

## A. EL GAUSIANO Y SUS DERIVADAS

---

Entre las distribuciones continuas de probabilidad más conocidas se encuentran la distribución *normal o gaussiana*, uniforme, beta, gama, Weibull, exponencial negativa, etc. La distribución normal o gaussiana es indudablemente la más importante y la de mayor uso de todas las distribuciones continuas de probabilidad. En la ecuación ( A.1) se proporciona la función de densidad de probabilidad de la distribución normal, la cual fue descubierta por DeMoivre en 1733 como una forma límite de la función de probabilidad binomial; después la estudió Laplace. También se conoce como distribución gaussiana porque Gauss la citó en un artículo que publicó en 1809. Durante el siglo XIX se empleó de manera extensa por científicos que habían notado que los errores, al llevar a cabo mediciones físicas, frecuentemente seguían un patrón que sugería la distribución normal o gaussiana. En adelante se usará el término "gausiano" para

referenciar a esta función.

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \mu > 0$$

( A.1)

donde  $\sigma$  es la desviación estándar y  $\mu$  es la media.

Este apéndice contiene las expresiones correspondientes al gaussiano y sus derivadas tanto en una como en dos dimensiones. Las constantes en una dimensión han sido indicadas con la letra "k". Las constantes para dos dimensiones se han indicado con la letra "C". Para todos los cálculos se considera que la desviación típica es la misma tanto para el eje X como para el eje Y, de tal manera que exista simetría para el gaussiano en dos dimensiones. Además, se considera que ambas variables son independientes.

## **A.1 Relaciones en Una Dimensión**

### **A.1.1 El Gaussiano**

La relación matemática que define al gaussiano en una dimensión, considerando la media igual a cero, viene representada en la ecuación( A.2).

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

( A.2)

si se definen las constantes  $k_1$  y  $k_2$  de la siguiente manera:

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \quad , \quad (A.3)$$

$$k_2 = \frac{-1}{2\sigma^2} \quad , \quad (A.4)$$

se puede expresar la ecuación ( A.2) como sigue:

$$G(x) = k_1 e^{k_2 x^2} \quad . \quad (A.5)$$

### A.1.2 Primera Derivada

Derivando la ecuación ( A.5) se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x) = k_1 k_2 2x e^{k_2 x^2} \quad , \quad (A.6)$$

si se define una tercera constante de la siguiente forma,

$$k_3 = 2k_1 k_2 = \frac{-1}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} \quad , \quad (A.7)$$

la primera derivada se puede expresar como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x) = G'(x) = (k_3 x) e^{k_2 x^2} \quad (A.8)$$

### A.1.3 Segunda Derivada

Si se deriva la ecuación ( A.8) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} G'(x) = G''(x) = k_3 (e^{k_2 x^2} + 2k_2 x^2 e^{k_2 x^2}) = k_3 (1 + 2k_2 x^2) e^{k_2 x^2} , \quad (A.9)$$

ordenando queda,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x) = \frac{\partial}{\partial x} G'(x) = G''(x) = (k_3 + 2k_2 k_3 x^2) e^{k_2 x^2} , \quad (A.10)$$

si se define una cuarta constante de la siguiente forma,

$$k_4 = 2k_2 k_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^5}} , \quad (A.11)$$

la ecuación ( A.10) se puede escribir:

$$\frac{\partial}{\partial x} G'(x) = G''(x) = (k_3 + k_4 x^2) e^{k_2 x^2} . \quad (A.12)$$

Resumiendo, para una dimensión, el gaussiano y sus dos primeras derivadas se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\bullet \quad G(x) = (k_1) e^{k_2 x^2} , \quad G'(x) = (k_3 x) e^{k_2 x^2} , \quad G''(x) = (k_3 + k_4 x^2) e^{k_2 x^2} , \quad (A.13)$$

siendo sus constantes,

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}, \quad k_2 = \frac{-1}{2\sigma^2}, \quad k_3 = \frac{-1}{\sqrt{2\pi\sigma^3}}, \quad k_4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^5}}.$$

( A.14)

## A.2 Relaciones en Dos Dimensiones

### A.2.1 El Gausiano

Si X e Y son dos ejes ortogonales en un plano, el gausiano en dos dimensiones se puede obtener, si X e Y son independientes, por multiplicación de los gaussianos unidimensionales parciales. Considerando la ecuación ( A.2) el gausiano en dos dimensiones queda expresado de la siguiente manera:

$$G(x,y) = G(x) G(y) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \right),$$

( A.15)

el resultado es el siguiente,

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

( A.16)

De la misma forma como se procedió para el espacio unidimensional, suponiendo  $\sigma$  constante para las direcciones X e Y, ahora se reemplazan en la ecuación ( A.16) las siguientes constantes:

$$C_1 = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \quad , \quad C_2 = \frac{-1}{2\sigma^2}$$

( A.17)

luego se puede escribir,

$$G(x, y) = C_1 e^{C_2(x^2+y^2)}$$

( A.18)

La Figura A.1 es una representación gráfica de la ecuación ( A.18).

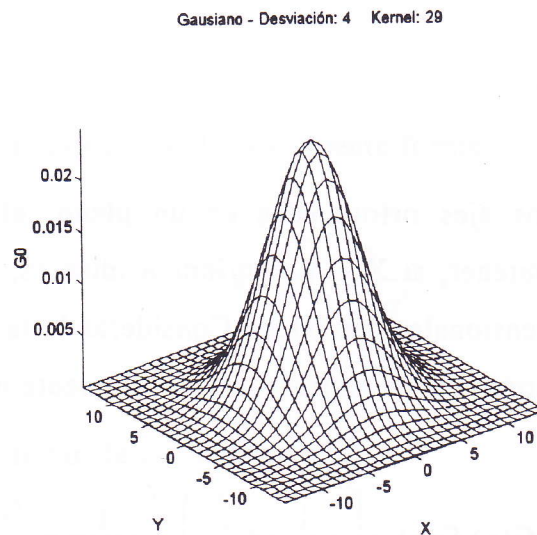


Figura A.1    Gausiano en dos dimensiones.

### A.2.2 Primera Derivada

La ecuación ( A.18) se puede escribir de la siguiente forma,

$$G(x, y) = \left( e^{C_2 y^2} \right) \left( C_1 e^{C_2 x^2} \right)$$

( A.19)

Teniendo en cuenta que si se deriva la ecuación ( A.19) respecto a la variable X, la expresión  $e^{C_2 y^2}$  es una constante, la derivada parcial de ( A.19) respecto al eje X se puede escribir,

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, y) = \left( e^{C_2 y^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} C_1 e^{C_2 x^2} \right) = \left( e^{C_2 y^2} \right) \left( 2C_1 C_2 x e^{C_2 x^2} \right) , \quad (\text{ A.20})$$

si se introduce la siguiente constante,

$$C_3 = 2C_1 C_2 = \frac{-1}{2\pi\sigma^4} , \quad (\text{ A.21})$$

al reducir términos, la ecuación ( A.20) queda expresada en la ecuación ( A.22). La Figura A.2 es una representación gráfica de la ecuación ( A.22)

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, y) = C_3 x e^{C_2(x^2+y^2)} . \quad (\text{ A.22})$$

1ª Derivada en X del Gausiano - Desviación: 4 Kernel: 29

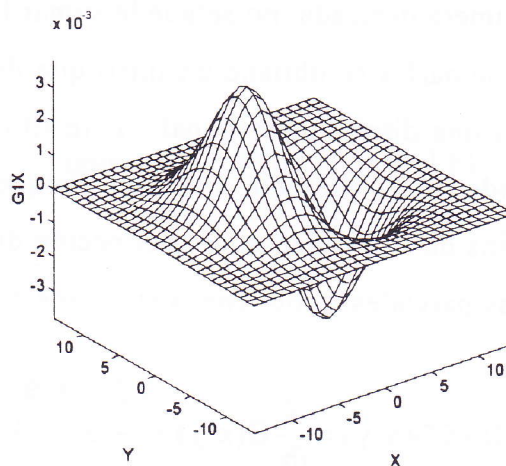


Figura A.2 Primera derivada parcial respecto a X.

Haciendo la analogía para el eje Y se obtiene la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial y} G(x, y) = C_3 y e^{-c_2(x^2+y^2)}$$

( A.23)

La ecuación ( A.23) se ha representado en la Figura A.3 .

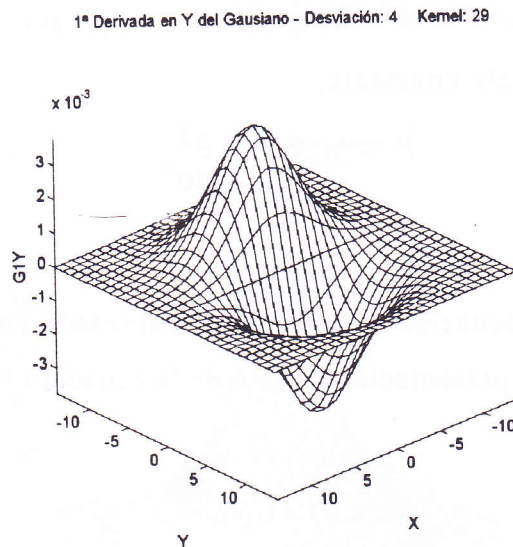


Figura A.3 Primera derivada parcial respecto a Y.

Para calcular la primera derivada, no se puede sumar las derivadas parciales del gausiano porque al sumarlas se obtiene un filtro que destaca los cambios de intensidad solamente en una dirección diagonal. Este filtro no se emplea en la tesis, pero se ha incluido en el presente apéndice porque puede ser útil si se desea obtener los cambios de intensidad en una dirección diagonal. Por lo tanto, si se suman las derivadas parciales se obtiene la siguiente ecuación:

$$FD = \nabla G(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} G(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} G(x, y).$$

( A.24)



Reemplazando las ecuaciones ( A.22) y ( A.23) en ( A.24) se obtiene,

$$\bullet \quad \text{FD} = \nabla G(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} G(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} G(x, y) = C_3 x e^{C_2(x^2+y^2)} + C_3 y e^{C_2(x^2+y^2)}, \quad (\text{ A.25})$$

si se ordenan los términos de la ecuación anterior se obtiene la ecuación ( A.26).

Esta ecuación se ha representado en la Figura A.4.

$$\text{FD} = \nabla G(x, y) = C_3 (x + y) e^{C_2(x^2+y^2)}; \quad (\text{ A.26})$$

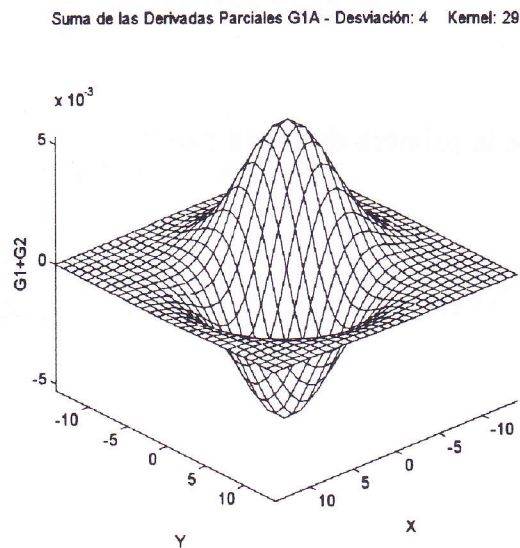


Figura A.4 Filtro diagonal FD.

### A.2.3 Segunda Derivada

Para estimar la segunda derivada se puede calcular el Laplaciano sumando las segundas derivadas parciales del gaussiano,

$$\nabla^2 G(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} G(x, y), \quad (\text{A.27})$$

escribiendo el gaussiano de la siguiente forma:

$$G(x, y) = C_1 e^{C_2(x^2+y^2)} \quad \Leftrightarrow \quad G(x, y) = (e^{C_2 y^2}) (C_1 e^{C_2 x^2})$$

la segunda derivada parcial del gaussiano respecto al eje X será:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y) = (e^{C_2 y^2}) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (C_1 e^{C_2 x^2}) \right), \quad (\text{A.28})$$

o también en función de la primera derivada parcial,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y) = (e^{C_2 y^2}) \left( \frac{\partial}{\partial x} (C_3 x e^{C_2 x^2}) \right) \quad (\text{A.29})$$

desarrollando,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x} G'(x, y) = e^{C_2 y^2} C_3 (e^{C_2 x^2} + 2C_2 x^2 e^{C_2 x^2}) = e^{C_2 y^2} C_3 (1 + 2C_2 x^2) e^{C_2 x^2}, \quad (\text{A.30})$$

reduciendo,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y) = (e^{C_2 y^2}) ((C_3 + 2C_2 C_3 x^2) e^{C_2 x^2}), \quad (\text{A.31})$$

definiendo la siguiente constante,

$$C_4 = 2C_2C_3 = \frac{1}{2\pi\sigma^6} , \quad (A.32)$$

agrupando términos,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y) = (C_3 + C_4 x^2) e^{C_2(x^2+y^2)} , \quad (A.33)$$

haciendo lo mismo para el eje Y se obtiene,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} G(x, y) = (C_3 + C_4 y^2) e^{C_2(x^2+y^2)} , \quad (A.34)$$

reemplazando ( A.33) y ( A.34) en ( A.27),

$$\nabla^2 G(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} G(x, y) = \left( (C_3 + C_4 x^2) e^{C_2(x^2+y^2)} \right) + \left( (C_3 + C_4 y^2) e^{C_2(x^2+y^2)} \right) \quad (A.35)$$

agrupando términos,

$$\nabla^2 G(x, y) = (C_3 + C_4 x^2 + C_3 + C_4 y^2) e^{C_2(x^2+y^2)} \quad (A.36)$$

reduciendo se obtiene,

$$\nabla^2 G(x, y) = (2C_3 + C_4(x^2 + y^2)) e^{C_2(x^2+y^2)} \quad (A.37)$$

luego queda expresada finalmente,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y) = (2C_3 + C_4(x^2 + y^2)) e^{C_2(x^2 + y^2)}$$

( A.38)

La ecuación anterior se ha representado en la siguiente figura:

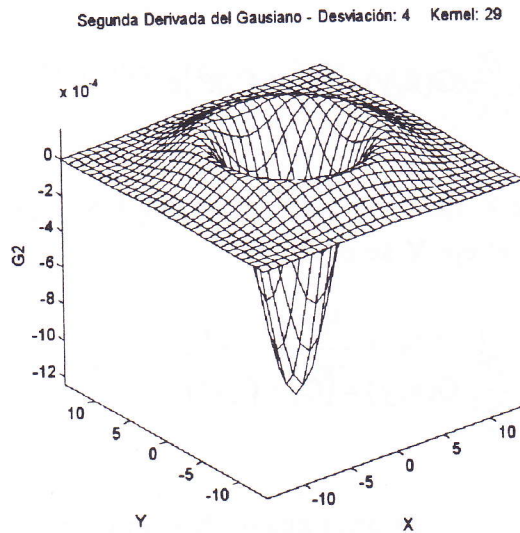


Figura A.5 Segunda derivada del gausiano.

Resumiendo se puede escribir que el gausiano y sus derivadas para el espacio bidimensional vienen representados por las siguientes ecuaciones:

$$G(x, y) = (C_1) e^{C_2 x^2} , \quad G'_x(x, y) = (C_3 x) e^{C_2 x^2} , \quad G'_y(x, y) = (C_3 y) e^{C_2 y^2} ,$$

$$G''(x, y) = (C_3 + C_4(x^2 + y^2)) e^{C_2(x^2 + y^2)} ,$$

( A.39)

siendo las constantes,

$$C_1 = \frac{1}{2\pi\sigma^2} , \quad C_2 = \frac{-1}{2\sigma^2} , \quad C_3 = \frac{-1}{2\pi\sigma^4} , \quad C_4 = \frac{1}{2\pi\sigma^6} .$$

( A.40)

*Apéndice B*

---

## B. DESCRIPCION DE LA SEÑAL DE VIDEO

---

Este apéndice describe la señal analógica de vídeo compuesta sobre la cual viaja la información que ha captado el sensor CCD instalado en la cámara.

La cámara empleada es una Sony CCD B/W XC-77CE. Esta cámara tiene una matriz de captación (picture elements) de 753x581 elementos. La frecuencia de conducción vertical es de 15.625 kHz, y la frecuencia de barrido horizontal de 14.1875 MHz. El Sistema que emplea para empaquetar la información es el CCIR estándar de transferencia interlinear. Las Figuras que se presentan a continuación han sido obtenidas con un osciloscopio IWATSU DS-8631 300 MHz conectado directamente a la señal de vídeo compuesta por medio de una sonda IWATSU SPF-3A 40Hz 800MHz -3DB. Para la impresión de los resultados se conectó en serie un ploter HP 7475A.

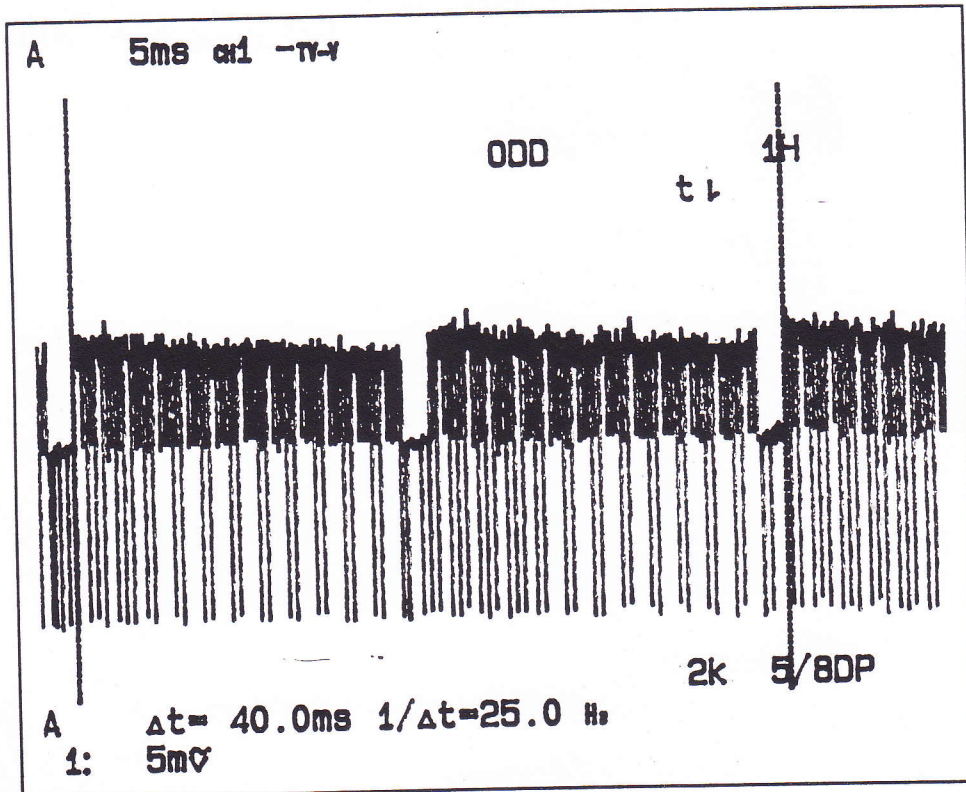


Figura B.1

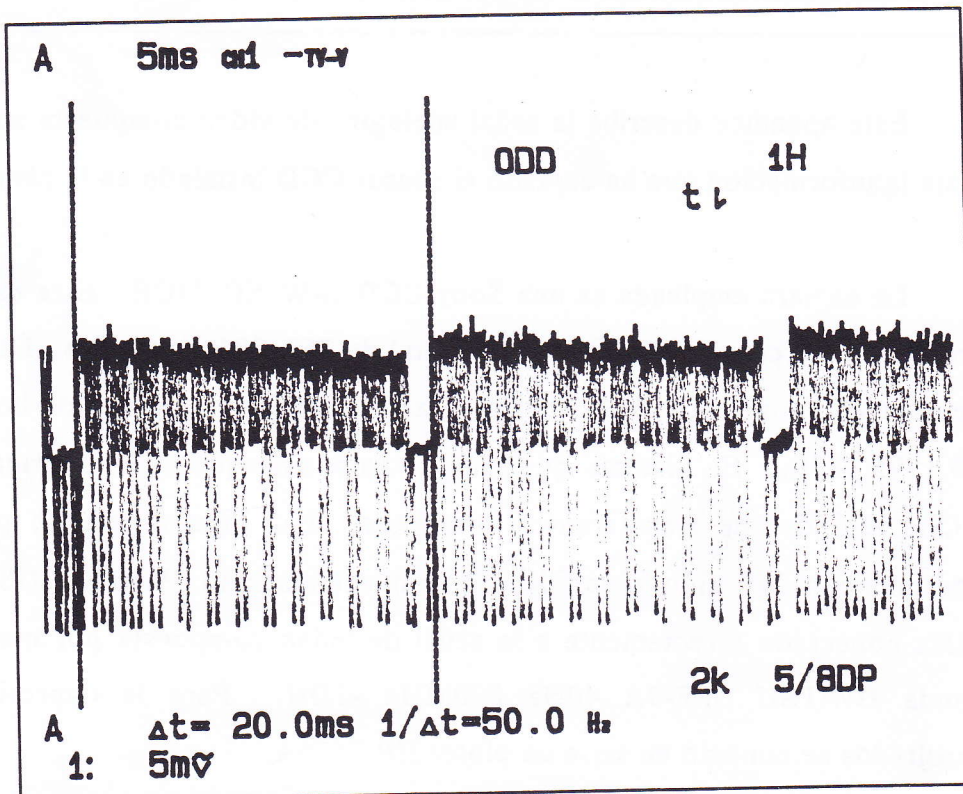


Figura B.2

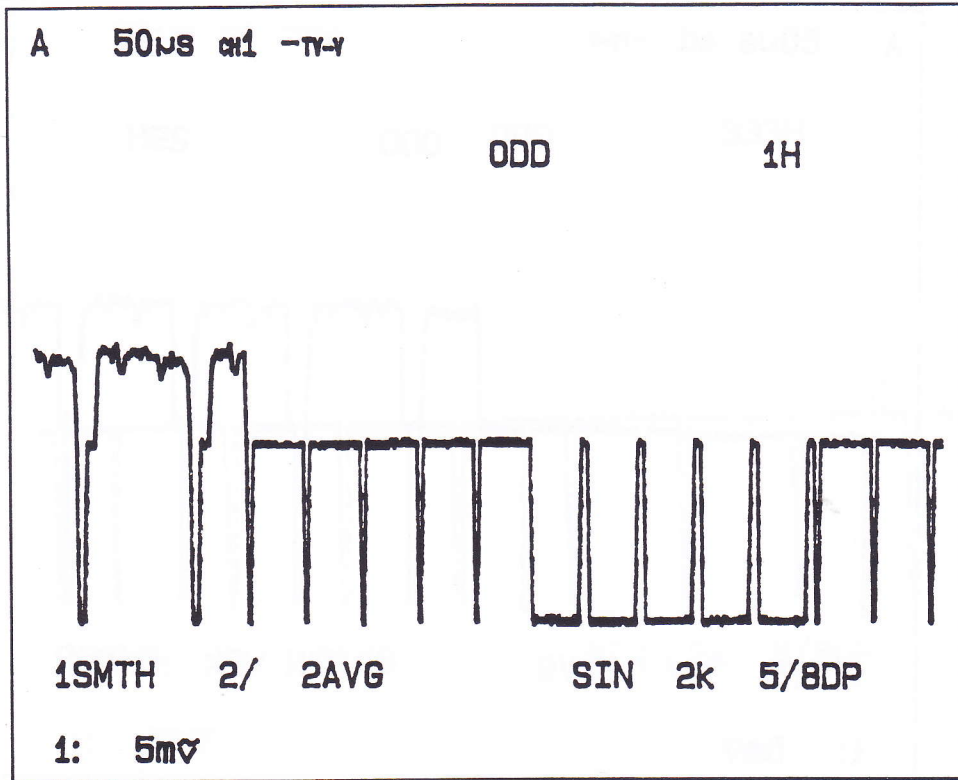


Figura B.3

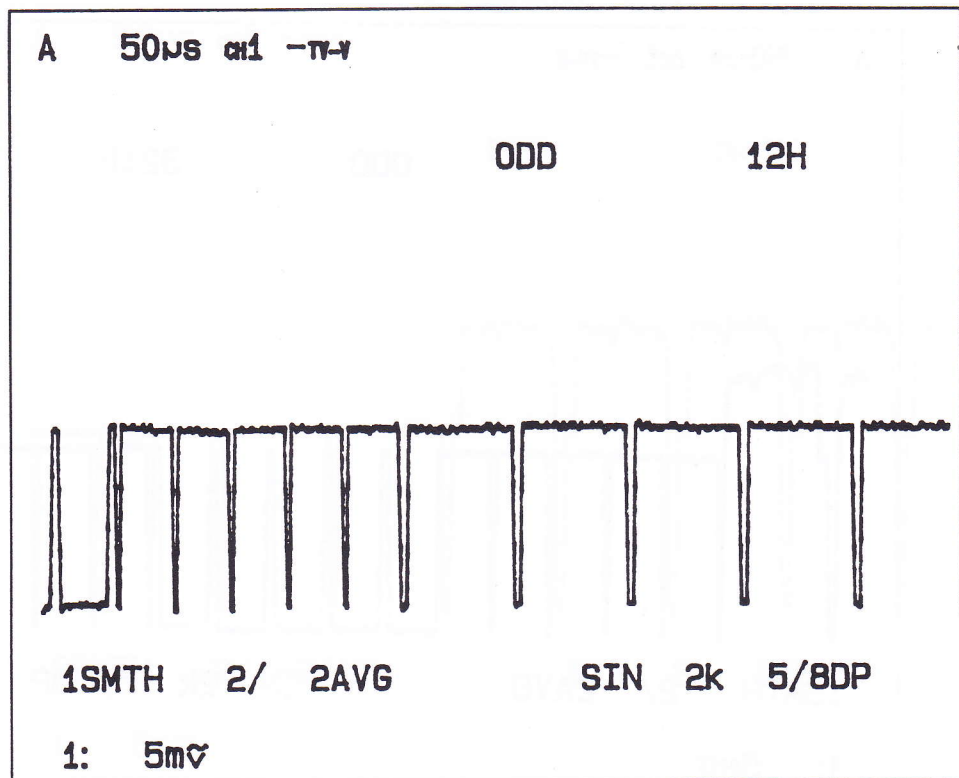


Figura B.4



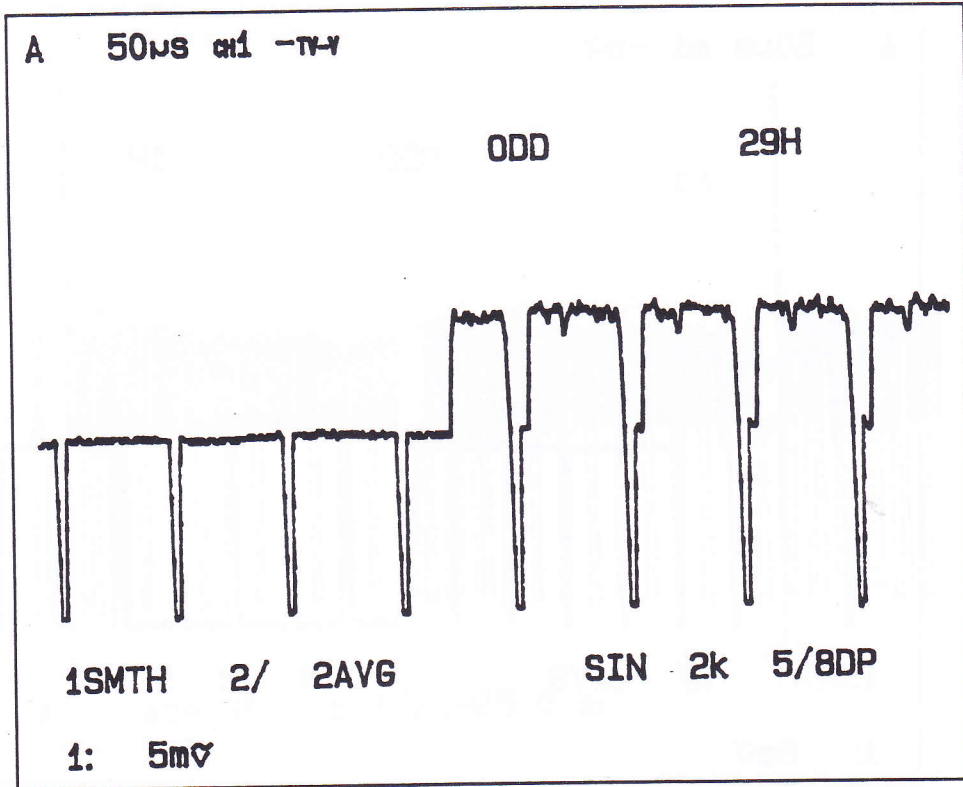


Figura B.5

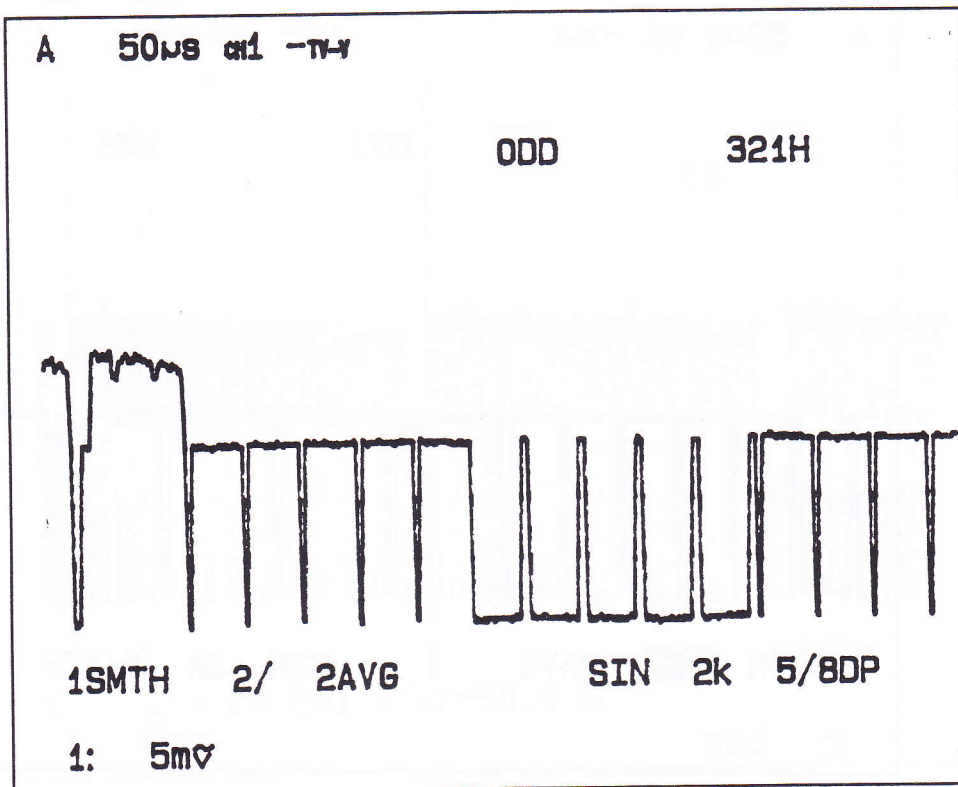


Figura B.6

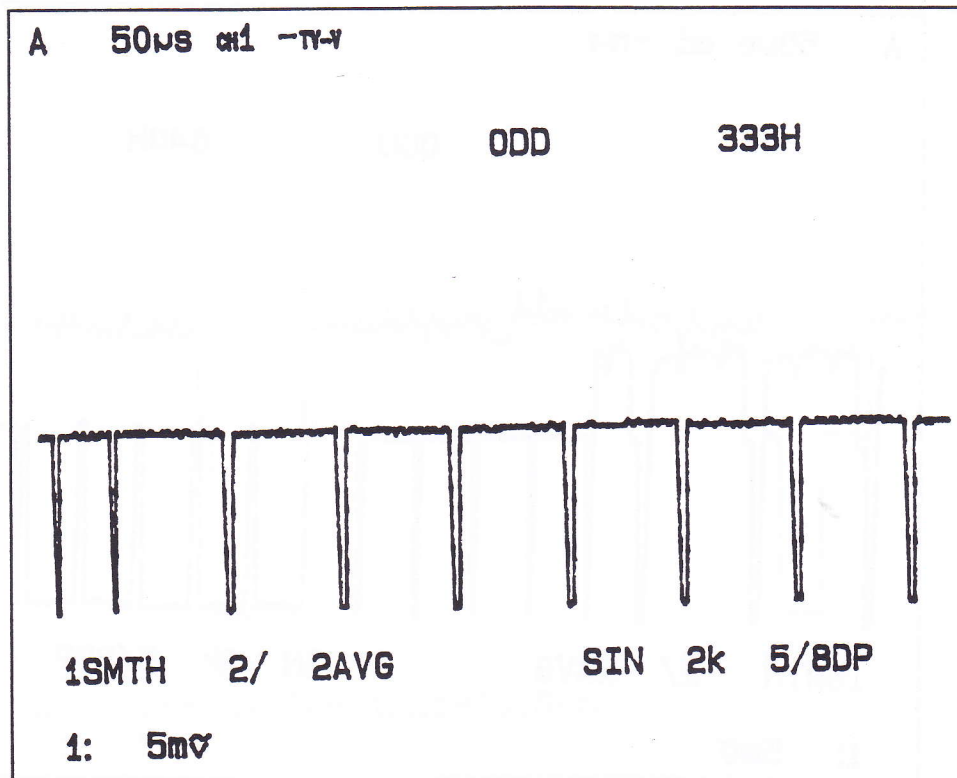


Figura B.7

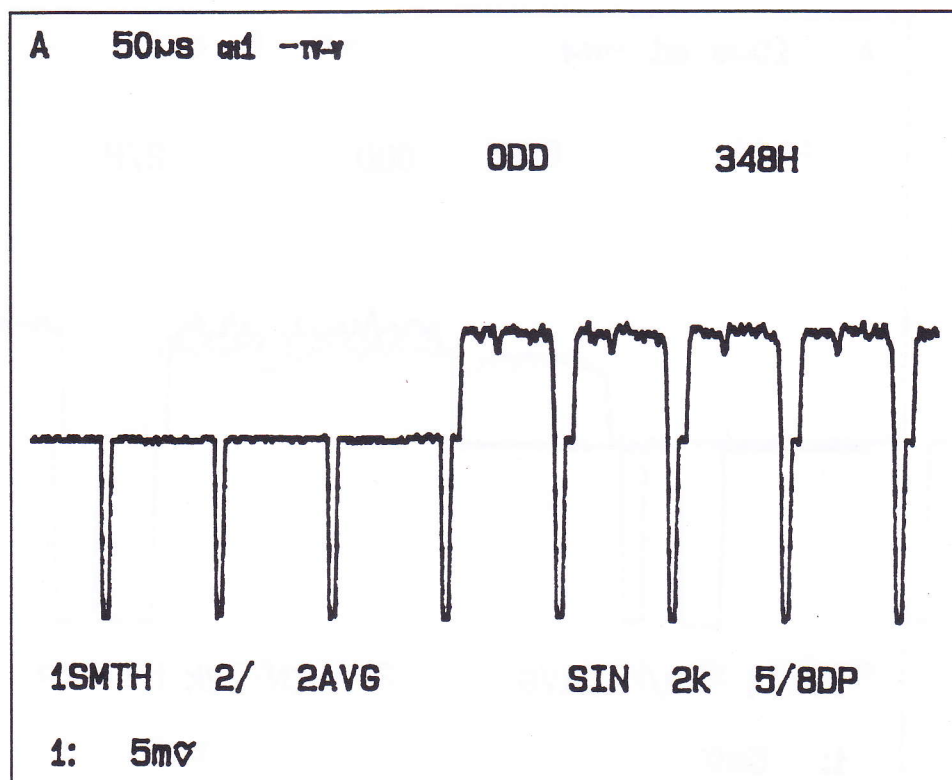


Figura B.8

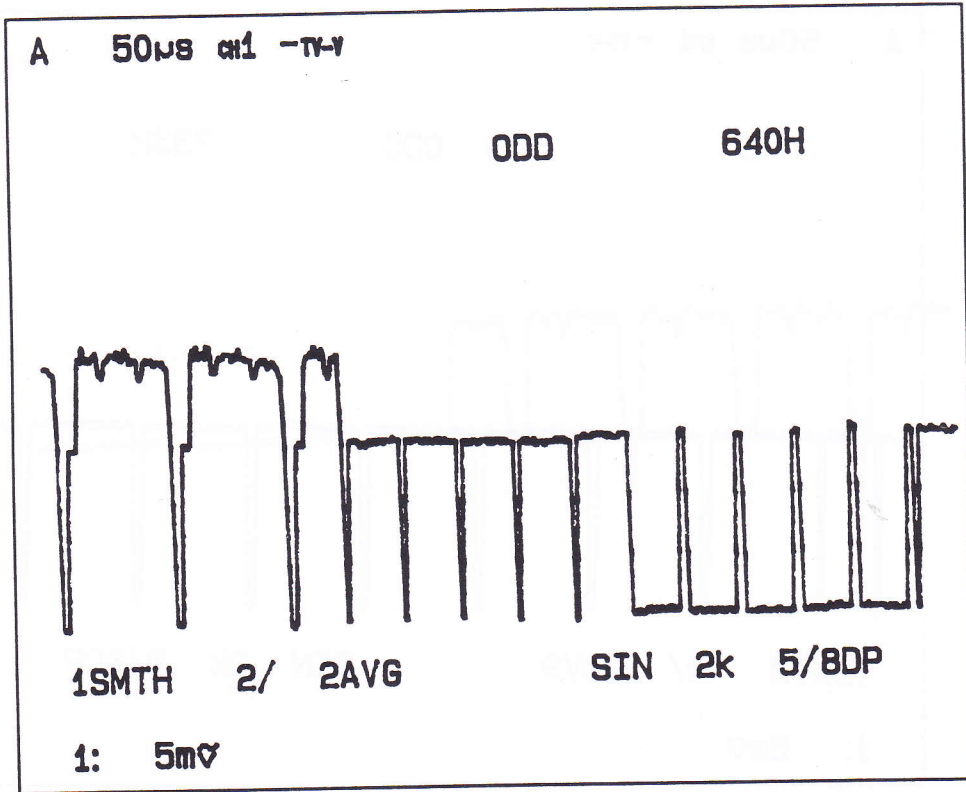


Figura B.9

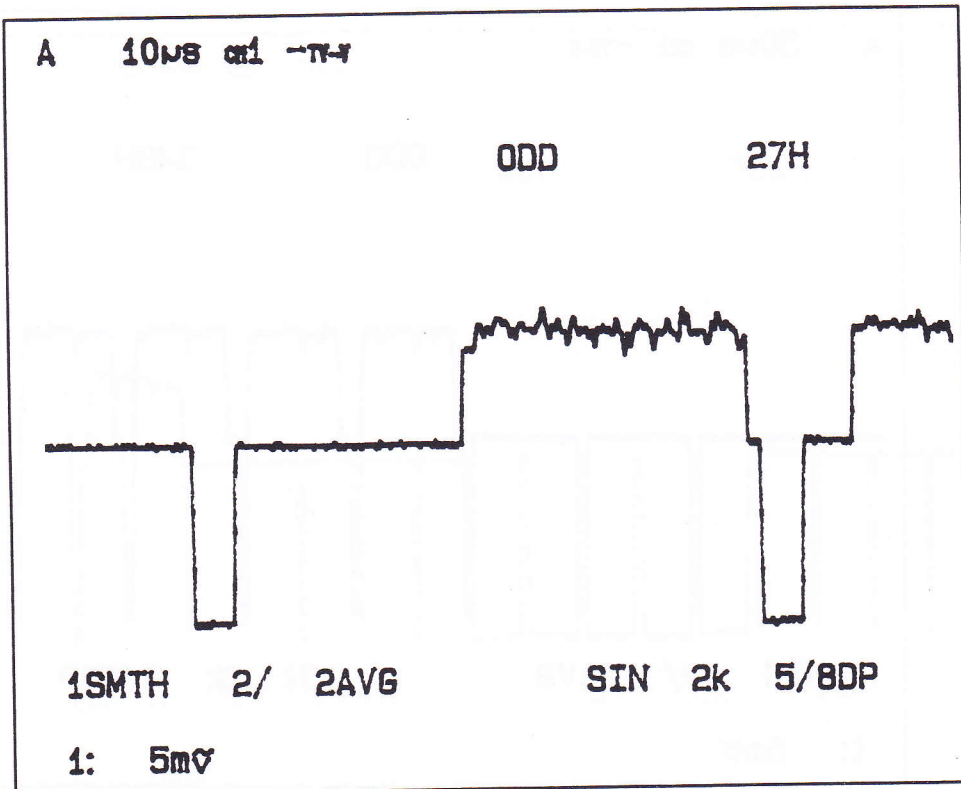


Figura B.10

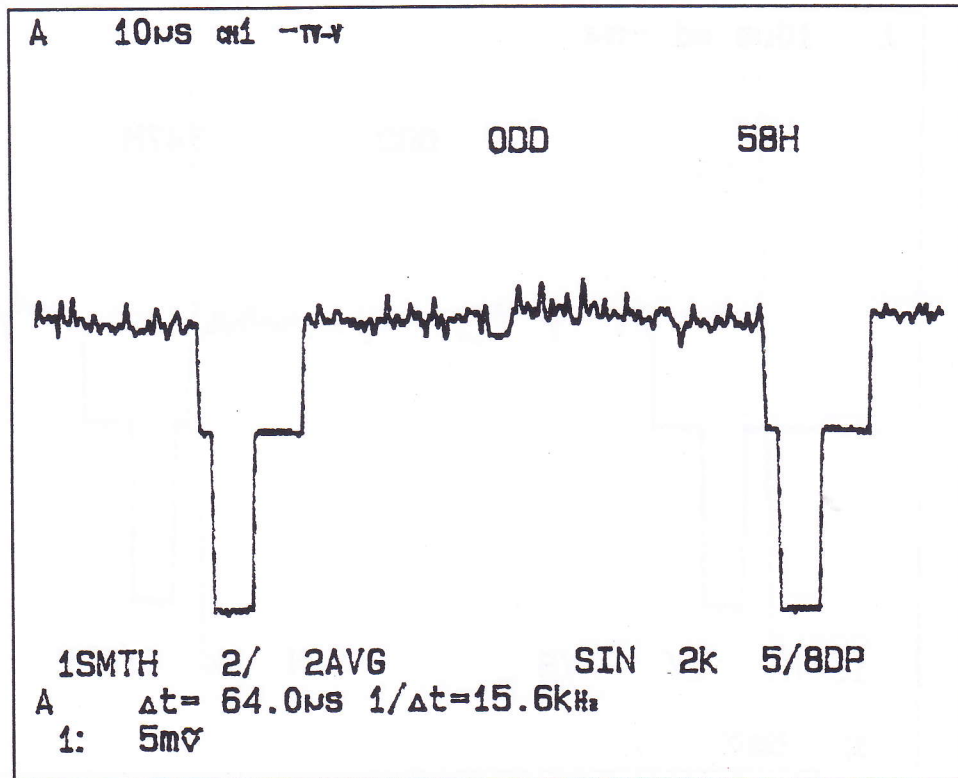


Figura B.11

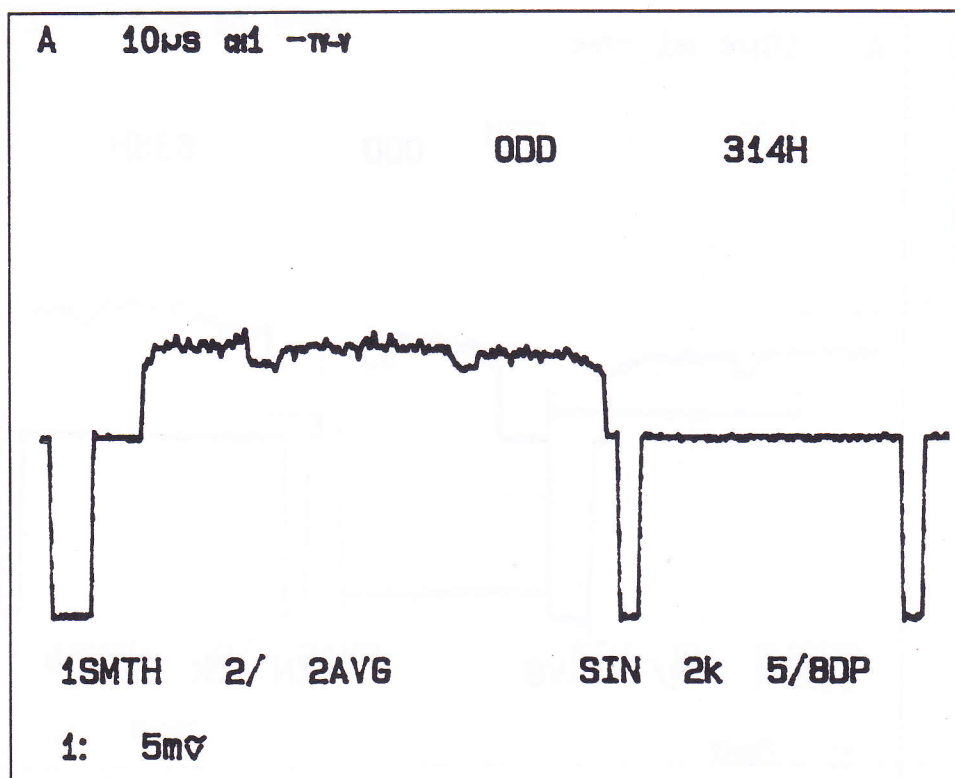


Figura B.12



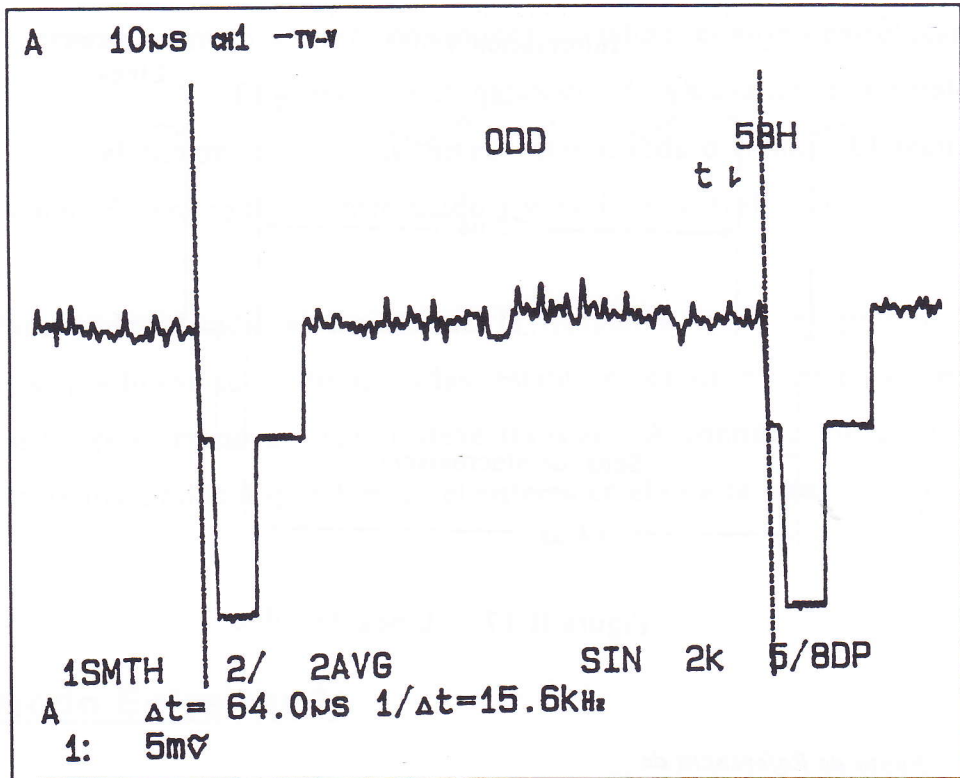


Figura B.15

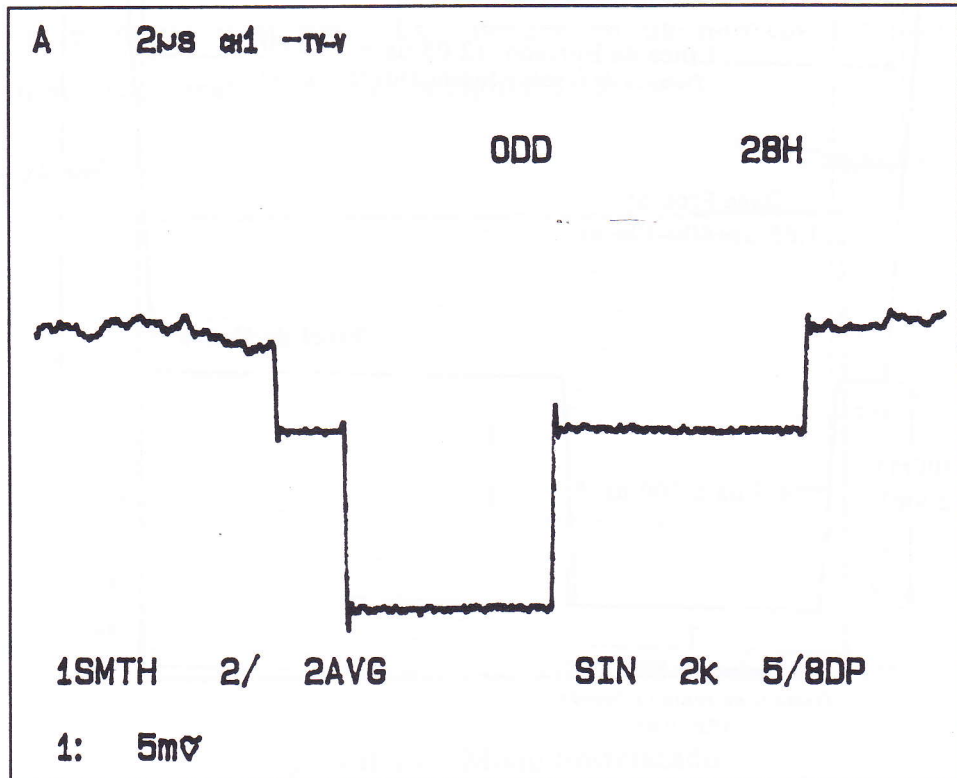


Figura B.16

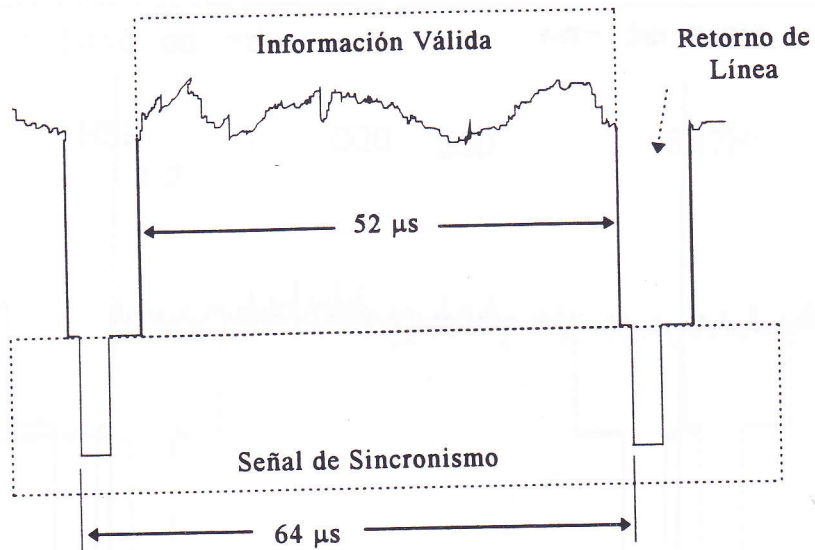


Figura B.17 Línea de vídeo

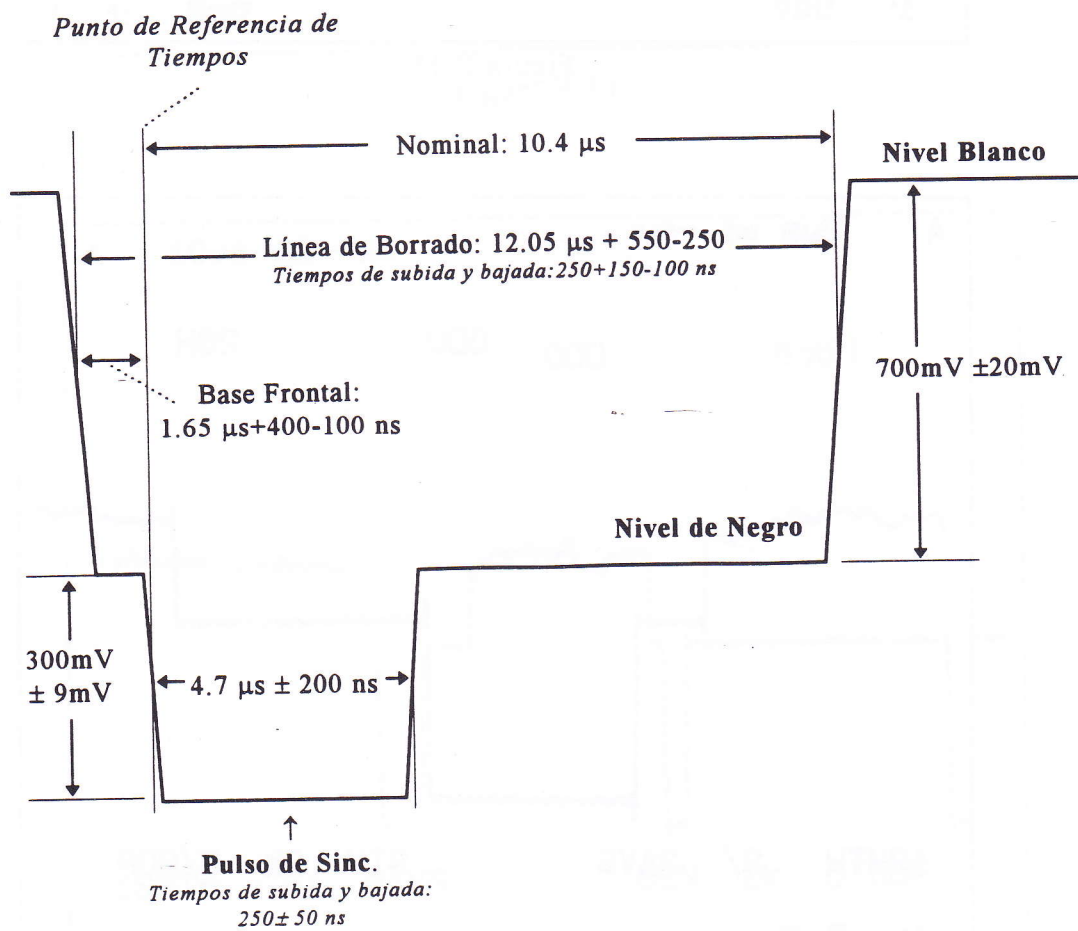


Figura B.18 Posición, amplitud, y tiempos para el retorno de líneas.

El sistema estándar soporta dos modos de salida, el modo entrelazado y el modo no entrelazado. El primero es el más conocido y consiste en multiplexar el campo par y el campo impar de la imagen digitalizada o frame. El segundo se puede subdividir en modo no entrelazado 1 y modo no entrelazado 2.

Para poder decidir el tamaño de la imagen a tratar es preciso definir cuántas y que líneas serán digitalizadas, establecer su sincronismo, y tomar una decisión sobre el modo en que se debe trabajar. A continuación se describen brevemente los modos disponibles en el sistema en el que se está trabajando.

## B.1 Modo Entrelazado

Este modo consiste en intercalar en la emisión de la información el campo impar y el campo par, tal como se puede ver en la Figura B.1. Se puede ver que la imagen completa se emite a la frecuencia de 25 Hz y viaja codificada en dos paquetes, el impar y el par. La imagen en un monitor receptor se ha representado esquemáticamente en la Figura B.19.

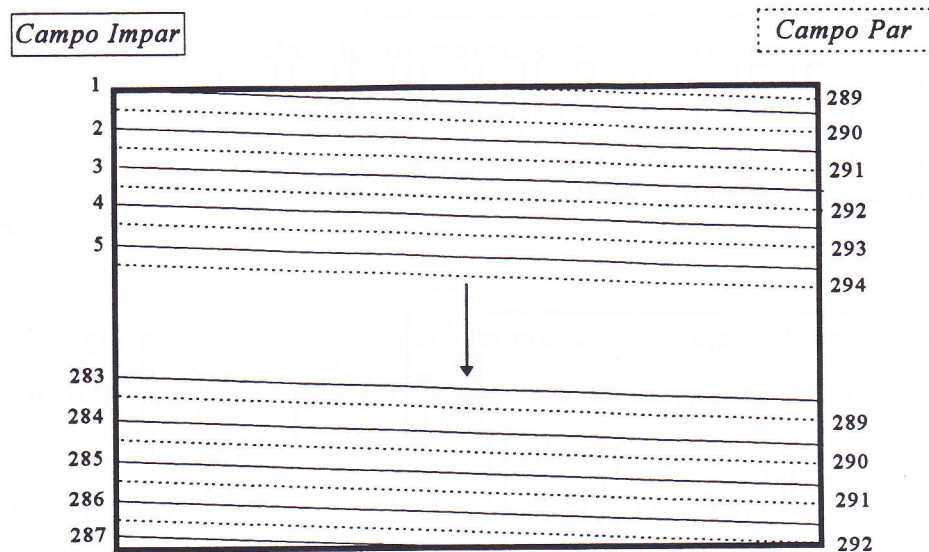


Figura B.19 Modo Entrelazado



Se puede numerar las líneas de la izquierda como 1, 3, 5 ... y las de la derecha como 2, 4, 6, ..., pero se ha preferido numerarlas de manera consecutiva, tal como se aprecia en la Figura B.19.

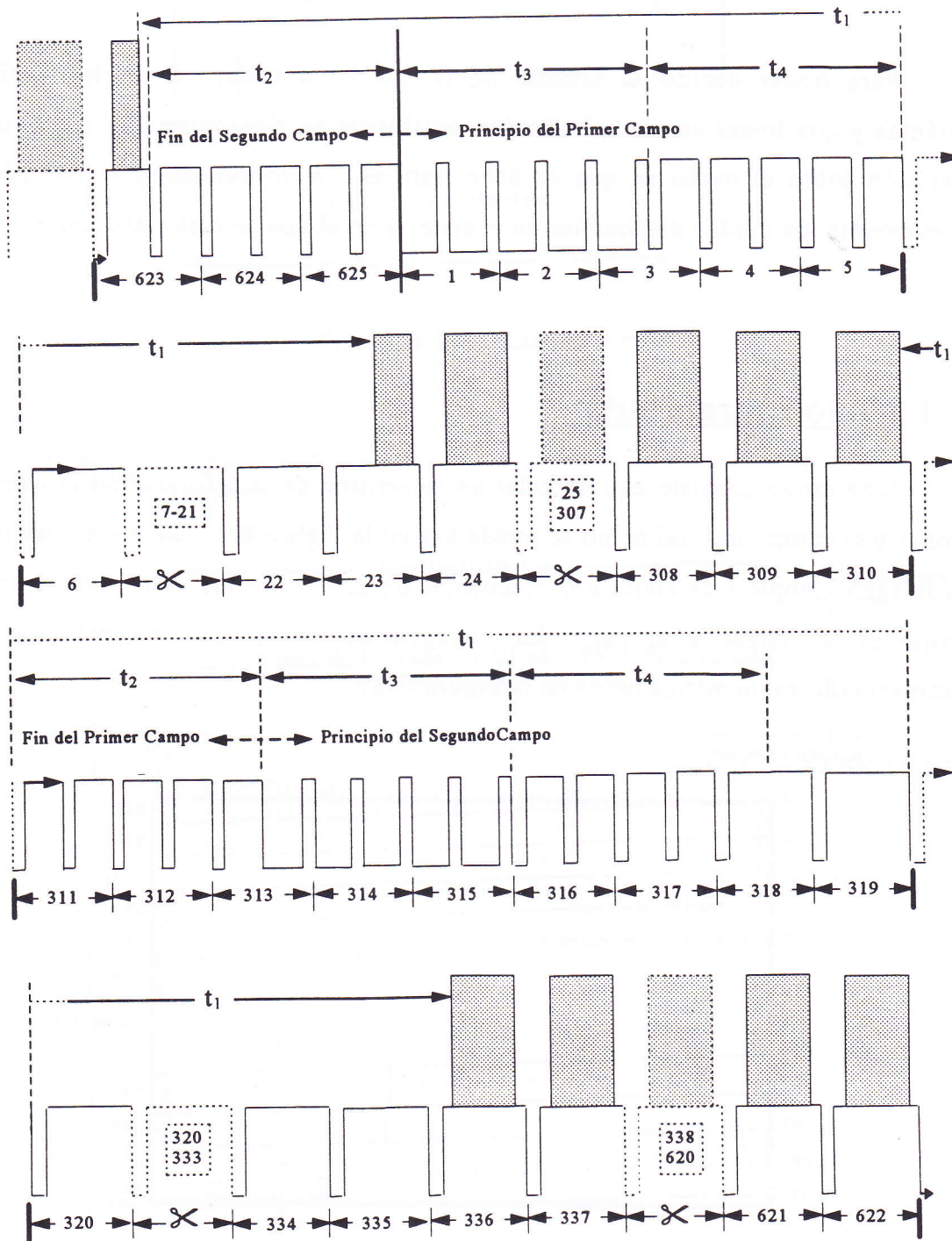


Figura B.20 Estructura de la trama para señal de 625 líneas.

En la Figura B.20 se ha representado en un mismo gráfico la secuencia de la trama representada desde la Figura B.1 hasta la Figura B.16 en un solo gráfico. La Tabla B-1 muestra los valores de tiempos a que se hace referencia en la Figura B.20.

Tabla B-1

Variable	Tiempos	Valor
$T_c$	Periodo de Campo	20 ms
$t_1$	Blanqueado de Campo	1.6 ms (nominal)
$t_2$	Pulsos de pre-igualación	160 $\mu$ s
$t_3$	Pulsos de Sincronismo de Emisión	160 $\mu$ s
$t_4$	Pulsos de post-igualación	160 $\mu$ s
$t_4$	Ancho de los Pulsos igualizado	2.35 $\pm$ 0.1 $\mu$ s

La cámara que se ha empleado para este trabajo permite ser configurada intercambiando los campos. Además es posible cambiar de modo entrelazado a no entrelazado, con la consiguiente pérdida de información por pérdida de resolución, tal y como se verá en el siguiente apartado.

## **B.2 Modo No-entrelazado**

Si en el modo entrelazado la imagen completa era representada por dos campos, en el modo no-entrelazado la imagen es representada por un solo campo. Cierta literatura técnica denomina frame a la imagen completa emitida en el modo no-entrelazado.

La imagen completa que se emite en este modo viaja a la frecuencia de 50 Hz en un solo paquete de información, sin embargo, el número de líneas horizontales se reduce a la mitad. Existen cámaras de propósito específico que aumentan el número de líneas por encima del estándar, pero reducen drásticamente el número de imágenes por segundo y viceversa. A lo largo de este trabajo siempre se hace referencia a cámaras estándar normalizadas con el Comité Consultivo Internacional de Radiocomunicaciones (CCIR).

Al igual que en el modo entrelazado, el modo no-entrelazado permite ciertas variaciones que desplazan la imagen en media línea hacia arriba o hacia abajo, según se considere la referencia. Estos cambios son prácticamente equivalentes al caso que se daba al intercambiar los campos en el modo entrelazado.

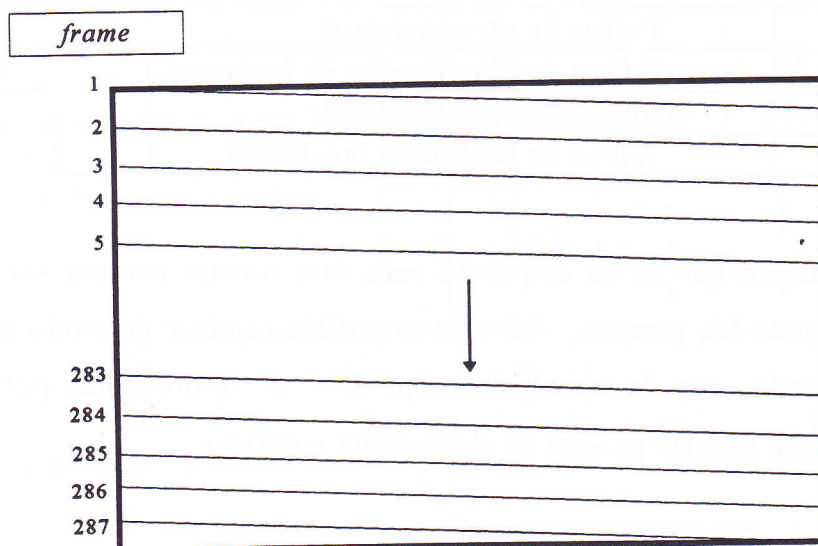


Figura B.21 Modo No-entrelazado 1.

El modo no-entrelazado presenta las dos variantes representadas en las Figuras B.21 y B.22. Considérese que aunque la resolución se ha reducido a la mitad de la resolución obtenida con el modo entrelazado, la frecuencia se ha duplicado de 25 Hz a 50 Hz.

Es preciso destacar que un observador normal visualizando la emisión en el modo no-entrelazado 1 no notaría diferencia si se le presentara la emisión en el modo no-entrelazado 2. Estas diferencias influyen en tratamientos de señal muy específicos. Sin embargo, si se le cambia de modo no-entrelazado a entrelazado notará una disminución del parpadeo y una leve sensación de aumento de la resolución.

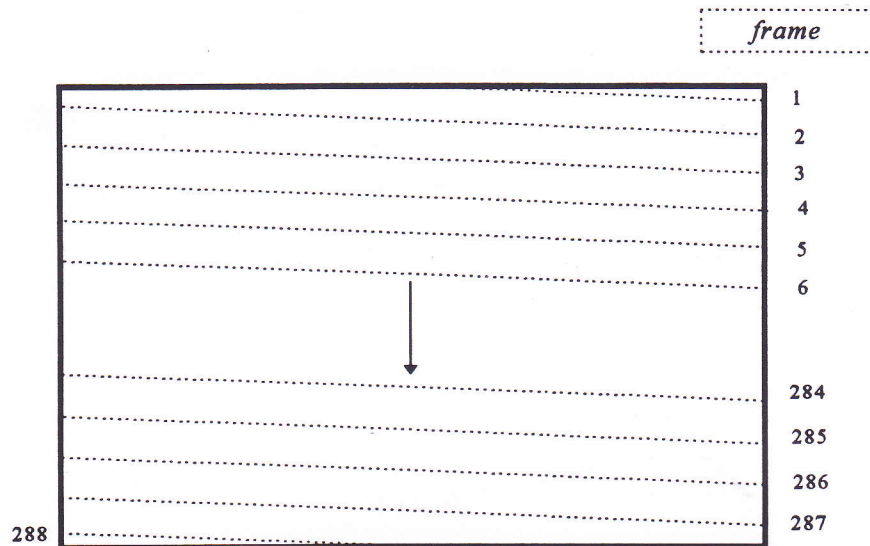


Figura B.22 Modo No-entrelazado 2.

La representación de la trama completa para el modo no entrelazado es similar a la del modo entrelazado representado en la Figura B.20. Los campos son reemplazados por frames y se alteran en algo los pulsos de sincronismo intermedio. Para mayor detalle consultar la publicación de la CCIR y la UIT "Sistemas de Televisión Utilizados en el Mundo", y los boletines que emite el CCIR.