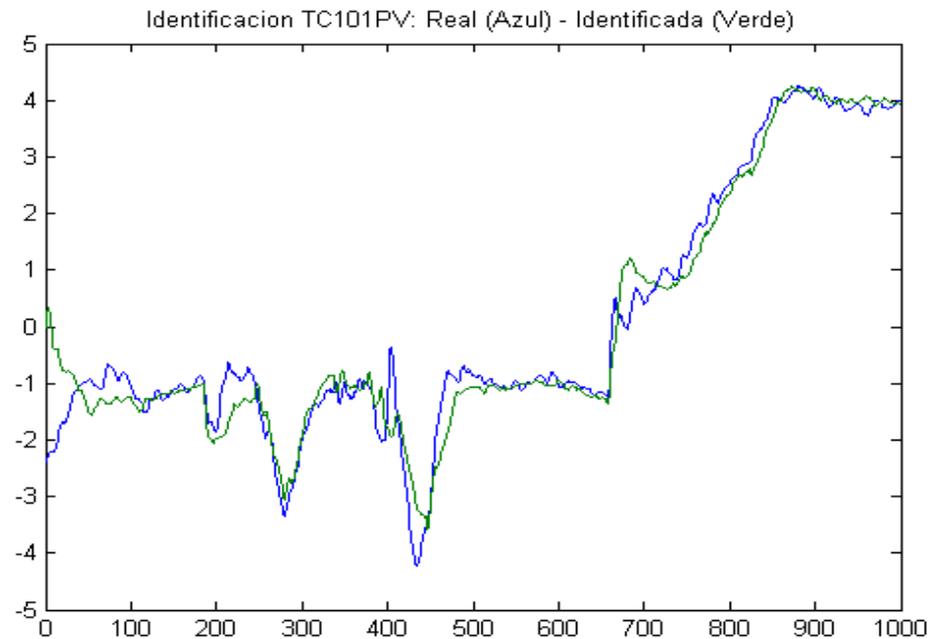


Figura 4.29. Comparación de temperatura del plato sensible: TC55PV



4.30. Comparación de la temperatura de fondo de la columna: TC55SP

### Identificación de una Unidad Despropanizadora de Butano y Propano

En la figura 4.31. se presentan las matrices del modelo en espacio de estados de cuarto orden de la columna despropanizadora, siendo las entradas las referencias de los lazos de flujo: FC26SP y FC27SP y las salidas las temperaturas: TC55PV y TC101PV.

#### Modelo en Espacio de Estados de la Columna Despropanizadora

$$\begin{aligned} \mathbf{A}: & \begin{bmatrix} 0.9832 & 0.0232 & -0.0835 & -0.0054 \\ -0.0028 & 0.9353 & 0.0255 & -0.0493 \\ 0.0230 & -0.0207 & 0.7368 & 0.4398 \\ -0.0183 & -0.0135 & -0.2195 & 0.8151 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}: & \begin{bmatrix} -0.0286 & -0.0376 & 0.0359 & -0.1510 & 0.0326 \\ 0.0236 & -0.0945 & -0.0374 & 0.0002 & -0.0154 \\ -0.1046 & -0.3786 & 0.3887 & 1.1105 & 0.0284 \\ -0.0450 & -0.4663 & 0.0729 & 0.3098 & 0.0312 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}: & \begin{bmatrix} -2.3638 & 1.3910 & -1.4109 & 0.8148 \\ -1.3079 & -2.0672 & -0.6890 & -0.1374 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}: & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Figura 4.31. Modelo en espacio de estados de la columna despropanizadora.

## *Capítulo 5*

### *Identificación de sistemas no lineales*

La identificación de sistemas no lineales adquiere importancia debido a que en general los procesos industriales presentan no linealidades que muchas veces son linealizadas. Sin embargo, existen sistemas no lineales que pueden presentar dinámicas muy complejas que no pueden aproximarse mediante modelos lineales. Otra estrategia para afrontar las no linealidades que presentan los actuadores o accionamientos en un sistema de control, es trabajar en torno a un punto de funcionamiento donde el sistema sea lineal, un caso típico son las válvulas, en las cuales se evita la no linealidad haciéndolas trabajar en rangos del 10% al 90% de apertura. Sin embargo, en muchos casos prácticos es necesario trabajar dentro de las regiones de saturación, razón por la cual el modelo que describe el proceso debe ser capaz de reflejar estas no linealidades.

El modelo matemático de un sistema no lineal se puede obtener a partir de leyes físicas, que describen su comportamiento dinámico y que generalmente se modelan por un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden acopladas entre sí:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

Otra alternativa es obtener el modelo dinámico de un sistema no lineal a través de datos experimentales de funcionamiento, es decir mediante identificación. El modelo así obtenido se conoce como *modelo de caja negra*. La gran variedad de sistemas no lineales que existen en la industria, hace que no sea posible obtener métodos generales de identificación, sino sólo para determinadas clases de modelos no lineales.

Entre las técnicas de identificación de sistemas no lineales tenemos aquellas que son de particular interés para el análisis y simulación de procesos que permiten el diseño de controladores. Estas técnicas describen la dinámica del proceso mediante redes neuronales (RNA), lógica borrosa, modelos regresivos lineales que utilizan regresores como funciones no lineales de los datos pasados y a través de bloques donde las no linealidades se representan por la interconexión de sistemas lineales dinámicos y no linealidades estáticas.

Los modelos mediante bloques de un sistema no lineal se denominan *orientados a bloques (block-oriented nonlinear models)* y son muy utilizados para modelar procesos donde aparecen no linealidades estáticas como por ejemplo debido a saturaciones de los actuadores, válvulas de apertura gradual, motores y transformadores trabajando en la región de saturación y sensores que presentan no linealidades. Dentro de los modelos orientados a bloques, los que han sido más estudiados son los modelos Hammerstein y los modelos Wiener.

En presente capítulo se describen los modelos orientados a bloques para representar sistemas no lineales y luego se propone un método de identificación basado en técnicas de subespacios aplicado a los sistemas tipo Wiener.

### 5.1. Modelos de sistemas no lineales orientados a bloques.

Una manera clásica de representar un sistema no lineal es a través de una serie finita de Volterra:

$$y(t) = y_o(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} k_n(t; t_1, t_2, \dots, t_n) u(t_1) \dots u(t_n) dt_1 \dots dt_n \quad (5.1)$$

Donde,  $y_o(t)$  es la componente lineal de la respuesta sumada a una no linealidad representada por las funciones  $k_n(t; t_1, t_2, \dots, t_n)$  que se conocen como los *kernels* de Volterra y generalizan la respuesta impulso que caracteriza a un sistema lineal. Esencialmente esta serie representa la respuesta  $y(t)$  en términos de la historia de la entrada  $u(\tau)$  para todo  $\tau < t$ , y los *kernels* deben orientarse a reforzar la condición de causalidad. En la práctica, los modelos Volterra son truncados a un número finito de términos.

Estrechamente ligada a los modelos Volterra se encuentran los *modelos orientados a bloques*, definidos por su conexión en paralelo y/o cascada de linealidades dinámicas y no linealidades estáticas. Los modelos más conocidos dentro de los orientados a bloques son los modelos *Hammerstein*, que se muestra en la figura 5.1. Este modelo combina una no linealidad estática seguida de un linealidad dinámica.

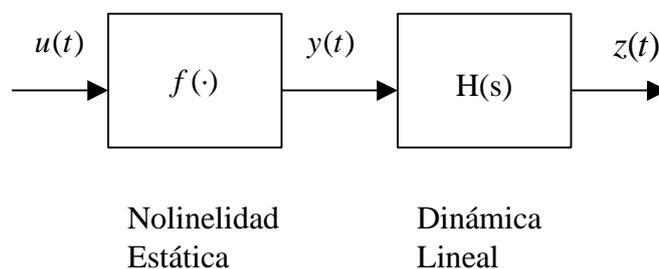


Figura 5.1. Estructura del modelo Hammerstein

Otro de los modelos desarrollado en base a bloques es el Wiener, donde se combina una linealidad dinámica seguida de una no linealidad estática, el esquema de un modelo Wiener se muestra en la figura 5.2.

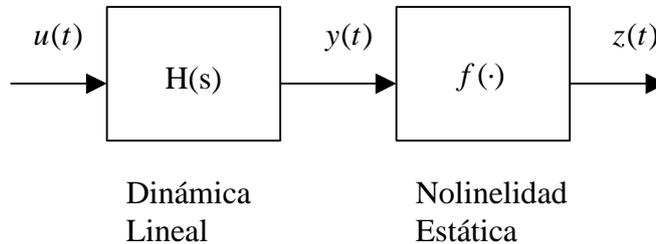


Figura 5.2. Estructura del modelo Wiener

En los últimos años los modelos Wiener han adquirido importancia para la identificación de sistemas no lineales, ya que muchos procesos industriales pueden ser modelados con una dinámica lineal seguida de una no linealidad estática. Entre los procesos que se pueden modelar muy bien bajo la estructura Wiener tenemos sistemas de control de pH [A.Hagenblad, 1998]

En el presente trabajo se presenta una metodología para la identificación de procesos no lineales que puedan ser fácilmente representados por un modelo Wiener. El objetivo es encontrar un modelo dinámico lineal que relacione la salida  $y(t)$  con la entrada  $u(t)$  y una no linealidad estática que relacione la salida del sistema  $z(t)$  con  $y(t)$ . Es importante tener en cuenta que, de acuerdo con la figura 5.2, las variables medibles para la identificación son las salidas del proceso  $z(t)$  y las entradas  $u(t)$ . El modelo en espacio de estados de un sistema Wiener queda definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\y_k &= Cx_k + Du_k \\z_k &= f(y_k) + v_k\end{aligned}\tag{5.2}$$

Donde  $x_k \in R^n$ ,  $u_k \in R^m$  y  $y_k \in R^l$ . La función no lineal  $f(y_k) \in R^l$  y  $v_k$ , ruido estocástico de media cero en el proceso.

## 5.2. Identificación de sistemas no lineales basados en subespacios.

De acuerdo con el modelo descrito en la ecuación (5.2), para obtener la función no lineal que represente el bloque estático es necesario conocer la señal  $y_k$ , esto también se puede apreciar en la figura 5.2, sin embargo en la práctica es imposible medir  $y_k$  debido a que las medidas que se obtienen como respuesta del proceso son las señales  $z_k$ , las cuales están afectadas por las no linealidades del proceso. Ante la imposibilidad de medir  $y_k$ , la identificación del sistema no lineal debe hacerse a partir de las señales medibles del proceso, es decir las entradas  $u_k$  y las salidas  $z_k$ . La primera posibilidad para obtener el modelo dinámico de la estructura Wiener es identificar el proceso como un sistema lineal a partir de  $u_k$  y de  $z_k$ , luego se procede a estimar  $y_k$  a partir de una simulación del modelo excitándolo con la entrada  $u_k$ . La función no lineal es calculada a partir de  $y_k$  y de  $z_k$ , que normalmente se representa mediante un polinomio en función de la entrada  $y_k$ , para determinar los coeficientes del polinomio existen métodos iterativos de regresión lineal y/o de optimización como Gauss-Newton, [A. Hagenblad, 1998], [Y. Zhu, 1999].

El método propuesto estima la parte dinámica del modelo Wiener, matrices A, B, C y D, mediante identificación basada en subespacios, tal como se describió en el capítulo 2, utilizando las entradas  $u_k$  y las salidas  $z_k$ .

La no linealidad estática se representa mediante un polinomio que aproxime “bien”, dentro de un rango de error, la función analítica  $f(\cdot)$  en un intervalo definido  $[a, b]$ .

$$z_k = f(y_k, \eta) \tag{5.3}$$

donde  $f$  es una función no lineal de  $y_k$ , y del parámetro  $\eta$ .

Existen tres estrategias, “razonablemente” buenas para obtener un modelo estático no lineal para  $f(\cdot)$ : Expansión de las series de Taylor, aproximación polinomial de Tschebychev y la aproximación polinomial de Bernstein. El punto clave para decidir

cuál de los tres métodos nos da la mejor aproximación no lineal, depende del criterio de evaluación que se tenga y del rango en el cual deseamos que el criterio se mantenga. Por ejemplo si el criterio es: tener un error mínimo de aproximación, entonces se recomienda utilizar una aproximación por Tschebychev, en lugar de los otros dos métodos, ya que para un intervalo y orden determinado del polinomio se tiende a obtener el error más pequeño posible.

A partir del polinomio de Tschebychev, la función no lineal se puede expresar como:

$$f(y_k, \eta) = a_0 T_0(y_k) + a_1 T_1(y_k) + a_2 T_2(y_k) + \dots + a_\eta T_\eta(y_k) \quad (5.4)$$

donde:

$$[a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_\eta]^T$$

es el vector de parámetros de coeficientes constantes de la función no lineal: **thl**

y

$$[T_0(y_k) \quad T_1(y_k) \quad T_2(y_k) \quad \dots \quad T_\eta(y_k)]$$

son los parámetros del polinomio de Tschebychev:  $T(k)$  y se obtienen mediante una relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} T_0(y_k) &= 1 \\ T_1(y_k) &= y \\ T_\eta(y_k) &= 2y_k T_{\eta-1}(y_k) - T_{\eta-2}(y_k) \end{aligned} \quad (5.5)$$

siendo  $\eta$  el orden del polinomio:  $\eta \geq 2$  y  $T_\eta(y) \in R^{N \times (\eta+1)}$ , donde  $N$  es el número de datos obtenidos en el experimento. La no linealidad estática queda representada como:

$$z_k = T(k).thl$$

La señal  $y_k$  se obtiene simulando el modelo dinámico del sistema en espacio de estados, estimado a partir  $u_k$  y  $z_k$ , utilizando como entrada la señal  $u_k$ . Para obtener los parámetros del polinomio de Tschebychev  $T(k)$  se debe escalar la respuesta de la simulación en el rango de  $[-1, 1]$ . Si  $y(k)$  son las muestras obtenidas, y  $p$  y  $q$  representan los valores máximo y mínimo de las muestras, el escalamiento sería:

$$y_k = \frac{q - 2y(k) + p}{p - q} \quad (5.6)$$

El vector de coeficientes de la función no lineal  $[a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_\eta]^T$ , ecuación (5.4), se obtienen resolviendo la ecuación (5.3):

$$thl = (T(y_k))^\dagger \cdot z_k \quad (5.7)$$

Donde  $(\cdot)^\dagger$  es la Pseudo Inversa de Moore-Penrose y  $thl$  son los coeficientes de la función no lineal:  $thl \in R^{(\eta+1) \times l}$

Finalmente, el modelo no lineal queda determinado por las matrices A, B, C y D, que representan la dinámica del sistema y por el vector de parámetros  $thl$ , de la función no lineal estática.

En resumen, para obtener la salida estimada del sistema no lineal se siguen los siguientes pasos:

1. Estimar un modelo lineal dinámico en espacio de estados del sistema, a partir de las estradas  $u_k$  y las salida  $z_k$ .
2. Simular el modelo obtenido para estimar  $y_k$ , utilizando como señal de excitación la entrada  $u_k$ .
3. Encontrar los parámetros del polinomio de Tschebychev  $T(y_k)$  para un determinado orden  $\eta$ , a partir de  $y_k$ , como en la ecuación (5.5), previo

escalamiento con la ecuación (5.6). El orden del polinomio de Tschebychev, forma parte del proceso de identificación y el usuario debe decidir su valor, esto dependerá de la evaluación del modelo obtenido, en todo caso se puede replantear su valor para obtener un mejor modelo.

4. Encontrar el vector de parámetros de los coeficientes de la función no lineal:  $thl$  a partir de la ecuación (5.7).
5. Para encontrar la salida estimada del modelo no lineal,  $\hat{z}_k$  se multiplican el vector de parámetros del polinomio Tschebychev  $T(y_k)$  con los parámetros de la ecuación no lineal  $thl$ :

$$\hat{z}_k = T(y_k).thl .$$

Se debe observar que los parámetros  $thl$  son únicos, sin embargo el polinomio  $T_\eta(y_k)$  debe ser calculado siempre ya que depende de respuesta del sistema dinámico,  $y_k$ ; respetando el orden del polinomio  $\eta$ , ya que los parámetros de la función no lineal  $thl$  que se obtienen en la identificación son función de  $\eta$ .

Como ejemplo de la aplicación de los sistemas Wiener, presentamos la identificación del proceso de la figura 5.3 tomado de [Y. Zhu, 1999], el cual está formado por un subsistema dinámico con función de transferencia

$$y(t) = \frac{z + 0.5z^2}{z^2 - 1.5z + 0.7} u(t) \quad (5.8)$$

y un bloque no lineal :

$$f(t) = \frac{y(t)}{\sqrt{0.1 + 0.9 * y^2(t)}} \quad (5.9)$$

siendo la salida del sistema:

$$z = f(t) \quad (5.10)$$

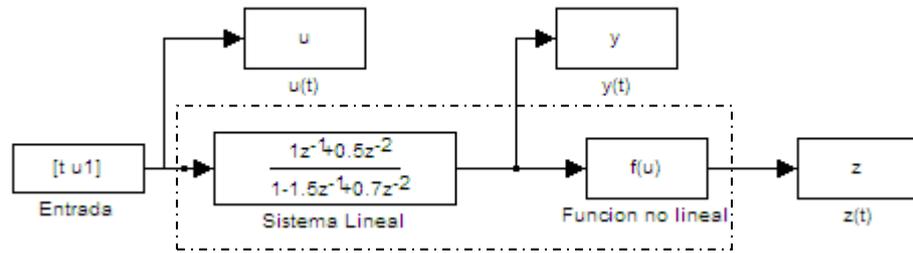


Figura 5.3 Sistema Wiener

La señal de entrada para la simulación del sistema Wiener se muestra en la figura 5.4

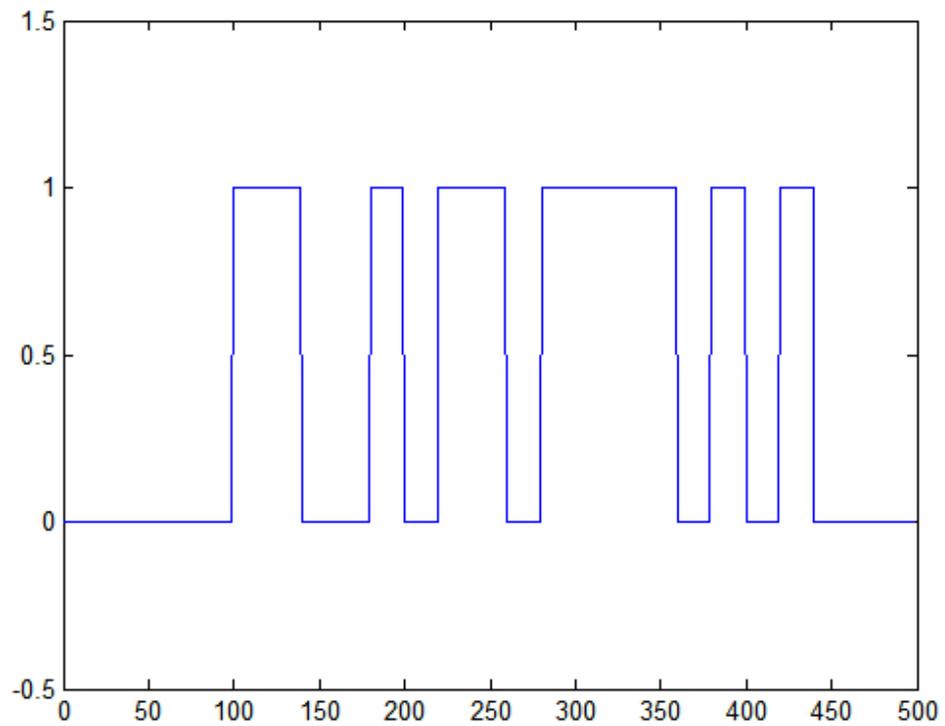


Figura 5.4 Señal de entrada para la simulación  $u(t)$

Las salidas de los bloques lineal  $y(t)$  y no lineal  $z(t)$  de la figura 5.3, se presentan en las figuras 5.5 y 5.6 respectivamente.

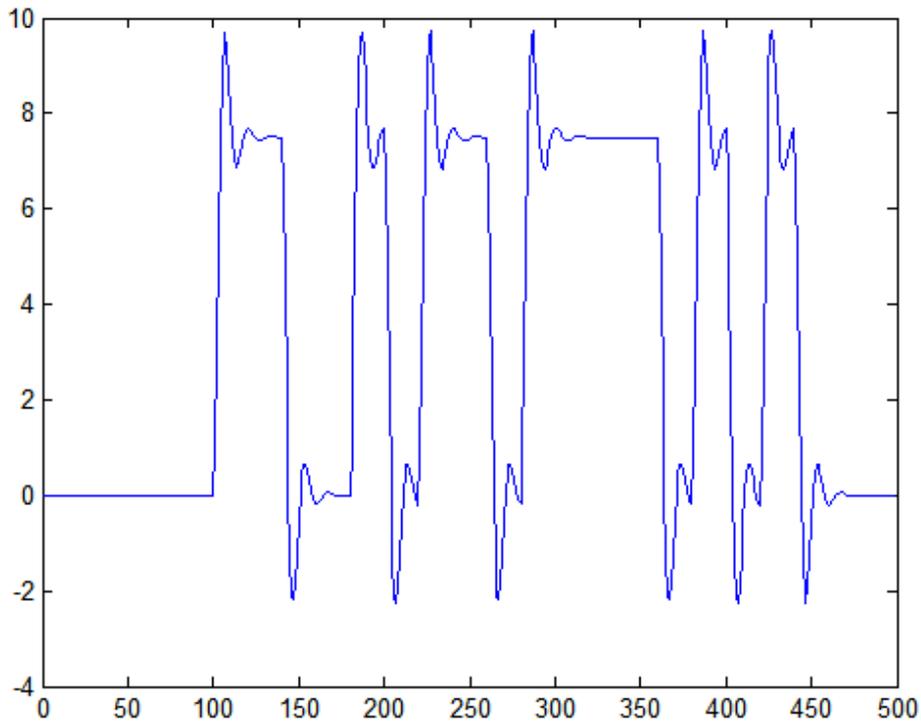


Figura 5.5. Señal de salida del bloque dinámico  $y(t)$

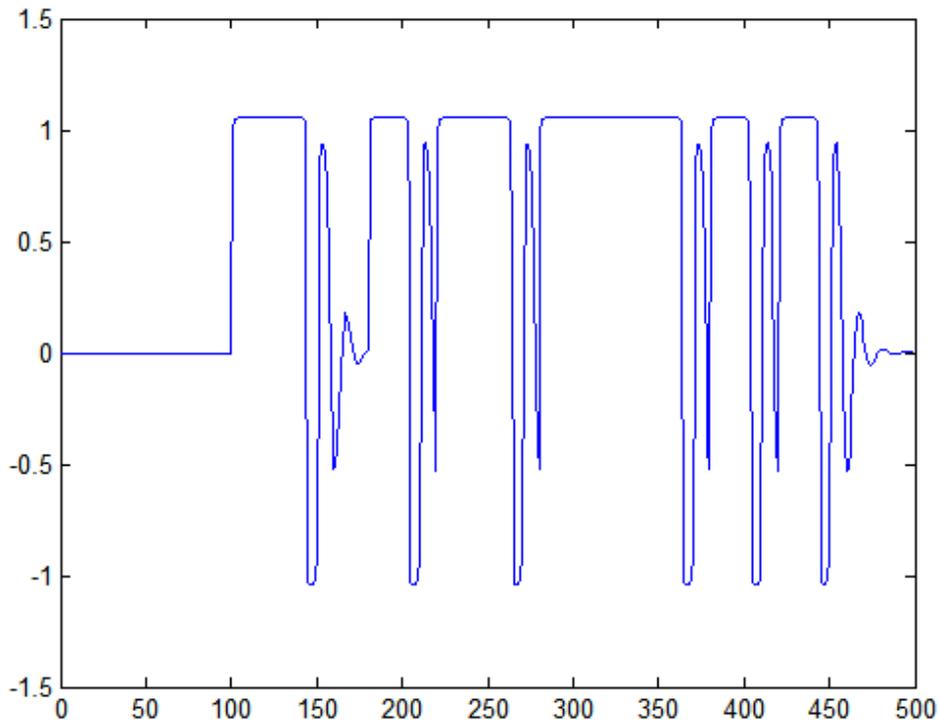


Figura 5.6. Salida del bloque no lineal  $z(t)$

El sistema se identifica con el algoritmo de identificación para modelos no lineales propuesto en el presente proyecto, considerando  $u(t)$  como señal de entrada y  $z(t)$  como señal de salida. El método estima primero el modelo lineal que representa el bloque dinámico del sistema Wiener, el orden del sistema se determina a partir de los valores singulares mostrados en la figura 5.7. El orden escogido es 2 ya que son dos los valores singulares relativamente mayores.

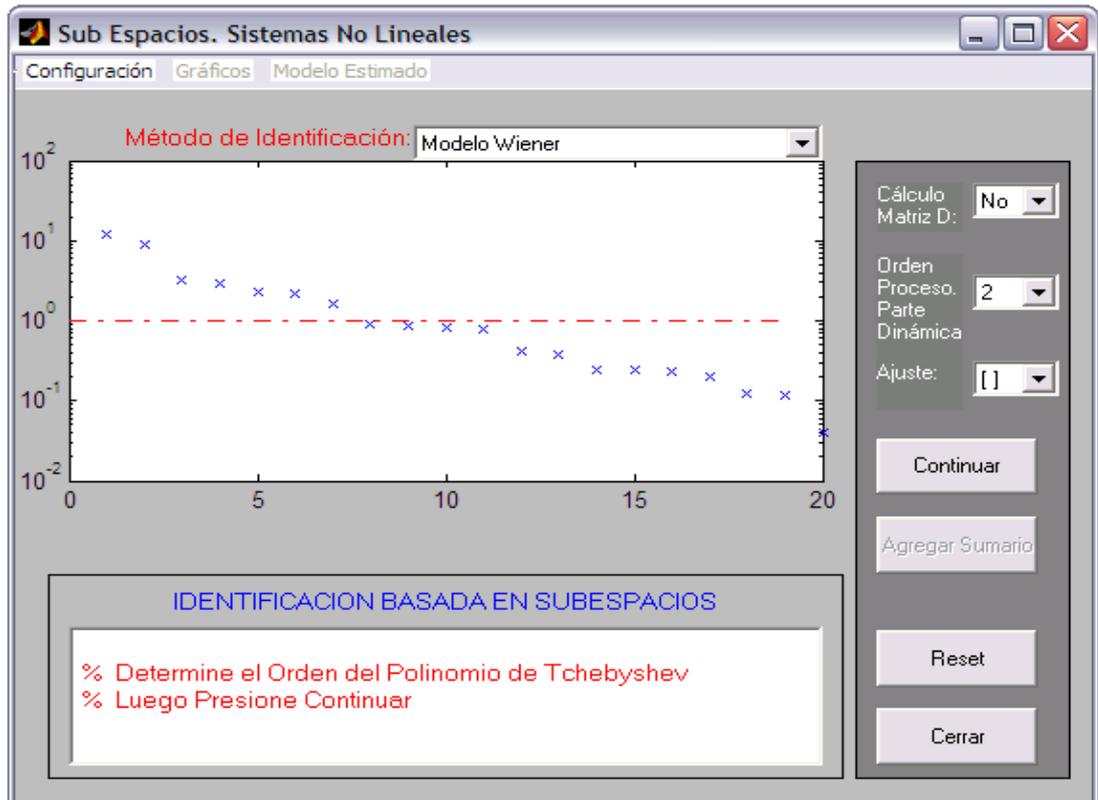


Figura 5.7. Valores singulares del sistema

Conociendo el modelo lineal el algoritmo determina la salida de bloque lineal  $y_s(t)$ , excitándolo con la entrada  $u(t)$ . A partir de la salida estimada  $y_s(t)$  y la salida real del bloque no lineal  $z(t)$  se determina los parámetros del polinomio de Tschebychev resolviendo la ecuación (5.7). Para el polinomio de Tschebychev se elige un orden 4, se debe considerar que este orden puede ser luego modificado dependiendo de los resultados obtenidos, en las figuras 5.8 y 5.9 se muestran las salidas estimadas del bloque no lineal  $z_e(t)$  para un orden de 4 y 7 del polinomio de Tschebychev. Los errores cuadráticos medios no varían significativamente, pero el ajuste en el estacionario es mejor para el modelo de la figura 5.9.

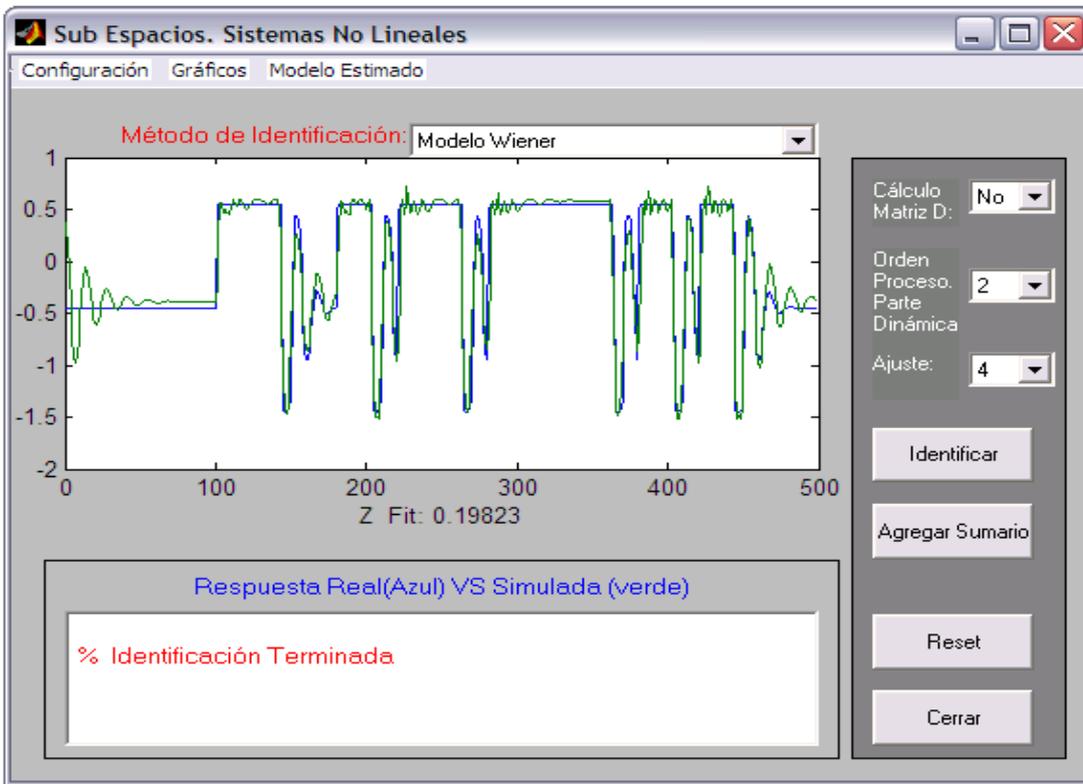


Figura. 5.8. Salida estimada del bloque lineal:  $y_e(t)$

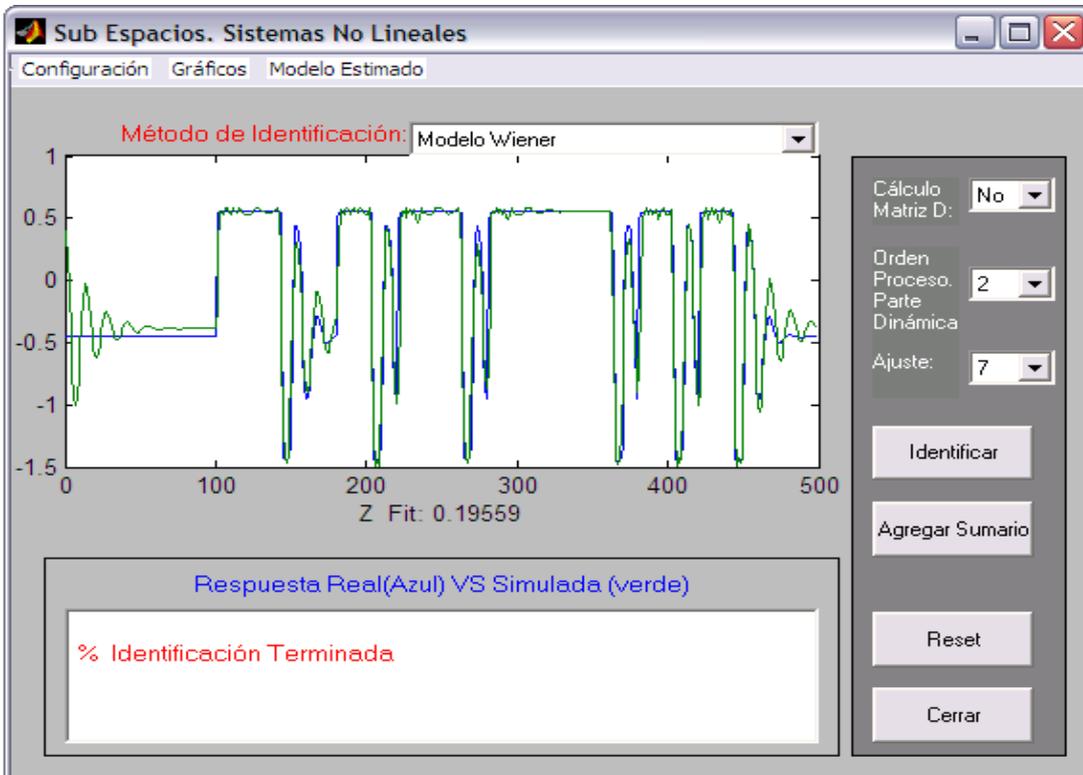


Figura 5.9. Salida estimada del bloque no lineal:  $z_e(t)$

### 5.3 Caso de estudio: Identificación de un reactor continuamente agitado

El algoritmo desarrollado para estimar modelos no lineales ha sido aplicado en la identificación de un tanque reactor continuamente agitado (continuous stirred tank reactor – CSTR) con una cinética exotérmica. En la figura 5.10 se presenta el esquema del reactor, donde sus características principales son: el sistema de agitación, la tubería de alimentación de reactivos, la tubería de descarga de productos y el sistema de enfriamiento del reactor a través de una camisa externa.

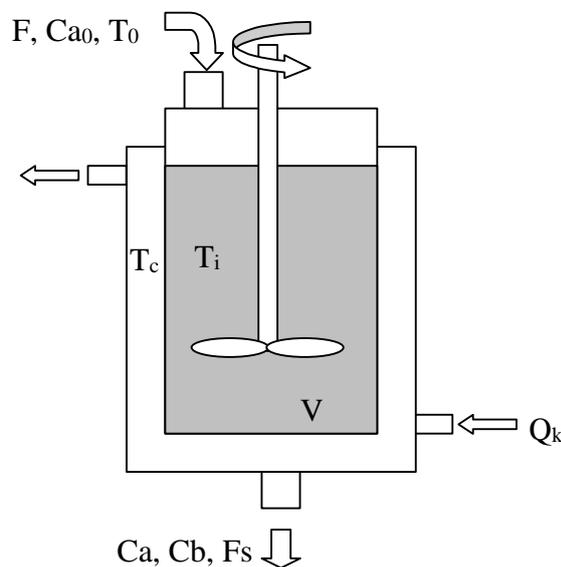


Figura. 5.10. Esquema del CSTR

El sistema a modelar, consiste en un reactor homogéneo de volumen constante  $V$ , en él, se lleva a cabo una reacción exotérmica para generar un producto de salida. La reacción principal esta dada por la transformación del producto A en el producto B. El producto A también reacciona en una reacción paralela no deseada generando el producto D. Un producto C, no deseado, se obtiene de una reacción consecutiva del producto B. Este tipo de reacción es conocida con el nombre de *reacción de Van der Vusse*, [Van der Vusse, 1964], y de acuerdo con la literatura es un sistema de dinámica complicada difícil de modelar.



Para la identificación del sistema CSTR se consideran como señales de ingreso:

- Entrada 1: Flujo de la sustancia A,  $F$
- Entrada 2: Concentración de la sustancia A,  $Ca_0$
- Entrada 3: Temperatura de ingreso de la sustancia A,  $T_0$
- Entrada 4: Calor retirado del reactor a través de un intercambiador externo,  $Q_k$

y como señales de salida:

- Salida 1: Concentración de la sustancia A,  $Ca$
- Salida 2: Concentración de la sustancia B,  $Cb$
- Salida 3: Temperatura dentro del reactor,  $T_i$
- Salida 4: Temperatura dentro de la camisa,  $T_c$

Los datos de entrada y salida han sido obtenidos a partir de una simulación desarrollada en base al modelo descrito y parametrizado en [H. Chen, A. Kremling, 1995], donde se consideran las siguientes ecuaciones de balance de masa y energía para el reactor:

$$\begin{aligned} \dot{C}a &= \frac{F}{V} * (Ca_0 - Ca) - k_1(T) * Ca - k_3(T) * Ca^2 \\ \dot{C}b &= -\frac{F}{V} * Cb + k_1(T) * Ca - k_2(T) * Cb \end{aligned} \tag{5.12.a}$$

$$\dot{T}_i = \frac{F}{V} * (T_0 - T) - \frac{1}{\rho C_p} * (k_1(T) * Ca * \Delta H_{AB} + k_2(T) * Cb * \Delta H_{BC} + k_3(T) * Ca^2 \Delta H_{AD}) + \frac{k_w A_c}{\rho C_p V} (T_c - T) \quad (5.12.b)$$

$$\dot{T}_c = \frac{1}{m_c C_{pc}} * (\dot{Q}_k + k_w A_c (T - T_c))$$

Donde  $Ca$  y  $Cb$  son las concentraciones de las sustancias A y B,  $Ca_0$  y  $T_0$  es la concentración con que ingresa la sustancia A y su temperatura.  $V$  es el volumen del reactor, el cual se considera constante, y los nombres correspondientes a los parámetros que figuran en las ecuaciones de masa y energía dadas anteriormente, aparecen en la Tabla 1.

Nombre del parámetro	Símbolo	Valor
Factor para la reacción $k_1$	$k_{10}$	$(1.287 \pm 0.04)10^{12} \text{ h}^{-1}$
Factor para la reacción $k_2$	$k_{20}$	$(1.287 \pm 0.04)10^{12} \text{ h}^{-1}$
Factor para la reacción $k_3$	$k_{30}$	$(9.043 \pm 0.27)10^9 \text{ h}^{-1} / \text{molA}$
Energía de activación para $k_1$	$E_1$	$-9758.3 \text{ K}$
Energía de activación para $k_2$	$E_2$	$-9758.3 \text{ K}$
Energía de activación para $k_3$	$E_3$	$-8560 \text{ K}$
Entalpia de la reacción $k_1$	$\Delta H_{AB}$	$(4.2 \pm 2.36) \text{ kJ} / \text{molA}$
Entalpia de la reacción $k_2$	$\Delta H_{BC}$	$-(11.0 \pm 1.92) \text{ kJ} / \text{molB}$
Entalpia de la reacción $k_3$	$\Delta H_{AD}$	$-(41.84 \pm 1.41) \text{ kJ} / \text{molA}$
Densidad	$\rho$	$(0.9342 \pm 4 \cdot 10^{-4}) \text{ kg} / \text{l}$
Capacidad calorífica	$C_p$	$(3.01 \pm 0.04) \text{ kJ} / \text{kgK}$
Coef. de tranf. de calor (camisa)	$k_w$	$(4032 \pm 120) \text{ kJ h}^{-1} / \text{m}^2 \text{ K}$
Superficie de la camisa	$A_c$	$0.215 \text{ m}^2$
Volumen del reactor	$V$	$0.01 \text{ m}^3$
Masa de la camisa	$m_c$	$5.0 \text{ kg}$
Capacidad calorífica (camisa)	$C_{pc}$	$(2.0 \pm 0.05) \text{ kJ} / \text{kg K}$

Tabla 1. Parámetros del modelo del reactor CSTR

En las ecuaciones de balance de masa y energía para el reactor las velocidades de reacción  $k_i$  se consideran que dependen de la temperatura y ésta es una de las no linealidades más serias de los sistemas de ingeniería química, de acuerdo con la ley de Arrhenius [H. Chen, A. Kremling, 1995], se tiene:

$$k_i(T) = k_{i0} * \exp\left(\frac{E_i}{T(^{\circ}C) + 273.15}\right), \text{ con } i = 1, 2, 3. \quad (5.13)$$

Los valores de los parámetros  $E_i$  están expresados en la tabla 1 y son valores indicados para obtener la máxima producción de la sustancia B [H. Chen, A. Kremling, 1995]

Para el proceso de identificación se consideran las siguientes condiciones iniciales de operación, estado estacionario:

$$Ca_0 = 5.10 \text{ mol/l}, Ca = 2.14 \text{ mol/l}, T_0 = 104.9^{\circ}C, F = 0.1419 \text{ m}^3/\text{h},$$

$$\dot{Q}_k = -1113.5 \text{ kJ/h } T_i = 114.2^{\circ}C, T_c = 112.9^{\circ}C, C_b = 112.9^{\circ}C$$

En la figura 5.11. se muestran las señales de entrada utilizadas en la simulación a lazo abierto y las salidas del reactor continuamente agitado, las señales varían en forma simultánea.

Las entradas y las de salidas obtenidas de la simulación, son previamente tratadas por un filtro pasa alto con una frecuencia de corte de  $\omega = 0$ , de forma de trabajar con las variaciones de las señales.

El método desarrollado para identificación de sistemas no lineales, propuesto en el presente proyecto, primero estima el modelo dinámico del sistema, para ello es necesario determinar el orden del sistema, que se hace a partir de los valores singulares mostrados en la figura 5.12. El orden considerado es 6 por ser el número de valores singulares mayores a cero.

Los parámetros de la función no lineal se calculan a partir de la salida del modelo lineal obtenido y de los parámetros del polinomio de Tschebychev, para esto se deberá determinar el orden del polinomio, se elige 4, figura 5.13.

Al finalizar la identificación el modelo no lineal estará formado por el modelo dinámico de orden 6, estimado mediante subespacios y por el vector de los coeficientes de la función no lineal, *thl*, de orden 4.

En las figuras 5.14, 5.15, 5.16 y 5.17 las salidas de la simulación del reactor continuamente agitándose, CSTR, se comparan con las respuestas del modelo no lineal estimado para reactor. En las gráficas se considera que las señales obtenidas de la simulación del reactor son reales, color azul y las respuestas del modelo no lineal estimado son las señales simuladas de color verde.

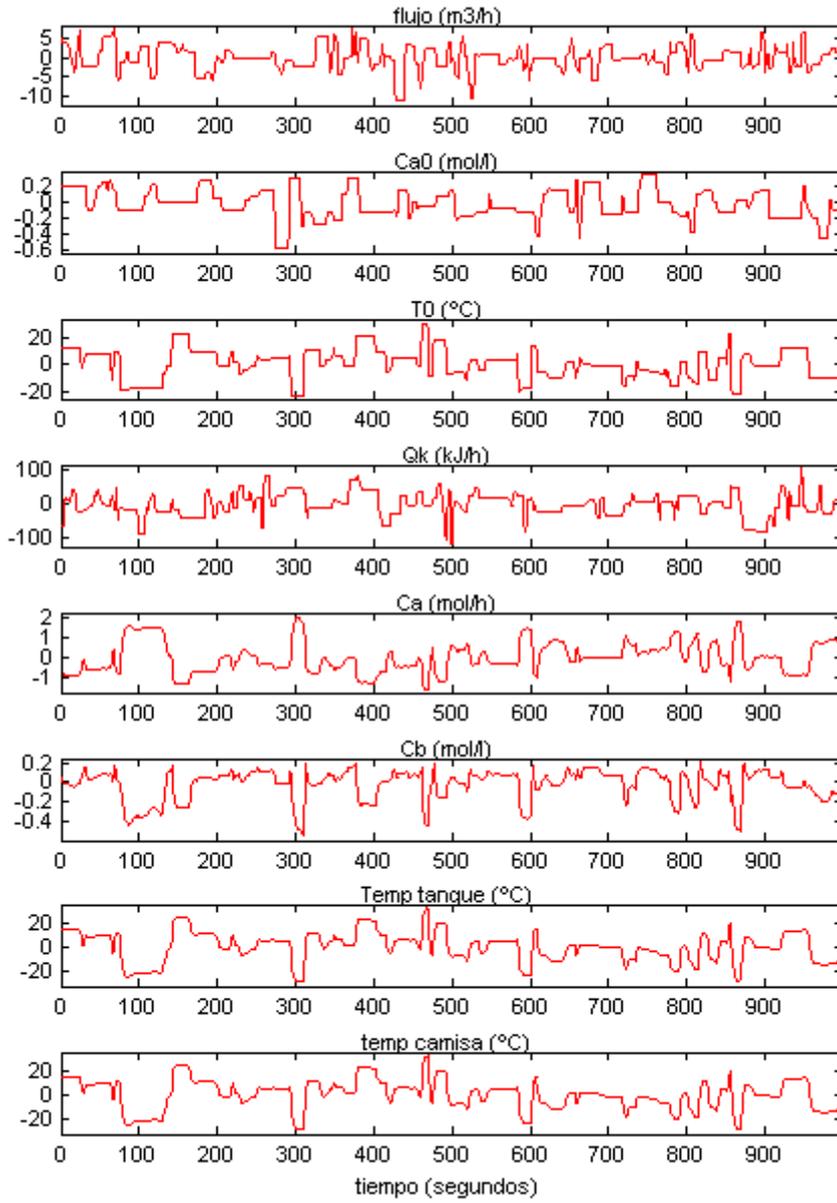


Figura 5.11. Entradas y salidas para la Identificación del sistema CSTR

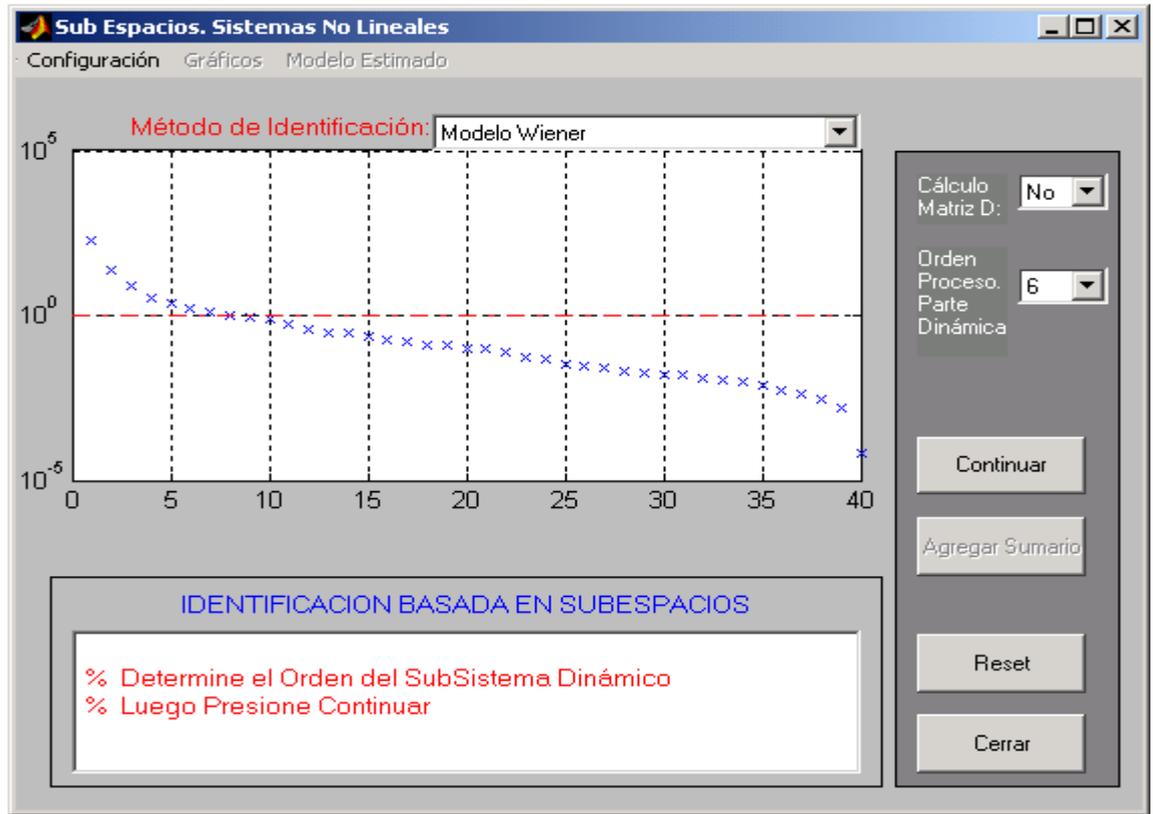


Figura 5.12. Valores singulares para el orden del modelo dinámico.

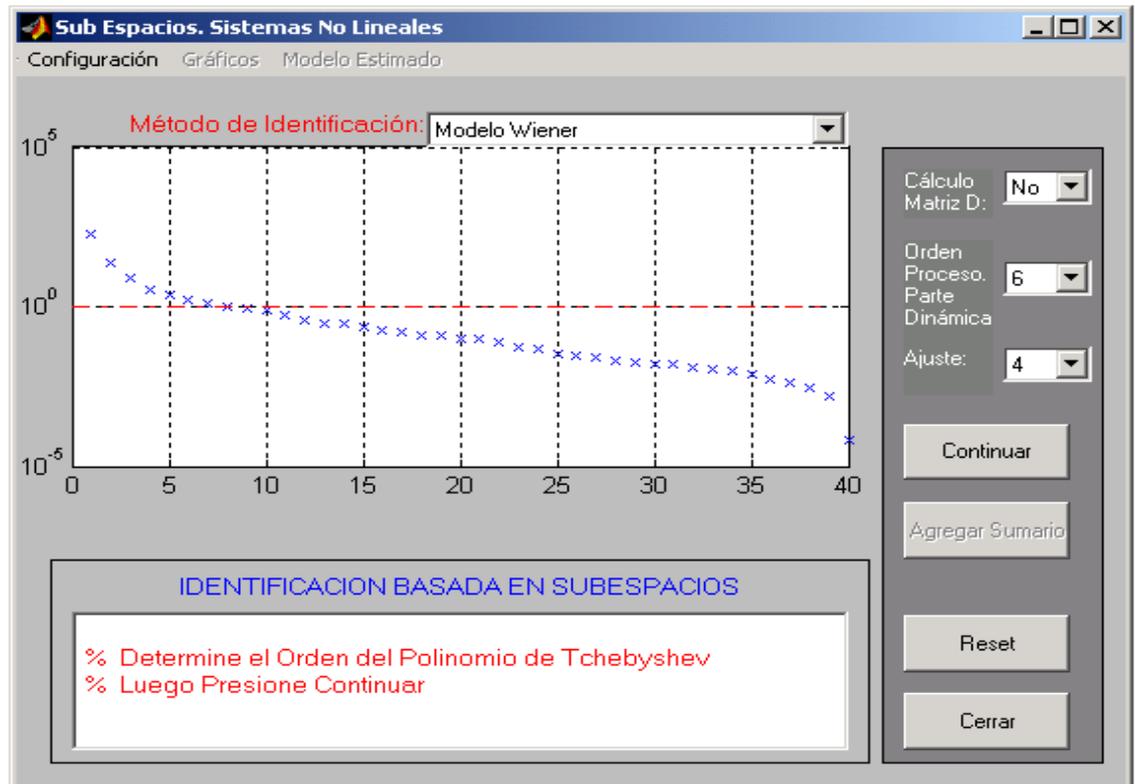


Figura 5.13. Determinación del orden para el polinomio de Tschebyshev

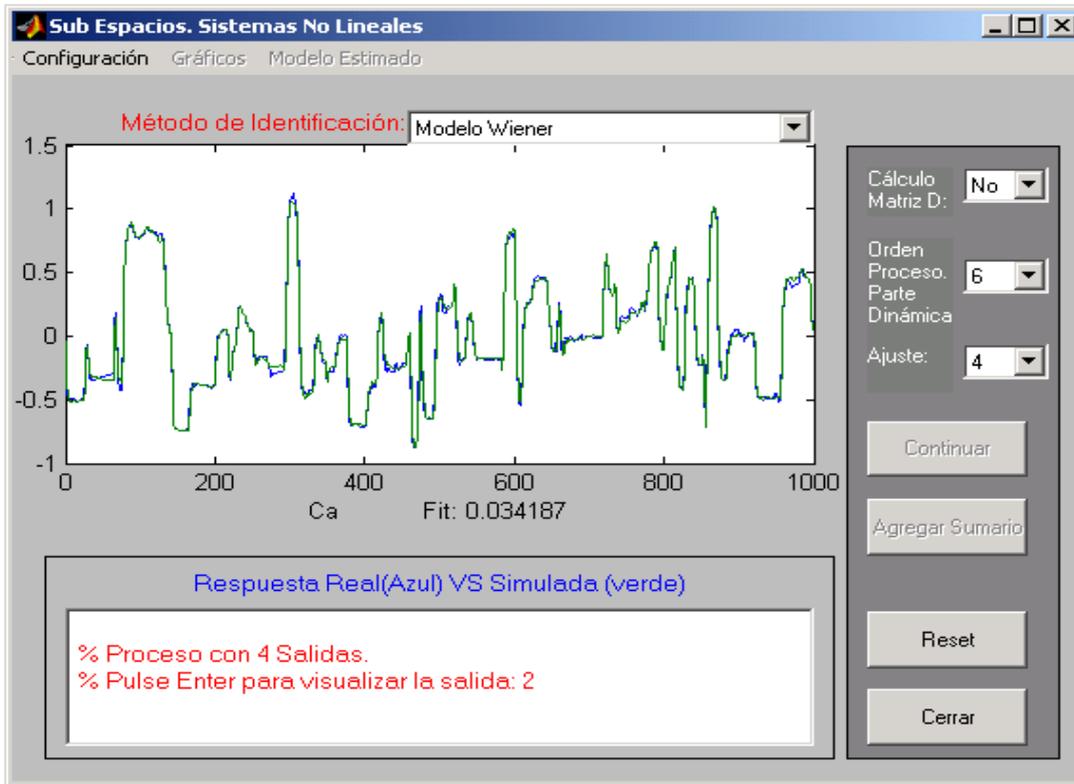


Figura 5.14. Salida 1 del modelo no lineal para el CSTR

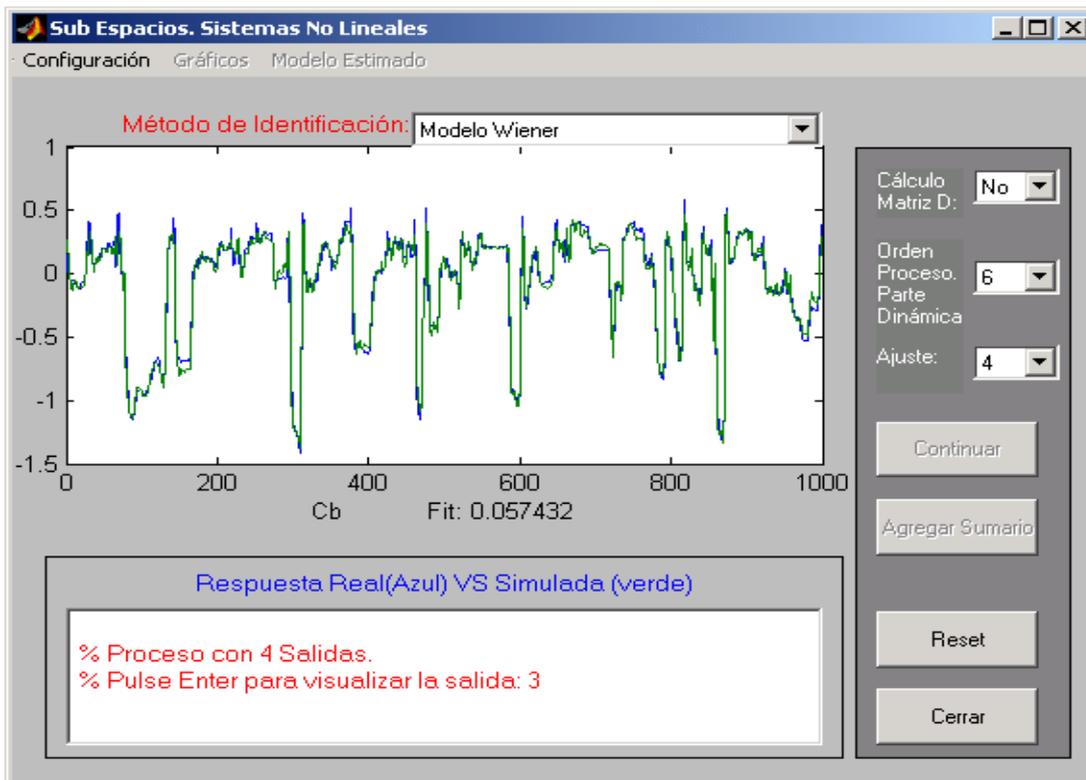


Figura 5.15. Salida 2 del modelo no lineal para el CSTR

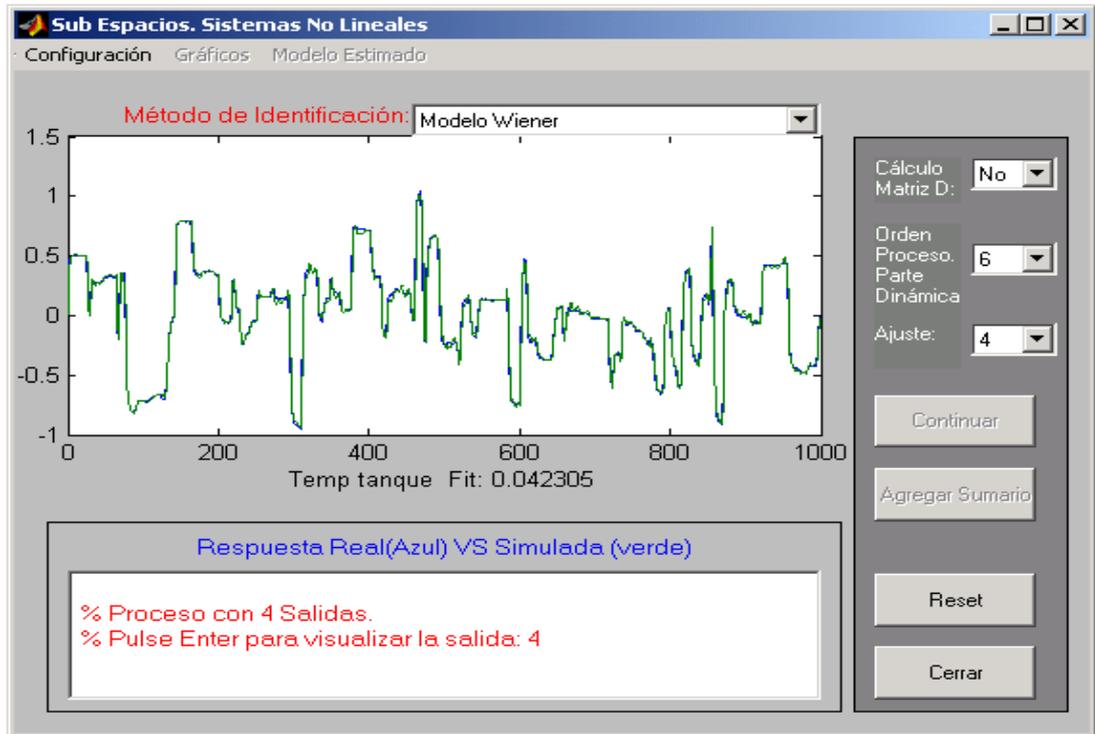


Figura 5.16. Salida 3 del modelo no lineal para el CSTR

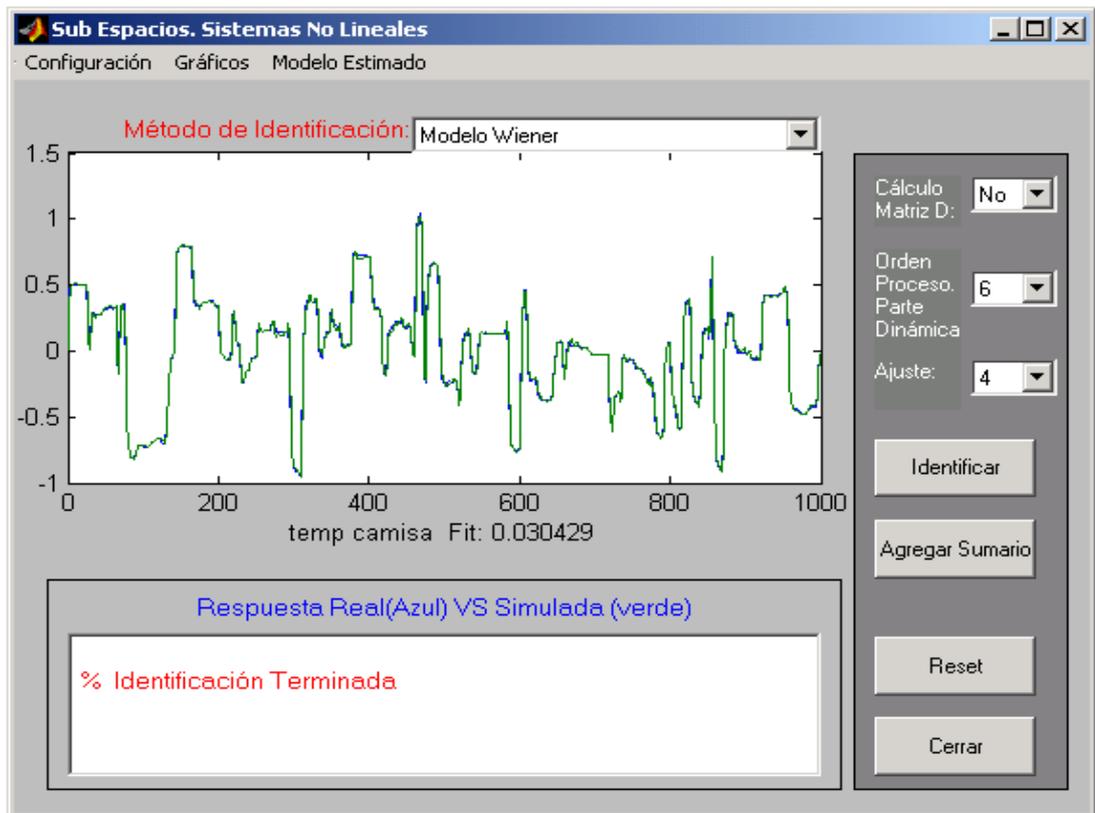


Figura 5.17. Salida 4 del modelo no lineal para el CSTR

La validación del modelo obtenido para el tanque reactor se realiza con un conjunto de datos distintos a los utilizados en la identificación, en la grafica 5.18, se muestran los datos para la validación

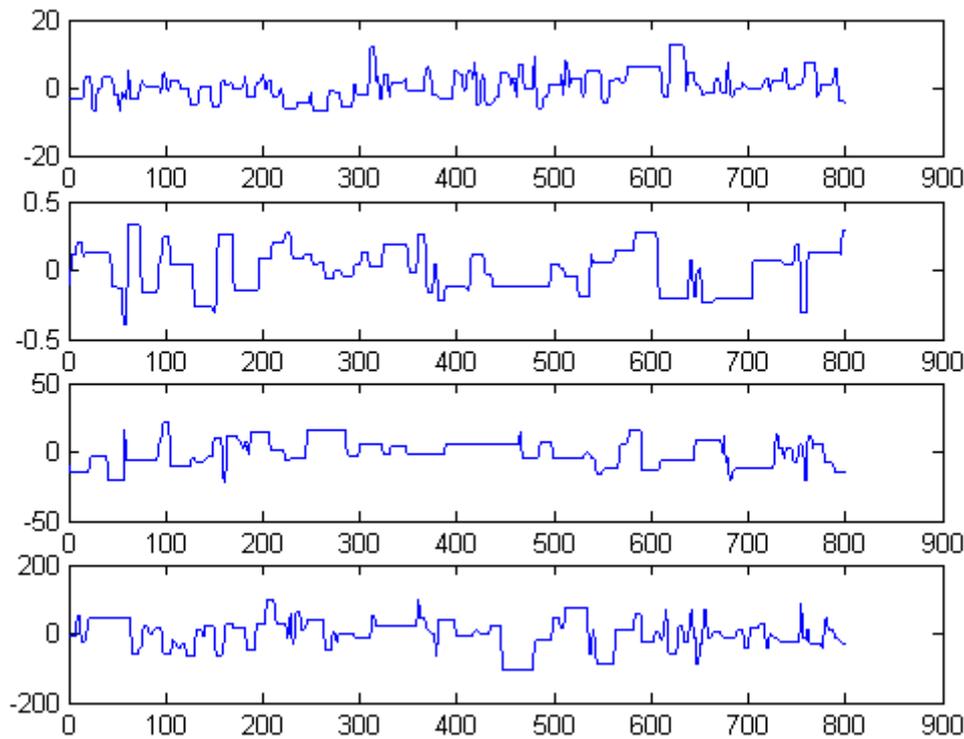
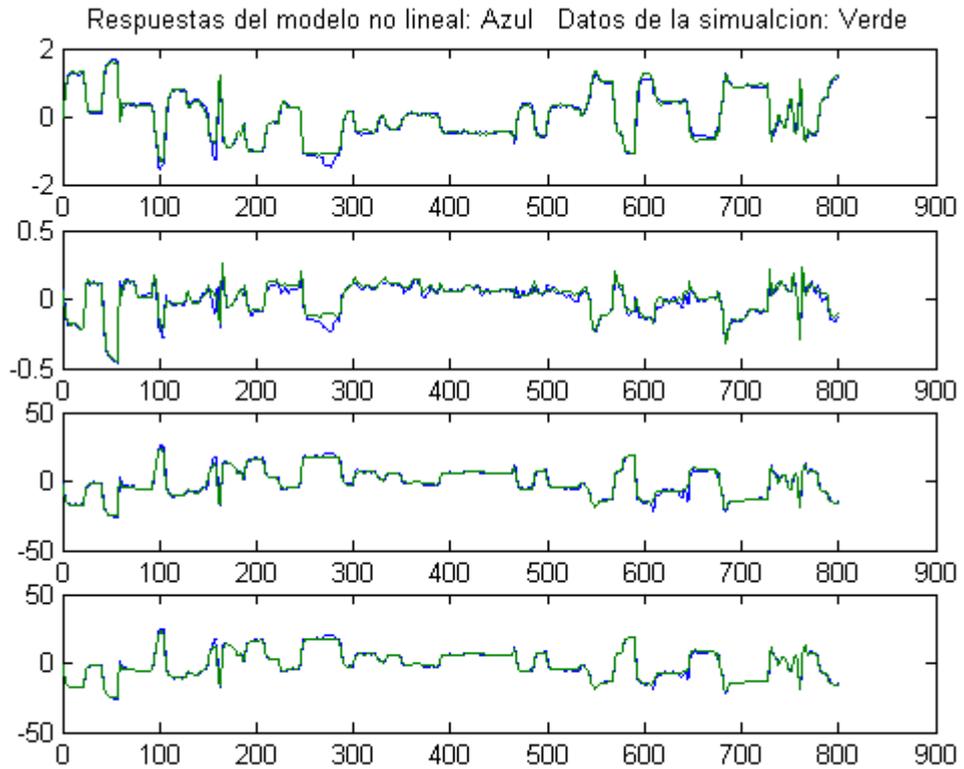


Figura 5.18. Datos de entrada para la validación del modelo obtenido.

Para obtener la respuesta del sistema no lineal se excita el modelo dinámico con los datos de validación. La respuesta del sistema sirve para encontrar los parámetros del polinomio de Tschebychev, los cuales son multiplicados con los coeficientes de la función no lineal, *thl*, obtenidos durante la identificación. En la figura 5.19 se muestra el resultado de la validación, como puede observarse la respuesta del modelo obtenido mediante identificación: color azul, se ajusta muy bien a los datos obtenidos de la simulación del reactor: color verde.



5.19. Validación del sistema no lineal.

Para comprobar las prestaciones de estimar el modelo del tanque reactor continuamente agitado, CSTR, por medios de técnicas de identificación para sistemas no lineales, realizamos la identificación del sistema CSTR utilizando técnicas para modelos lineales. Para ello empleamos el algoritmo Mosp\_SID basado en subespacios, el modelo estimado es de orden 6. En las figuras 5.20, 5.21, 5.22 y 5.22 se muestran las graficas de los resultados obtenidos identificando al sistema CSTR como si fuese un sistema lineal. Se puede apreciar que las respuestas para el modelo no lineal siguen mejor a las señales de comprobación. El error medio cuadrático es menor en el caso de las señales obtenidas del modelo no lineal. Es de particular interés la salida 2, que corresponde a la concentración de la sustancia B,  $C_b$ , para el modelo lineal, figura 5.21, el error cuadrático medio es 0.38; sin embargo, para el sistema no lineal, figura 5.15, el error cuadrático medio es 0.057.

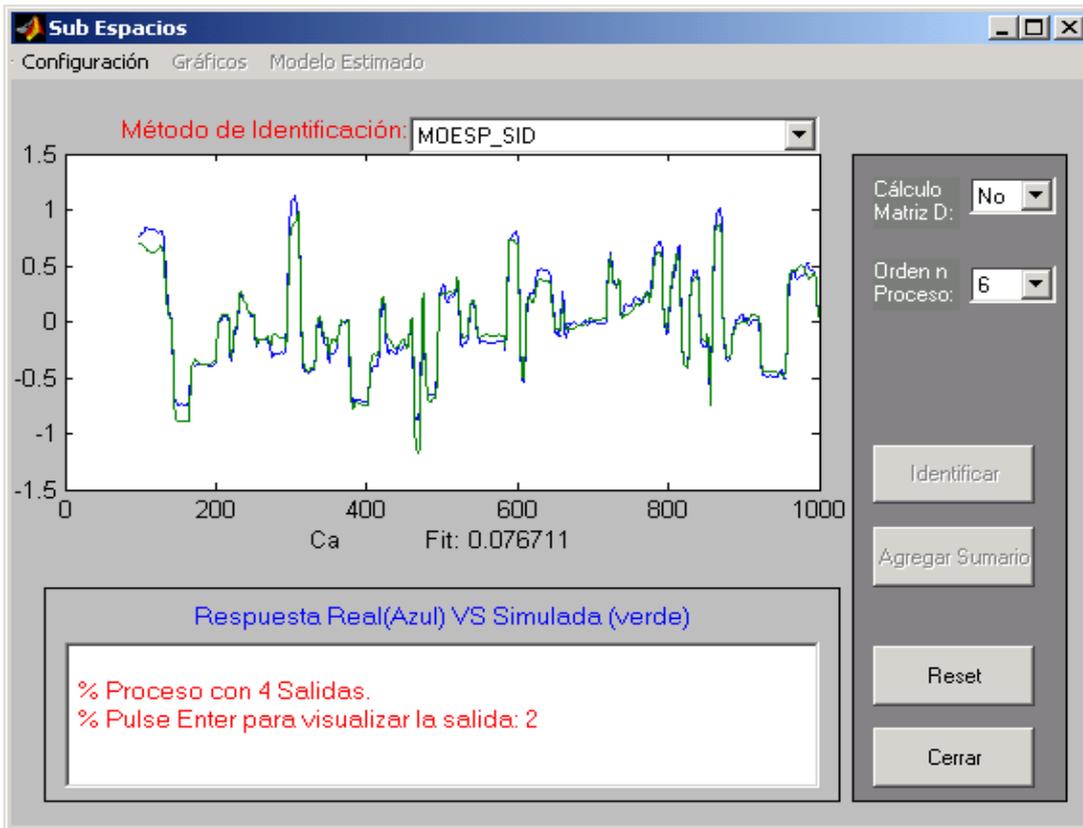


Figura 5.20 Salida 1 del modelo lineal para el CSTR

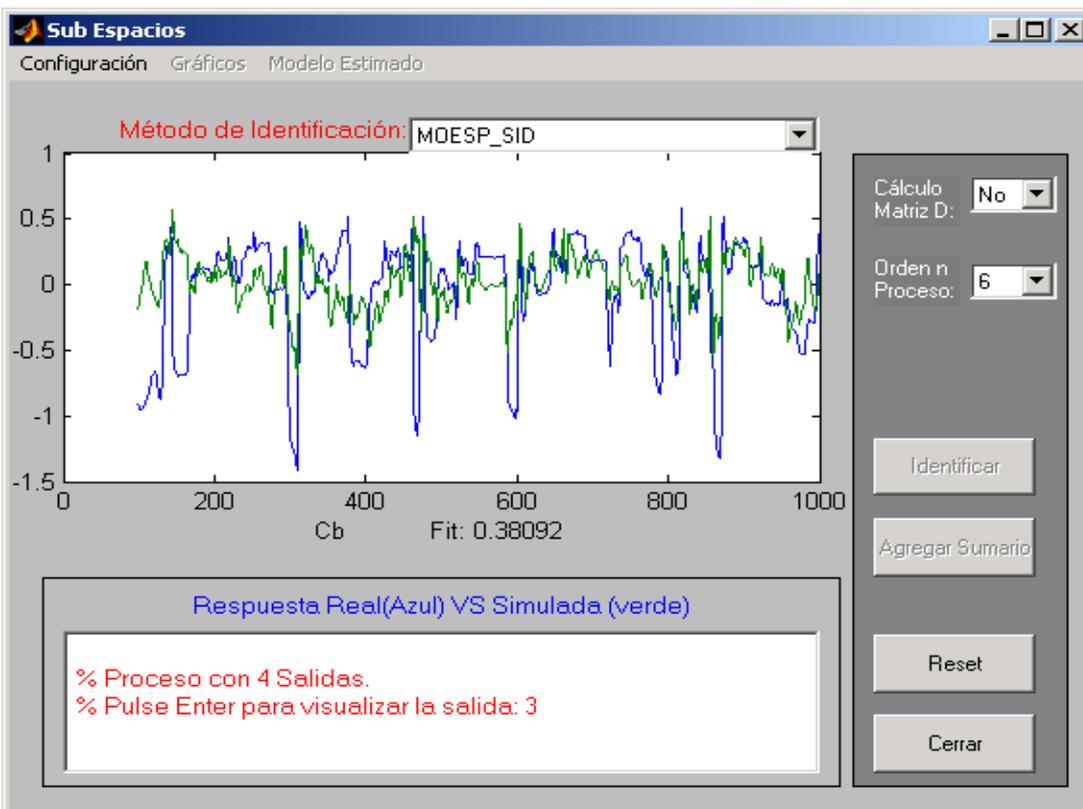


Figura 5.21. Salida 2 del modelo lineal para el CSTR

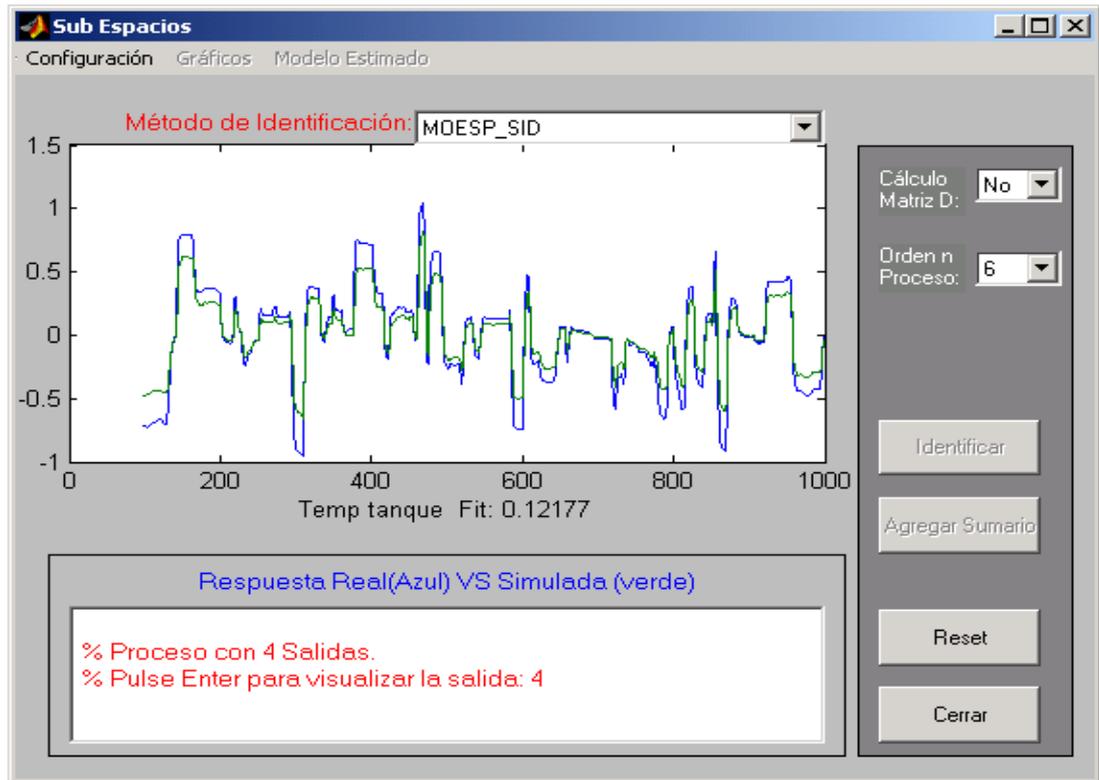


Figura 5.22. Salida 3 del modelo lineal para el CSTR

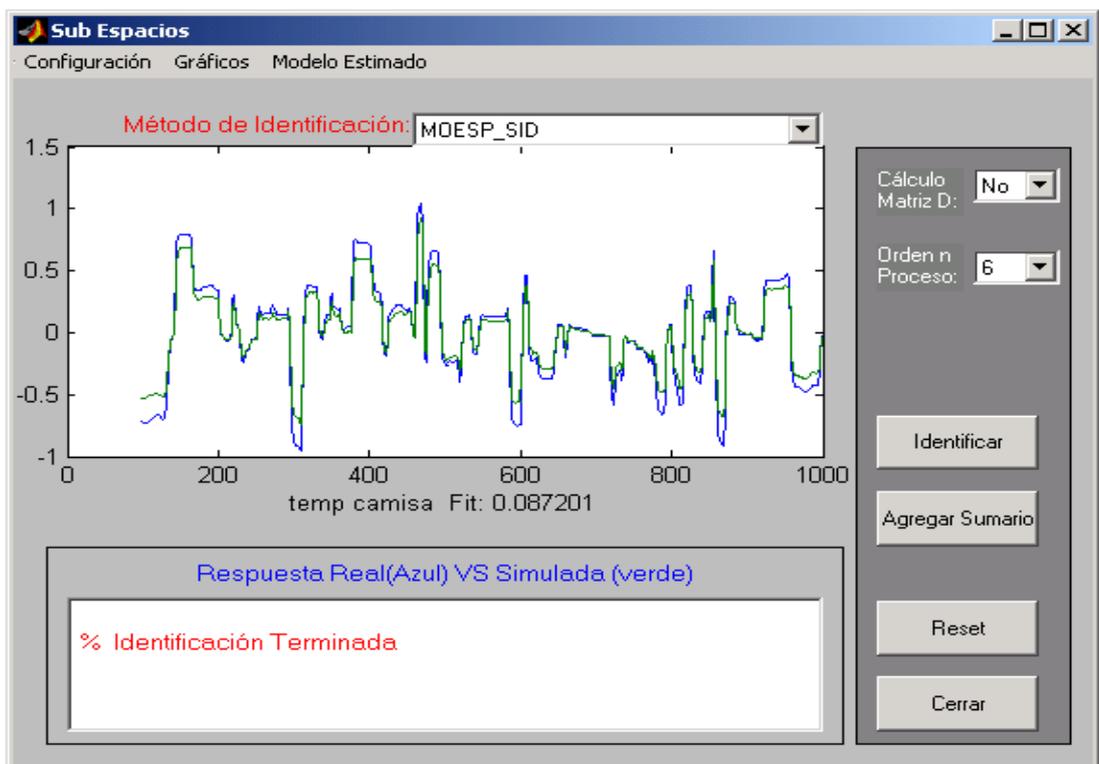


Figura 5.23. Salida 4 del modelo lineal para el CSTR

## ***Capítulo 6***

### ***Descripción del software desarrollado***

Dentro de las etapas de identificación de un proceso, se tiene la de *estimar el modelo* que mejor se ajuste a su dinámica. Esta etapa se ha visto favorecida por el desarrollo de programas matemáticos orientados a facilitar el procesamiento de los datos adquiridos en la etapa experimental. Uno de los paquetes matemáticos que han contribuido al desarrollo de programas de estimación de modelos, con cierta versatilidad y flexibilidad, es el Matlab. Entorno matemático que en sus últimas versiones incorpora un ambiente de desarrollo gráfico (GUI) que facilita elaborar programas en base a menús y botones.

En el Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Valladolid, se ha desarrollado el programa HIDENss, bajo entorno Matlab, con el propósito de contar con una herramienta que facilite la etapa de estimación de modelos en la identificación de procesos. El software es versátil e interactivo, permite un tratamiento previo de los datos adquiridos en la etapa experimental,

escoger el método deseado para estimar el modelo, ejecución del algoritmo para encontrar los parámetros del modelo, presentación gráfica de los resultados, guardar y leer datos en el disco de la computadora. El HIDENss tiene implementados algoritmos de identificación basado en subespacios, de forma de poder obtener modelos en Espacio de Estados, especialmente útiles para identificar sistemas MIMO.

El software HIDENss se desarrolla a partir del programa HIDEN, herramienta de identificación de sistemas que permite obtener modelos en función de transferencia de procesos de múltiples entradas una salida. Los algoritmos basados en subespacios se integran como parte del programa HIDEN, haciendo uso de sus rutinas para acceder a los archivos con los datos experimentales, así como para el tratamiento digital de los mismos. En el presente capítulo se estudian las características principales de las rutinas desarrolladas en base a las técnicas de subespacios para la identificación que se han incorporado como parte del HIDENss.

## **6.1 Rutinas desarrolladas.**

El software permite la identificación de procesos a lazo abierto y a lazo cerrado, para ello será necesario disponer de los datos recogidos en la fase experimental, adecuadamente ordenados en columnas y en formato texto, sin ninguna cabecera al inicio de las columnas.

El HIDENss se incorpora como una herramienta matemática que se ejecuta desde Matlab como una rutina .m, para acceder al programa se hace desde la ventana

principal de comandos del Matlab, escribiendo *hidenss*. La ventana principal que nos ofrece el programa HIDE<sup>N</sup>ss se muestra en la figura 6.1.

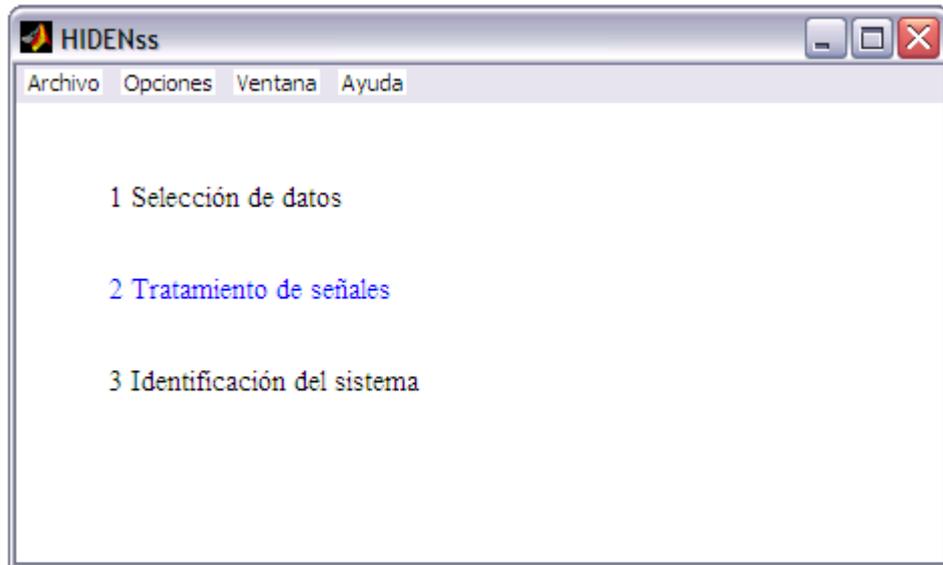


Figura 6.1. Ventana principal del HIDE<sup>N</sup>ss

Con el mouse se puede seleccionar la opción deseada, para ingresar a *3. Identificación del sistema*, será indispensable previamente cargar los datos del experimento, esto se hace pulsando en la opción *1. Selección de datos*. En la figura 6.2 se presentan las opciones de esta ventana.



Figura 6.2 Opciones de la ventana selección de datos

El punto *1. Preparación de datos desde un archivo ASCII*, nos permite cargar los datos experimentales almacenados en un archivo texto y proporcionar información

referente a las variables y al experimento, para el posterior análisis y tratamiento de los datos. La ventana para cargar los datos en formato ASCII se muestra en la figura 6.3.

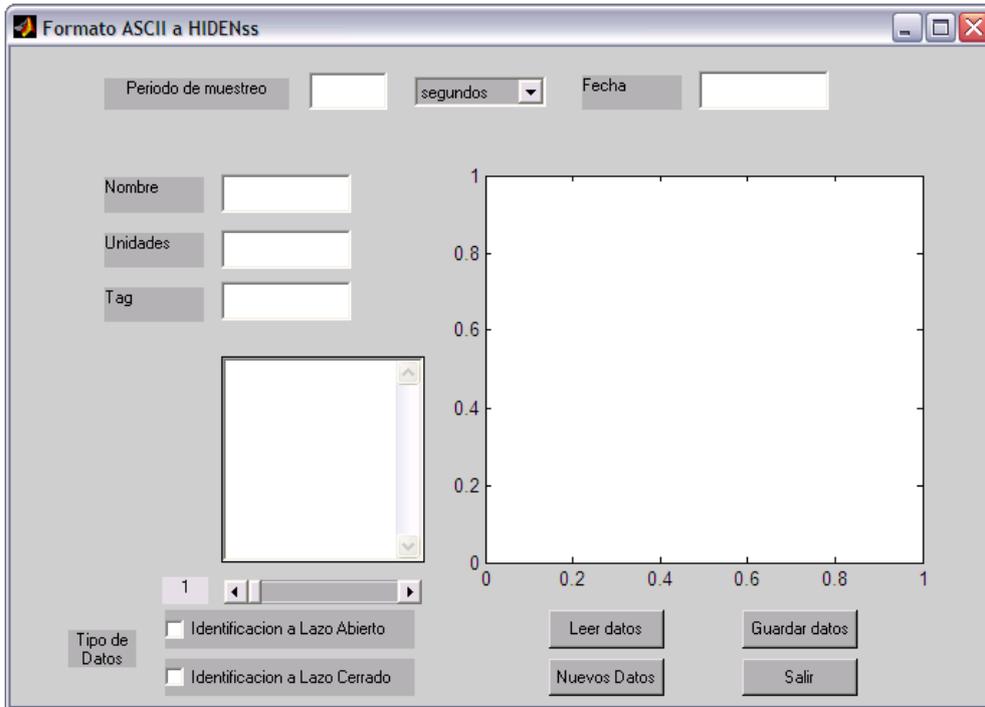


Figura 6.3. Ventana para leer archivos ASCII

Se deberá seleccionar si los datos se han obtenido para una identificación a lazo abierto o a lazo cerrado, luego se cargará el archivo texto con el botón *Leer datos*. Dependiendo del tipo de identificación seleccionada, las variables del experimento se dividen en dos grupos: Entradas y salidas, para lazo abierto y en cuatro grupos para lazo cerrado: Consignas (SP), de perturbación medible (V), de control (OP) y variables controladas (Y). Para cada una de las variables se definen: Tipo de variable, Nombre, Unidades y Tag; y para el experimento: el Periodo de muestreo utilizado y la fecha del experimento. Finalmente los datos serán guardados en un archivo .mat, propio del Matlab, para ser cargados desde la opción 2. *Apertura de archivo* en la ventana selección de datos.

Con la opción *3. Selección de señales*, de la ventana selección de datos, figura 6.2, escogemos las señales del experimento que nos interesa para identificar el proceso. El formato de la ventana que se abre dependerá del tipo de identificación: lazo abierto o lazo cerrado.

### 6.1.1 Identificación en espacio de estados: Lazo abierto

Con el fin de explicar mejor las rutinas implementadas haremos uso de los datos obtenidos para identificar los tanques intercomunicados a lazo abierto, sistema MIMO 2x2. Con la ventana selección de señales, seleccionamos las señales de entrada y salida del experimento que nos interesa para identificar el proceso, ver figura 6.4.

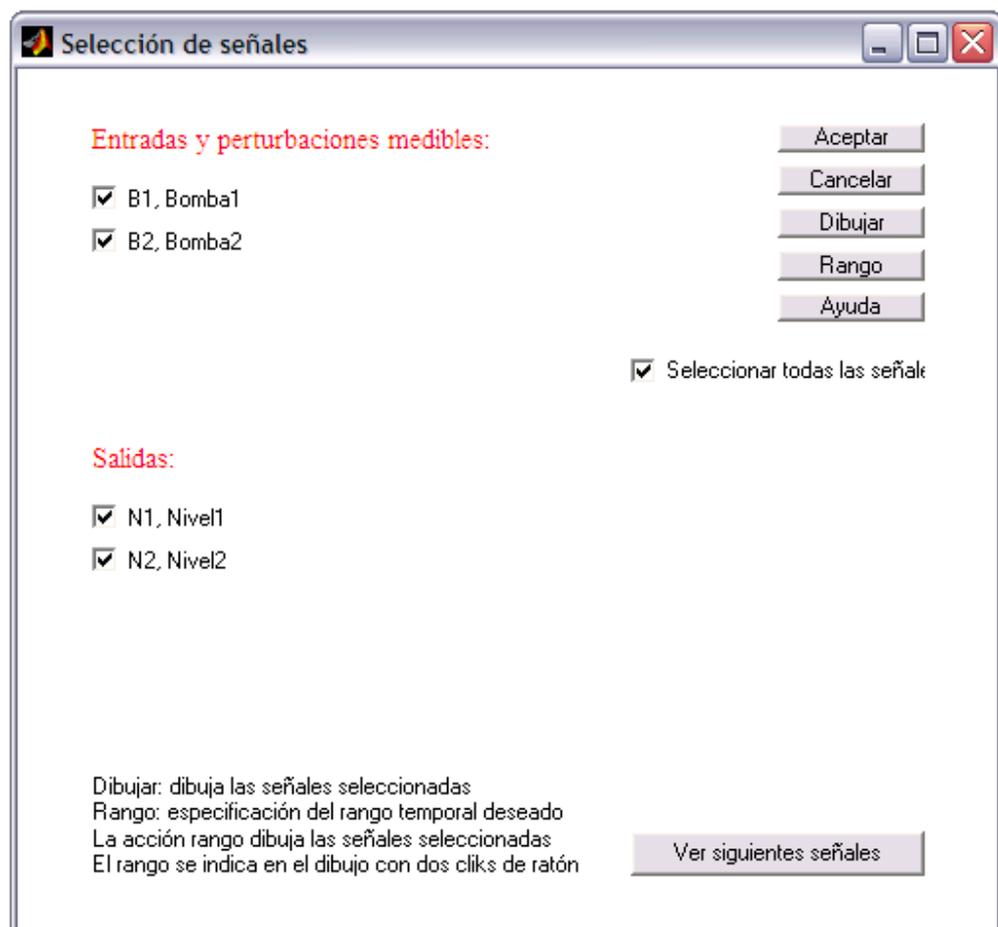


Figura 6.4. Selección de señales a lazo abierto.

Con el botón *Dibujar*, de la ventana *selección de señales*, podemos observar las entradas y salidas del experimento, figura 6.5

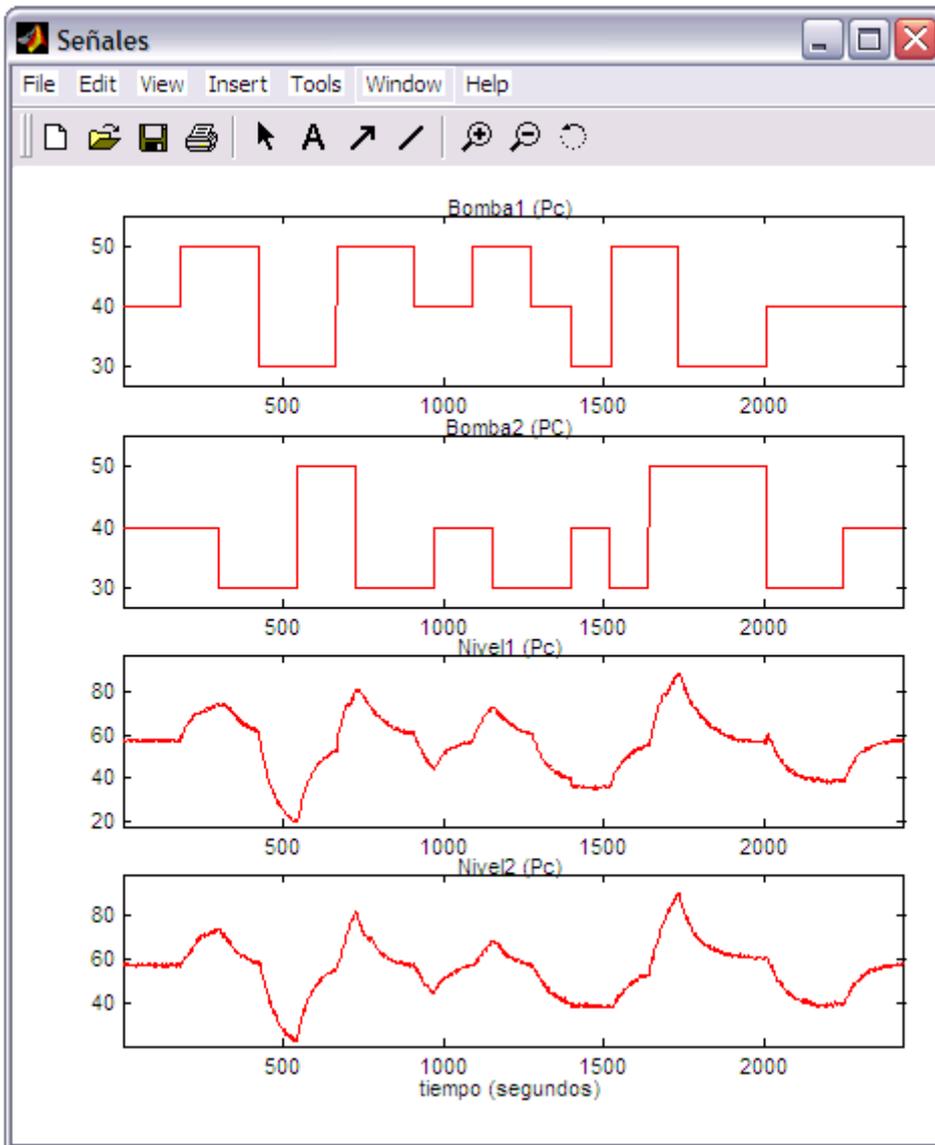


Figura 6.5. Entradas y salidas del proceso.

Con la opción *2.Tratamiento de señales*, de la ventana principal podemos realizar un procesamiento digital de los datos experimentales, en la figura 6.6 se muestran las opciones de procesamiento que nos ofrece:

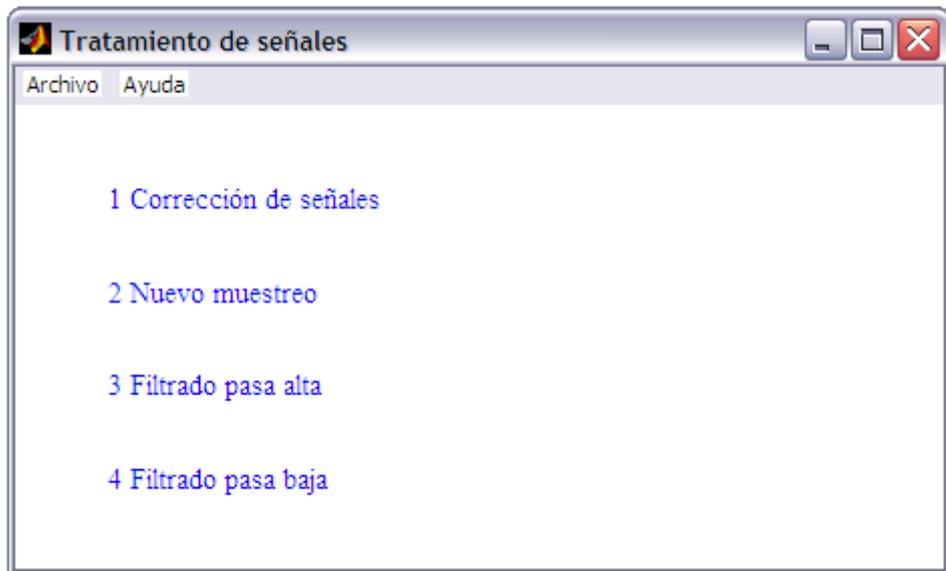


Figura 6.6. Ventana de tratamiento de señales

Luego de realizar el procesamiento digital sobre las señales de entrada y salida, se estará en condiciones de proceder con la identificación del proceso. En la figura 6.7 se observa la ventana principal del HIDENss luego de la selección de datos y el tratamiento de las señales:

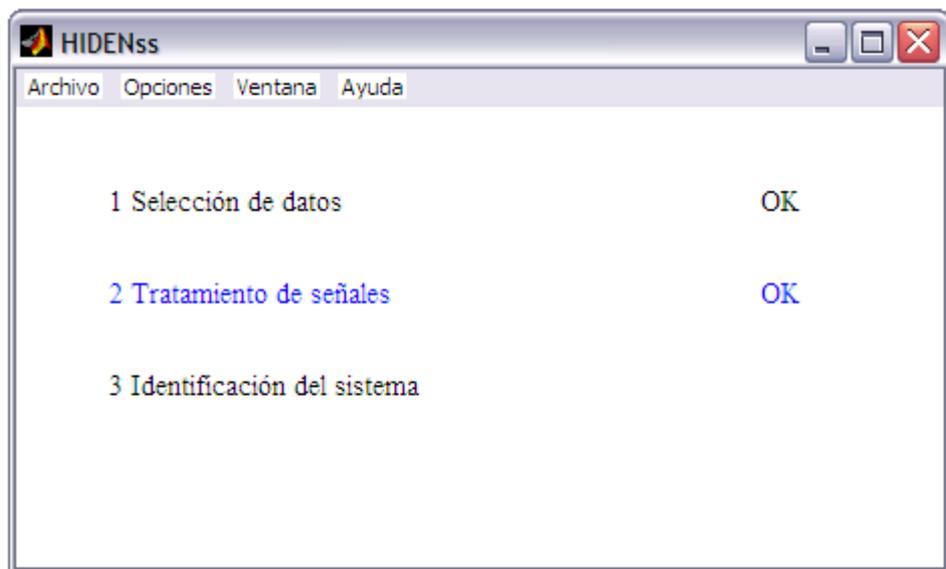


Figura 6.7. Ventana principal HIDENss

Para estimar el modelo del sistema se ingresa a la opción 3. *Identificación del sistema*, en la figura 6.8 se muestra las opciones

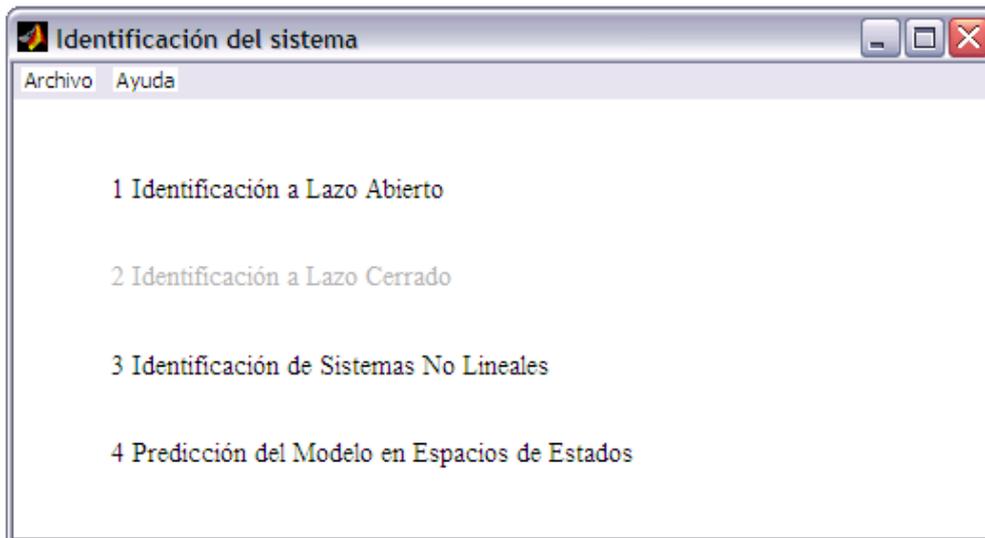


Figura 6.8. Ventana de *Identificación del sistema*

De las opciones presentadas en la ventana *Identificación del sistema*, la número 2 *Identificación a Lazo cerrado*, aparece desactivada. La opción *1 Identificación a Lazo Abierto*, permite la estimación de modelos para sistemas MIMO (Varias entradas y varias salidas) utilizando técnicas de subespacios. La ventana ofrece un conjunto de menús y botones de selección, que permiten la identificación del sistema, en la figura 6.9 de muestra la ventana principal para la identificación de sistema a lazo abierto. El menú *Configuración* permite al usuario seleccionar el coeficiente  $i$  que se utiliza para construir la matriz de Hankel, por defecto:  $i=10$ . Luego se debe seleccionar el método de identificación que se desee. Los métodos que se ofrecen son tres: Método de Realización, basado en técnicas de respuesta impulso, obtenida mediante correlación de las señales de entrada y salida; Método Moesp\_SIM, basado en el algoritmo PO\_MOESP y el método Moesp\_SID, propuesto en el presente proyecto, la descripción de cada uno de los métodos se encuentra en el capítulo 2, la selección del método deseado, es a través del menú: *Método de Identificación*, ver figura 6.10. Dentro de la ventana, en la parte inferior, se cuenta con mensajes que indican al usuario lo que debe hacer en cada instante.



Figura. 6.9 Ventana de Identificación a lazo abierto

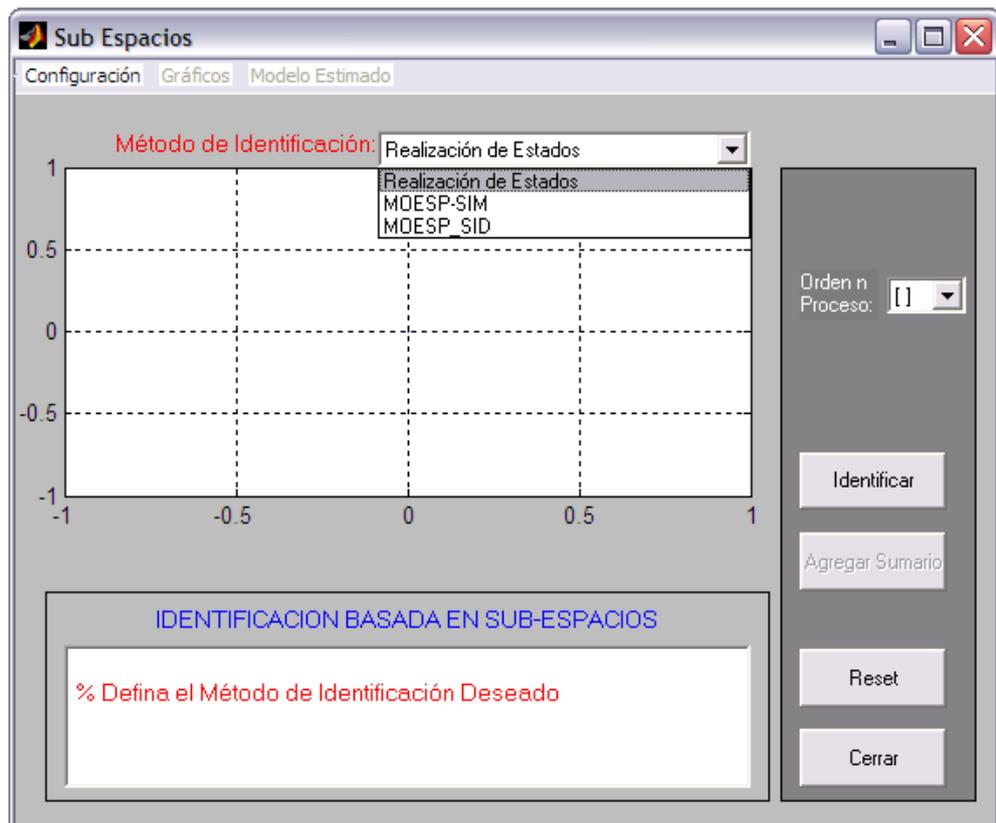


Figura 6.10 Selección del método de identificación a lazo abierto.

Seleccionado el método, se presiona en el botón *Identificar*, ver figura 6.9, de forma que el algoritmo calcule los valores singulares del sistema de las matrices propias para método escogido. El método de Realización de Estados calcula el orden de las matrices con la rutina *orden\_mark.m*, los otros métodos determinan el orden con la rutina *orden\_moesp.m*. Cada una de las rutinas construye sus propias matrices Hankel, efectúa la descomposición  $RQ$  si es necesario y hace la descomposición en valores singulares (SVD).

Una vez que el algoritmo calcula los valores singulares, los muestra en la parte superior de la ventana de forma que el usuario elija el orden del modelo, en la figura 6.11 se presentan los valores singulares para nuestro ejemplo, que han sido encontrados con la rutina *orden\_moesp.m*

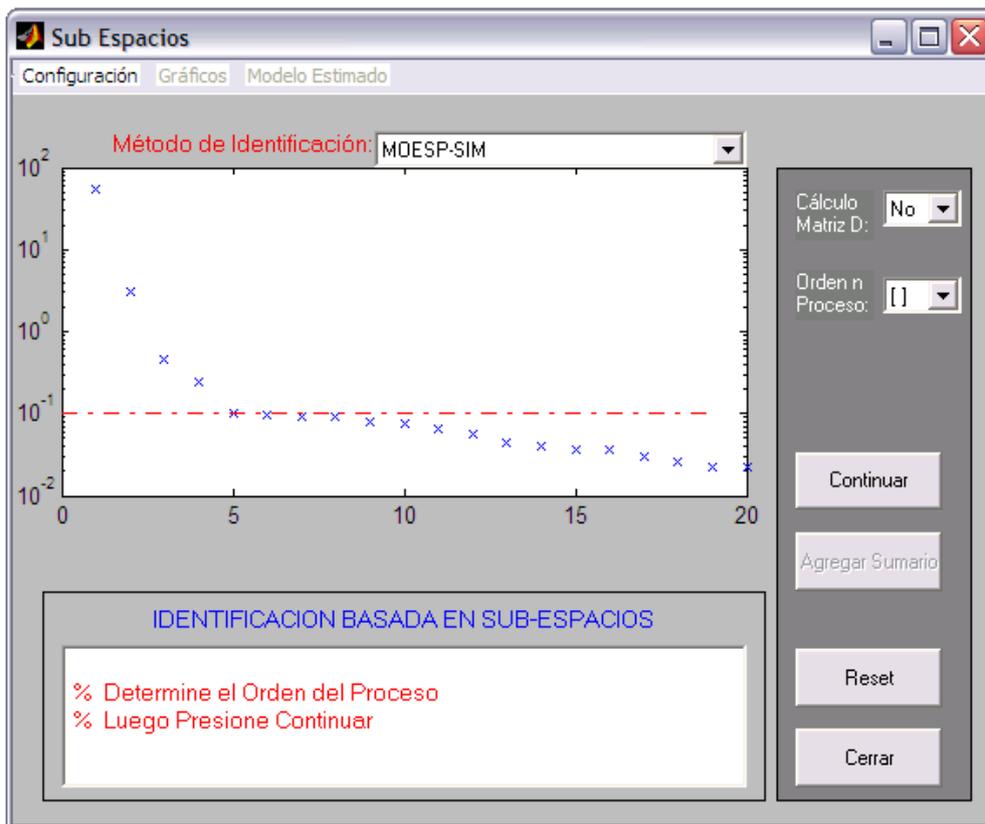


Figura 6.11 Valores Singulares

El orden del proceso es seleccionado por el usuario a través del menú *Orden n Proceso*. En la parte inferior de la ventana se tiene un mensaje que indica lo que se debe hacer, la figura 6.12, muestra la selección del orden, para el ejemplo se estima en 4.

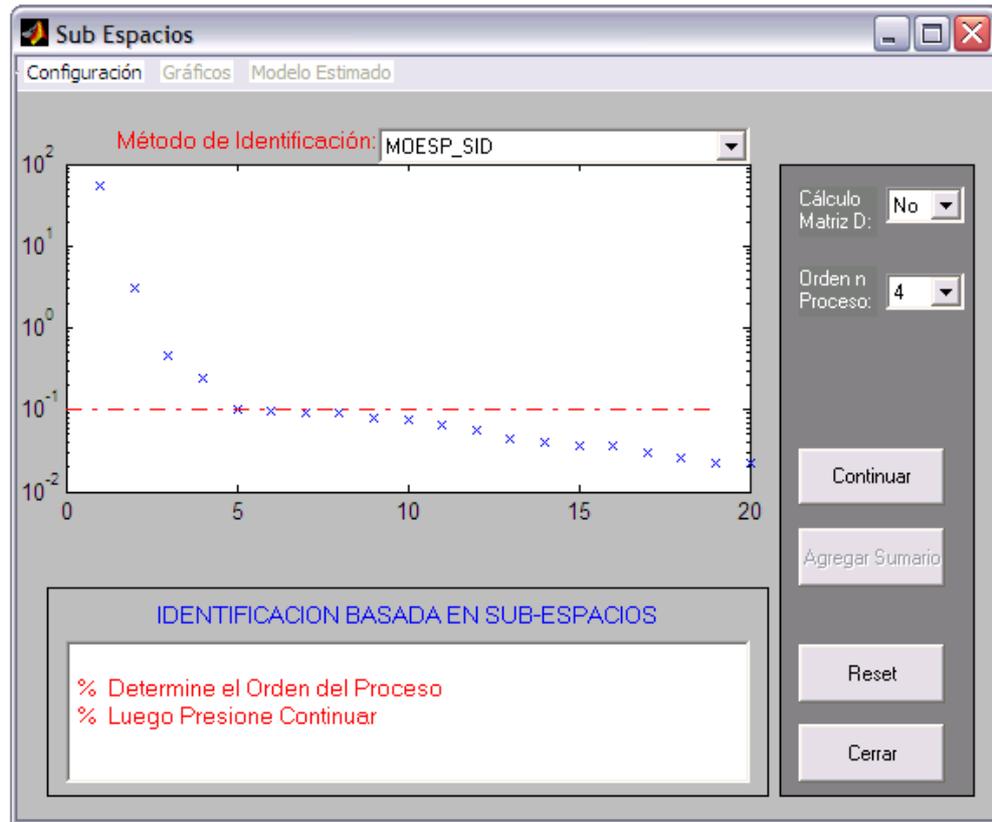


Figura 6.12. Determinación del orden 4 para el modelo.

Una vez determinado el orden, se pulsa el botón *Continuar* para seguir con la identificación. Para determinar las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  el método de Realización de Estados utiliza la rutina *mak\_ss2.m*; el método Moesp\_SIM, lo hace con la rutina *moespsim.m* y el método Moesp\_SID ejecuta la rutina *n4sidmo.m*. Estimada las matrices de estado del proceso se presentan en pantalla los resultados de las pruebas, comparando la salidas obtenidas por simulación del modelo estimado, con las correspondientes salidas del experimento, la presentación es en la parte superior de la ventana y se mostrará para cada salida de manera individual, por lo que el usuario deberá presionar la tecla *Enter* en la computadora para visualizar la siguiente salida. En la parte inferior de la ventana se mostrará un mensaje de ayuda para el usuario. En la figura 6.13 se muestra la salida 2.

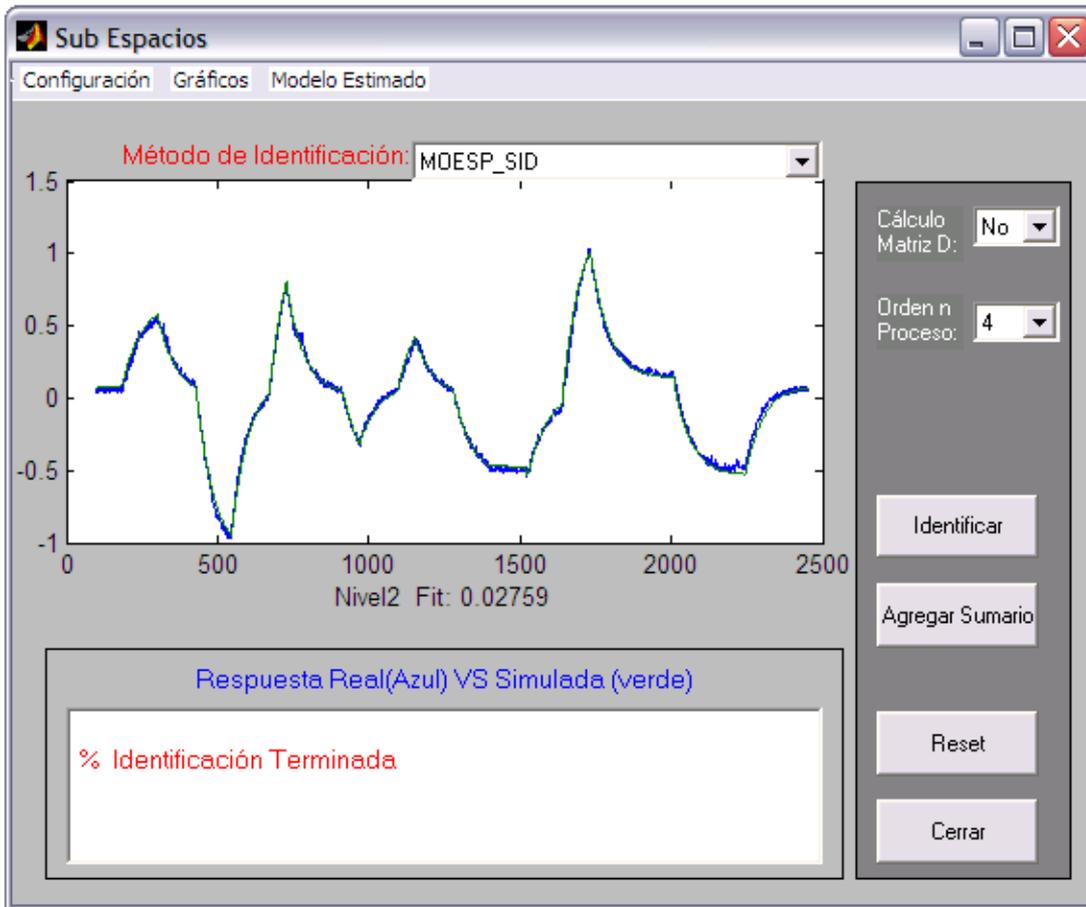


Figura 6.13. Señal correspondiente a la salida 2.

Culminada la identificación se activa en el menú superior las opciones ***Gráficos*** y ***Modelo Estimado***, que permiten evaluar los resultados obtenidos. En el menú ***Gráficos*** se presentan las opciones que se muestran en la figura en la figura 6.14.

La opción ***Respuesta Temporal*** ofrece la posibilidad de evaluar en forma independiente cada salida con cada una de las entradas, ver figura 6.15. La última de las opciones permite ver todas las entradas y salidas juntas. Por ejemplo, en la figura 6.16 se puede observar el comportamiento de la salida Nivel 1 frente a las entradas Bomba 1 y Bomba 2.

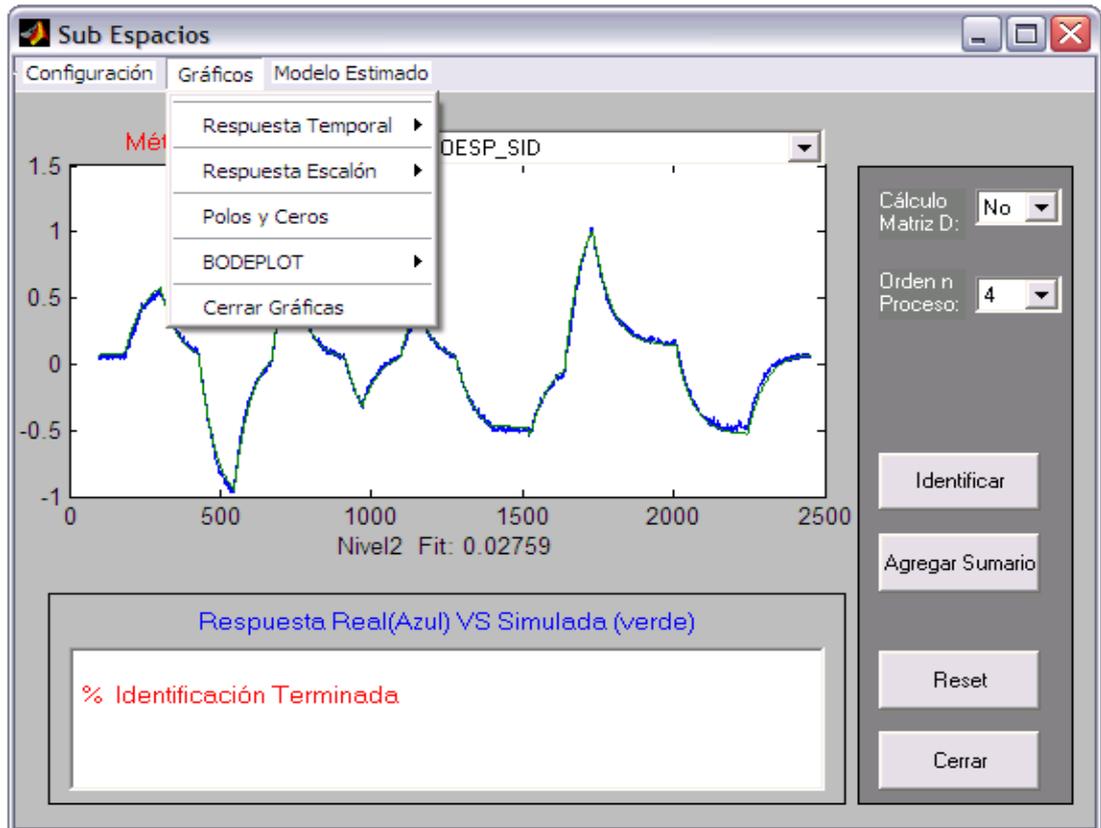


Figura 6.14. Opciones del menú *Gráficos*

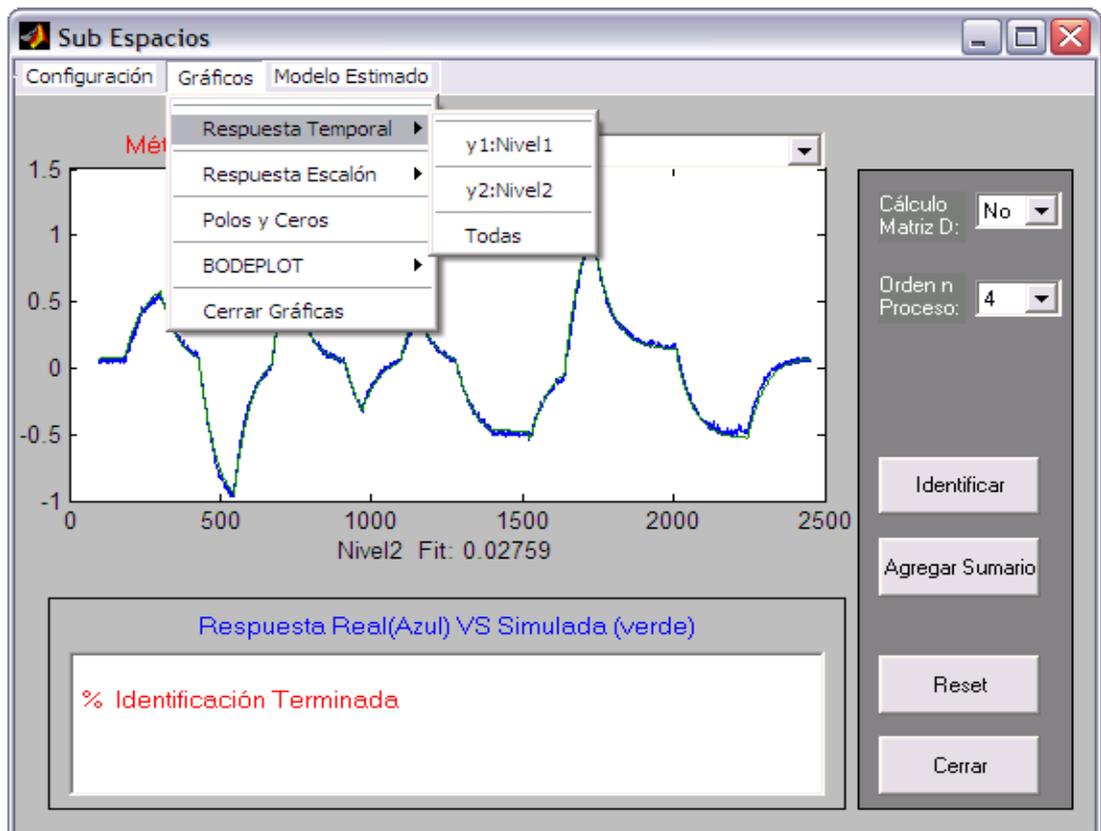


Figura 6.15 Opción del menú *Respuesta Temporal*.

El menú *Respuesta Escalón*, al igual que en el caso anterior, proporciona la posibilidad de evaluar la respuesta a una entrada escalón en forma individual para cada salida. También permite ver la respuesta en conjunto del sistema a una entrada escalón. En la figura 6.17 se presenta la respuesta del sistema a una entrada escalón.

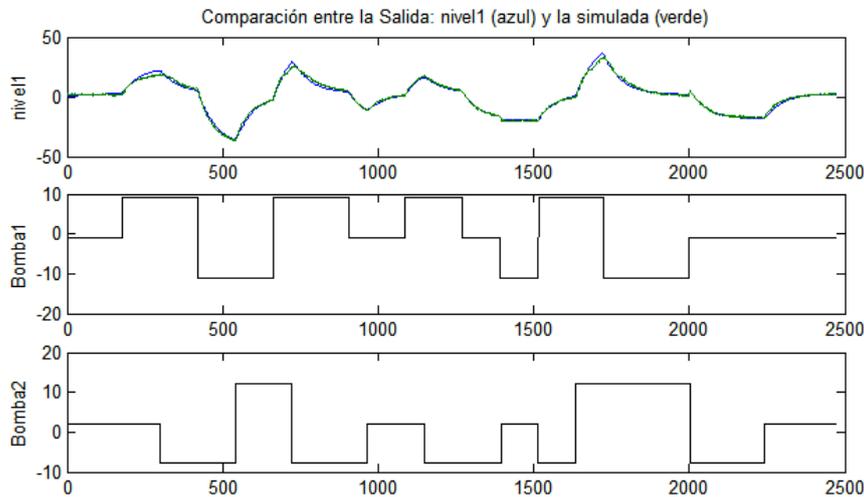


Figura 6.16. Comportamiento del Nivel 2 frente a las entradas: Bomba 1 y Bomba 2

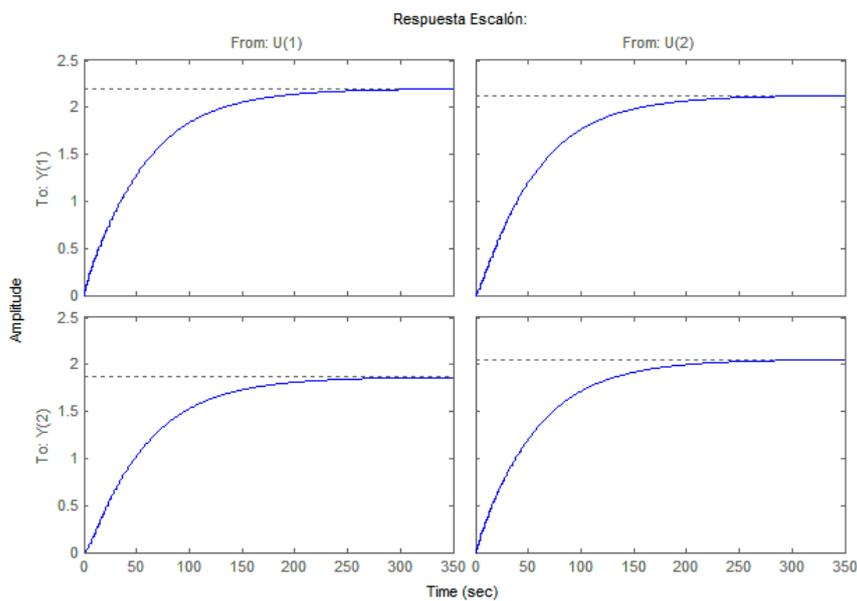


Figura 6.17. Respuesta escalón del sistema estimado.

Con la opción *Polos y Ceros* se puede visualizar la posición de los polos y de los ceros del sistema en el círculo unitario, en la figura 6.18 se presenta el diagrama de polos y ceros para el modelo de cuarto orden que se está identificando.

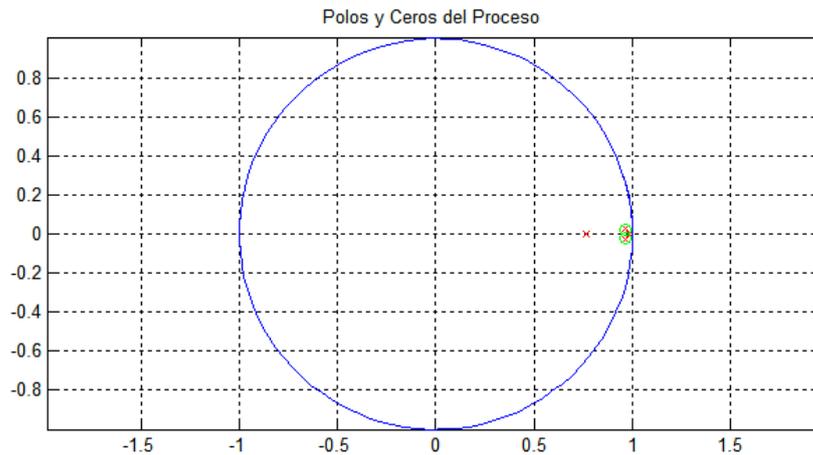


Figura. 6.18 Diagrama de Polos y Ceros del sistema

La opción **BODEPLOT** nos permite hacer un análisis en frecuencia del modelo obtenido, evaluando en forma independiente las salidas con cada una de las entradas. En la figura 6.19 se muestra un ejemplo de la respuesta en frecuencia de la salida: Nivel 1 frente a la entrada: Bomba 1.

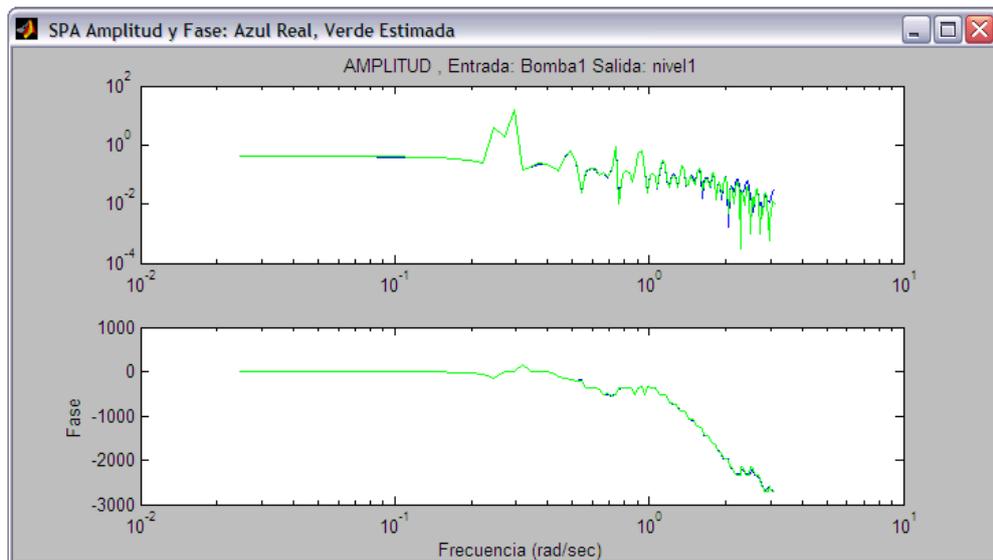
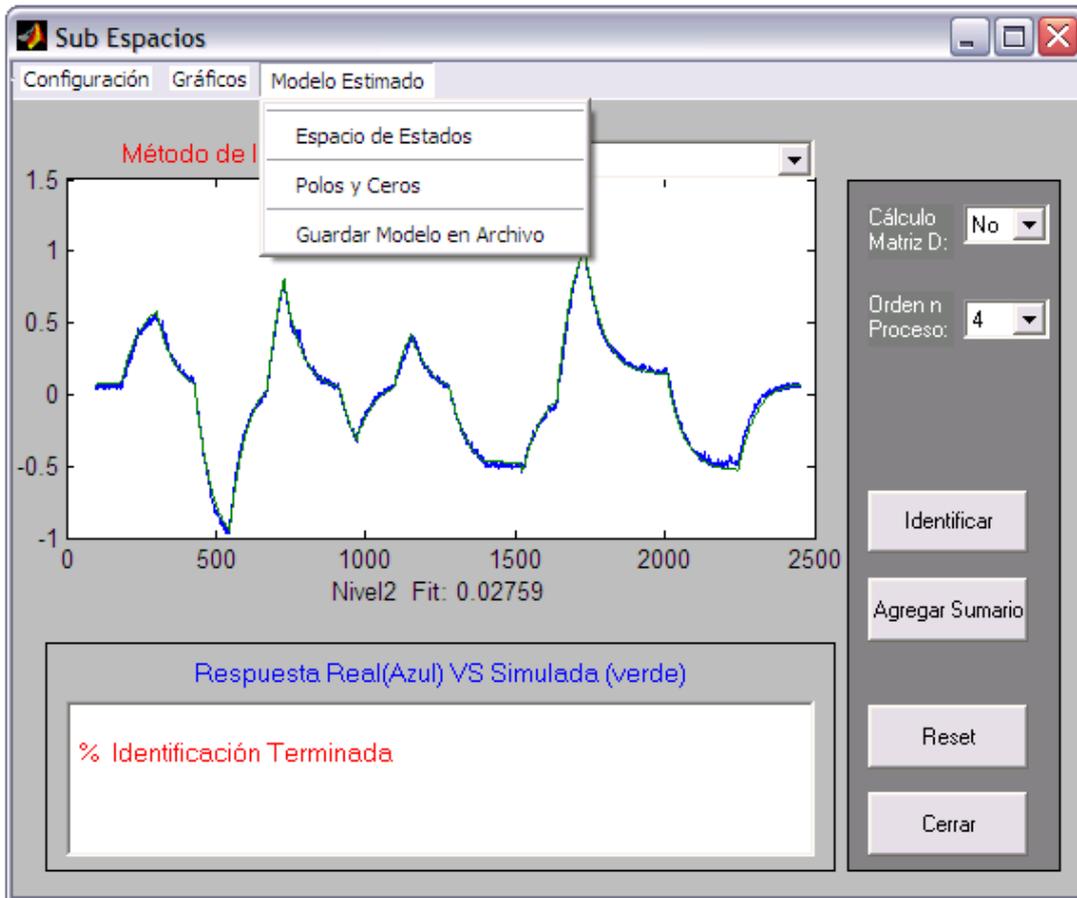


Figura 6.19. Diagrama de Bode del Nivel1 frente a la Bomba 1.

La opción **Cerrar Gráficas**, permite cerrar las ventanas abiertas por las opciones anteriores.

El menú **Modelo Estimado** tiene las opciones que se muestran en la figura 6.20.



6.20. Opciones del menú

La opción ***Espacio de Estados*** presenta en la ventana las matrices de estado A,B,C,D. Para el proceso en estudio el método de identificación Moesp\_SID a estimado el modelo mostrado en la figura 6.21. Con la opción ***Polos y Ceros***, se pueden ver los polos y ceros de manera numérica. Finalmente con la opción ***Guardar Modelo en Archivo*** se puede salvar en el disco de la computadora el modelo estimado.

**Modelo del Proceso. Orden: 4**

A:

0.98355	0.00044537	-0.024609	-0.01314
-0.00057891	0.97444	0.07949	-0.079064
0.0011787	-0.017136	0.91849	0.089777
0.0023531	-0.0024137	0.07104	0.80146

B:

-0.00053132	-0.000557
0.00064595	-0.00042723
-0.00063222	0.00039125
0.0014053	-0.00055685

C:

-62.7698	14.7712	-12.8097	3.04641
-57.2475	-14.9564	-0.418518	-10.036

D:

0	0
0	0

Figura 6.21. Matrices del modelo estimado.

En la lado izquierdo de la ventana principal, se tiene tres botones adicionales: *Agregar Sumario*, que permite salvar la información de la identificación en un documento histórico propio de HIDENss, al que se accede a través de el botón *Sumario* en la ventana *Información*; el botón *Reset*, que reinicia el proceso de identificación y el botón *Cerrar* para culminar la estimación del modelo a lazo abierto.

### 6.1.2 Identificación en espacio de estados: Lazo cerrado

Una vez seleccionado el archivo con los datos del experimento, la ventana *selección de señales* nos muestra los tipos de señales que se han obtenido y nos permite determinar aquellas que se utilizarán en la identificación. Como ejemplo para mostrar el uso del software cuando se realiza una identificación a lazo cerrado, tomaremos los datos registrados del funcionamiento del sistema de dos tanques interconectados trabajando bajo control. Las variables que se obtienen de los experimentos son presentadas en la figura 6.22.

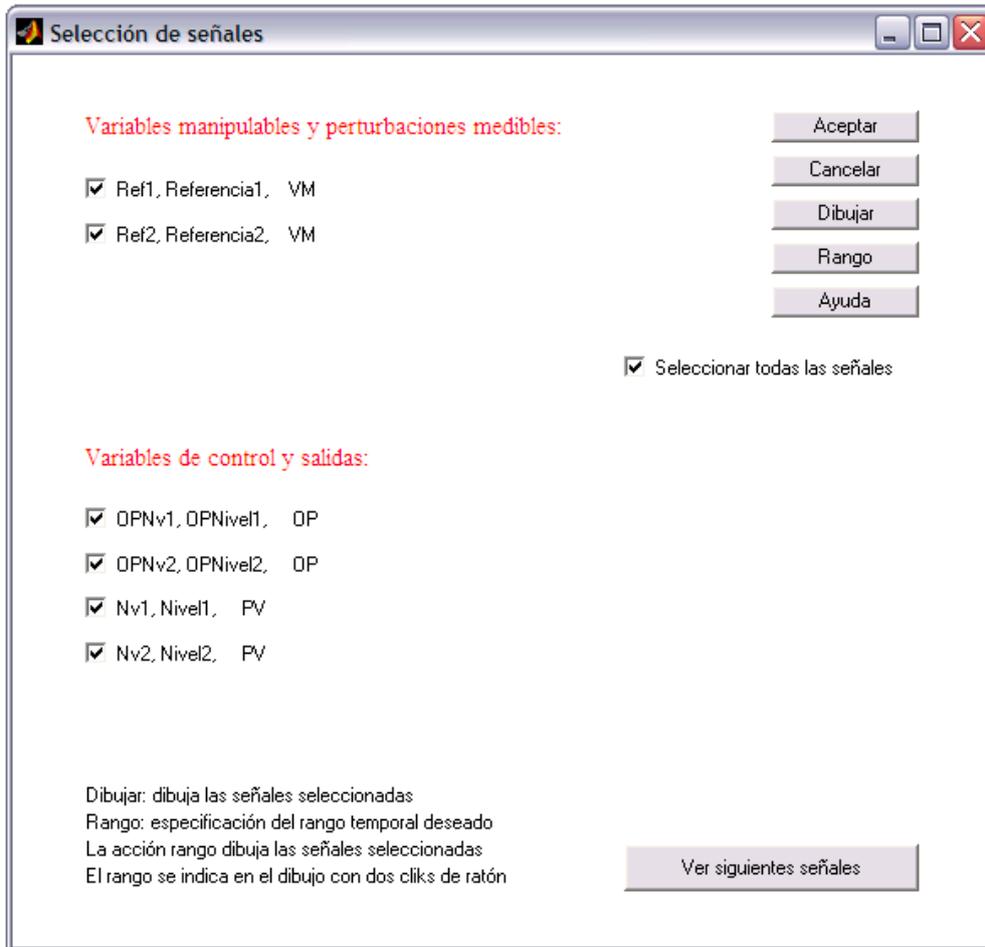
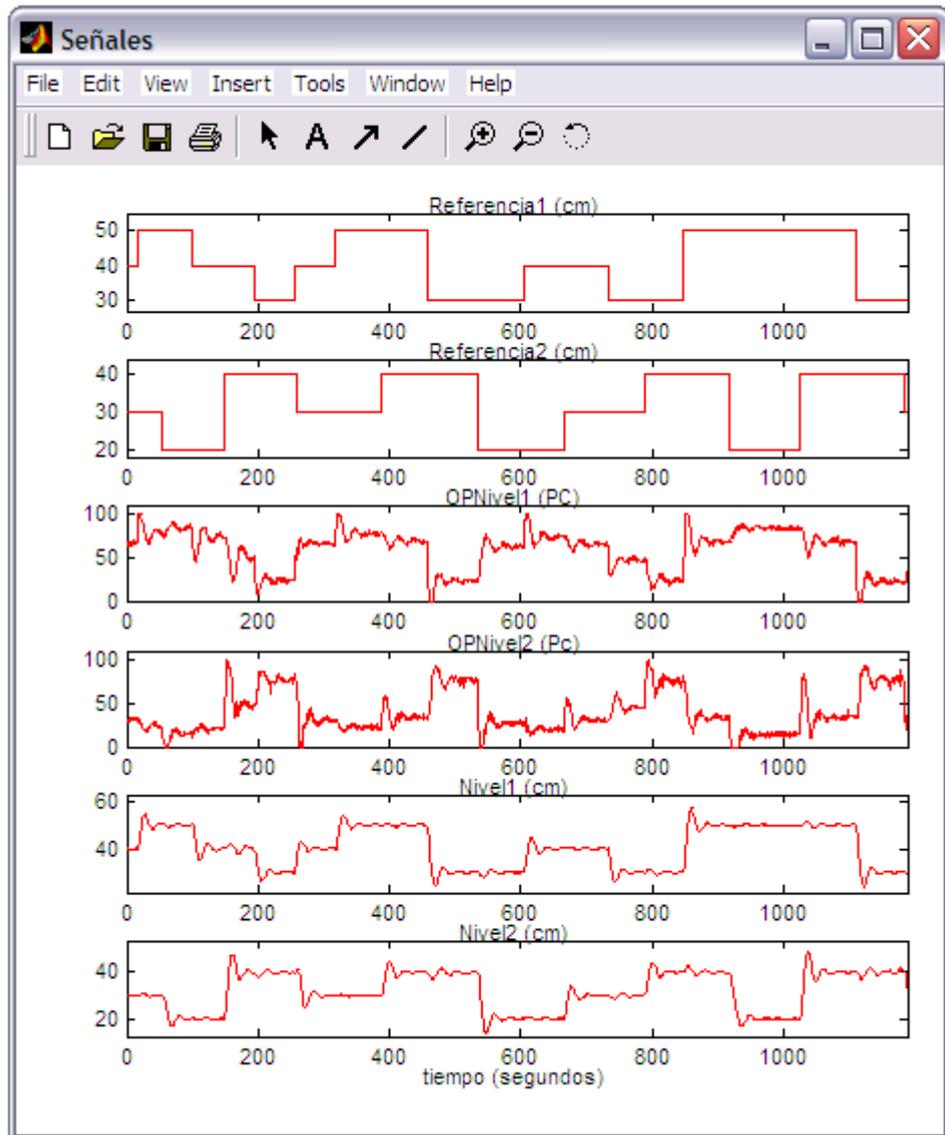


Figura 6.22. Selección de las Señales para la Identificación a Lazo Cerrado

La estructura de la ventana es similar a la presentada en la Identificación a Lazo Abierto, ofrece la misma configuración de menú y botones. La opción **Dibujar** nos permite evaluar gráficamente los datos seleccionados para la identificación. Ver figura 6.23.



### 6.23. Datos seleccionados para la Identificación a Lazo Cerrado

Luego de seleccionar las señales, se puede proceder un tratamiento en frecuencia y/o en el tiempo de las mismas a través de la opción *2.Tratamiento de señales* de la ventana principal, figura 1.

Las opciones que nos presenta la ventana *Tratamiento de señales*, se muestran en la figura 6.24. Nos permite corregir los datos obtenidos en el experimento, ya sea actuando directamente sobre valores particulares o mediante interpolación; definir un nuevo tiempo de muestreo, determinando los datos para el nuevo tiempo de muestreo; en frecuencia podemos pasar los datos a través de filtros pasa alta y pasa baja.

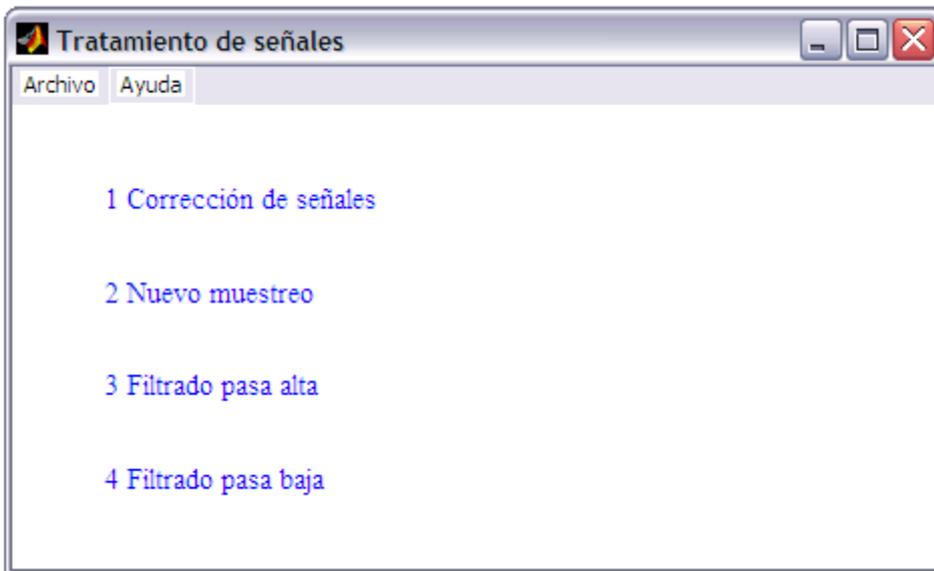
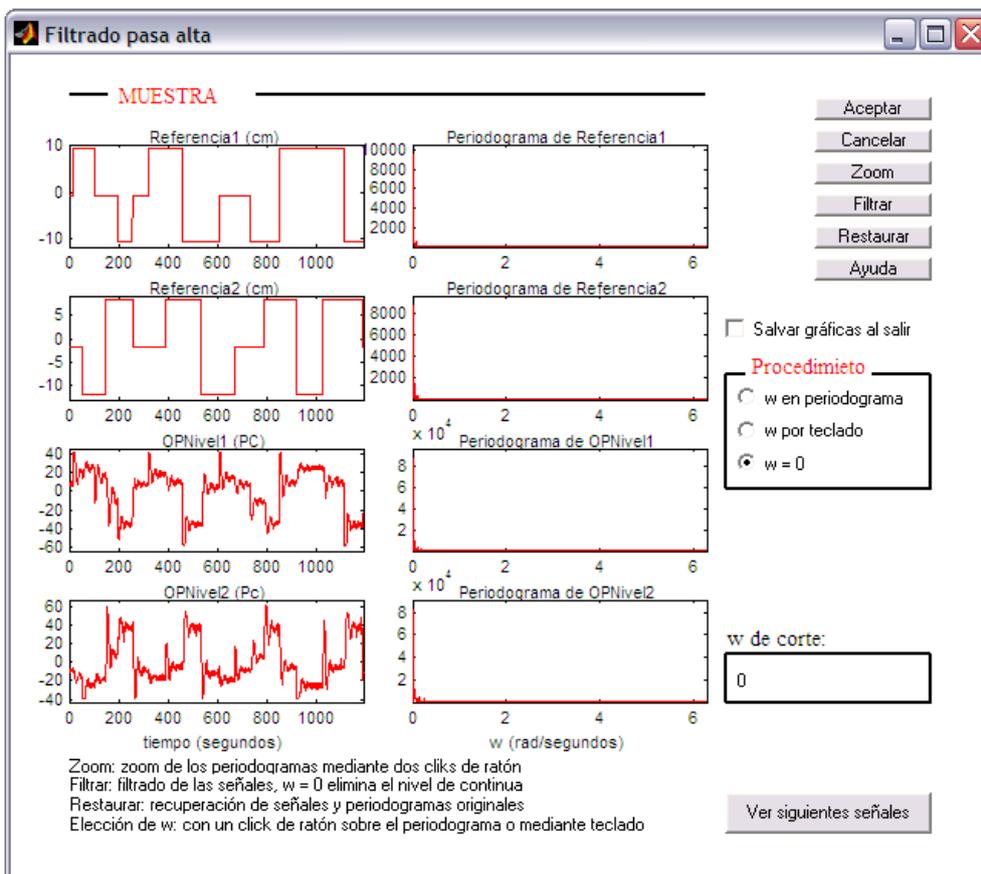


Figura 6.24. Opciones para el tratamiento de las señales.

En la figura 6.25 se presentan los datos de la figura 6.23 luego de ser filtrados a una frecuencia de 0 rad/seg, es decir después de eliminar la componente continua.



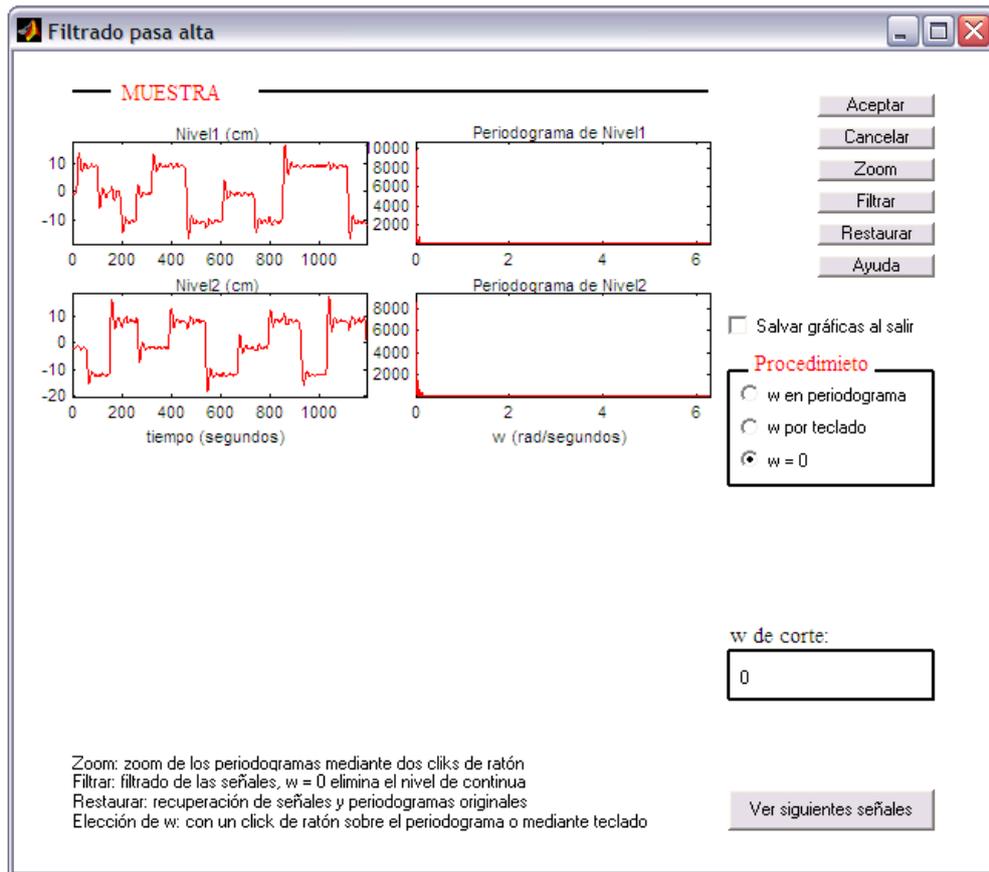


Figura 6.25. Filtrado pasa alta de las señales para la Identificación.

Luego de realizar el tratamiento de las señales, la ventana principal de la herramienta se mostrará como en la figura 6.26.

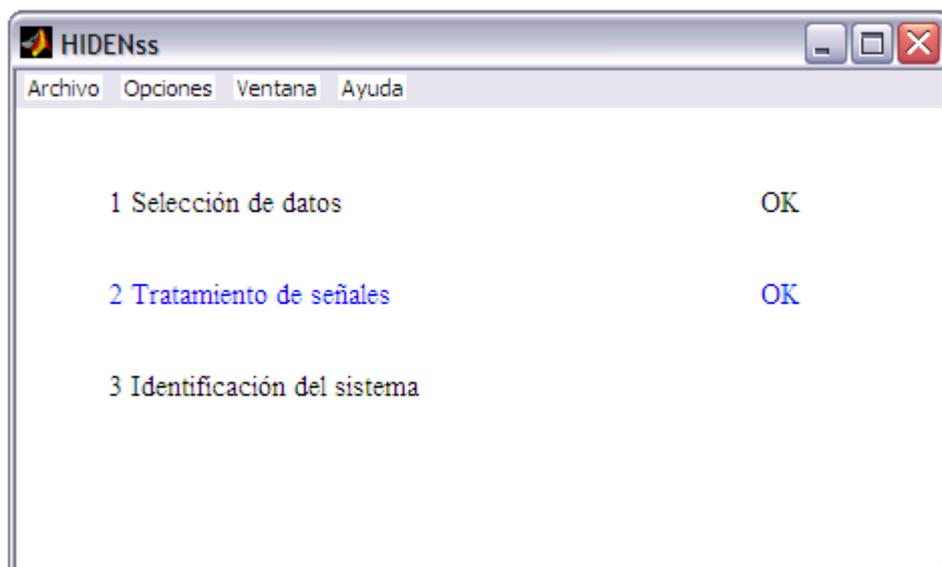


Figura 6.26. Ventana principal de HIDENss

Para proceder con la identificación a lazo cerrado seleccionamos la opción 3 de la ventana principal *3 Identificación del sistema*, figura 6.27.

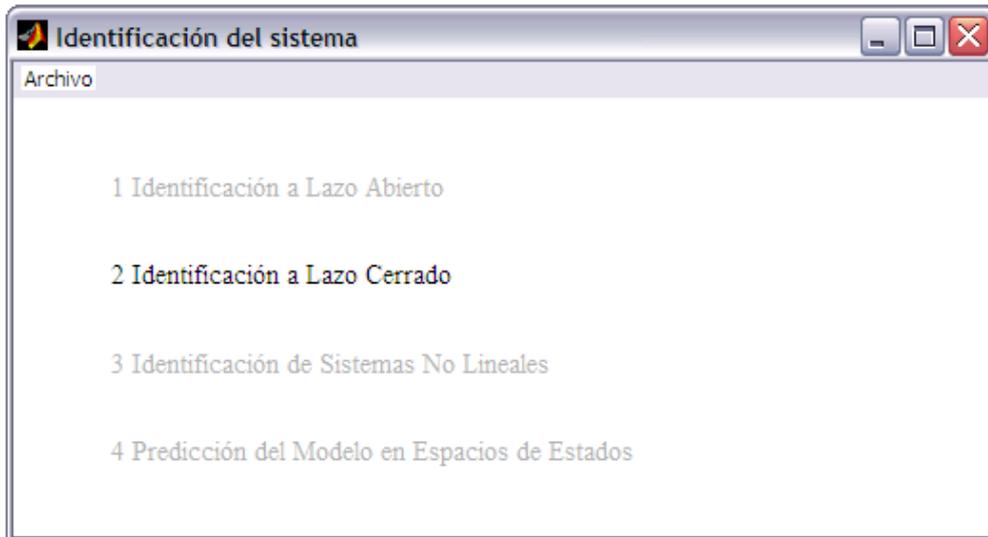


Figura 6.27. Ventana de Identificación del sistema.

Al seleccionar la opción: **2 Identificación a Lazo Cerrado** se accede a la ventana de la figura 6.28. Son dos los métodos de identificación a lazo cerrado que se ofrecen como alternativas para estimar el modelo del proceso funcionando bajo control. El método **IdCL** es descrito en la sección 3.3.3 del capítulo 3, el método **Directo** obtiene el modelo del proceso como si estuviera a lazo abierto, utilizando como entradas las señales que ingresan al proceso y como salidas las variables controladas del proceso.

Debido a que el método **IdCL** identifica primero el sistema en forma global, es necesario seleccionar el orden del sistema a lazo cerrado, ver figura 6.29. La estimación del orden se hace con la rutina **orden\_pi\_moesp.m** que incorpora la variable instrumental de las salidas pasadas que se explicó en el capítulo 3, sección 3.3.3. Luego de seleccionar el orden se presiona **Continuar**. El algoritmo estima el modelo del sistema global a lazo cerrado.

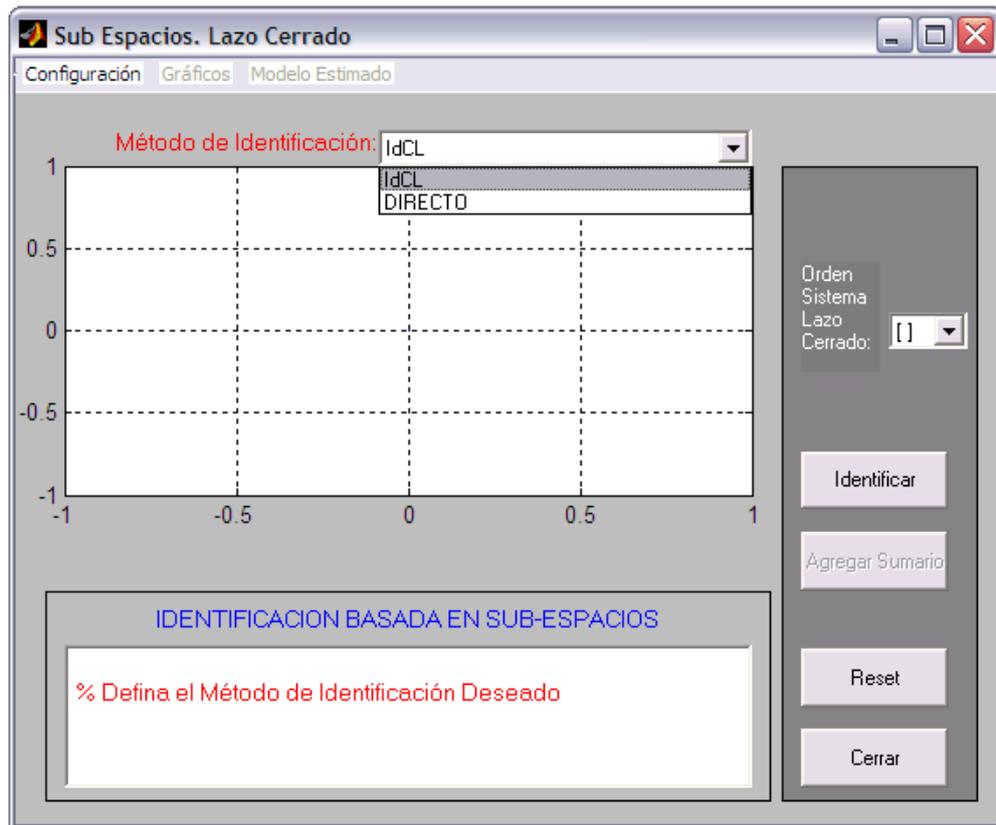


Figura 6.28. Identificación a Lazo Cerrado

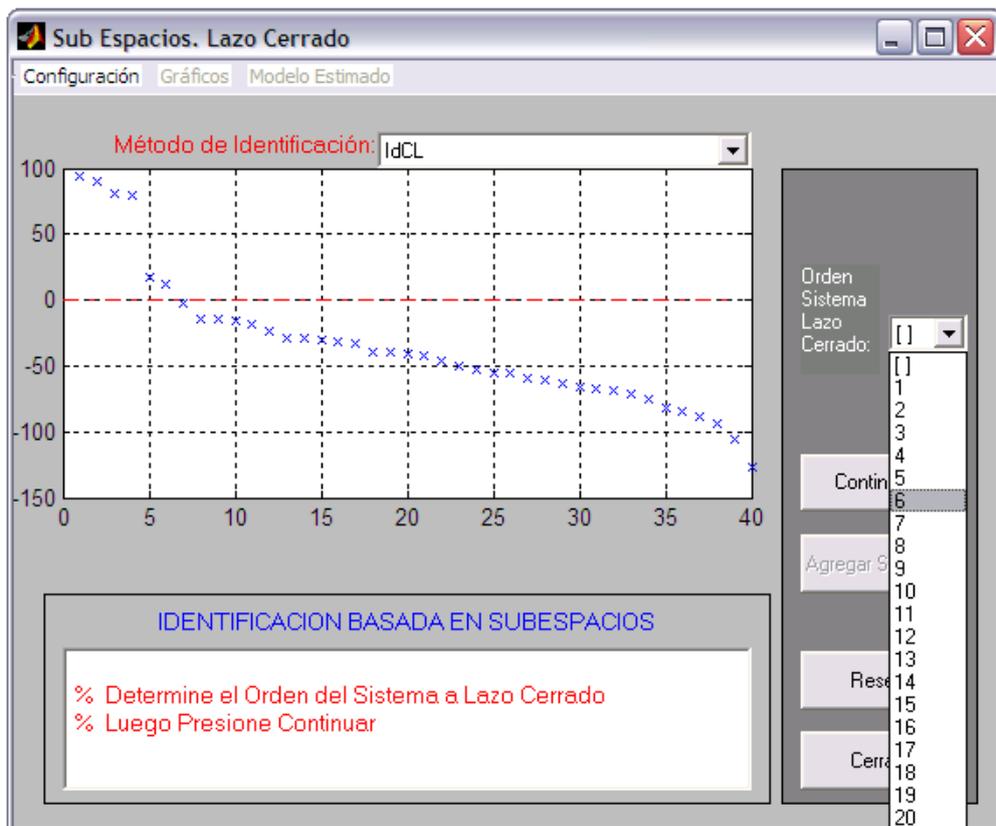


Figura 6.29 Orden del sistema a lazo cerrado

Estimado el modelo del sistema global el algoritmo calcula los valores singulares para seleccionar el orden del proceso, ver figura 6.30.

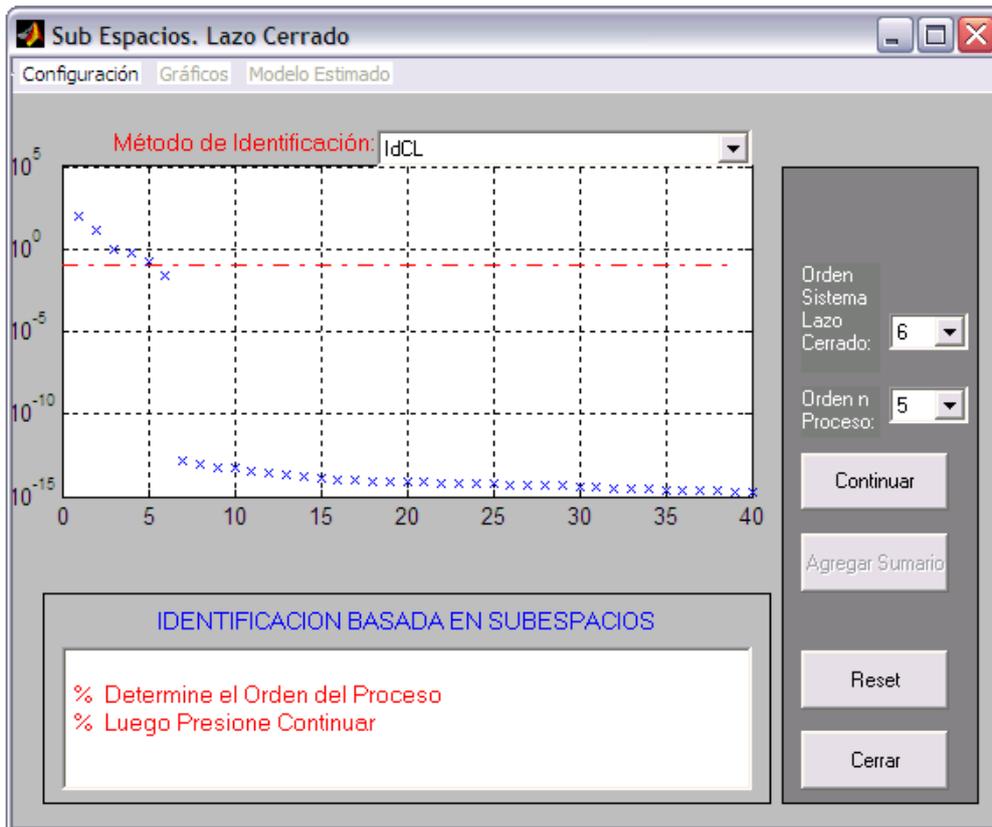


Figura 6.30. Orden del proceso

En la figura 6.31 observamos una comparación gráfica entre la respuesta real del proceso y la obtenida a partir del modelo estimado. El software permite al usuario realizar un análisis temporal y en frecuencia del modelo obtenido, la figura 6.32 nos muestra el menú referente a las graficas que podemos utilizar para evaluar el comportamiento del modelo. La respuesta temporal nos ayuda a analizar la respuesta del modelo frente a las señales de control, muy útil para sistemas multivariables, figura 6.33. La respuesta escalón nos permite evaluar el grado de interacción entre las entradas y salidas, así como los retardos que puedan existir en las salidas frente a las entradas, figura 6.34. Un análisis conjunto entre la respuesta escalón y la posición de polos y ceros en el círculo unitarios, figura 6.35, nos puede llevar a cambiar el orden del proceso de forma de mejorar el modelo estimado.

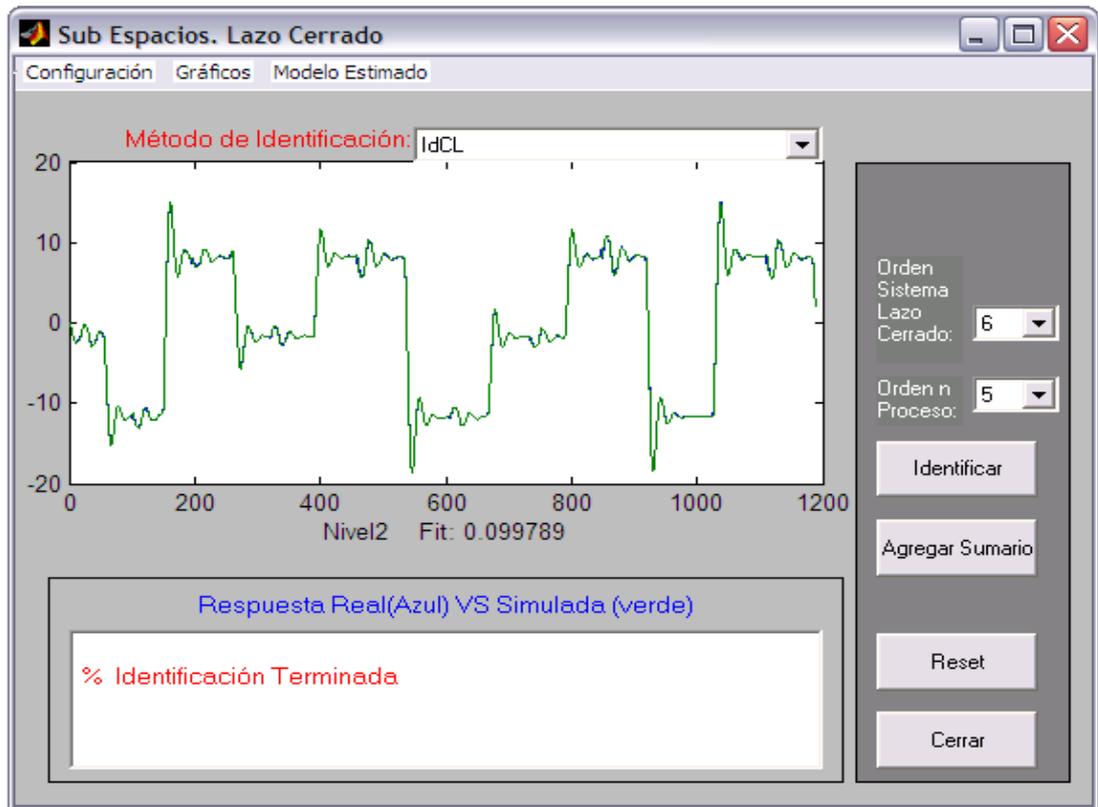


Figura. 6.31 Respuesta del modelo comparada con la salida real

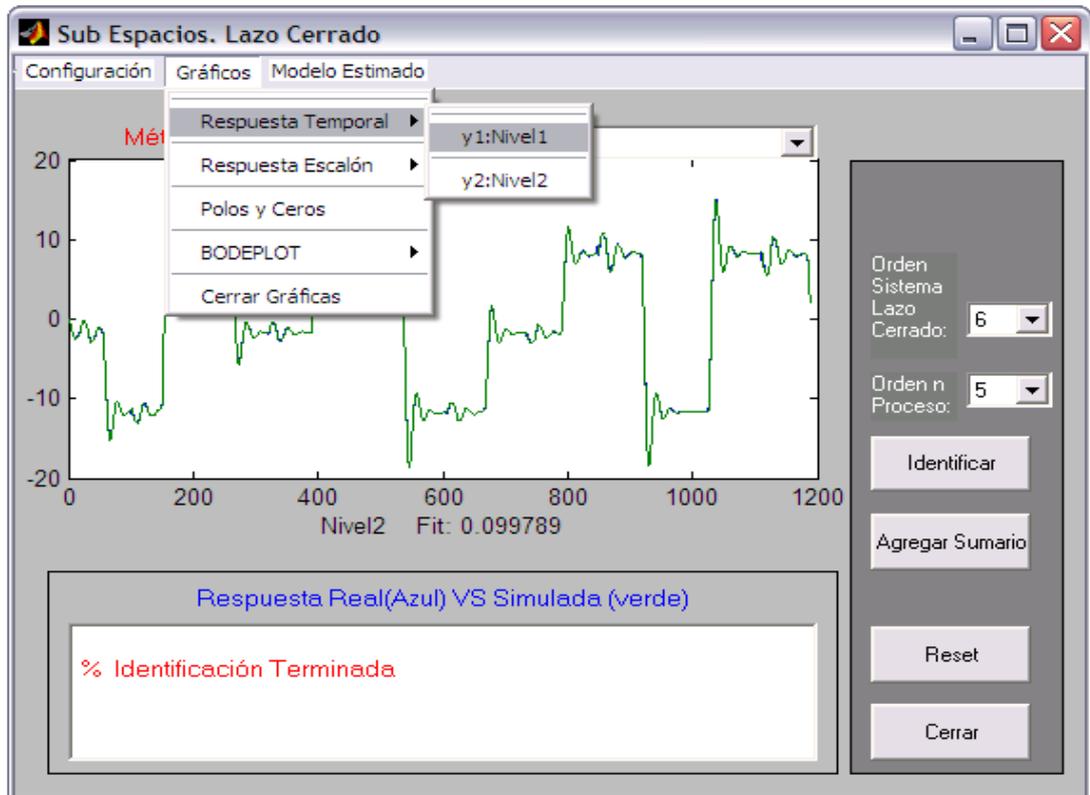


Figura 6.32. Menú de gráficos

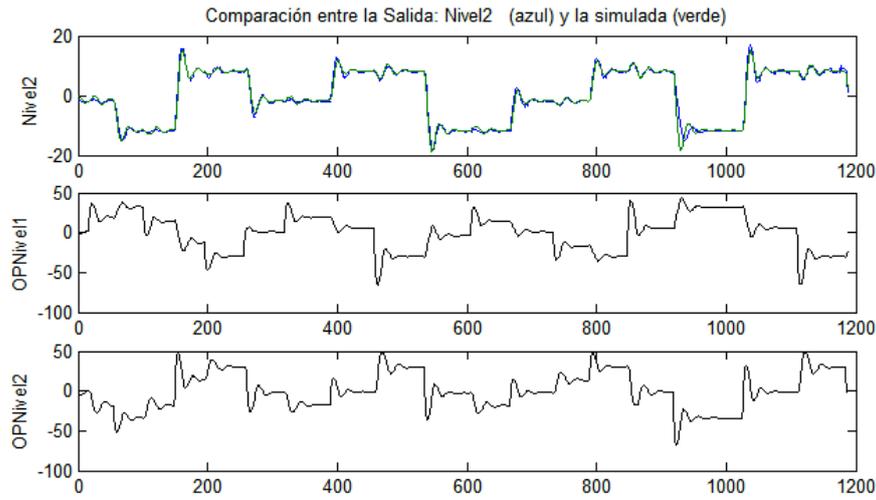


Figura. 6.33. Respuesta temporal

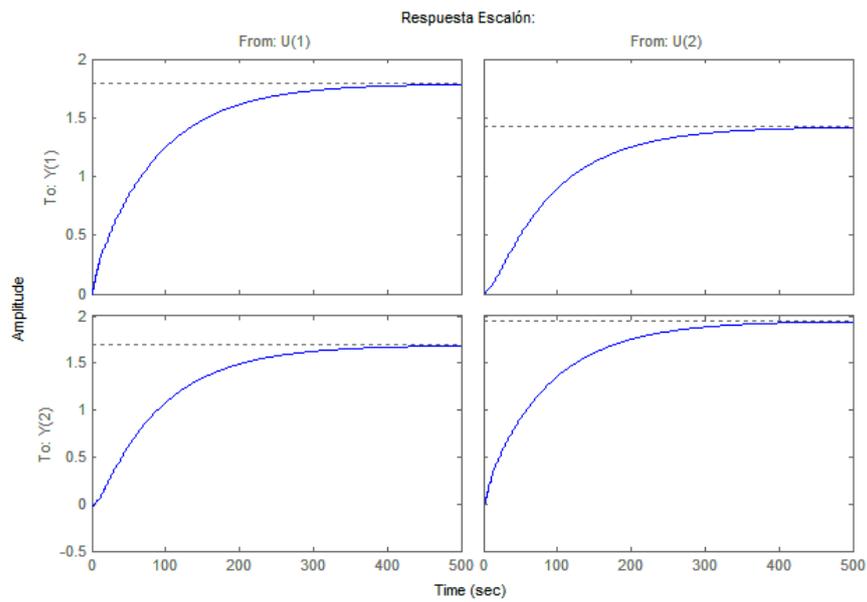


Figura 6.34. Respuesta escalón proceso de orden 5.

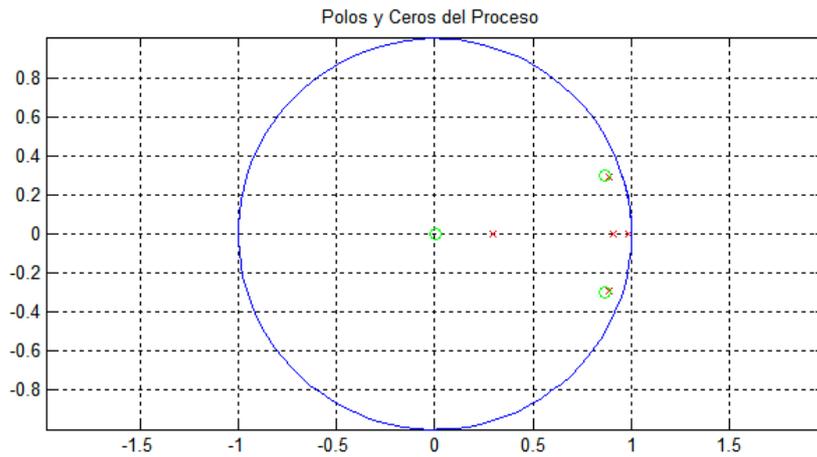


Figura 6.35 Polos y ceros para un proceso de orden 5.

De acuerdo con la figura 6.30, el orden del proceso se puede estimar en 8, de esta manera estaríamos aumentando el orden del modelo de forma de apreciar mejor los retardos, como se explicó en la aproximación de Padé. En las figuras 6.36 y 6.37 podemos observar la respuesta escalón y la posición de los polos y ceros para un orden 8.

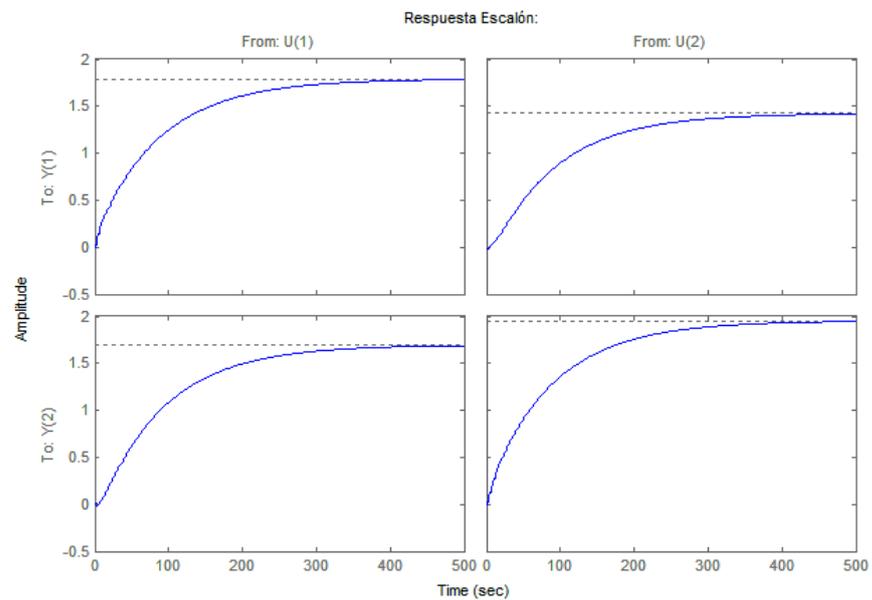


Figura 6.36. Respuesta escalón para un proceso de orden 8

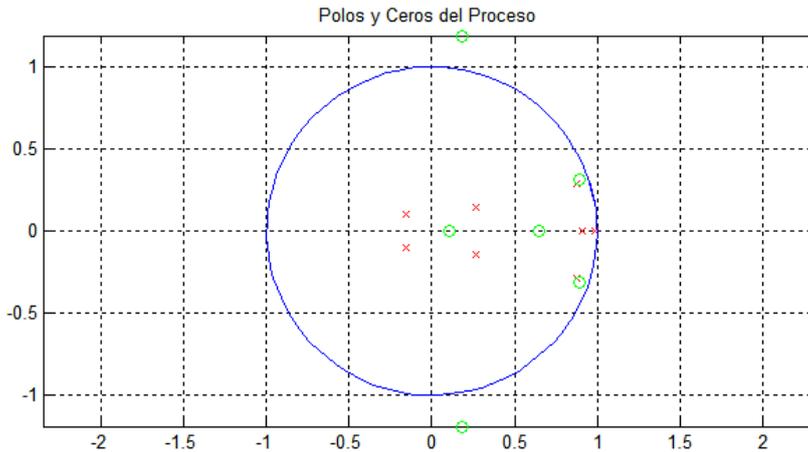
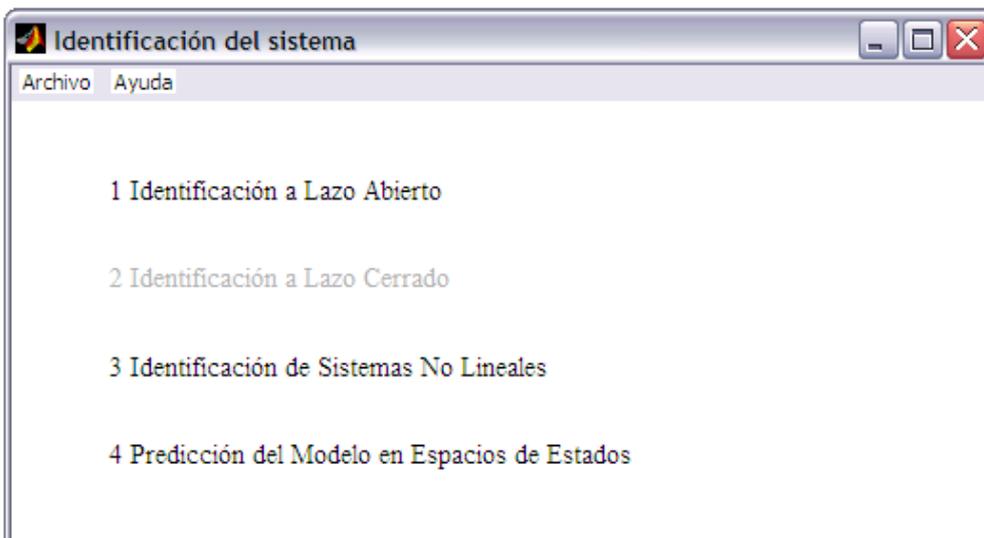


Figura 6.37. Polos y ceros para un proceso de orden 8.

Si comparamos la respuesta escalón del modelo de orden 5, figura 6.34, con su similar de orden 8, figura 6.36, podemos observar que al aumentar el orden se pueden apreciar mejor los retardos sin embargo la posición de los polos ceros nos muestra que comienzan a aparecer ceros fuera del círculo unitario.

### 6.1.3 Identificación en espacio de estados: Sistemas no lineales

La identificación de sistemas no lineales se ha implementado par estimar el modelo a lazo abierto. Se ingresa a través de la opción *4 Identificación de Sistemas No Lineales*, en la ventana *Identificación del sistema*, figura 6.8



Se ejecuta la rutina *prenl.m* que abre la ventana que se muestra en la figura 6.38. El único método que se tiene para identificar sistemas no lineales es el basado en la estructura Wiener.

El algoritmo estima primero el modelo del proceso lineal, para determinar el orden utiliza la rutina *orden\_moesp.m* y para calcular las matrices del modelo emplea la rutina *n4sidmo.m*.

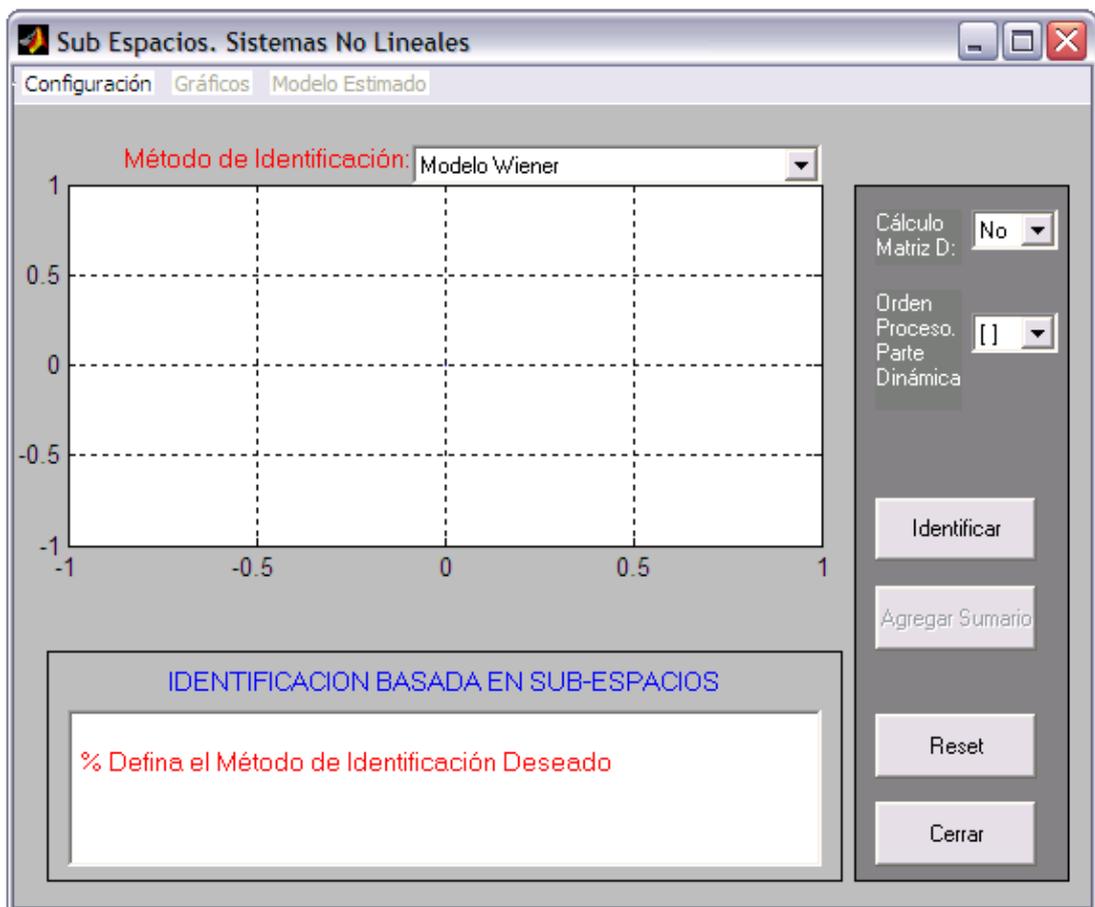


Figura 6.38. Identificación de sistemas no lineales

Luego de obtener el modelo del subsistema dinámico se estima el polinomio de Tchebyshev a partir del orden del polinomio que el usuario seleccione a través de *ajuste*, ver figura 6.39. El algoritmo determina el polinomio de Tchebyshev y sus coeficientes con la rutina *tchebest.m*.

La presentación de los datos en forma similar a la identificación a lazo abierto.

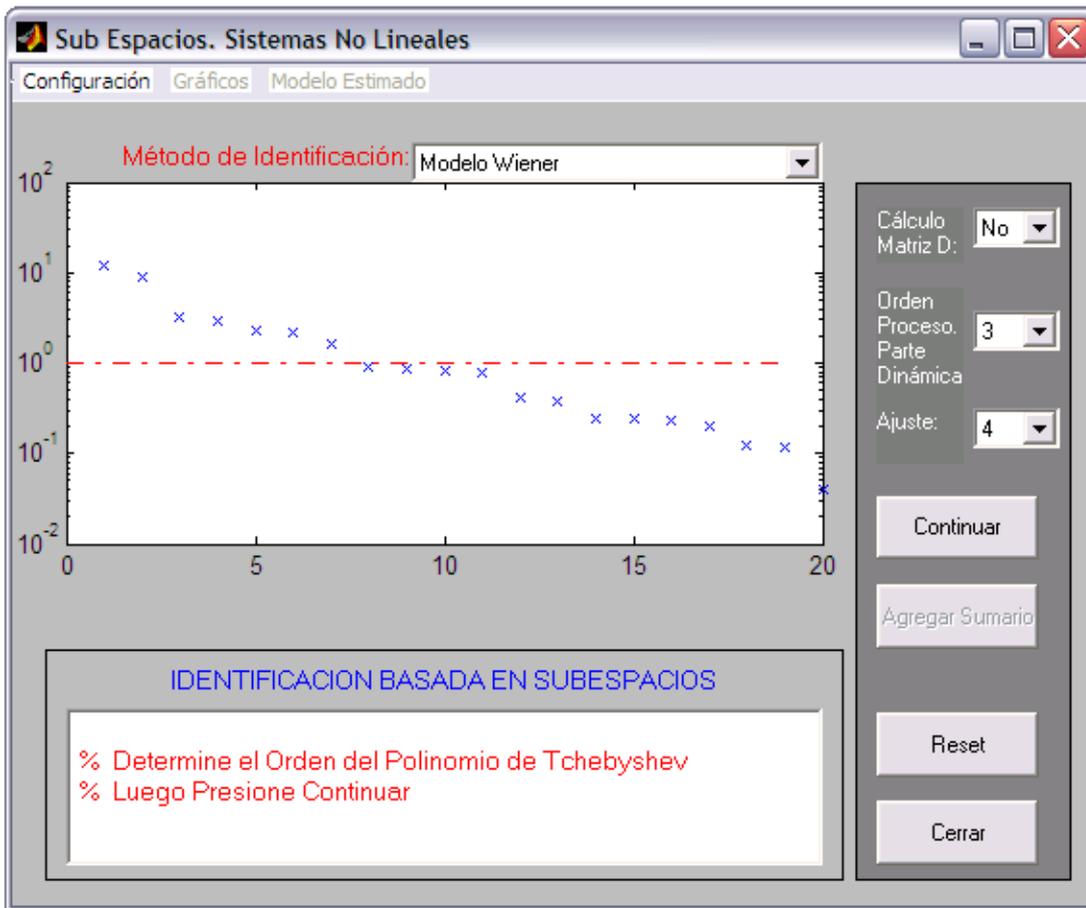


Figura 6.39. Selección del orden del bloque dinámico y el Orden del polinomio de Tchebyshev.

Para dar por terminado el proceso de estimación del modelo se presiona la opción **Cerrar**, lo que permite regresar a la ventana principal de **Hidenss**, y poder salir a la ventana de trabajo del Matlab.

# *Capítulo 7*

## *Conclusiones y futuros trabajos.*

### **7.1. Conclusiones**

Se ha realizado un estudio de los principales métodos de identificación aplicados a procesos industriales, como una alternativa a los métodos clásicos de mínimos cuadrados (LS), error de predicción (PEM), variable instrumental (IVM), se tienen los métodos de identificación basados en subespacios, utilizan herramientas matemáticas del álgebra lineal con matrices que simplifica considerablemente el cálculo matemático para estimar el modelo directamente en espacio de estados, muy recomendable para sistemas MIMO. El orden del proceso no se determina en la fase inicial de la identificación, sino que viene sugerido como parte del desarrollo del algoritmo, de forma que el usuario puede estimar el modelo de manera más acertada.

Como aporte a los métodos de identificación a lazo abierto basados en subespacios, se ha propuesto el algoritmo Moesp\_SID, que permite estimar de manera diferente, a otros métodos existentes, las matrices B y D del modelo en espacio de estados del proceso. El algoritmo ha sido probado con datos obtenidos de simulación de procesos y con datos reales de plantas; los resultados de la identificación han sido comparados con los

obtenidos con otros métodos basados en subespacios: N4SID y PO Moesp; verificándose sus prestaciones, sobre todo con datos que no tienen mucho ruido de medición.

En el presente proyecto se ha desarrollado una metodología de identificación de procesos a lazo cerrado plasmada en el algoritmo propuesto IdCL. La principal aportación que conlleva es la posibilidad de poder estimar el modelo del proceso en espacio de estados con datos a lazo cerrado, sin necesidad de conocer el controlador. El algoritmo de identificación logra desacoplar de las señales de control y salida, de los datos a lazo cerrado, las perturbaciones producidas por señales externas al proceso y por ruidos de medición, de manera de poder identificar el proceso con técnicas de identificación a lazo abierto.

Se propone un método para evaluar el modelo del proceso obtenido a lazo cerrado sin necesidad de conocer el controlador, método de validación sin controladores, figura 7.1. El modelo del sistema global es estimado como parte de la identificación del proceso y nos permite obtener la señal de control libre de perturbaciones, para excitar al modelo del proceso.

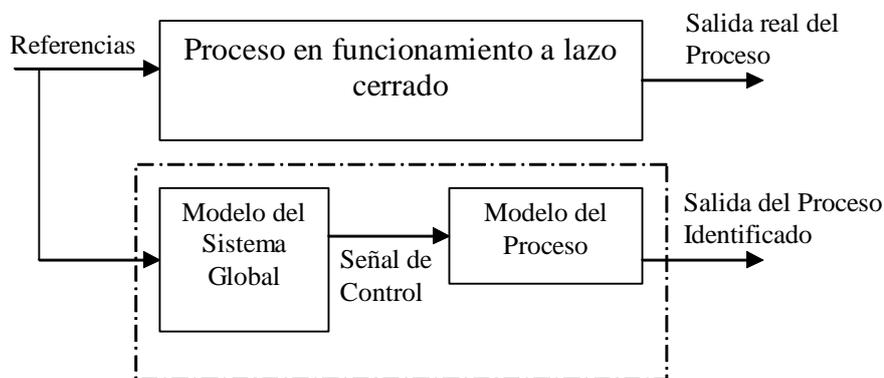


Figura 7.1 Validación del modelo sin controladores.

Se ha logrado también estimar los retardos existentes en procesos a lazo cerrado, a través de un aumento del orden del proceso de manera similar a las aproximaciones Padé. El tiempo de muestreo para la fase experimental de la identificación a lazo cerrado, debe ser escogido de manera de poder obtener la dinámica tanto de las señales

de control como las salidas del proceso, siendo las primeras más rápidas debido a que generalmente los controladores traen una acción proporcional.

Se han utilizado las técnicas de identificación a lazo abierto y a lazo cerrado basadas en subespacios, para identificar una columna industrial despropanizadora y obtener un modelo en espacio de estados del proceso. Los resultados han sido validados con especialistas del proceso.

Se ha propuesto un método de identificación para procesos no lineales utilizando técnicas de subespacios, donde el proceso se representa bajo una estructura Wiener, un bloque dinámico en espacio de estados seguido de un bloque estático representado por una aproximación polinomial de Tschebychev. Se ha aplicado el método en la obtención del modelo no lineal de un reactor continuamente agitado tipo Van der Vusse, cuya dinámica es compleja de modelar con resultados altamente satisfactorios.

Finalmente, se ha desarrollado una herramienta informática que trabaja en torno Matlab que facilita estimar los modelos de procesos. El programa HIDENss nos permite obtener modelos en espacio de estados utilizando métodos de identificación basados en subespacios. Se incluyen rutinas para la lectura de los datos obtenidos en la fase experimental, el procesamiento de los mismos y la estimación del modelo ya sea a lazo abierto o a lazo cerrado. Así mismo, nos da la posibilidad de poder evaluar el modelo obtenido a través de gráficas temporales y en frecuencia, como son las respuestas escalón, posición de polos y ceros y el diagrama de Bode.

## **7.2. Futuros trabajos**

Como resultado del trabajo realizado se estima sea conveniente continuar en el futuro con los siguientes temas de investigación:

1. A partir del algoritmo de identificación a lazo cerrado
2. Analizar la posibilidad de obtener a partir del modelo global del sistema, un modelo en espacio de estados del controlador, sobre todo de aquellos

controladores lineales y que no presenten saturaciones, pero que sin embargo, muestran cierta complejidad de ser modelados.

3. Profundizar en la metodología para modelar los retardos de un proceso en espacio de estados, sobre todo de aquellos donde los retardos sean muy diferentes entre si.
4. Estudiar un algoritmo que permita forzar que en el modelo en espacio de estados, no exista interacción entre algunas de las entradas y determinadas salidas.
5. Se debe evaluar un procedimiento para estimar de manera más directa el orden del polinomio de Tschebychev:  $\eta$ , y poder determinar la función no lineal estática en el modelo Wiener de un proceso no lineal.
6. Estudiar una metodología para obtener a partir de un sistema a lazo cerrado el modelo de un proceso no lineal.

## ***Bibliografía***

1. [A. Chiuso, G. Picci, 2003]. A. Chiuso, and G. Picci. "Asymptotic Variance of Subspace Methods by data Orthogonalization and Model Decoupling". Proc. of the IFAC Int. Symposium on System Identification (SYSID), Rotterdam, 2003
2. [A. Chiuso, G. Picci, 2004]. A. Chiuso, and G. Picci. "Numerical Conditioning and asymptotic variance of subspace estimates". Automatica, 40. p. 677-683. 2004.
3. [A. Chiuso, G. Picci, 1999]. A. Chiuso, and G. Picci, "Subspace Identification by orthogonal decomposition", Proc. 14<sup>th</sup> IFAC World Congress, Pechino, Cina, July, 1999, Volume H, pp. 241-246.
4. [A. Hagenblad, 1998]. Anna Hagenblad. "Identification of Wiener Models". Department of Electrical Engineering Linköping University. SE-581 83 Linköping, Sweden. May 15, 1998.
5. [A. M. King, 1988]. A. M. King, U.B Desai, R. E. Skelton. "A Generalized Approach to q-Markov Covariance equivalent Realizations for Discrete System". Automatica, 24, pp. 507-515. 1988.

6. [Bongers, Bosgra, 1990]. Bongers, O. H. Bosgra. Low order robust  $H_\infty$  controller synthesis. Proc. 29<sup>th</sup> IEEE conf. Decision and Control, Hawaii, pp 194-199. 1990.
7. [H. Chen, A. Kremling, 1995]. H. Chen, A. Kremling and F. Allgöwer. Nonlinear predictive control of a benchmark CSTR. Proc. of ECC95. Rome, Italy, 1995, pp. 3247-3252. 1995
8. [J. Wang, S. J. Wing, 2002]. J. Wang and S. Joe Quin. "A new subspace identification approach based on principle component analysis. J. Process Control, 12, pp.841-855, 2002.
9. [Kailath, 1980]. Thomas Kailath. "Linear System". Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1980.
10. [Ljung, 1998]. Lennard Ljung: System Identification: Theory for the User, Prentice-Hall, 1998.
11. [M. Jansson, 1996]. Magnus Jansson, Bo Wahlberg. "On consistency of subspace system identification methods". Revised version of IFAC-96 paper. San Francisco, California, May 7, 1996.
12. [M. Verhagen, 1993]. Michel Verhagen "Subspace Model Identification. Part III. Analysis of the ordinary output-error state-space model identification algorithm". Int. J. Control, vol 58, No. 3, 556-586, 1993.
13. [M. Verhagen, 1994]. Michel Verhagen "Identification of the deterministic part of MIMO space state models given in innovations form from input-output data". Automatica. Vol 30, No 1, pp. 61-74. 1994.
14. [M. Verhaegen, P. Dewilde, 1992]. Michel Verhaegen and Patrick Dewilde "Subspace model identification, part 1: The output-error state-space model identification class of algorithms" International Journal of Control, Vol. 56, pp. 1187-1210, 1992.
15. [M. Verhaegen, P. Dewilde, 1993]. Michel Verhaegen and Patrick Dewilde "Subspace model identification, part 3: Analysis of the ordinary output-error state-space model identification algorithm," International Journal of Control, Vol. 58, pp. 555 - 586, 1993.
16. [M. Verhaegen, A. Varga, 1994]. Michel Verhaegen and Andras Varga, "Some experience with the moesp class of subspace model identification methods in identifying the bo105 helicopter". Technical Report TR R165-94, DLR Oberpfaffenhofen, 1994.

17. [M. Viberg, 1995]. Mats Viberg. "Subspace-based Methods for the identification of linear Time-invariant systems". *Automatica*, Vol 31, No 12, pp. 1835-1851. 1995.
18. [M. Viberg, 1997]. Mats Viberg. "Analysis of state space system identification methods based on instrumental variables and subspace fitting". *Automatica*, Vol. 33, No. 9, pp. 1603-1616, 1997
19. [M. Viberg, 1998]. Mats Viberg. "State Space Signal Modeling and High-Resolution Spatial and Temporal Frequency Estimation". Department of Signal and Systems. Chalmers University of Technology. January 30, 1998.
20. [N. L. Chik, 1998]. Nelson Loong Chik Chui. "Subspace methods and informative experiments for system identification". Ph.D thesis. Pembroke College Cambridge. 1997.
21. [R. Hakvoort, 1990]. Hakvoort R, Approximate identification in the controller design problem. Master Thesis Delft University of Technology, Netherlands, Measurement and Control Theory Section, Mech., A-538, 1990.
22. [R. Isermann, 1981]. Rolf Isermann "Digital control systems". Springer, Berlin. 1981
23. [Rivas, 1999] Raúl Rivas Pérez. "Apuntes del curso de identificación de sistemas". Master en Sistemas de Control Industrial. Universidad de Valladolid. 1998-2000.
24. [S. J. Qin, W. Lin y L. Ljung, 2004]. S. Joe Qin, Weilu Lin, Lennart Ljung. "A Novel subspace identification approach with parsimonious parametrization". Technical report number 2004-06. Texas-Winsconsin Modeling and Control Consortium. 2004
25. [Söderström, Stoica, 1989]. T.Soderstrom and P. Stoica: *System Identification*, Prentice-Hall, 1989.
26. [Strang, 1988] Strang, G. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley, Wellesley-Cambridge Press, 1993.
27. [T. Katayama, G. Picci, 1998]. T. Katayama, S. Omori and G. Picci. "Comparison of some subspace identification methods". Proceedings of the 1998 Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, paper n. TA08-6 p. 1850-1852, 1998

28. [T. Gustafsson, 1997]. Tony Gustafsson. "System identification using subspace-based instrumental variable methods". Proc. of the 11<sup>th</sup> IFAC Symposium on System Identification. SYSID 97, July 8-11, Kitakyushu, Japan, vol. 3, pp. 1119-1124, 1997.
29. [T. Gustafsson, 2002]. Tony Gustafsson. "Subspace-based system identification: weighting and pre-filtering of instruments". Automatica, 38. pp 433-443. 2002.
30. [T. McKelvey, 1995]. Tomas McKelvey. "Identification of state-space models from time and frequency data". PhD thesis. Linköping University. 1995
31. [T. McKelvey, 1997]. Tomas McKelvey. "Identification with Instrumental Variable based subspace Algorithm". Proceeding of DETC'97. ASME Design Engineering Technical Conferences. Sacramento, California. September 14-17 1997.
32. [U. Forsell, 1999]. Urban Forsell, Closed-loop Identification: Methods, Theory, and Applications, Tesis doctoral N° 566, Departament of Electrical Engineering Linköping University, Sweden.
33. [U. Forsell, L. Ljung]. Urban Forsell and Lennard Ljung, "Closed-loop identification revisited". Automatica , Vol 35, pp.215-241. 1999.
34. [Van Overschee y De Moor, 1994], Peter Van Overschee, Bart de Moor "N4SID: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic system". Automatica, 30, 75-93.
35. [V. Overschee y B. De Moor, 1995]. P. Van Overschee and B. De Moor. "A unifying theorem for three subspace system identification". Automatica 31, No 12, pp. 1853-1864. 1995
36. [Van Overschee y De Moor, 1997], Peter Van Overschee, Bart de Moor y Wouter Favoreel, "Numerical Algorithms for subspace state space system identification (N4SID)", ASME Design Engineering Technical Conferences. Sacramento, California. Setiembre 14-17, 1997.
37. [Van der Vausse, 1964]. J. G. Van de Vausse. "Plug-Flow type reactor versus tank reactor". Chemical Engineering Science, Vol. 19, pp. 964. 1964.
38. [W. E. Larimore, 1983]. Wallace E. Larimore. "System identification, reduced order filtering and modeling via canonical variate analysis". Proc. of the American Control Conference, San Francisco, USA, 1983

39. [W. E. Larimore, 1990]. Wallace E. Larimore. "Canonical variate analysis in identification, filtering and adaptive control". Proc. of the 29th Conference on Decision and Control, CDC 90, Hawaii, US, pp. 596--604, 1990
40. [W. Favoreel, 1998], Wouter Favoreel, Bart De Moor, Peter Van Overschee. "Subspace state space identification for industrial process". Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 1998.
41. [Y. Zhu, 1999] Yucai Zhu, "Parametric Wiener Model Identification for Control". 14<sup>th</sup> World Congress of IFAC, 1999.