

### **3. SEGUNDA DERIVADA DEL GAUSIANO**

---

Por lo expuesto en el capítulo anterior, para obtener los bordes de los objetos representados en una escena, primero se debe filtrar la imagen para una escala de bordes dada, y luego aplicarle alguna forma de diferenciación discreta, para encontrar su primera o segunda derivada, y detectar sus máximos o sus pasos por cero respectivamente.

Lo anterior no tendría prácticamente ninguna complicación si se trabajase con funciones continuas, sin embargo, como se debe trabajar con la información de imágenes reales digitalizadas, se debe analizar el comportamiento de los algoritmos para aplicaciones discretas.

### 3.1 Comportamiento de la Segunda Derivada del Gaussiano

Teniendo en cuenta que el tiempo de procesamiento es un parámetro primordial en el desarrollo de esta tesis, sería ideal poder obtener la segunda derivada de la imagen haciendo solamente una operación convolutiva; esta operación debiera ser  $[Y * G'']$ . El problema se centraría en determinar el umbral a emplear, y en la potencia de cálculo que implica el calcular convoluciones con tamaños de kernel grandes.

Del análisis efectuado en el capítulo anterior se desprende que la metodología planteada por Marr y Hildreth (1980) es la que mejores prestaciones presenta en cuanto a reducción de operaciones de filtrado, detección y localización de bordes. Por ello a continuación se analizarán sus limitaciones de manera que se tenga un mejor conocimiento de sus posibilidades.

Para el estudio en una dimensión se ha empleado los tres modelos de líneas de vídeo representados en la Figura 3.1. La primera ha sido generada artificialmente efectuando saltos de intensidad de diferente tamaño, tanto hacia arriba como hacia abajo, a la que se le ha sumado un ruido blanco. La segunda y tercera líneas han sido tomadas de una imagen de vídeo real. El tamaño de cada línea es de 512 pixels, y cada pixel varía entre 0 y 255 niveles de gris (ocho bits). Según el Apéndice A, el gaussiano en una dimensión se expresa,

$$G = k_1 e^{k_2 x^2}, \quad k_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma}, \quad k_2 = \frac{-1}{2 \sigma^2}. \quad (3.1)$$

Si la expresión anterior se deriva dos veces se obtiene:

$$G' = k_3 x e^{k_2 x^2}, \quad k_3 = \frac{-1}{\sqrt{2\pi} \sigma^3}, \quad (3.2)$$

$$G'' = (k_3 + k_4 x^2) e^{-k_2 x^2}, \quad k_4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma^5}.$$

( 3.3)

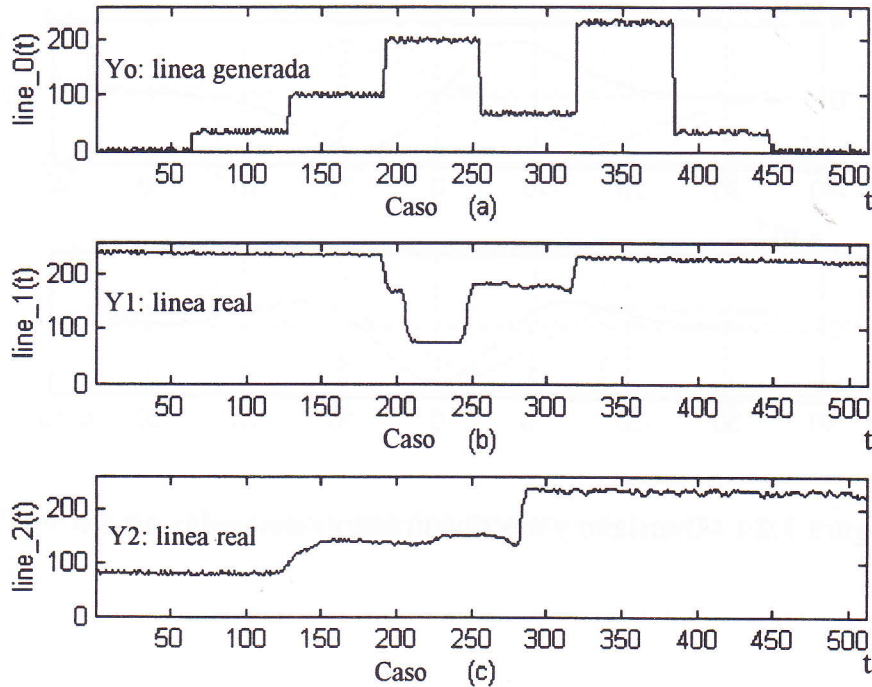


Figura 3.1 Representación las tres líneas modelo.

A continuación se presenta, a través de una secuencia gráfica (Figuras 3.2 a 3.7), el comportamiento del algoritmo de Marr y Hildreth aplicado a los tres modelos de líneas propuestos al comienzo del presente capítulo.

Para cada desviación se presenta en la figura superior el filtro Gaussiano y sus dos primeras derivadas, y en la figura inferior, las segundas derivadas de los tres modelos presentados en la Figura 3.1. Las derivadas se han calculado por simple convolución de  $G''$  con cada modelo de línea. Se pretende ver como evolucionan las segundas derivadas de los tres modelos a medida que la desviación va disminuyendo. Obsérvese como la respuesta del filtro se modifica especialmente en los cambios suaves de intensidad cuando disminuye la desviación.

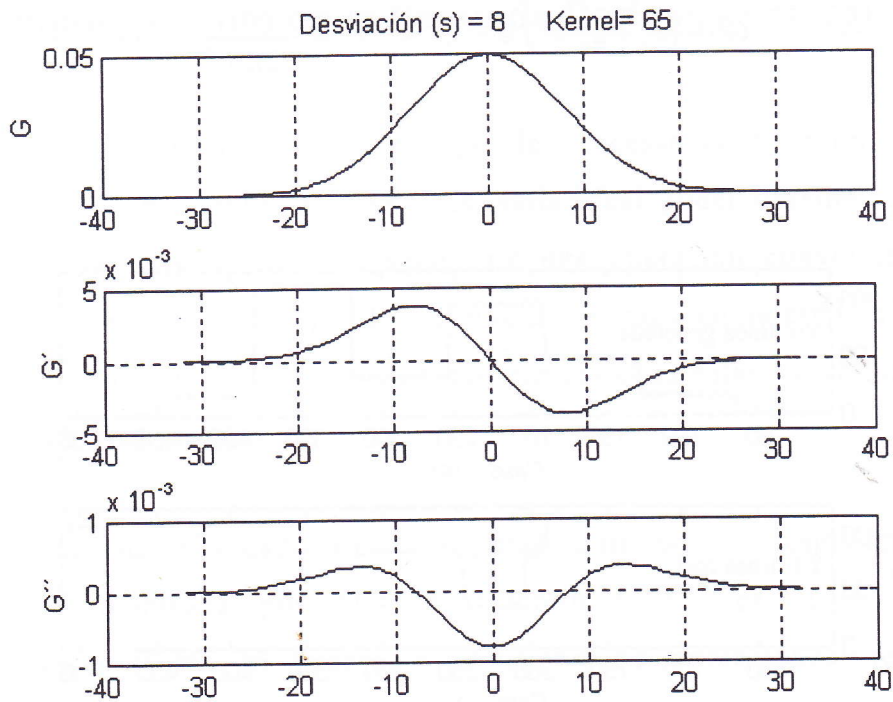


Figura 3.2 Gausiano y sus dos primeras derivadas para  $\sigma = 8$ .

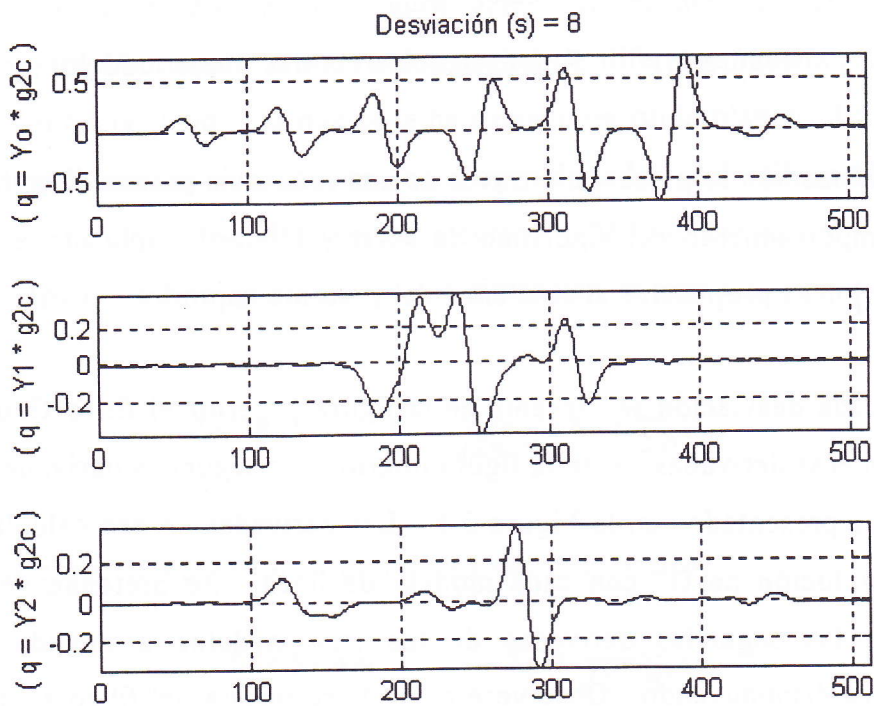


Figura 3.3  $[Y_i * G'']$  para los tres modelos de línea propuestos,  $\sigma = 8$ .

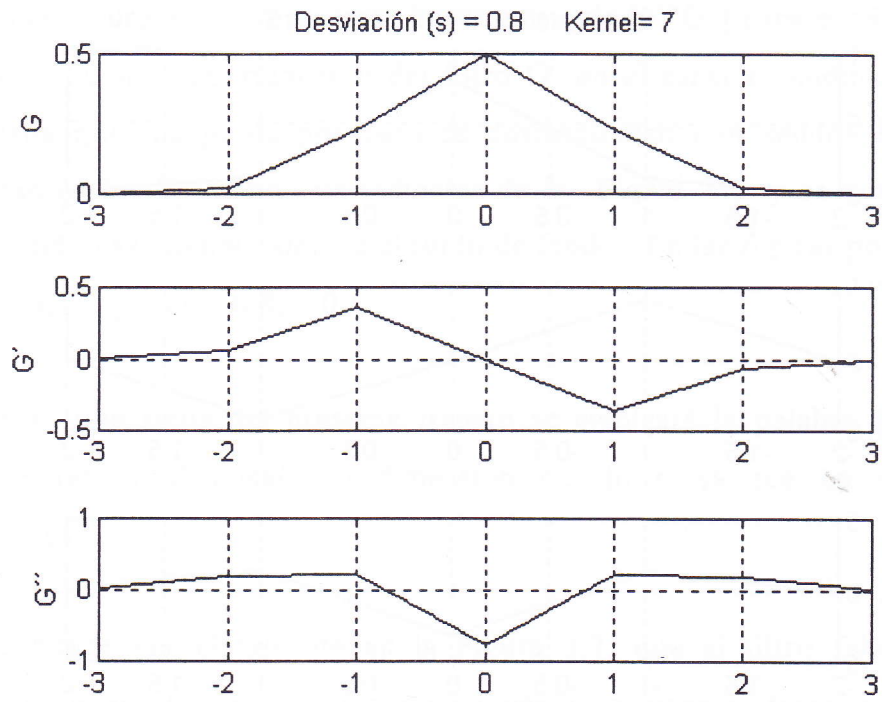


Figura 3.4 Gaussiano y sus dos primeras derivadas para  $\sigma = 0.8$ .

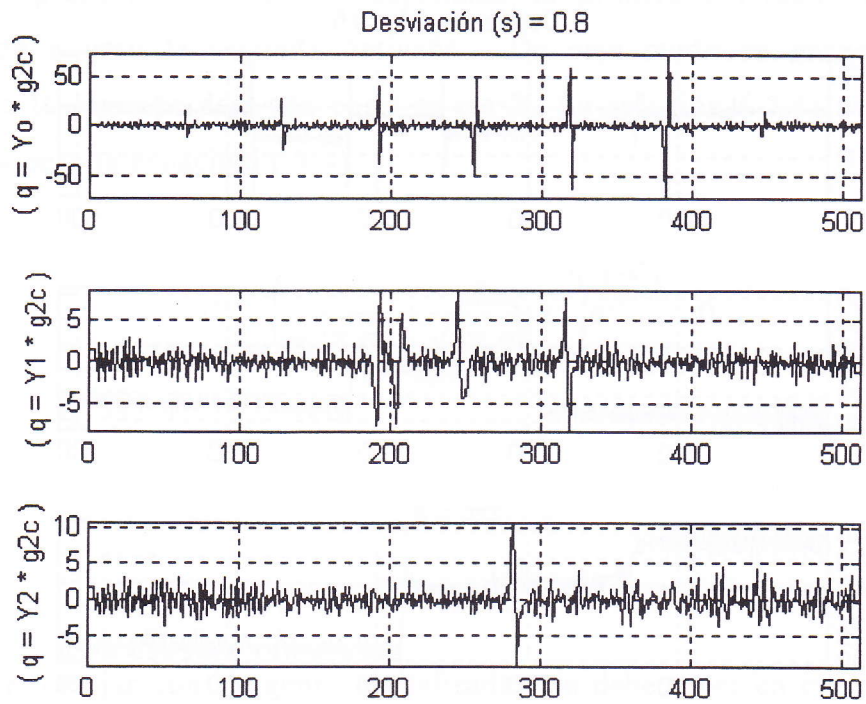


Figura 3.5  $[Y_i * G'']$  para los tres modelos de línea propuestos,  $\sigma = 0.8$ .

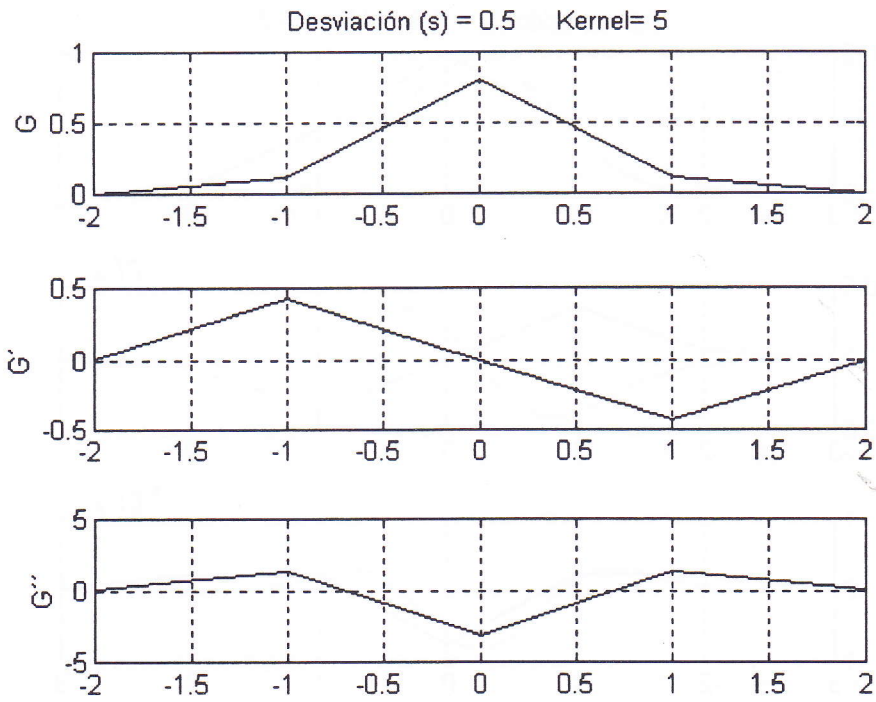


Figura 3.6 Gaussiano y sus dos primeras derivadas para  $\sigma = 0.5$ .

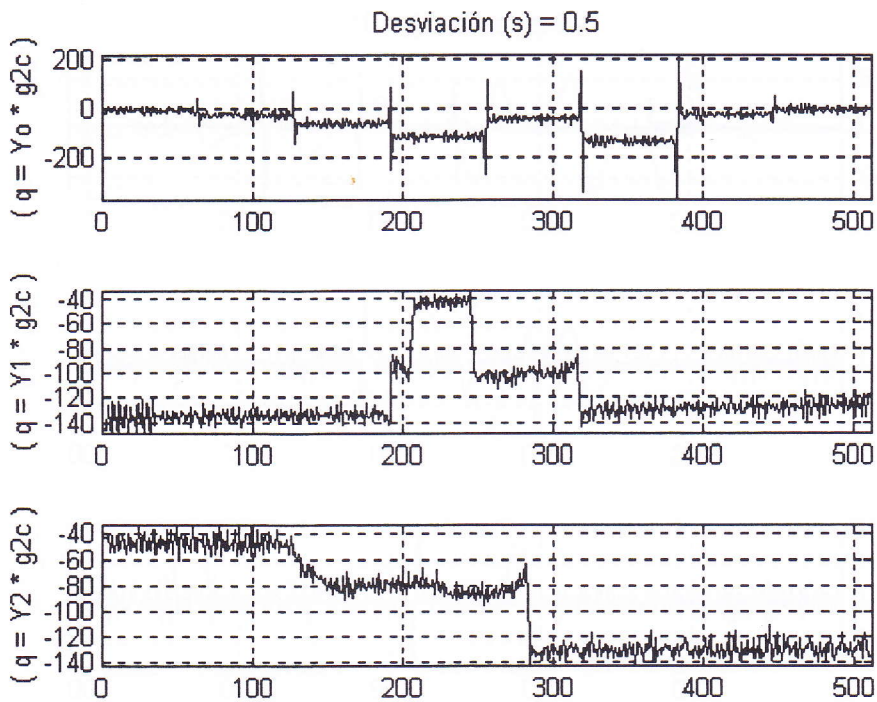


Figura 3.7  $[Y_i * G'']$  para los tres modelos de línea propuestos,  $\sigma = 0.5$ .

En la Figura 3.3 se representa la respuesta de  $[Y*G'']$  para  $\sigma = 8$ . Se puede apreciar el buen comportamiento del filtro  $G''$  en el espacio unidimensional; se comprueba que los pasos por cero se corresponden con sendos cambios de intensidad en las líneas correspondientes de la Figura 3.1, y se nota como ha desaparecido casi completamente el ruido de fondo. En las figuras posteriores se hace lo mismo para  $\sigma = 0.8$ , y  $0.5$ .

En lo que sigue del presente trabajo se empleará la palabra *kernel* para hacer referencia al tamaño o dimensión del filtro ya sea en una o dos dimensiones.

Se puede ver claramente en la Figura 3.7, que el filtro falla para una desviación igual a 0.5 porque las oscilaciones no ocurren en torno a cero, y por lo tanto, es imposible realizar la detección de paso por cero.

En realidad el filtro falla a partir de valores de desviación menores que 0.8, para comprenderlo, es preciso maximizar la primera derivada del gaussiano igualando a cero la segunda derivada. De este modo se encuentra a qué distancia la segunda derivada corta al eje X. La solución ( 3.5) se obtiene de igualar a cero la ecuación ( 3.4).

$$G'' = \left( \frac{-1}{\sqrt{2\pi} \sigma^3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma^5} x^2 \right) e^{\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)} = 0, \quad (3.4)$$

$$x = \pm \sigma. \quad (3.5)$$

Por trabajar con imágenes digitalizadas, se debe tener en cuenta que para convolucionar  $G''$  con una imagen Y, la distancia entre pixel y pixel será siempre la unidad.

En la Figura 3.8 se ha representado con diferente ancho de línea el filtro  $G''$ . En primer lugar se representa  $G''1$  considerando 5 puntos de la ecuación (3.3), y en segundo lugar se representa  $G''2$  considerando 41 puntos de la misma ecuación. En ambos casos se ha empleado una desviación estándar  $\sigma = 0.5$ .

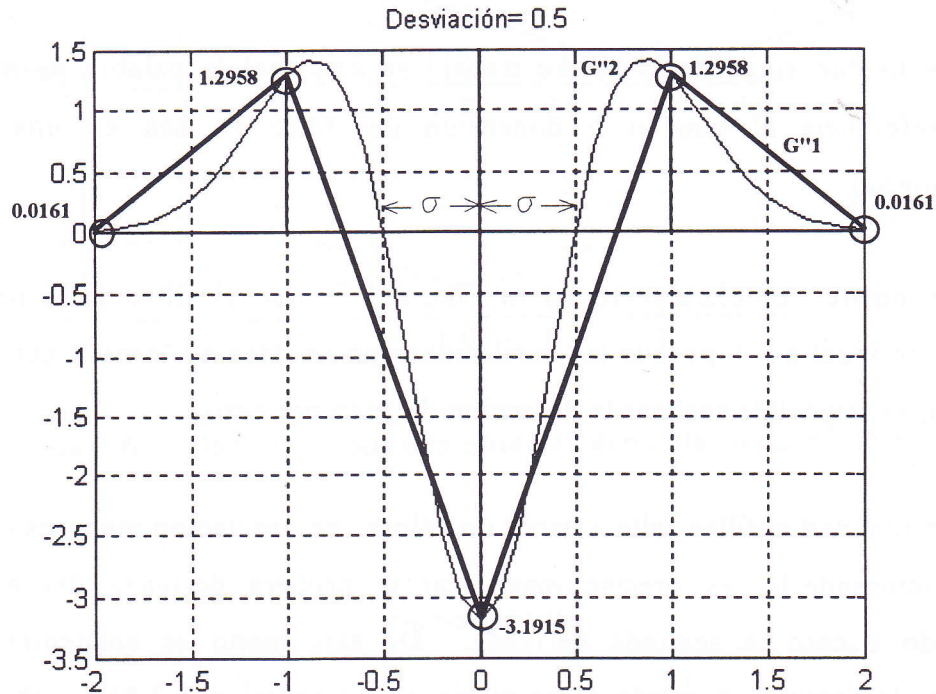


Figura 3.8  $G''$  para desviación 0.5.

Se puede ver que  $G''1$  no corta al eje X en  $\pm 0.5$  como cabría esperar de la ecuación (3.5). Sin embargo, al emplear incrementos de 0.1 en lugar de 1, se satisface la solución expuesta en la ecuación (3.5). Es evidente que los cinco puntos con que se ha representado  $G''1$  no son suficientes para definir completamente  $G''$ . Para precisar aun más,  $G''1$  corta el eje X en  $x = 0.7112294$  y  $G''2$  lo hace en  $x=0.5$ , por lo tanto el error de  $G''1$  es de 0.2112294 porque ambas debieran haberlo hecho en  $x=0.5$ .



En la Figura 3.9 puede verse los pasos por cero de  $G''$  y  $G''^2$  para distintos valores de desviación. Se observa que al aumentar la desviación disminuye el error. Precisamente para una desviación de 0.8 el error es prácticamente despreciable.

Se ha denominado *alcance del filtro* a la relación existente entre la desviación y el área encerrada bajo la curva  $G''$ . Si se calcula la integral de  $G''$  entre  $-\infty$  e  $+\infty$ , el resultado debe ser cero; sin embargo, si el cálculo es discreto, el resultado depende del valor de la desviación. En la sección que viene se establecen estas relaciones.

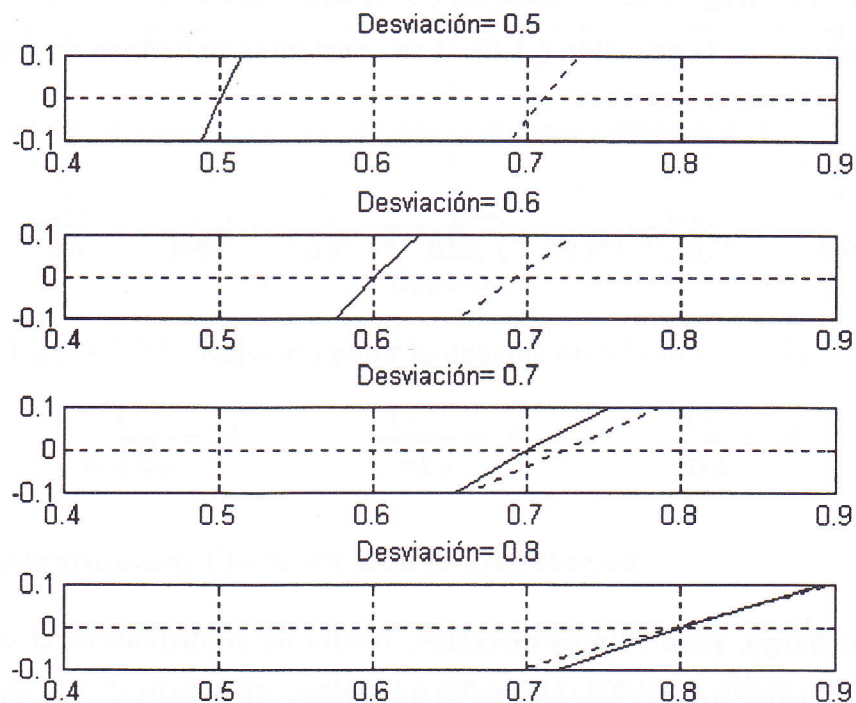


Figura 3.9 Pasos por cero de  $G''$ .

### 3.1.1 Alcance del Filtro

A continuación se presenta un breve análisis para determinar el alcance del filtro con respecto a la desviación, con vistas a su futura implantación en hardware. En este, como en otros casos que se verán posteriormente, se empieza por analizar el caso en el espacio de una dimensión, para luego extender las conclusiones obtenidas al de dos dimensiones.

#### 3.1.1.1 Alcance del Filtro en una Dimensión

En primer lugar se calculan las integrales de  $G''$  para distintos valores de desviación. La integral de la ecuación ( 3.3) calculada entre  $-\infty$  y  $+\infty$  es cero, como se expresa en la ecuación ( 3.6). Las constantes se definen en ( 3.7).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G''(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (k_3 + k_4 x^2) e^{k_2 x^2} dx = 0 \quad (3.6)$$

$$k_2 = \frac{-1}{2 \sigma^2}, \quad k_3 = \frac{-1}{\sqrt{2\pi} \sigma^3}, \quad k_4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma^5}. \quad (3.7)$$

Sin embargo, para valores discretos, conforme se disminuye el valor de la desviación el valor de esta integral se va haciendo más negativa. Lo que justifica la tendencia hacia valores negativos de  $[Y * G'']$  representada en la Figura 3.7.

En la Figura 3.10 se observa que para valores de desviación mayores o iguales que 0.8 la integral es tan pequeña que se puede considerar igual a cero.

Como también se puede ver en las Figuras 3.2 a 3.7, la segunda derivada encontrada haciendo una convolución con el filtro  $G''$ , es válida siempre y cuando la desviación que la ha generado sea mayor a 0.8. Si, por razones de filtrado, se debe utilizar desviaciones menores, se deberá emplear otro método.

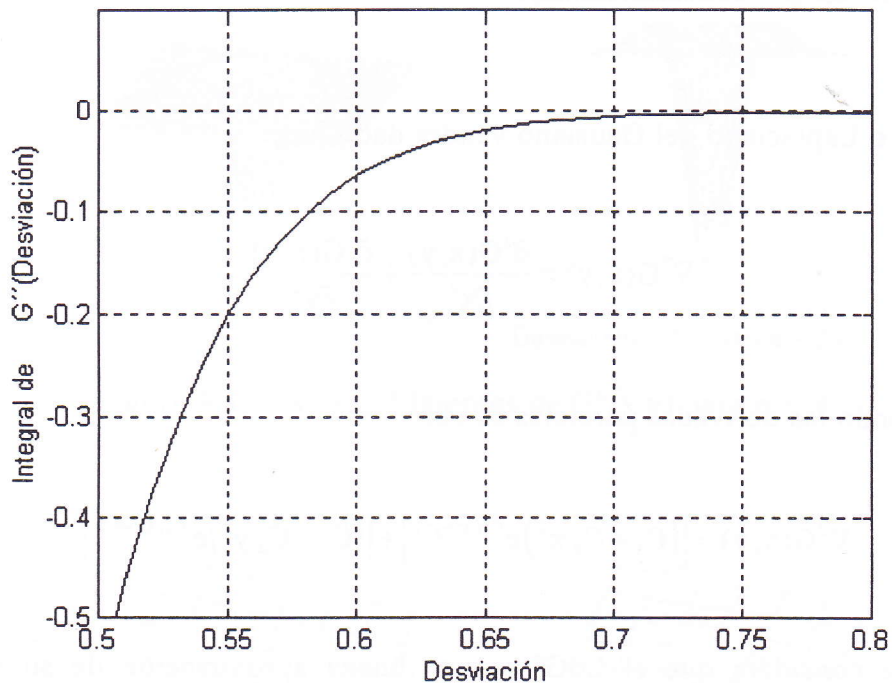


Figura 3.10 Relación entre la desviación y la integral de  $G''$ .

### 3.1.1.2 Alcance del Filtro en Dos Dimensiones

Hasta ahora se ha analizado el comportamiento del filtro en el espacio unidimensional. Haciendo una extensión de estos conceptos al espacio bidimensional, y considerando para este espacio las constantes calculadas en Apéndice A,

$$C_1 = \frac{1}{2\pi\sigma^2}, \quad C_2 = \frac{-1}{2\sigma^2}, \quad C_3 = \frac{-1}{2\pi\sigma^4}, \quad C_4 = \frac{1}{2\pi\sigma^6},$$

( 3.8)

la forma Gaussiana en dos dimensiones se puede expresar como:

$$G(x,y) = C_1 e^{C_2(x^2+y^2)},$$

( 3.9)

y el LoG<sup>2</sup> o Laplaciano del Gaussiano vendrá dado por:

$$\nabla^2 G(x,y) = \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial y^2},$$

reemplazando las derivadas parciales se obtiene:

$$\nabla^2 G(x,y) = \left[ (C_3 + C_4 x^2) e^{C_2(x^2+y^2)} \right] + \left[ (C_3 + C_4 y^2) e^{C_2(x^2+y^2)} \right],$$

Si se considera que el LoG<sup>2</sup> es una buena aproximación de su segunda derivada se puede escribir:

$$G''(x,y) = [2 C_3 + C_4 (x^2 + y^2)] e^{C_2(x^2+y^2)}.$$

( 3.10)

Donde la segunda derivada del Gaussiano en dos dimensiones se expresa según la ecuación ( 3.10); en la Figura 3.11 se ha representado gráficamente la ecuación ( 3.10) para una desviación igual a cuatro. Para contrastar los volúmenes medios resultantes, una representación análoga a la Figura 3.11 se muestra en la Figura 3.12, donde se ha cambiado el valor de la desviación de 4 a 0.5 .

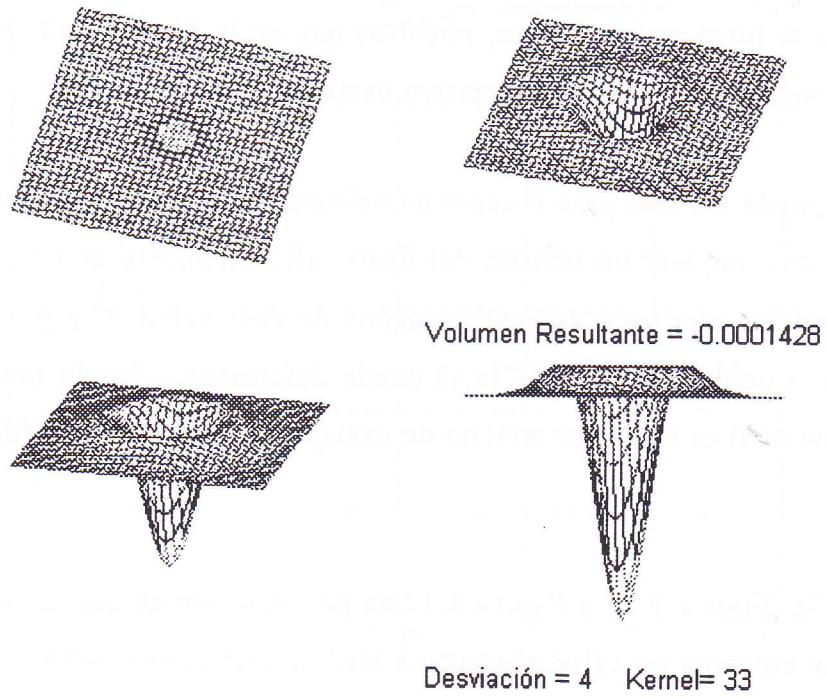


Figura 3.11 Vistas diferentes de  $G''(x,y)$  para  $\sigma = 4$ .

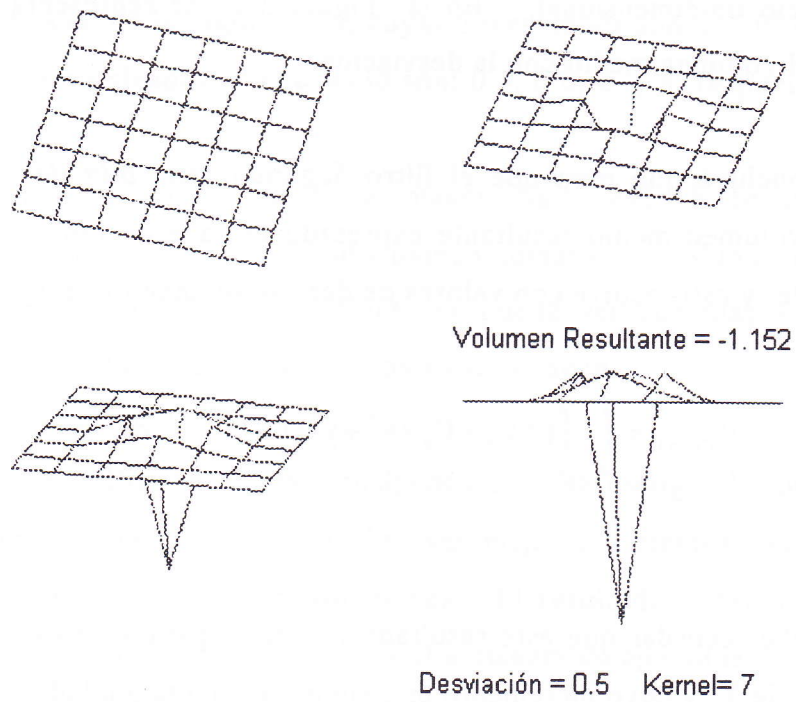


Figura 3.12 Vistas diferentes de  $G''(x,y)$  para  $\sigma = 0.5$ .

En la Figura 3.11, para  $\sigma=4$ , el volumen medio se puede considerar cero, y por tanto el filtro sería efectivo, mientras que en la Figura 3.12, para  $\sigma=0.5$ , el volumen medio toma un valor negativo bastante significativo.

Se puede ver que para obtener un volumen medio resultante cercano a cero no basta con emplear un tamaño del filtro suficientemente grande, sino que hay que considerar que para valores pequeños de desviación  $\sigma$ , y para incrementos iguales a la unidad, el filtro  $G''(x,y)$  queda deformado. Por lo tanto, es preciso determinar cuál es ese valor mínimo de desviación para el cuál el filtro es todavía efectivo.

En la Figura 3.11 y Figura 3.12 se puede observar que el volumen medio resultante aumenta en valor absoluto a medida que la desviación disminuye. Si se calcula el volumen medio resultante en función de la desviación, se observa que para una desviación igual a 0.8 el volumen medio resultante es prácticamente despreciable. Como era de esperar, su comportamiento es parecido al observado en el espacio unidimensional. En la Figura 3.13 se representa la curva que relaciona el volumen medio con la desviación.

Se concluye que para que el filtro *Segunda Derivada del Gaussiano* sea eficaz, el volumen medio resultante expresado en la ecuación (3.11) debe ser despreciable, y esto ocurre con valores de desviación mayores o iguales a 0.8.

$$V_{G''(x,y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (2 C_3 + C_4 (x^2 + y^2)) e^{C_2(x^2+y^2)} dx dy \cong 0 \quad (3.11)$$

Se debe recordar que este resultado es válido para valores discretos tanto de X como de Y, y cuyo incremento es siempre igual a la unidad.

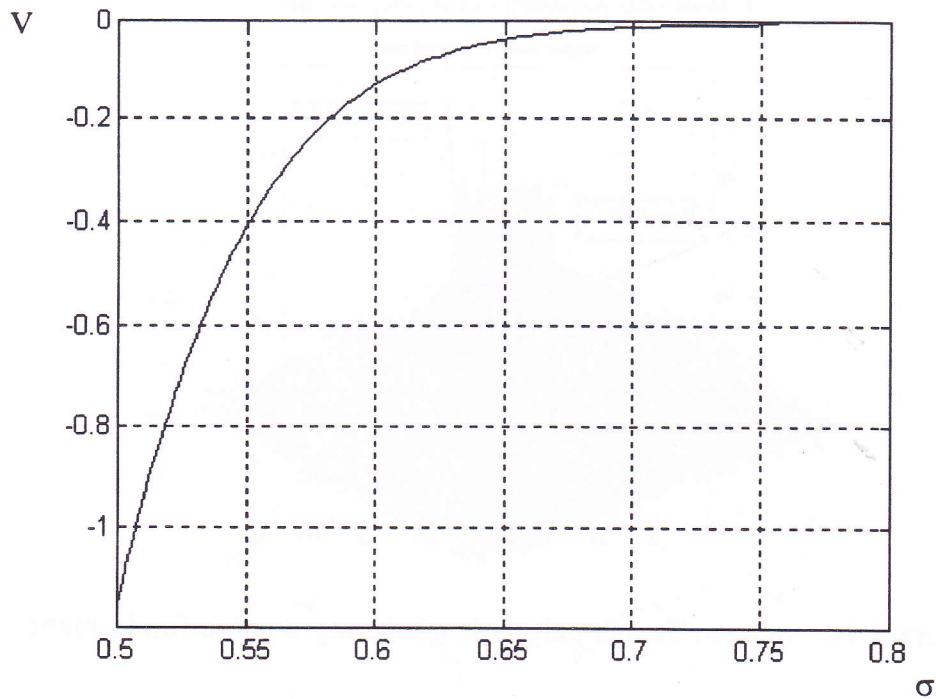


Figura 3.13 Volumen medio resultante en función desviación para 2D.

En las figuras 3.15 a 3.18, se muestra el resultado de aplicar el filtro  $G''$  a la imagen mostrada en la Figura 3.14, cuyas dimensiones son de 160x160 pixels. Las desviaciones empleadas en el cálculo son: 0.5, 0.8, 2, y 4, respectivamente.

La Figura 3.14 corresponde a la imagen digitalizada  $F$  de una pequeña pelota de goma negra sobre un fondo blanco tomada bajo iluminación diurna normal. Por la forma esférica del objeto se puede ver con mayor claridad el resultado obtenido al aplicar los gaussianos a esta imagen.

Se hicieron análisis a diversas imágenes pero se escogió la imagen de la Figura 3.14 por ser la que permitía observar mejor los efectos del cambio de desviación para las diferentes convoluciones. El resultado obtenido con otras imágenes ha sido recogido en el Apéndice D a manera de ejemplos.

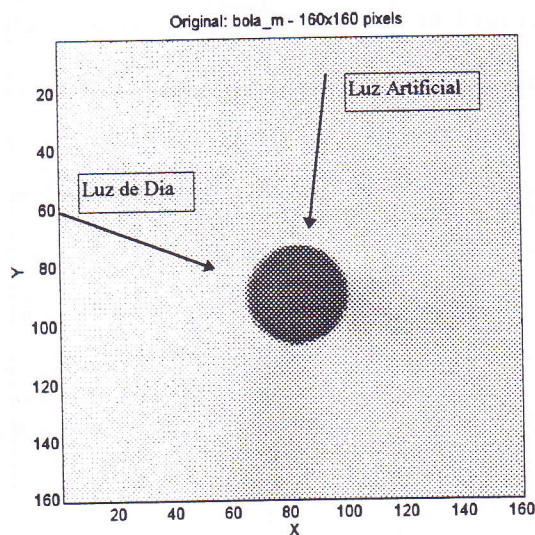


Figura 3.14 Imagen de una pelota de goma negra sobre fondo blanco.

Puede verse en la Figura 3.15 que para una desviación de 0.5, los valores que resultan de hacer la convolución  $F * G''$  se encuentran desplazados con respecto al eje  $Z=0$  en aproximadamente 170 unidades negativas.

En cambio, para las Figuras que corresponden a desviaciones mayores que 0.8, sus gráficas muestran valores centrados en torno a  $Z=0$ , lo cual permite aplicar un algoritmo de detección de paso por cero para determinar la localización y la ubicación de los bordes del objeto buscado.

Sin embargo, como se puede observar, para valores de desviación menores a 0.8 la figura muestra un resultado desplazado uniformemente hacia valores negativos, otras pruebas demuestran que esto no es siempre así, por lo tanto, aunque se conozca ese desplazamiento, si la imagen no es uniforme, no se podría aplicar un algoritmo de detección de paso por cero.



Segunda Derivada F2 - Desviación: 0.5 - Modo: 1

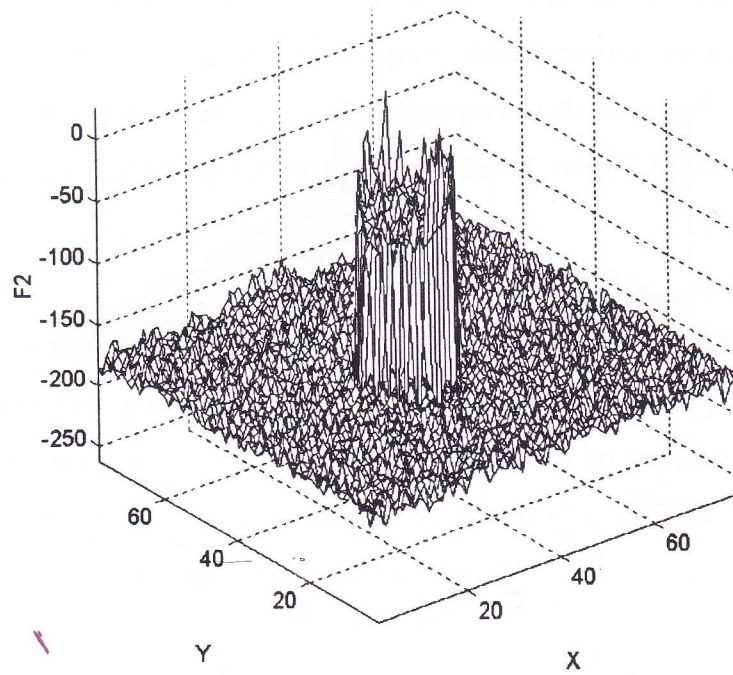


Figura 3.15

Segunda Derivada F2 - Desviación: 0.8 - Modo: 1

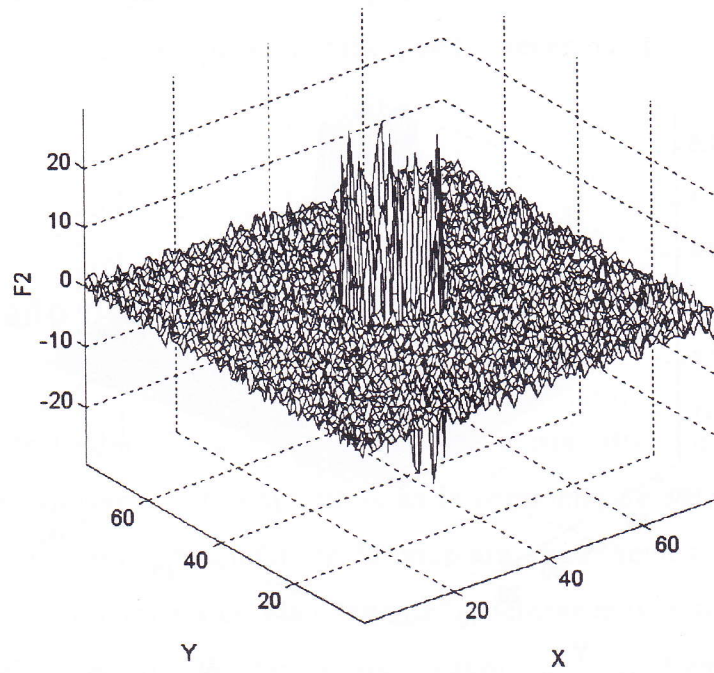


Figura 3.16

Segunda Derivada F2 - Desviación: 2 - Modo: 1

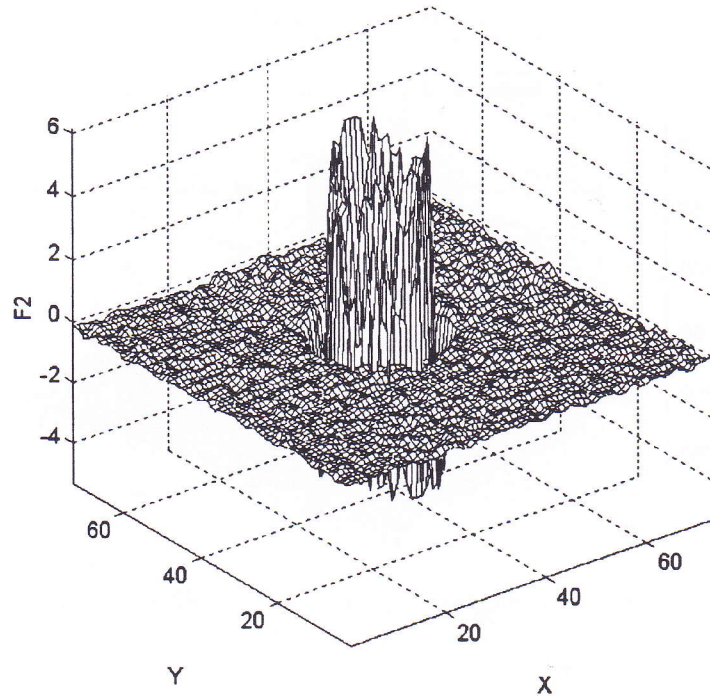


Figura 3.17

Segunda Derivada F2 - Desviación: 4 - Modo: 1

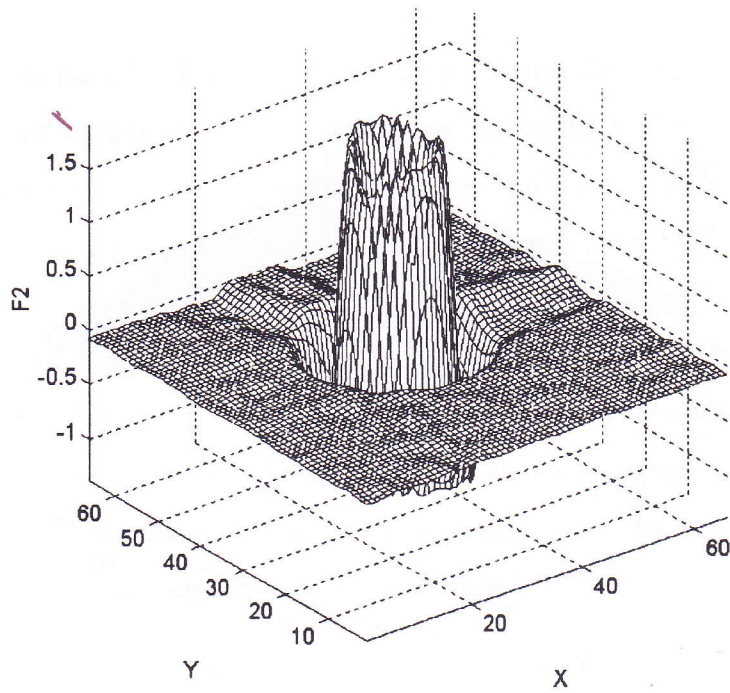


Figura 3.18

Obsérvese que para  $\sigma=4$  se han pronunciado las sombras que aparecen tenuemente marcadas en la imagen original, mientras que ésta información pasa prácticamente desapercibida para valores pequeños de desviación. Asimismo, los gradientes pequeños de intensidad, y también el ruido, han desaparecido para  $\sigma=4$ .

Se puede afirmar que mientras la localización de los bordes encontrando los pasos por cero se favorece con el aumento de la desviación y por lo tanto con el tamaño de la máscara, la localización se comporta en sentido contrario. Si se aumenta la desviación, la capacidad de suavizado del filtro aumenta, y la cantidad de bordes detectados disminuye.

Como se ve existen dos conceptos en contraposición que se deben tener en cuenta, la detección y la localización. Dependiendo de la aplicación de que se trate se encontrará el valor de desviación óptimo para encontrar los bordes buscados; no se puede, por tanto, hablar de una desviación óptima para todas las aplicaciones. Alguna aplicación puede necesitar la detección de bordes gruesos descartando los finos, y otra puede necesitar precisamente todo lo contrario.

### 3.1.2 Tamaño del Filtro

Aparte de la detección y la localización, existe otro concepto a tener en cuenta para encontrar el filtro óptimo, y es la economía de cálculo. Este último está relacionado con el tamaño de la máscara, que hemos denominado con kernel, que convolucionará con la imagen  $F$ ; mientras mayor sea el tamaño de la máscara y el valor de la desviación, mayor será el tiempo de proceso,

umentando en proporción geométrica. Así, el tamaño del kernel debe ajustarse al tamaño mínimo necesario para que éste sea efectivo.

La suavidad del filtro depende de su efectividad, característica que evita que este último introduzca componentes no existentes en la imagen original. La distribución será más suave mientras mayor sea la desviación, y el aumento de ésta produce un aumento en el tamaño del kernel y por tanto del costo computacional.

Para la aplicación que dio origen a la presente tesis, la economía de cálculo es uno de los factores más importantes a tener en cuenta durante el procesamiento de la información, y es el criterio que más se tiene en cuenta al realizar las simplificaciones. Por lo tanto, se debe encontrar los tamaños de kernel óptimos para desviaciones mayores a 0.8.

Por lo analizado hasta ahora, se ve que el volumen medio que resulta de integrar dos veces  $G''(X,Y)$ , en los ejes X e Y respectivamente, debe ser lo más pequeño posible. Si se consideran los límites de integración, en ambos ejes, de menos infinito a más infinito, siempre el volumen medio resultante será cero para valores de  $\sigma$  grandes.

Es evidente que para una desviación determinada, existe un tamaño de máscara para el cuál el volumen medio resultante es prácticamente despreciable para efectos del filtrado. Por lo tanto, se precisa determinar la relación que exprese el tamaño óptimo del filtro -kernel- y el valor adecuado de la desviación.

Como hasta ahora, y dado que tanto el Gausiano como sus derivadas son simétricos respecto al eje Z, tanto si se visualizan desde el eje X como desde el Y, se puede considerar el análisis en una dimensión para obtener la relación buscada.

### 3.1.2.1 Tamaño del Filtro en Una Dimensión

Considérese la gráfica de la Figura 3.19 en la que se ha representado  $G''(x)$  para  $\sigma = 10$ . Dado que  $A_1=B_1$ , y  $A_2=B_2$ , el análisis se reduce a considerar el área que resulta de calcular la integral de  $G''(x)$  en el intervalo  $[0,L]$ , donde  $L$  debe cumplir una condición restrictiva; téngase en cuenta que  $\text{kernel}=2L+1$ .

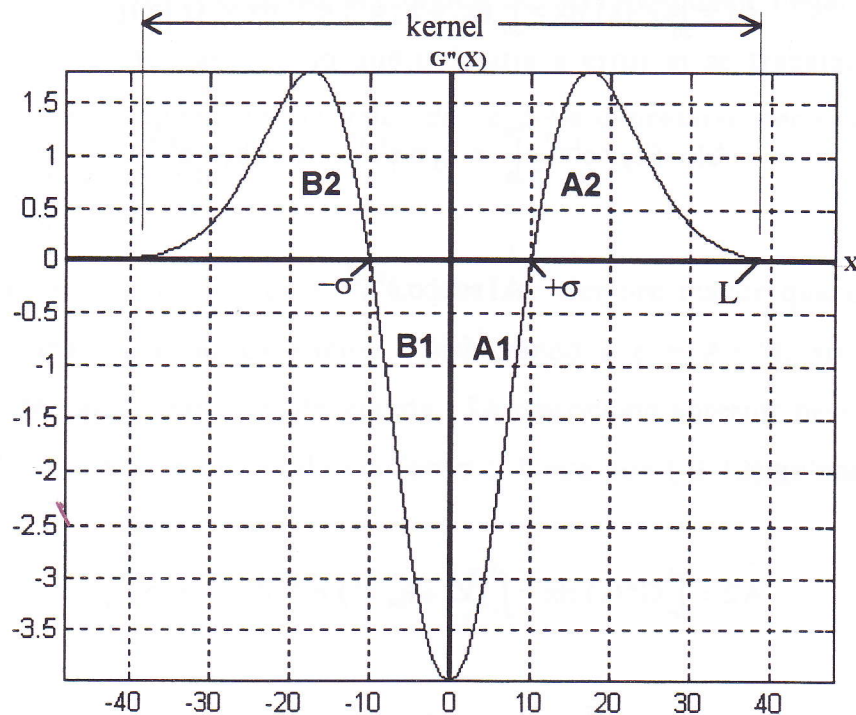


Figura 3.19

Lo ideal sería que  $L$  fuera muy grande para que se cumpla la condición siguiente  $A_1+A_2=0$ . Sin embargo, el kernel debe ser simétrico, impar, y lo más pequeño posible. La única manera de lograrlo es flexibilizando la condición anterior a  $A_1+A_2 \leq \epsilon$  tal que  $\epsilon$  sea un número relativamente muy pequeño.

### 3.1.2.1.1 Consideraciones en Espacio Continuo

Si se calculan las áreas integrando directamente  $G''(x)$ , se puede encontrar  $A1$  directamente de  $G'(x)$ . Las relaciones siguientes expresan este procedimiento, así para,

$$k_2 = \frac{-1}{2\sigma^2}, \quad k_3 = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}, \quad k_4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^5},$$

$$A1 = \int_0^\sigma G''(x) dx = \int_0^\sigma (k_3 + k_4 x^2) e^{k_2 x^2} dx = G'(x) \Big|_0^\sigma,$$

$$A1 = (k_3 x e^{k_2 x^2}) \Big|_0^\sigma = k_3 \sigma e^{k_2 \sigma^2} - 0 = k_3 \sigma e^{k_2 \sigma^2},$$

$$A1 = k_3 \sigma e^{k_2 \sigma^2}.$$

( 3.12)

Por analogía,

$$A2 = \int_\sigma^L G''(x) dx = \int_\sigma^L (k_3 + k_4 x^2) e^{k_2 x^2} dx = G'(x) \Big|_\sigma^L,$$

$$A2 = (k_3 x e^{k_2 x^2}) \Big|_\sigma^L = k_3 L e^{k_2 L^2} - k_3 \sigma e^{k_2 \sigma^2} = k_3 L e^{k_2 L^2} - A1,$$

$$A1 + A2 = k_3 L e^{k_2 L^2},$$

( 3.13)

si  $E = A1 + A2$ ,  $E$  deberá ser menor o igual que  $\epsilon$ , luego se puede escribir:

$$E = k_3 L e^{k_2 L^2}, \quad (3.14)$$

$$E \leq \varepsilon. \quad (3.15)$$

El valor de  $\varepsilon$  no debe ser constante porque  $A_1$  y  $A_2$  pueden llegar a ser muy pequeños cuando  $\sigma$  es muy grande. Así por ejemplo, si  $A_1$  es la mitad de  $A_2$ , condición no deseada, la suma algebraica de  $A_1+A_2$  puede llegar a ser muy pequeña si  $\sigma$  es muy grande, lo que induciría a error si se trabajara con un  $\varepsilon$  constante. Esto sugiere que el valor de  $\varepsilon$  debe expresarse necesariamente en función de la desviación  $\sigma$ .

Como  $A_1$  es función de  $\sigma$ , y  $L$  debe ser siempre mayor que  $\sigma$ , se puede establecer una buena aproximación considerando a  $\varepsilon = A_1/M$ , siendo  $M$  una constante de valor relativamente grande. La restricción anterior permite obtener el valor de  $\varepsilon$  en función de la desviación  $\sigma$ ; luego con (3.12) se puede deducir que:

$$\varepsilon = \frac{A_1}{M}, \quad (3.16)$$

$$\varepsilon = \frac{k_3 \sigma e^{k_2 \sigma^2}}{M}. \quad (3.17)$$

Dado que el tamaño de la máscara es  $\text{kernel}=2L+1$ , reemplazando (3.14) y (3.17) en (3.15), se puede determinar la condición que debe cumplir  $L$  para que sea un valor válido para el cálculo del kernel.  $L$  deberá cumplir la siguiente condición:

$$k_3 L e^{k_2 L^2} \leq \frac{k_3 \sigma e^{k_2 \sigma^2}}{M},$$

$$L e^{k_2 L^2} \leq \frac{\sigma e^{k_2 \sigma^2}}{M}.$$

( 3.18)

Considerando la condición de la ecuación ( 3.18), y teniendo en cuenta que  $\text{kernel}=2L+1$ , el kernel adecuado será aquel que cumpla la condición siguiente:

$$\frac{K-1}{2} e^{k_2 \left(\frac{K-1}{2}\right)^2} \leq \frac{\sigma e^{k_2 \sigma^2}}{M}; \quad K=\text{kernel}, \quad k_2 = \frac{-1}{2 \sigma^2}$$

( 3.19)

En la Figura 3.20 se representa la relación de los kernel K que cumplen la condición de la ecuación (3.18) para valores de desviación comprendidos entre 0.8 y 100, con intervalos iguales a uno. Se ha considerado un valor de  $M=100$ .

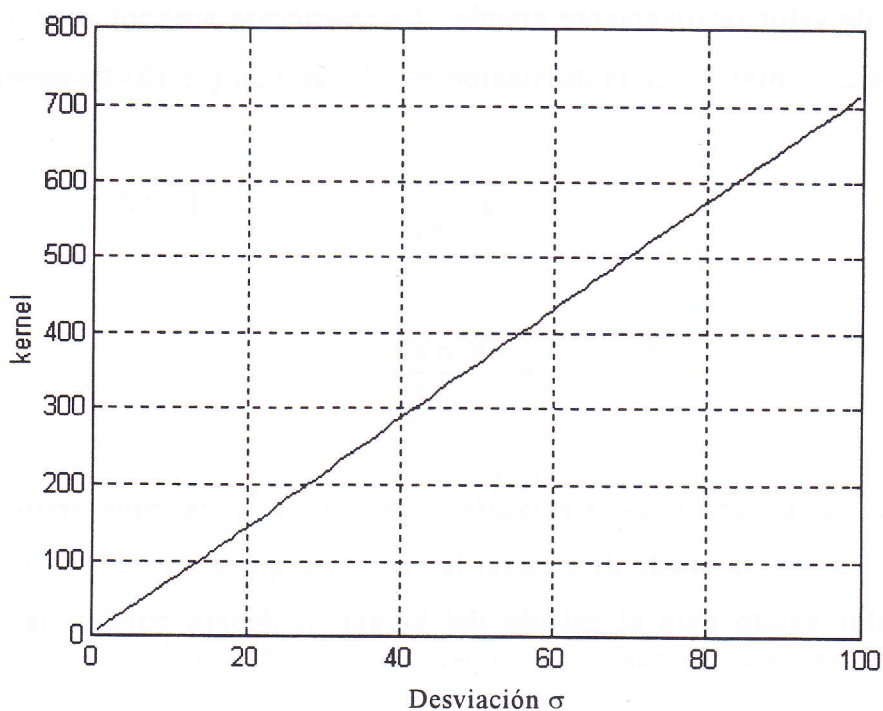


Figura 3.20 Relación kernel y desviación, cálculo continuo.



Se puede observar en la Figura 3.20 que la relación entre el kernel y la desviación es prácticamente lineal. La Figura 3.21 muestra en detalle parte de la Figura 3.20, para valores de desviación comprendidos entre 0.8 y 2.

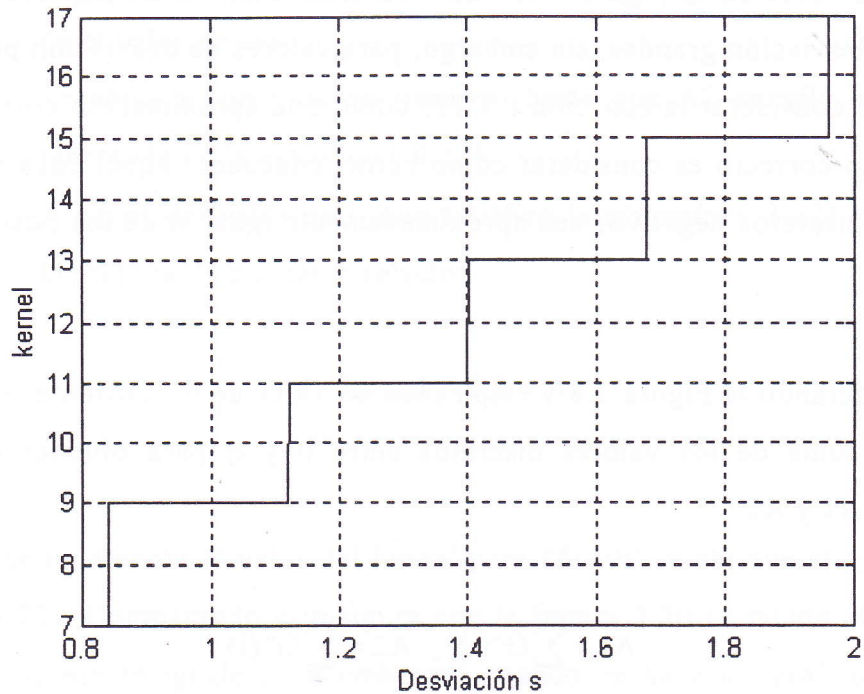


Figura 3.21 Detalle de kernel y. desviación , cálculo continuo.

Tomando dos puntos  $(\sigma, \text{kernel})$  se puede calcular la ecuación de una recta que agrupe los puntos representados en la Figura 3.20. Se debe tener en cuenta que el kernel será el valor *entero\_impar* más próximo al que proporciona la ecuación (3.20). La Figura 3.21 ilustra los saltos a valores enteros e impares que va tomando el kernel.

$$K = 7.146\sigma + 1.2832; \text{ kernel} = \text{entero\_impar}(K), \text{ y } \sigma > 0.8$$

$$\sigma = \frac{K - 1.2832}{7.146}$$

( 3.20)

### 3.1.2.1.2 Consideraciones en Espacio Discreto.

Es importante tener en cuenta que la relación encontrada en ( 3.20) ha sido deducida considerando el filtro  $G''(x,y)$  como una función continua en el tiempo. Si se hace el cálculo discreto el área encerrada bajo la curva tiene otro valor, como puede verse en la Figura 3.8. Esta consideración no es importante para valores de desviación grandes, sin embargo, para valores de desviación pequeños no se puede considerar la ecuación ( 3.12) como una aproximación correcta del área  $A1$ . Lo correcto es considerar como kernel adecuado, aquel cuya suma de los valores discretos negativos sea aproximadamente igual al de los positivos en  $G''(x,y)$ .

Considerando la Figura 3.8 y empleando un valor de  $\sigma$  constante, se puede calcular la suma de los valores discretos entre 0 y  $\sigma$  para obtener el valor discreto de  $A1$  y  $A2$ .

$$A1 = \sum_{i=0}^{i=\sigma'} G''(i) , \quad A2 = \sum_{i=\sigma'}^{i=L} G''(i) , \quad (3.21)$$

donde  $\sigma'$  es un valor entero impar más cercano por defecto a al valor  $\sigma$ , e  $i$  es siempre entero y  $L$  es un valor a determinar. De esta manera, si,

$$A1+A2 < \varepsilon \quad \text{y} \quad \varepsilon = A1/M ,$$

se puede escribir,

$$A1+A2 < A1/M.$$

entonces,

$$A2 < A1 \left( \frac{1}{M} - 1 \right). \quad (3.22)$$

Por lo tanto, es posible encontrar el valor del kernel que satisfaga la condición anterior con el siguiente algoritmo,

- Se calcula  $A_1$  con la ecuación ( 3.21),
- según la ecuación ( 3.22), y de la misma forma como se calculó  $A_1$ , se va aumentando  $L$  de ( 3.21) y por lo tanto  $A_2$ , al que inicialmente se da el valor de cero.
- Se entra en un proceso iterativo hasta que  $A_2$  cumpla la condición planteada en la ecuación ( 3.22).
- A partir del valor de  $L$  que satisfizo la ecuación ( 3.22) se calcula el kernel con la siguiente relación:

$$\text{kernel} = 2 L + 1 \quad ( 3.23)$$

Si se representa el valor del kernel para  $M=100$  se obtiene el gráfico de la Figura 3.22. Comparando esta figura con la Figura 3.20 se puede observar que son prácticamente iguales; sin embargo, cuando se hace un gráfico en detalle como el de la Figura 3.23, se observan diferencias con el detalle de la Figura 3.21. Este resultado es esperado dado que, como se dijo anteriormente, las diferencias aparecen para valores relativamente pequeños de desviación.

Se puede afirmar que para encontrar el tamaño adecuado del kernel, si la desviación es muy grande, se puede emplear la relación descrita en la ecuación ( 3.20); si por el contrario se trabaja con valores de desviación pequeños, como ocurrirá en la mayoría de los casos, se deberá encontrar el tamaño del filtro calculándolo con el algoritmo planteado en esta sección. Se puede apreciar el ahorro en costo computacional comparando la Figura 3.23 con la Figura 3.21. Por ejemplo, se ve que para pasar de un tamaño de kernel de 7 a 9, en la Figura 3.21 se necesita una desviación de 0.85, mientras que en la Figura 3.23 solo se hace necesario este cambio hasta que  $\sigma$  toma el valor de 1.

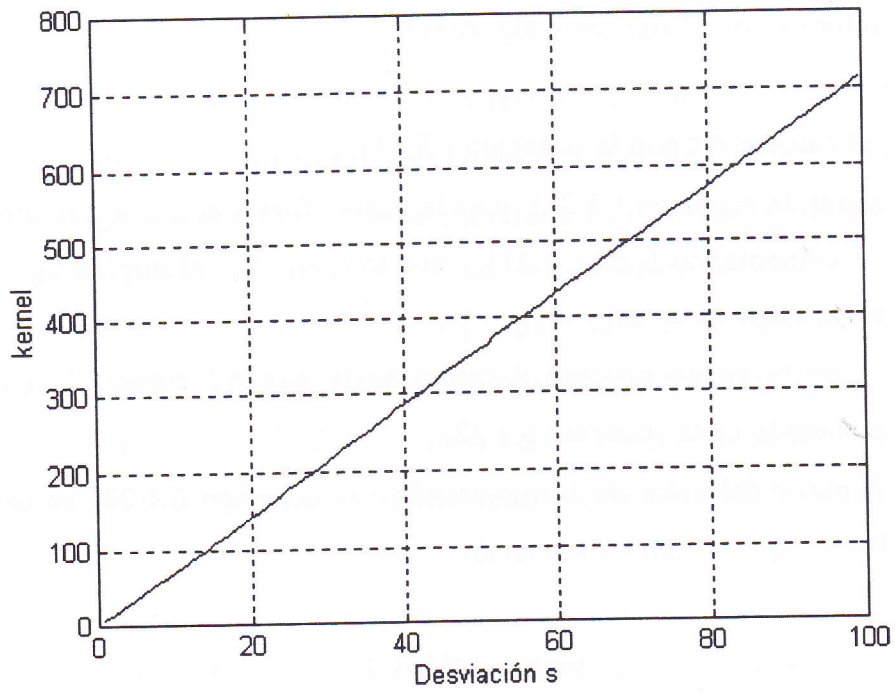


Figura 3.22 Relación kernel y. desviación , cálculo discreto.

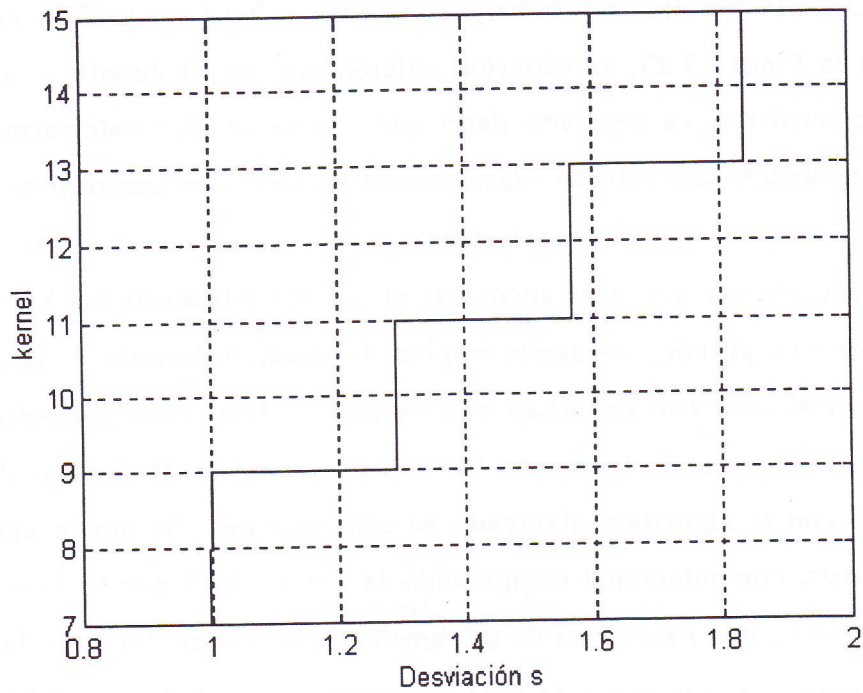


Figura 3.23 Detalle de kernel y. desviación , cálculo discreto.

### 3.1.2.2 Tamaño del Filtro en Dos dimensiones

Al extender estos conceptos al espacio bidimensional se plantea la necesidad de considerar que el tamaño máximo del kernel en un filtro de forma cuadrada es la diagonal y no su lado. Afortunadamente, como existe simetría radial en  $G''$ , y dado que la distancia del centro a cualquiera de sus ángulos será mayor que a cualquiera de sus lados, se puede afirmar que, considerando las relaciones anteriores, si  $L$  satisface la condición de la ecuación ( 3.22), con mayor razón lo hará su diagonal,

$$D = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2} L, \quad (3.24)$$

por ser mayor que  $L$ , y por generar un  $G''(x,y)$  de mucho menor valor.

En la Figura 3.24-b se observa que mientras  $G''(x,y)$  se hace casi cero para  $L = x = 3$ , en la Figura 3.24-c, para  $D = r = 4.243$ , el valor es cero. El hecho de que para una distancia  $D$  el valor de  $G''$  no sea significativo implica que el kernel es adecuado. Se muestra por tanto que el cálculo del tamaño del kernel para una dimensión puede extenderse a dos dimensiones, y que el algoritmo propuesto es también válido para este espacio.

Con la electrónica convencional disponible en el mercado se puede aplicar este filtro empleando una configuración hardware que, realizando una sola operación de convolución entre imagen e imagen, encuentre los bordes en tiempo real. La desviación deberá ser siempre mayor que 0.8 y el tamaño mínimo del filtro quedará determinado por la electrónica asociada.

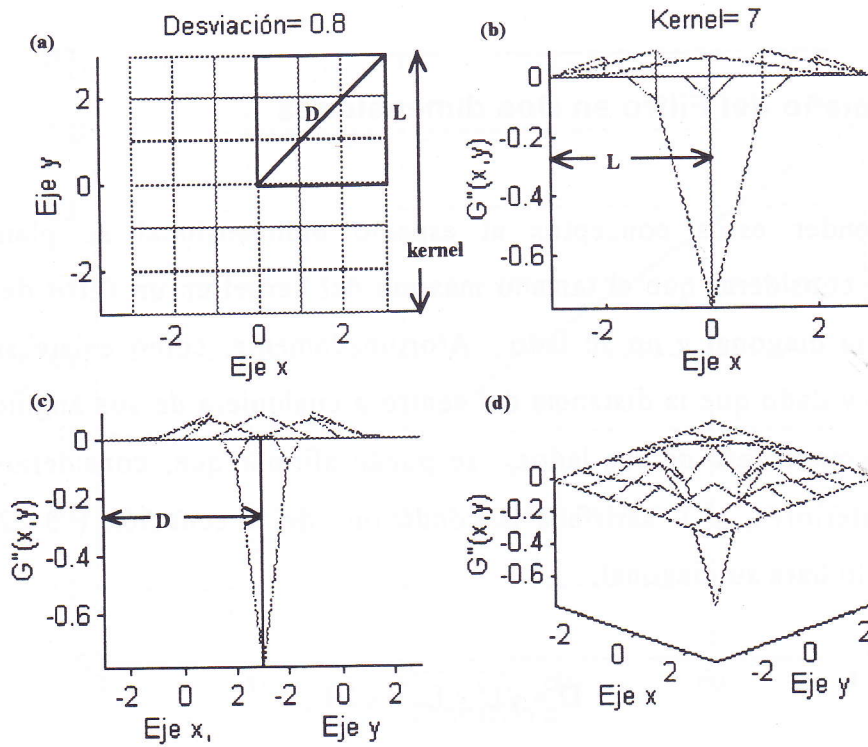


Figura 3.24

En la Figura 3.25 se muestra una primera aproximación a lo que sería un sistema de procesamiento que calcule la segunda derivada del gaussiano bajo una arquitectura "pipeline".

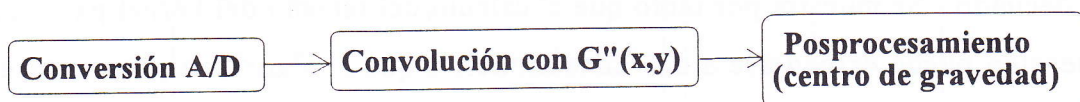


Figura 3.25 Configuración en "Pipeline".

El posprocesamiento depende de la aplicación en particular. En la Figura 3.26 se muestra el resultado obtenido al aplicar el algoritmo a otra imagen de la pelota de goma negra de tamaño 160x160 pixels. Nótese la respuesta a frecuencias altas del filtro.

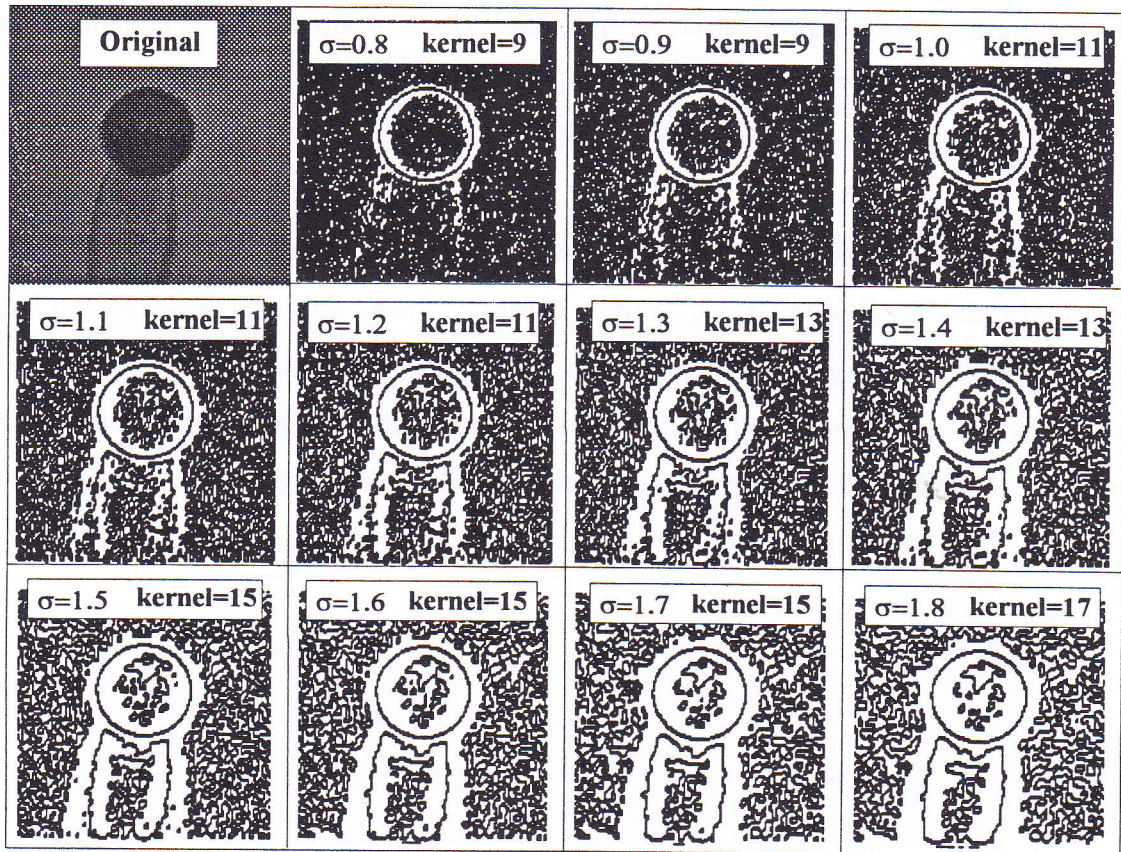


Figura 3.26 Bola negra y diferentes valores de desviación .

Es notorio el drástico aumento del tamaño del kernel a medida que se incrementa ligeramente la desviación. Este factor traducido a carga computacional hace inviable el empleo del filtro en aplicaciones en tiempo real para desviaciones grandes. El algoritmo empleado para localizar los puntos de paso por cero en dos dimensiones es muy sencillo y se describe a continuación

### 3.1.3 Localización - Paso por Cero

Una vez detectado el borde, hay que localizarlo en el plano. Existe una numerosa colección de artículos que se ocupan de este tema, entre las publicaciones consultadas, destacan principalmente la de Haralick (1982), y la de Yuille y Poggio (1986).

Aunque presentan soluciones válidas, éstas suponen un alto costo computacional. En la presente tesis se buscan soluciones simples que no deterioren los resultados y que sean fácilmente implantables en hardware.

El criterio empleado para encontrar localizar un paso por cero se define, considerando la Figura 3.27, como sigue. Para dos puntos "a" y "b" consecutivos y de signo contrario en una dirección determinada, cuyos valores de intensidad correspondientes son "la" y "lb", el criterio a tener en cuenta debe permitir discernir a cuál de los puntos corresponde el punto-borde detectado.

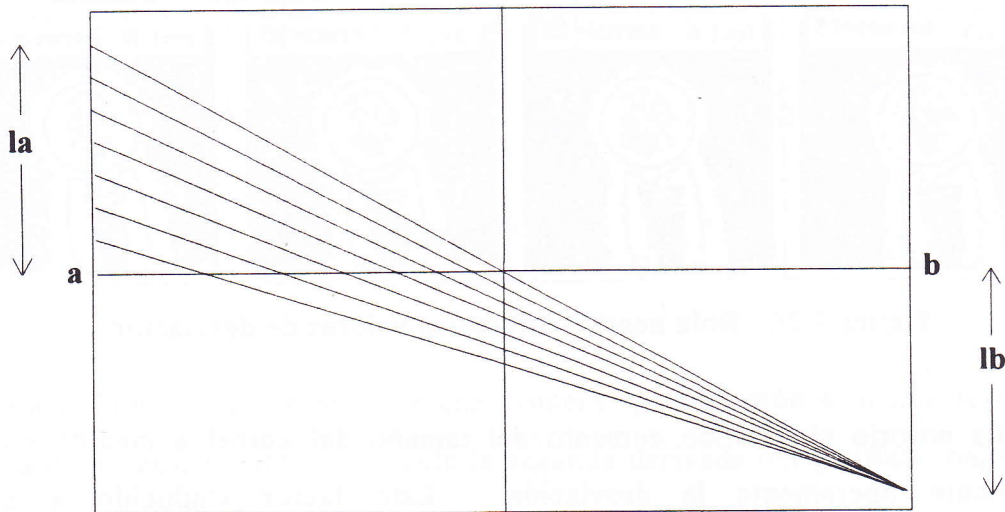


Figura 3.27 Localización del punto-borde para una dirección.

Nótese que para una distancia "lb" fija, mientras más pequeña sea "la" más cerca del punto "a" corta el eje horizontal a la recta que une "la" con "lb". Por lo tanto, si se ha detectado un borde entre los puntos "a" y "b", lo que equivale a decir que se ha encontrado un cambio de signo entre "la" y "lb", se puede afirmar que el punto borde está localizado en el punto "i" cuya "li" sea más pequeña en valor absoluto. Para el ejemplo de la Figura 3.27 todos los casos dibujados corresponden a un punto-borde localizado en  $i = a$ .

Si "la" y "lb" son iguales, se deberá tomar una decisión. Por convención se asignarán a la izquierda. Si "la" es negativo y "lb" positivo, el razonamiento es



exactamente el mismo. De esta forma se puede plantear la siguiente secuencia para la localización del paso por cero y la consiguiente asignación de los puntos borde, partiendo de dos puntos de  $[ Fc=F*G ]$  que se llamarán a y b:

Si "la" o "lb" es igual a cero, el punto borde será aquel cuyo li es cero. Si son distintos de cero:

1. Detección:  $div = la / lb ;$   
 si,  $div \leq 0 \Rightarrow$  borde detectado.  
 $div > 0 \Rightarrow$  no hay borde.
  
2. Localización:  
 si,  $abs(div) > 1 \Rightarrow$  punto-borde = b.  
 $abs(div) \leq 1 \Rightarrow$  punto-borde = a.

En los ejemplos presentados en esta sección, los pasos uno y dos se han aplicado en cuatro direcciones diferentes para configurar los mapas de bordes. Las direcciones se muestran en la Tabla 3-1.

**Tabla 3-1** Direcciones de búsqueda.

Dirección	Ángulo respecto al eje X	Sentido
0	+45°	↗
1	0°	→
2	-45°	↘
3	-90°	↓

Para todo punto "p" que pertenece a la matriz Fc existe, en cada dirección, un punto "a" que es el punto anterior en la dirección correspondiente, y un "b"

que es el punto "p" mismo. De este modo, para cada "p" se deben hacer cuatro inspecciones, una en cada dirección, para determinar si existe un borde en ese punto en la dirección analizada.

En la Figura 3.28 se muestra la aplicación de este algoritmo para localizar los puntos-borde en una imagen mucho más compleja que la representada en la Figura 3.26. Se trata de un mecanismo motor-reductor de un robot, teniendo como fondo de imagen una pared muy rugosa.

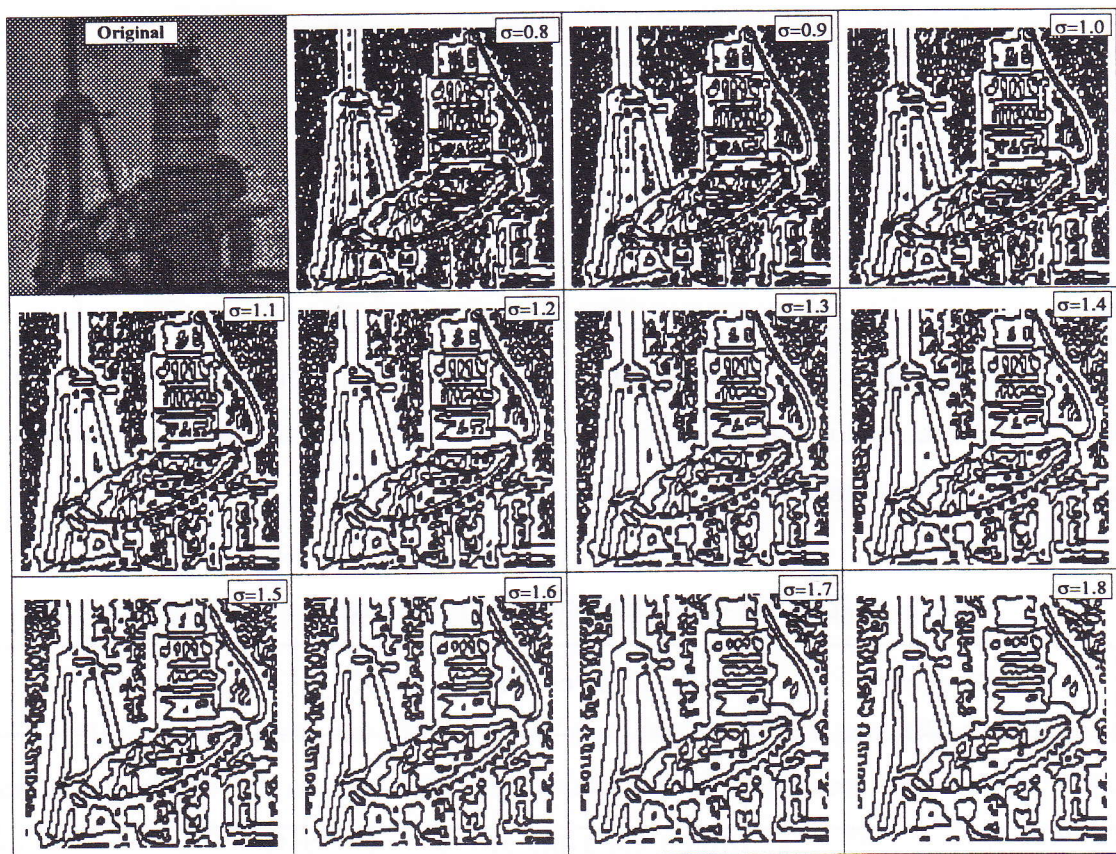


Figura 3.28

Puede apreciarse la continuidad de las formas para valores de desviación que varían entre 0.8 y 1.8, así como la desaparición de los detalles finos conforme aumenta el valor de la desviación.

### 3.1.3.1 Empleo de Umbrales

Para localizar los puntos bordes se podría añadir al algoritmo una restricción adicional para hacerlo más flexible. Esta restricción consiste en evaluar la variación de la fuerza de cambio de intensidad, o lo que es lo mismo, considerar si "la" o "lb" son mayores que cierto valor umbral. Esta consideración es peligrosa puesto que, como se verá más adelante, si no se elige el umbral adecuado se produce discontinuidad en los contornos de los bordes encontrados. De cualquier manera, el algoritmo se enuncia de la siguiente manera. Para la y lb distintos de cero,

1. Detección:  $div = la / lb$ ,  $sum = abs(la) + abs(lb)$  ;  
 si,  $(div \leq 0)$  y  $(sum > umbral) \Rightarrow$  borde detectado.  
 $div > 0 \Rightarrow$  no hay borde.
  
2. Localización:  
 si,  $abs(div) > 1 \Rightarrow$  punto-borde = b.  
 $abs(div) \leq 1 \Rightarrow$  punto-borde = a.

Nótese que se ha modificado el punto uno, incluyendo la restricción adicional ( $sum > umbral$ ), donde "sum" es la suma de los valores absolutos de "la" y "lb". Véase en el ejemplo de la Figura 3.29 el resultado de aplicar un umbral igual a 4 unidades en la misma secuencia de valores de desviación que en la gráfica de la Figura 3.28.

Se puede observar que la imposición de un umbral evitará que algunos puntos, que verifican cambio de signo, sean considerados puntos-borde. Como se decía anteriormente esta imposición produce dos efectos contradictorios; primero, ayuda a eliminar puntos-bordes -reales- no deseados para una desviación determinada; y segundo, genera discontinuidades dado que favorece

la eliminación de puntos, normalmente considerados puntos-borde para un determinado valor de desviación.

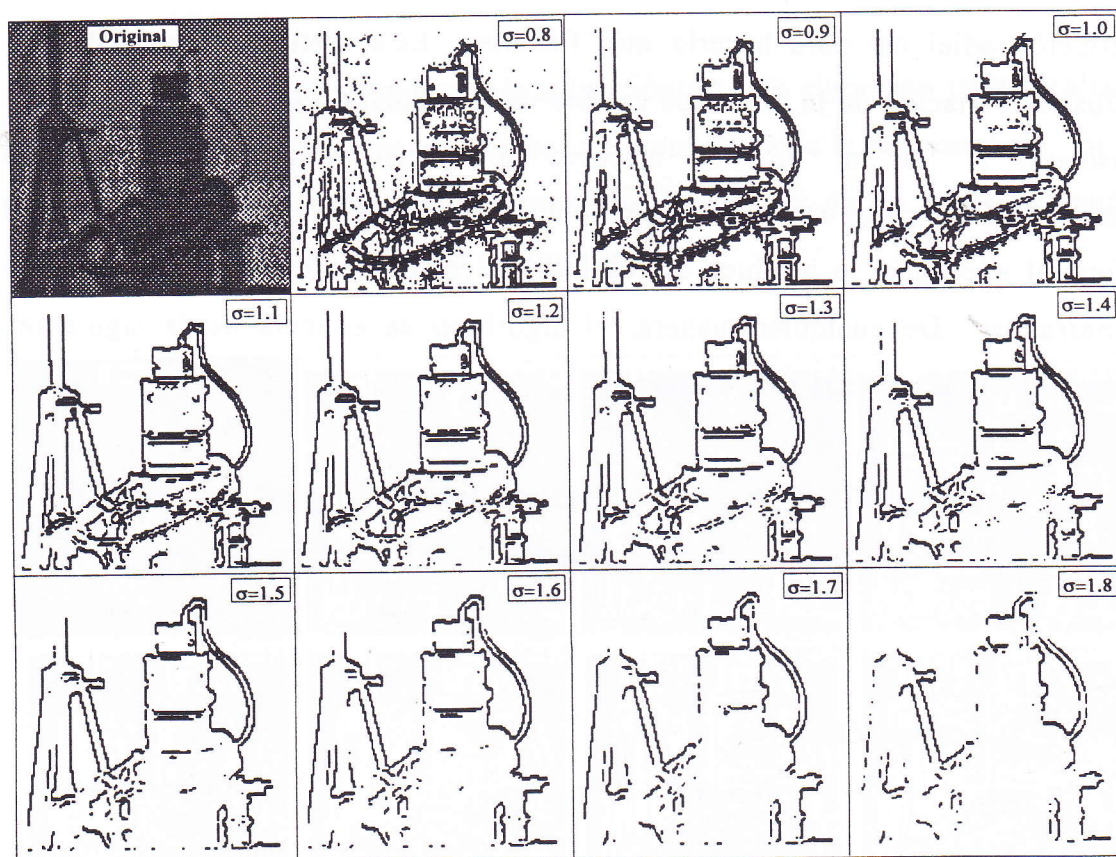


Figura 3.29 Secuencia para umbral = 4.

### 3.1.3.1.1 Relaciones con la Desviación

Se deduce, por tanto, que la elección del umbral deberá estar íntimamente relacionado con la desviación correspondiente. Si  $F2$  es la matriz que resulta de hacer la convolución entre  $G''$  y la imagen  $F$ , y dado que el valor de cada componente de  $F2$  disminuye en valor absoluto cuando el valor de la desviación aumenta, se puede hacer una primera aproximación tomando un valor de umbral igual a  $[U = 4/\text{desviación}]$ . El resultado se aprecia en la Figura 3.30. En este ejemplo se tomó la constante igual a cuatro para poder comparar con el

resultado de la Figura 3.29. Es interesante hacer notar que los contornos han ganado en continuidad con este nuevo umbral.

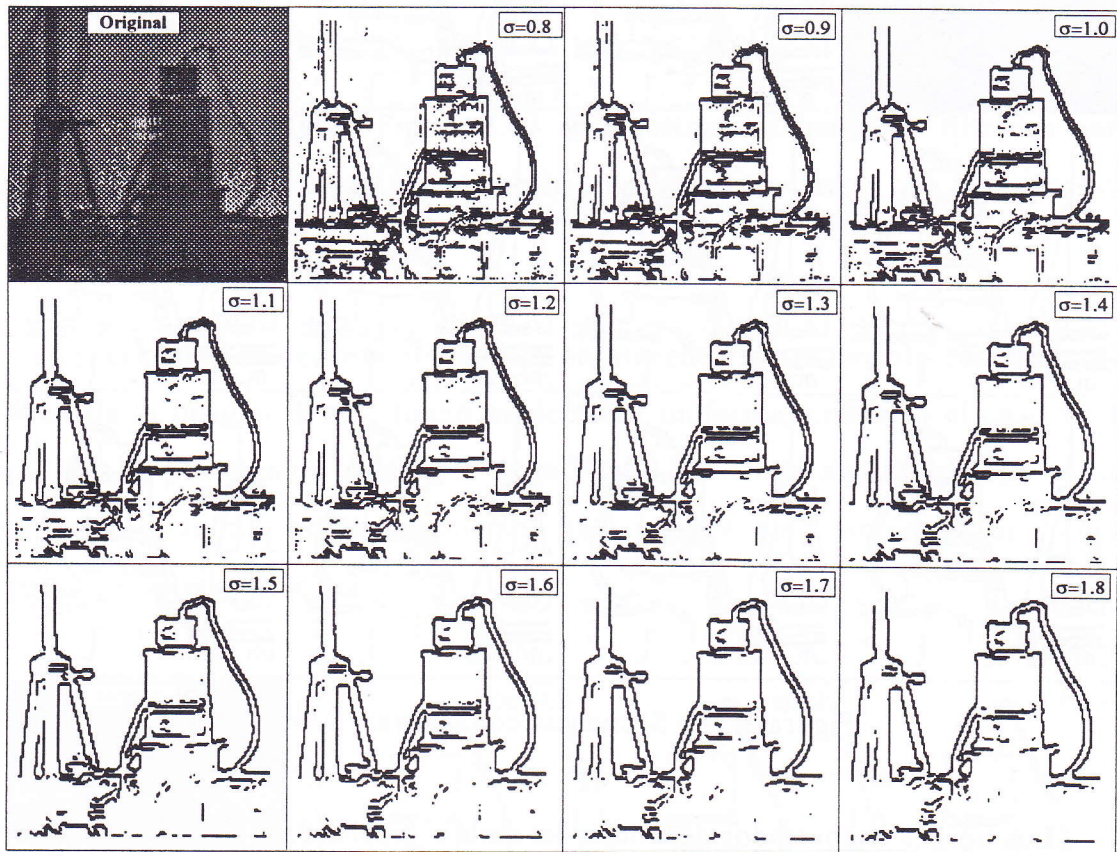


Figura 3.30 Secuencia para umbral =  $4/\sigma$ .

Seguidamente, y para darle mayor peso a  $\sigma$ , se muestra el resultado obtenido al emplear un umbral =  $4/\sigma^2$ . Puede apreciarse en la Figura 3.31 que el resultado, sin ser óptimo, es mucho mejor que los dos precedentes.

Como se puede apreciar, los intentos por determinar el valor del umbral a partir de los datos obtenidos con la segunda derivada se basan en simples estimaciones tratando de relacionar la desviación con el umbral que proporcione mejores resultados.

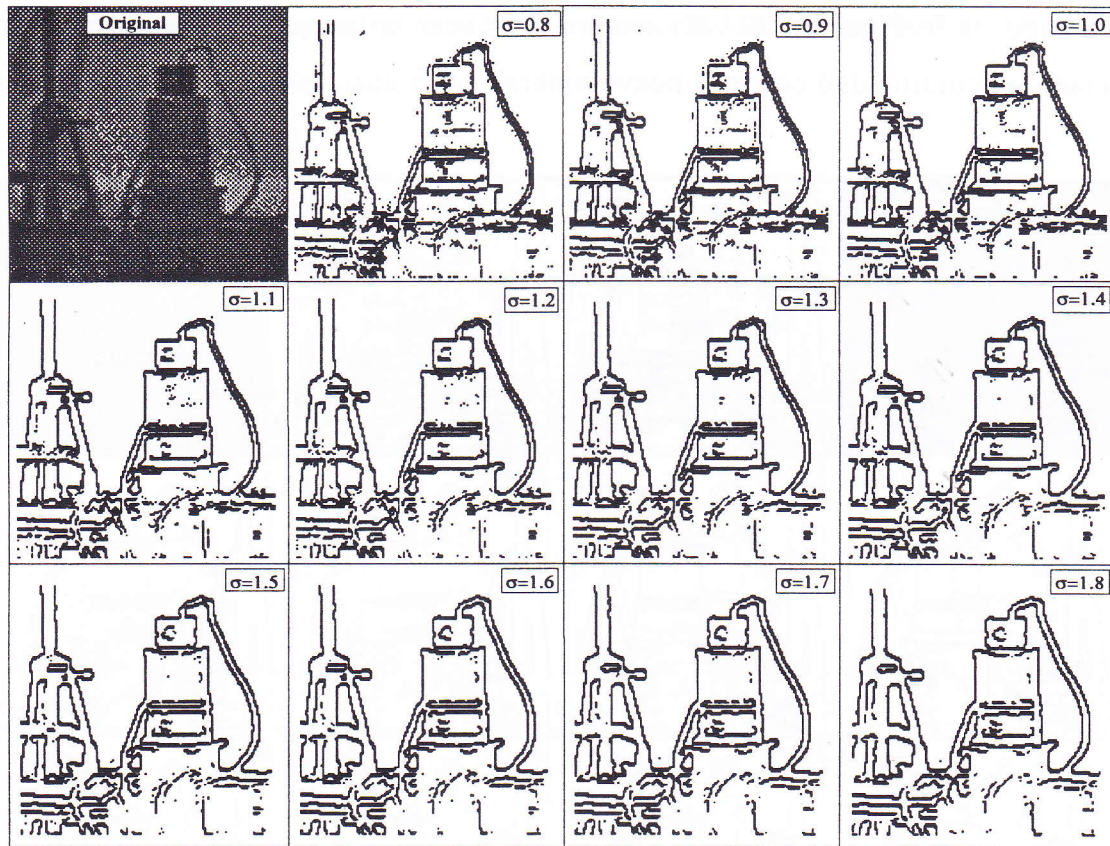


Figura 3.31 Secuencia con umbral=  $4/\sigma^2$ .

Los bordes encontrados dependen del umbral empleado, y éste del grado de detalles que quieran obtenerse. Si las condiciones de luz y forma son las mismas, se puede buscar un umbral adecuado a los bordes buscados.

No existe una relación exacta que proporcione un valor de umbral óptimo en función de la desviación y la segunda derivada. Esto se debe que, al haber calculado directamente la segunda derivada, no se tiene información de la primera para evaluar la fuerza de cambio de la intensidad. En cierto modo se ha perdido información. Sin embargo, para aplicaciones muy concretas este método puede ser válido porque emplea solamente una operación de convolución.

En diversas pruebas realizadas, para condiciones de luz y forma que llamaríamos normales, se ha encontrado que una buena relación "de partida" para encontrar un valor de umbral, viene dada por la siguiente expresión:

$$\text{umbral} = \frac{\text{kernel}}{2\sigma^2} \quad (3.25)$$

En la Figura 3.32 y Figura 3.33 se muestran las imágenes filtradas para desviaciones entre 0.8 y 1.8 empleando umbrales calculados con la expresión indicada en (3.25).

Si el objeto es de formas simples y se encuentra notoriamente destacado del fondo de la imagen, y este fondo es de color uniforme, como en el caso de la bola que se presenta en el ejemplo de la Figura 3.33, este algoritmo sería válido para encontrar sus bordes en tiempo real ya que sólo emplearía una única operación de convolución.

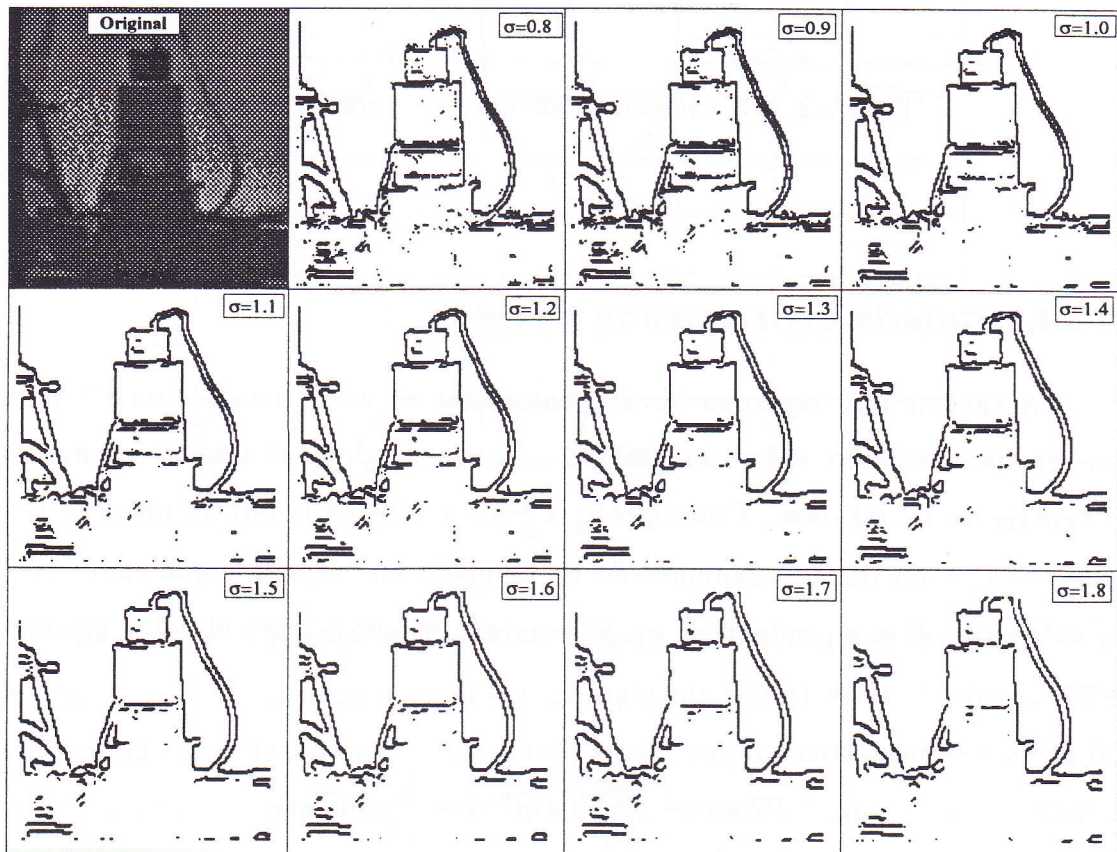


Figura 3.32 Secuencia considerando  $\text{umbral} = \text{kernel} / (2\sigma^2)$

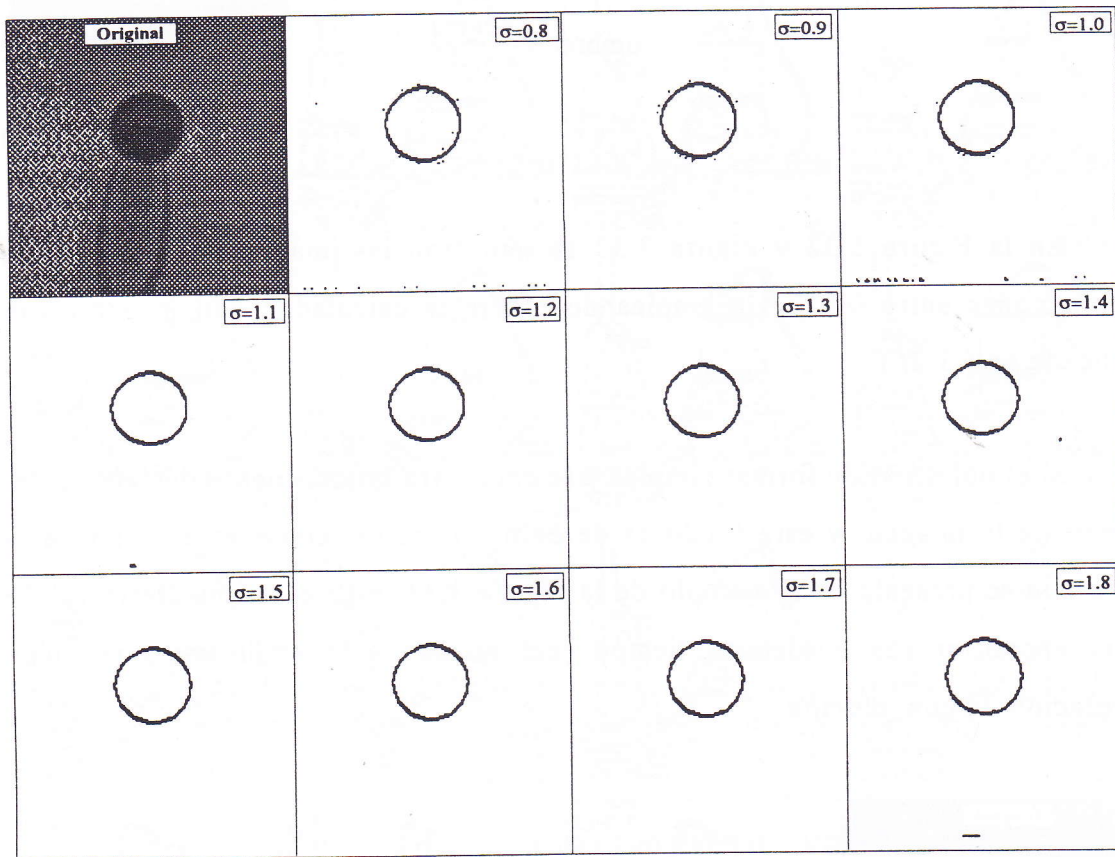


Figura 3.33 Secuencia con umbral=kernel/(2σ²)

### 3.1.3.1.2 Criterio Considerando Máximos

Un análisis más riguroso lleva a considerar el valor máximo de F2 para obtener un adecuado valor de umbral. Puede elegirse el umbral como un porcentaje de F2 máxima. Considérese la Figura 3.34 en la que se muestra G", para  $\sigma = 1$ , y un trazado denominado B, dibujado en "negrita", que representa los valores de F que producirían un F2 máximo; siendo F2max el valor máximo de F2.

$$F2 \max = \sum_{i=0}^{i<\text{kernel}} F(i) G''(i) = \sum_{i=0}^{i<\text{kernel}} B G''(i)$$

( 3.26)



Si  $B$ , en la ecuación ( 3.26) fuera un valor constante,  $F_{2max}$  no sería tal, por el contrario, sería mínimo y cercano a cero.  $B$  no sería cero porque, aunque mínimo, existe cierto truncamiento en los límites de  $G''$  que genera un valor residual. Si se desea trabajar con números enteros se puede considerar este resultado igual a cero. Es prácticamente imposible que en una imagen real los valores de intensidad sean constantes a lo largo de cualquiera de sus líneas; por lo tanto, el caso anterior es muy poco probable, máxime si se tiene en cuenta que tan solo el ruido ya produce oscilaciones y gradientes de intensidad en una imagen real.

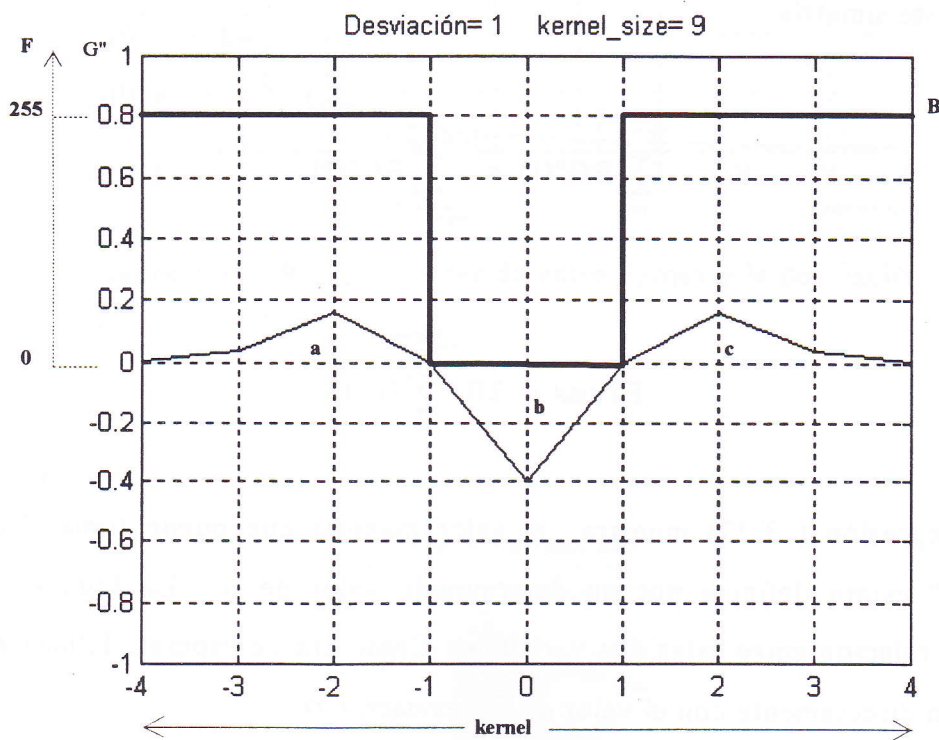


Figura 3.34

La expresión  $F_{2max}$  será máxima cuando una de las dos zonas de  $G''$ , ya sea " $a+c$ " o " $b$ ", se hace cero al ser multiplicada por el valor de intensidad  $F$  correspondiente. Dado que  $F$  sólo puede tomar valores comprendidos entre 0 y 255, y si es cero en la zona denominada como " $b$ " en la Figura 3.34, el valor de

B que producirá un F2max máximo será igual a 255 en las zonas "a" y "c" de la misma figura. En el caso de que se invirtieran los valores, F2max sería el mismo.

Si  $i$  es siempre un número entero positivo, el valor máximo de F2, F2max, se puede expresar con la ecuación siguiente:

$$F2 \max = \sum_{i=0}^{i=\text{kernel}-1} F(i) G''(i) = \sum_{i=0}^{i=\frac{|\text{kernel}|}{4}} BG''(i) + \sum_{i=\frac{|\text{kernel}|}{4}+1}^{i=\frac{3|\text{kernel}|}{4}-1} (0)G''(i) + \sum_{i=\frac{3|\text{kernel}|}{4}}^{i=\text{kernel}-1} BG''(i),$$

y como existe simetría,

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{|\text{kernel}|}{4}} BG''(i) = \sum_{i=\frac{3|\text{kernel}|}{4}}^{i=\text{kernel}-1} BG''(i),$$

$$F2 \max = 2B \sum_{i=0}^{i=\frac{|\text{kernel}|}{4}} G''(i)$$

( 3.27)

La expresión ( 3.27) muestra el valor máximo que puede tomar F2 si  $B=255$ ,  $G''$  estará definida por un determinado valor de  $\sigma$ . La Figura 3.35 muestra la relación entre estas dos variables. Como era de esperar, F2max está relacionado directamente con el valor de la desviación  $\sigma$ .

La ecuación ( 3.27) también puede aplicarse, extendida al espacio bidimensional, para calcular el valor del umbral tomando parte de F2max. Un ejemplo se presenta en la Figura 3.37, en la que se representa los bordes encontrados en la imagen de la Figura 3.36 empleando un valor de umbral equivalente al 2% de F2max. Para dos dimensiones se obtiene el F2max multiplicando 255 por la suma de los valores positivos de  $G''$ . Los resultados son mejores que con las estimaciones anteriormente presentadas.

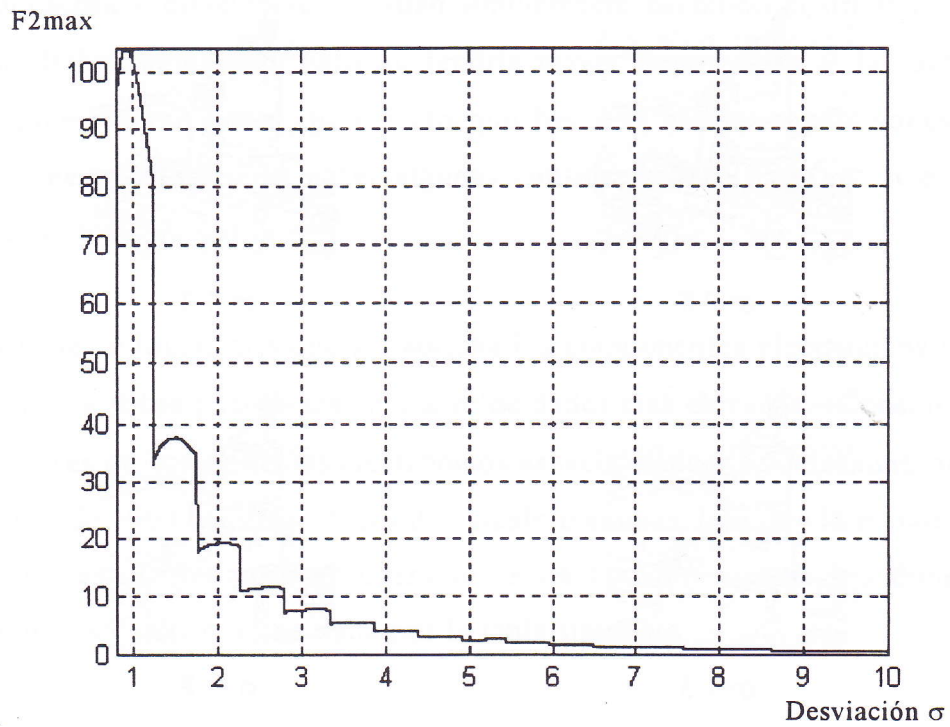


Figura 3.35 Relación obtenida entre F2max y la desviación.

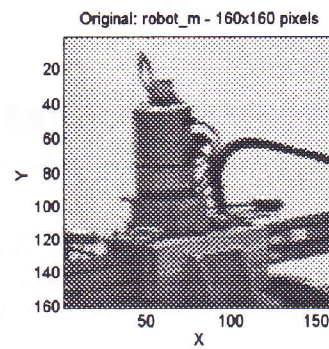


Figura 3.36 Imagen de poca resolución y tonalidades de grises múltiple.

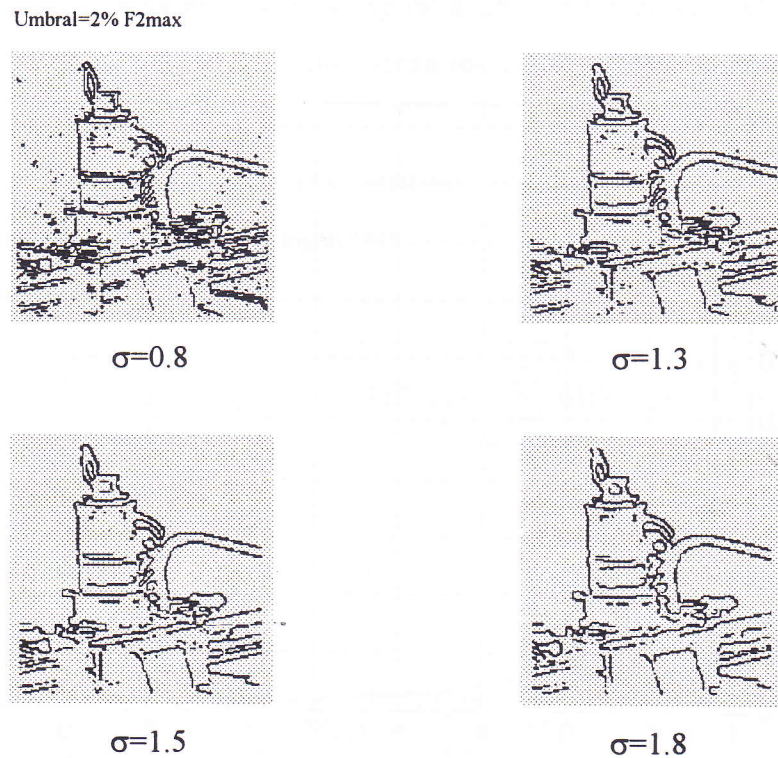


Figura 3.37 Mapas de Bordes

Estas relaciones, y especialmente la ecuación ( 3.27) permite verificar que los valores que se manejarán en las operaciones de convolución no sobrepasen la capacidad de los DSPs encargados de realizarlas.

### 3.1.4 Aproximación del filtro con valores enteros

Los resultados mostrados hasta ahora han sido obtenidos por medio de sendos programas realizados bajo entorno MatLab y en lenguaje C "paralelo C3L". En ambos casos se ha empleado, para los cálculos numéricos variables en números reales expresadas en formato de punto flotante de 32 bits de longitud. Sin embargo, para implementaciones hardware es deseable que los números que se utilicen sean siempre enteros. Esto se debe a que los cálculos con variables expresadas en punto flotante son mucho más lentos que los realizados con números enteros; si esos cálculos se realizan con números que son potencias de

dos, el tiempo de cálculo se reduce notablemente porque las operaciones de multiplicación y división se efectúan simplemente haciendo corrimientos en los bits de dichos números. Esto no tendría mayor importancia si la cantidad de operaciones fueran pocas, pero dado que hay que hacer convoluciones en dos dimensiones, es necesario hacer algunas consideraciones para ver si es posible simplificar los cálculos.

Las tecnologías con que se fabrican los componentes electrónicos permiten que cada día éstos puedan trabajar a velocidades más elevadas. Consultados los proveedores de componentes electrónicos especializados, se determinó que hasta diciembre de 1993 las velocidades de cálculo máximas, con que la mayoría de los componentes pueden realizar operaciones de convolución en dos dimensiones con números enteros, viene dada por la tabla siguiente:

**Tabla 3-2** Tamaño del filtro- simetría y velocidad de muestreo.

<i>KERNEL</i>	<i>SIMETRIA</i>	<i>FRECUENCIA (MHz)</i>
2x2	NO	45.00
3x3	SI	45.00
3x3	NO	15.00
4x4	SI	22.50
4x4	NO	11.25
5x5	SI	15.00
6x6	SI	15.00
7x7	SI	11.25

Si se tiene en cuenta que, para el sistema de vídeo vigente en España, la frecuencia es 15 MHz, se podría pensar en construir un sistema que, en tiempo real, vaya realizando operaciones de convolución conforme va llegando la información correspondiente a la imagen digitalizada. Como se puede ver en la Tabla 3-2, si se opta por hacer convoluciones con filtros de tamaño 7x7, o mayores, se perdería cierta información dado que estas operaciones se

desarrollan a 11.25 MHz. Este comentario intenta dar una referencia para justificar de alguna manera el empeño puesto en trabajar con números enteros, y poder así emplear componentes electrónicos en el desarrollo de los algoritmos planteados.

Es evidente que en muy pocos años aparecerán en el mercado componentes mucho más rápidos que harán posible la aplicación de filtros con tamaños de kernel mucho mayores en tiempos sustancialmente menores. De cualquier manera, cuando estos dispositivos estén disponibles se podrá utilizar los criterios desarrollados en este capítulo. Mientras tanto se hará referencia a los componentes actualmente disponibles en los diseños que se proponen mas adelante.

Los criterios que se establecen como puntos de partida son los siguientes:

1. Que todas las operaciones se realicen con números enteros.
2. Que los resultados no sobrepasen el número máximo manejable por los dispositivos electrónicos.
3. Que, donde sea posible, se aproximen las constantes a números que sean potencias exactas de dos, especialmente los números que estén involucrados en operaciones de multiplicación y división.

En primer lugar, los componentes de las operaciones de convolución son: la imagen digitalizada  $F$ , que no es otra cosa que una matriz de números enteros expresados con ocho bits de resolución, lo que equivale a decir que sus valores oscilan entre 0 y 255; y el filtro correspondiente. Es el filtro  $G''$ , constituido por una matriz de tamaño kernel, el que contiene valores en números reales; por lo tanto, si se desea trabajar con valores enteros, se debe partir de los valores del filtro  $G''$  para generar otro con características similares pero constituido de valores enteros.

En segundo lugar, hay que considerar el valor máximo  $F2_{max}$ , anteriormente encontrado, para saber si éste es mayor que el número máximo permitido, o en su defecto, si existe desbordamiento, saber cuánto afecta éste al resultado final del cálculo.

### 3.1.4.1 Análisis en Una Dimensión.

Tal como se ha venido haciendo en los apartados precedentes, se analizará el problema en el espacio unidimensional para posteriormente hacerlo extensivo al de dos dimensiones.

Los valores del filtro pueden ser calculados "off line" y deben ajustarse a números enteros expresados en potencias de dos. Para lograr que los componentes del filtro sean enteros hay que multiplicarlos por una constante que sea potencia de dos. A continuación se muestra un ejemplo de un ajuste para una desviación igual a 0.8. Para esta desviación los coeficientes son los siguientes:

$$G''(i)=[ 0.0090 , 0.1797 , 0.2007 , -0.7792 , 0.2007 , 0.1797 , 0.0090 ]$$

Para lograr que  $G1(i)$  esté formado por números enteros, y para que el valor mínimo del filtro  $G''(1)$  tenga un valor significativo igual a 1, se multiplica  $G''(i)$  por  $2^n$ . En este ejemplo se ha empleado  $n=7$ . Luego, el resultado será,  $G1''(i)=2^7 \cdot G''(i)$  :

$$G1''(i)=[ 1.1514 , 23.0059 , 25.6850 , -99.7356 , 25.6850 , 23.0059 , 1.1514 ],$$

si se redondean los valores anteriores se obtendrá:

$$G2''(i) = [ 1, 23, 26, -100, 26, 23, 1 ]$$

Obsérvese en la Figura 3.38 la diferencia entre los filtros  $G''$  y  $G2''$ . Nótese que el factor de multiplicación es 1024 en lugar de 1000, de ahí la diferencia de escalas.

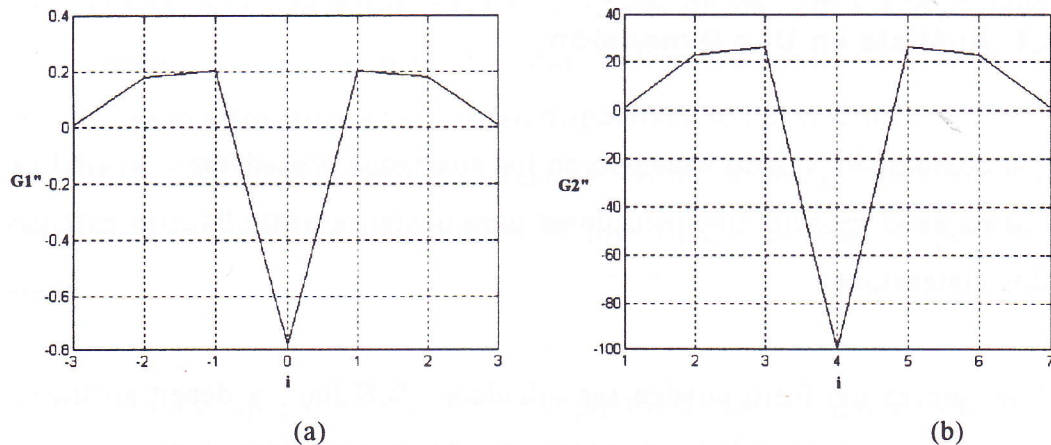


Figura 3.38 (a) =  $G''(i)$  en números reales y (b) =  $G2''(i)$  en enteros.

La mayoría de los DSP's desarrollados para hacer convoluciones soportan números de ocho bits para configurar el filtro, y como se ve, en la aproximación que se ha hecho ningún valor sobrepasa el límite de  $2^8$ . Por otra parte, el hecho que la suma de todos los componentes de  $G2''$  den como resultado cero, asegura que los valores que resulten de hacer la convolución oscilarán en torno al cero del eje de búsqueda. En la Figura 3.39 se presenta el resultado de aplicar los filtros representados en la Figura 3.38 a una de las líneas de vídeo real de la Figura 3.1; se puede observar que los valores son proporcionales y el resultado es prácticamente el mismo.

Si el resultado de hacer la convolución entre  $I_c * G2''$  sobrepasase el valor numérico máximo permitido, se podría dividir este resultado entre  $2^7$  simplemente desplazando el número en binario siete lugares hacia la derecha; lógicamente si se hace esto con un elemento de la matriz de resultados se deberá



hacer lo mismo con todos. Por lo general los DSP's cuentan con un circuito posprocesador que facilita esta operación, aunque los estudiados hasta el momento mantienen un acumulador de 32 bits, es decir, que permiten números máximos de  $2^{32}$ .

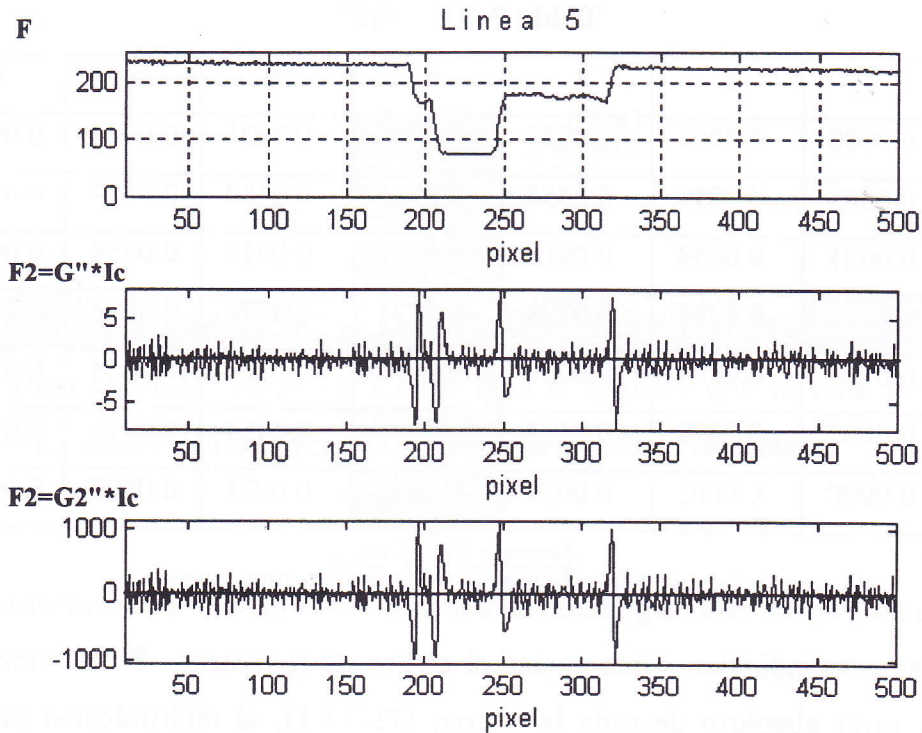


Figura 3.39 Gráfico comparativo del resultado de los dos filtros.

### 3.1.4.2 Análisis en Dos Dimensiones

Los criterios propuestos en la sección anterior son aplicables al espacio en dos dimensiones. Es preciso obtener los coeficientes del filtro en dos dimensiones para números enteros para poderlos implantar en hardware. Para no perder continuidad, y siguiendo con el ejemplo anterior, a continuación se presenta la secuencia, que correspondería al espacio bidimensional, para una aproximación a números enteros de un  $G''$  con desviación 0.8. Los valores de

$G''(x,y)$  serán obtenidos empleando la expresión ( 3.10). Se denominará G2C a la segunda derivada en dos dimensiones para diferenciarla de  $G''$  de una dimensión. Los valores obtenidos para el ejemplo son presentados en la tabla **Tabla 3-3**.

**Tabla 3-3** G2C

G2C	1	2	3	4	5	6	7
1	0.0000	0.0003	0.0021	0.0041	0.0021	0.0003	0.0000
2	0.0003	0.0079	0.0454	0.0726	0.0454	0.0079	0.0003
3	0.0021	0.0454	0.0916	-0.0778	0.0916	0.0454	0.0021
4	0.0041	0.0726	-0.0778	-0.7771	-0.0778	0.0726	0.0041
5	0.0021	0.0454	0.0916	-0.0778	0.0916	0.0454	0.0021
6	0.0003	0.0079	0.0454	0.0726	0.0454	0.0079	0.0003
7	0.0000	0.0003	0.0021	0.0041	0.0021	0.0003	0.0000

Se busca dar un valor significativo a los valores mínimos en valor absoluto de las líneas perpendiculares que cortan al centro de la matriz. Si se tomara el mínimo en valor absoluto de toda la matriz,  $G2C(1,1)$ , al multiplicarlo por un factor para hacerlo 1, los valores más sombreados tomarían un valor mucho mayor que originaría un truncamiento demasiado brusco.

En este ejemplo el valor mínimo en valor absoluto de las perpendiculares, o máximo de los lados, de la máscara es  $G2C(4,1)$  se denominará como "n". Como se desea lograr que el valor n, cuyo valor actual es 0.0041, tenga un valor entero significativo igual a  $n' = 1$ , y además que el factor que lo multiplique sea una potencia de dos, se puede escribir la siguiente relación:

$$2^P \cdot n = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln(2^P) + \ln(n) = 0,$$

luego la potencia P será:

$$P = \left[ -\frac{\ln(n)}{\ln(2)} \right], \quad (3.28)$$

donde el operador corchete  $[\ ]$  implica la parte entera. Luego el factor  $F$  será igual a:

$$F = 2^P = 2^{\left[ -\frac{\ln(n)}{\ln(2)} \right]}. \quad (3.29)$$

Si  $\text{centro} = [\text{kernel}/2]$ ,  $n$  será igual a  $G2C(\text{centro}, 1)$ .  $G2C$  se sigue calculando según la relación (3.10). Para el ejemplo que se está desarrollando el factor  $F$  será calculado según la expresión (3.29) como sigue:

$$F = 2^P = 2^{\left[ -\frac{\ln(n)}{\ln(2)} \right]} = 2^{\left[ -\frac{\ln(0.0041)}{\ln(2)} \right]} = 2^{7.93} = 2^7 = 128. \quad (3.30)$$

Multiplicando por  $F$  los valores de la Tabla 3-3, correspondientes a  $G2C$ , se obtienen los valores  $G2C1$  representados en la Tabla 3-4.

**Tabla 3-4 G2C1**

G2C1	1	2	3	4	5	6	7
1	0.0010	0.0354	0.2742	0.5302	0.2742	0.0354	0.0010
2	0.0354	1.0081	5.8153	9.2873	5.8153	1.0081	0.0354
3	0.2742	5.8153	11.7284	-9.9622	11.7284	5.8153	0.2742
4	0.5302	9.2873	-9.9622	-99.4718	-9.9622	9.2873	0.5302
5	0.2742	5.8153	11.7284	-9.9622	11.7284	5.8153	0.2742
6	0.0354	1.0081	5.8153	9.2873	5.8153	1.0081	0.0354
7	0.0010	0.0354	0.2742	0.5302	0.2742	0.0354	0.0010

Redondeando los valores de G2C1 al valor entero más próximo en valor absoluto, y conservando el signo, se obtiene como resultado los valores de la Tabla 3-5.

Es importante que la suma total de los elementos sea igual a cero. Para el caso presentado en la Tabla 3-5 la suma total es igual a -1, lo que equivale a tener un desplazamiento = -1. Por la forma como se ha calculado el kernel y demás valores, el desplazamiento tenderá a tomar valores negativos. Si existe desplazamiento distinto de cero, se puede seguir uno de los siguientes pasos,

1. Reconsiderar los criterios al redondear G2C1.
2. Equilibrar el desplazamiento (offset).

**Tabla 3-5 G2C1**

G2C2	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	6	9	6	1	0
3	0	6	12	-10	12	6	0
4	1	9	-10	-99	-10	9	1
5	0	6	12	-10	12	6	0
6	0	1	6	9	6	1	0
7	0	0	0	1	0	0	0

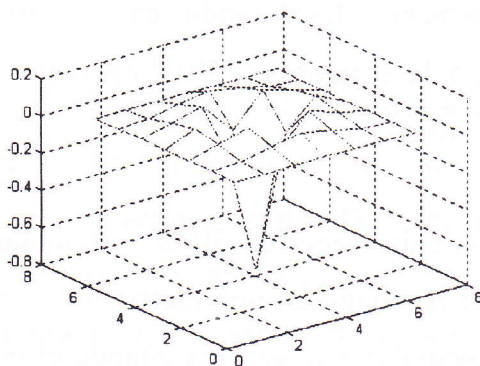
Normalmente se hará lo segundo, por lo tanto, si el desplazamiento es menor que cuatro, se sumará al elemento central del filtro un valor igual al desplazamiento con sentido cambiado. Si es mayor que 4, se equilibrará sumando desplazamiento/4 en cada lado extremo del filtro, repartiendo los valores del centro a los extremos de cada uno de los lados. En definitiva se trata de repartir el offset sin deformar el filtro.

Tabla 3-6 G2C2

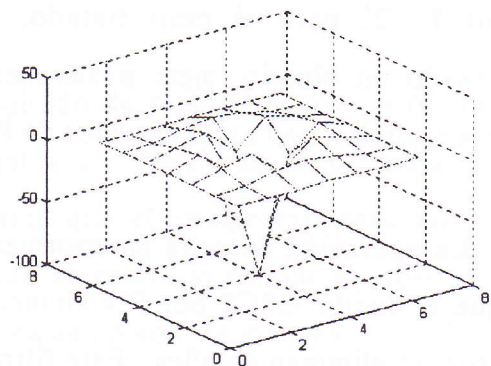
G2C2	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	6	9	6	1	0
3	0	6	12	-10	12	6	0
4	1	9	-10	-100	-10	9	1
5	0	6	12	-10	12	6	0
6	0	1	6	9	6	1	0
7	0	0	0	1	0	0	0

Siguiendo estos criterios, la Tabla 3-5 se transforma en la Tabla 3-6 en la que la suma ya es igual a cero. Esto garantiza un gradiente igual a cero para valores de intensidad constantes.

En la Figura 3.40 se muestra las gráficas que corresponden al filtro original (a), y su aproximación con números enteros (b), para la segunda derivada del Gaussiano en dos dimensiones. Se puede ver que existe proporcionalidad en las formas de ambos gráficos.



(a) Filtro en números reales.



(b) Filtro en números enteros.

Figura 3.40 Comparación de los filtros para dos dimensiones

En la Figura 3.41 se puede observar la segunda derivada de  $F$ , empleando el filtro expresado en números reales y haciendo lo mismo con el expresado en números enteros. Puede verse que el resultado es prácticamente el mismo, con la única diferencia de que el obtenido con enteros está multiplicado por una constante.

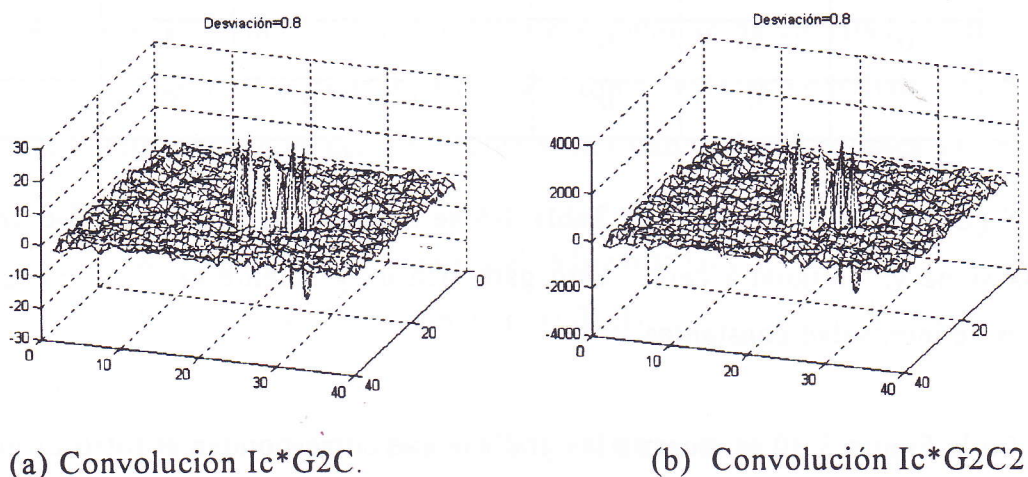


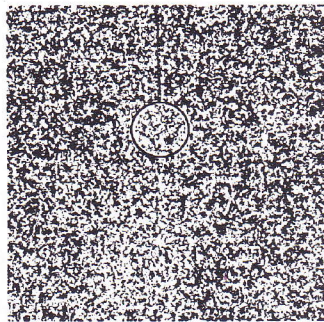
Figura 3.41

A partir de aquí, y considerando el hardware a emplear, se puede manipular la información de manera que se economice memoria para almacenar los datos; así por ejemplo, se podría dividir cada elemento de la Figura 3.41-b entre el factor  $F$ ,  $2^7$  para el caso tratado, simplemente desplazando en el número expresado en binario, siete posiciones hacia la izquierda. Esta operación se podría realizar con cualquier valor de  $P$  encontrado.

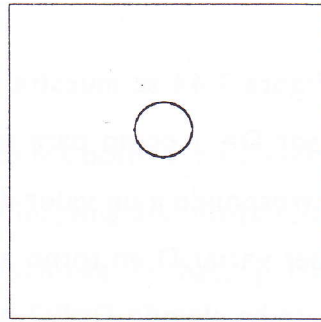
La operación descrita anteriormente tiene un efecto de filtrado secundario, ya que al dividir  $G2C2$  por  $F$  y almacenar el resultado en una matriz de valores enteros, se eliminan detalles. Este filtrado secundario se acentúa cuando el valor de la desviación es mayor.

A continuación se muestra el resultado de aplicar el filtro a la imagen de la bola para una desviación de 0.8. Se llamará  $D$  al valor por el que se divide el resultado  $G2C2$ ; normalmente  $D$  será igual a  $F$ , aunque se puede aumentar para descartar detalles del mapa de bordes.

En la Figura 3.42(a) se ha dividido el resultado por  $D=F=128$ . En la Figura 3.42(b) se ha elevado el valor de  $D$  para obtener un filtrado mayor. Nótese la drástica disminución de los detalles.



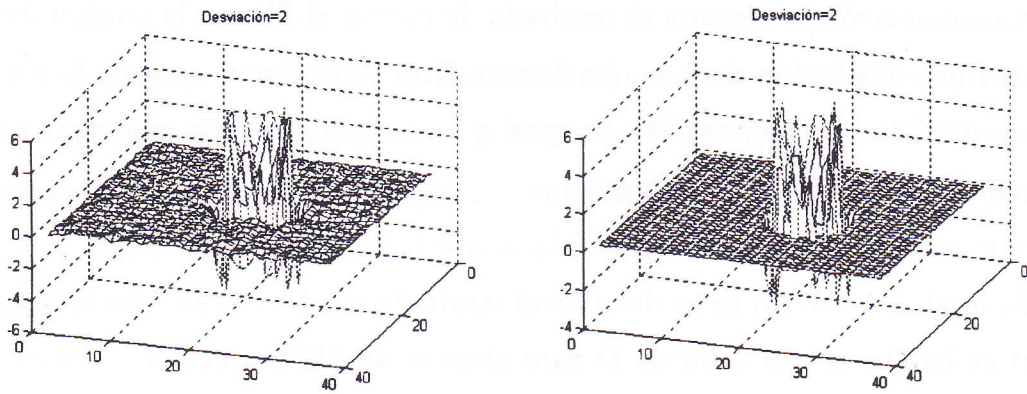
(a) dividido por 128.



(b) dividido por 512.

Figura 3.42 Convolución con  $G''$  en enteros para  $\sigma=0.8$ ,

En la Figura 3.43 se muestra el resultado de realizar la misma operación anterior para un valor de desviación igual a 2. Esta vez se presenta  $G2C2$  dividido directamente por  $D=F$ ; puede verse que el comportamiento tanto del filtro en números enteros como el expresado en reales es similar al mostrado en la Figura 3.41; téngase en cuenta que las escalas no son las mismas.

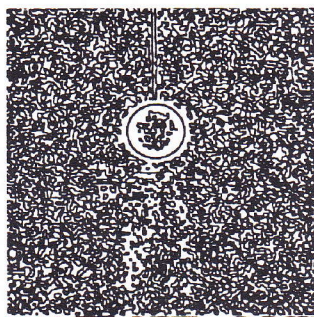


(a) Convolución  $I_c * G_{2C}$ .

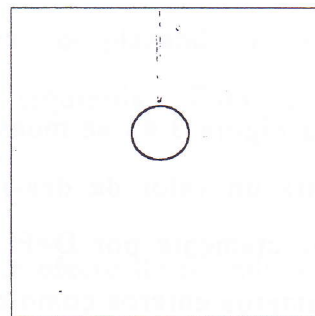
(b) Convolución  $I_c * G_{2C2}/F$ .

Figura 3.43 Filtrado para  $\sigma = 2$ .

En la Figura 3.44 se muestra la localización de los ceros de  $F * G_{2C2}$ , tanto para un divisor  $D = 1$  como para un valor de  $D = 1024$ . En realidad, el factor  $F$  para  $\sigma = 2$  corresponde a un valor de 2048, pero como se ha dicho anteriormente, se puede hacer variar  $D$  en torno a  $F$  para obtener diferentes grados de detalles. En este caso se ha elegido  $D = F/2$  para detectar la cuerda de la que pende la bola. De haber empleado  $D = F$  se habría obtenido simplemente una circunferencia, como puede deducirse fácilmente observando la Figura 3.41(b).



(a) Divisor  $D = 1$ .



(b) Divisor  $D = 1024$ .

Figura 3.44 Filtrado  $I_c * G_{2C2}$  para  $\sigma = 2$ .



Si se examina el filtro propuesto, aplicándolo a imágenes con tonalidades de grises múltiples, el resultado es similar a los mostrados anteriormente. El máximo nivel de detalle se obtendrán con un valor de  $D=1$ ; a partir de aquí se puede incrementar el valor del divisor  $D$  para descartar algunos detalles no deseados.

En la Figura 3.46 se muestra algunos resultados de aplicar el filtro  $G2C2/D$  a la imagen de la Figura 3.45. Puede verse que si el objetivo es eliminar el fondo de la imagen, que en este caso consiste de una pared rugosa, se debe aumentar el valor  $D$  con la consiguiente pérdida en la continuidad de los bordes. Este efecto se disminuye a medida que aumenta la desviación, pero este aumento implica un aumento de la potencia de cálculo.

Si se desea obtener máxima continuidad en los bordes, para elegir el umbral adecuado se debe contar necesariamente con la información proporcionada por la primera derivada de la Imagen. Las estimaciones hechas, partiendo de la segunda derivada, son aproximaciones que proporcionan un aceptable bosquejo de los bordes presentes en la imagen, en un intento por encontrarlos calculando una sola operación de convolución.

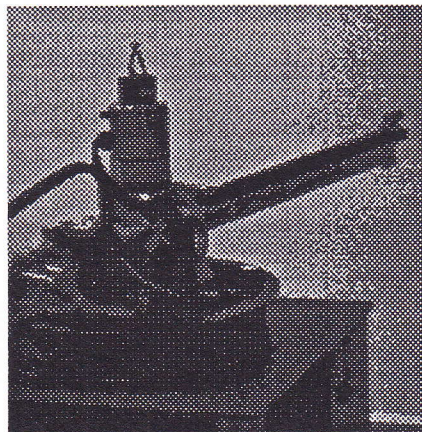
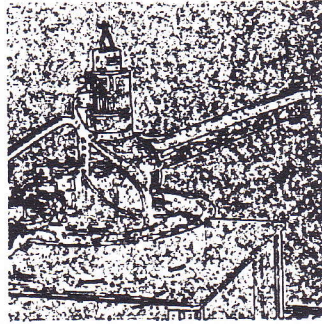
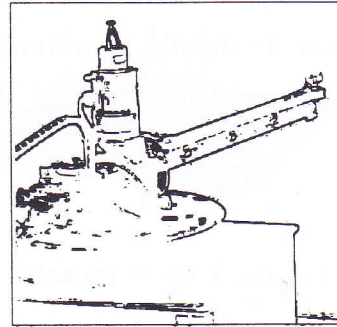


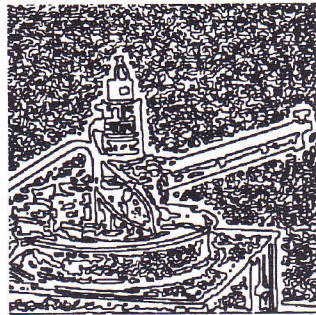
Figura 3.45 Imagen de un brazo de robot flexible.



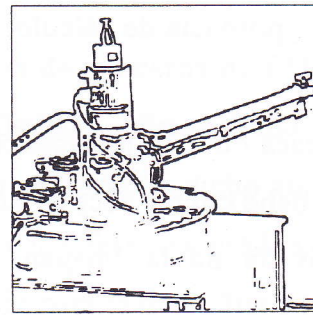
(b)  $\sigma = 0.9, D = 32.$



(c)  $\sigma = 0.9, D = 128.$



(d)  $\sigma = 2, D = 32.$



(e)  $\sigma = 2, D = 1024.$

Figura 3.46 Algunas pruebas con G2C2.

En la siguiente sección se presenta una estimación más adecuada de ese umbral partiendo de la primera derivada del Gausiano.

### 3.2 El Umbral y la Primera Derivada del Gausiano

Para encontrar un umbral adecuado hay que tener en cuenta la expresión matemática del gausiano empleado en el cálculo de las derivadas. Algunos autores de bibliografía técnica, como Canny(1986), Lu-Jain(1989), Deriche

(1990), simplifican la forma original dividiendo esta expresión por su factor común en cada derivada. De cualquier manera, se ha preferido conservar la forma original y sus constantes asociadas de tal manera que, si se desea, se pueda prescindir de ellas.

### 3.2.1 Consideraciones en una Dimensión

Para analizar el caso en el espacio unidimensional se ha empleado las expresiones matemáticas del gaussiano y sus derivadas mencionadas en las ecuaciones ( 3.1), ( 3.2) , y ( 3.3). El valor máximo que puede tomar la primera derivada de la función  $F(x)$ , obtenida por convolución con la primera derivada del gaussiano viene dada por la expresión siguiente:

$$V_{\max} = \sum_{i=1}^{\text{Kernel}/2} \text{Imax} \cdot |G'(i)| \quad (3.31)$$

Donde  $\text{Imax}$  es el valor máximo que puede tomar la función intensidad  $F(x)$ , y  $G'(i)$  la primera derivada del Gaussiano. En la Figura 3.47 se puede ver una representación de los valores  $F(x)$  y  $G'(i)$  que generan el máximo en  $F'(x)$ . El ejemplo presentado contempla el caso de un máximo positivo, el caso del máximo negativo es análogo y sólo difiere en el signo.

Considerando la ecuación ( 3.31) y teniendo en cuenta que, para el caso que se está tratando, el  $\text{Imax}$  es  $2^8 - 1$ , se tiene que:

$$V_{\max} = 255 \cdot \sum_{i=1}^{\text{Kernel}/2} |G'(i)| \quad (3.32)$$

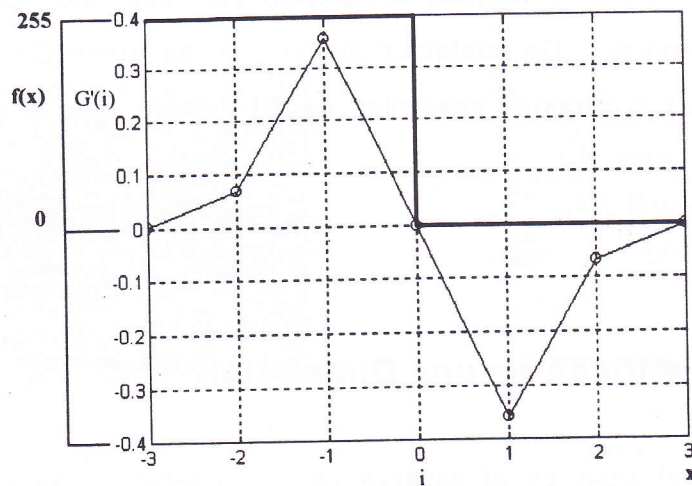


Figura 3.47 Generación de máximo local por convolución simple.

Si se considera como puntos candidatos a bordes a todos aquellos puntos cuya primera derivada supere un porcentaje del  $V_{max}$ , por ejemplo el 10%, el umbral vendrá dado por la siguiente ecuación.

$$\text{umbral} = 25.5 \sum_{i=1}^{\text{Kernel}} |G'(i)| \quad (3.33)$$

El umbral así encontrado da buenos resultados en el momento de implantar la condición que permitirá considerar a ciertos puntos de la primera derivada como candidatos a punto borde.

El siguiente ejemplo, Figuras 3.48 a 3.51, presenta el resultado obtenido aplicando un umbral calculado según la ecuación (3.33) a los tres modelos de líneas propuestos en la Figura 3.1. El cálculo presenta para dos valores extremos de desviación como son 0.8 y 10, así como para la primera y segunda derivada. Se puede ver que en la Figura 3.51(b) ha desaparecido un punto borde que sí aparecía en la Figura 3.49(b). Esto se ha producido al aumentar drásticamente la desviación, y por lo tanto la capacidad de filtrado.

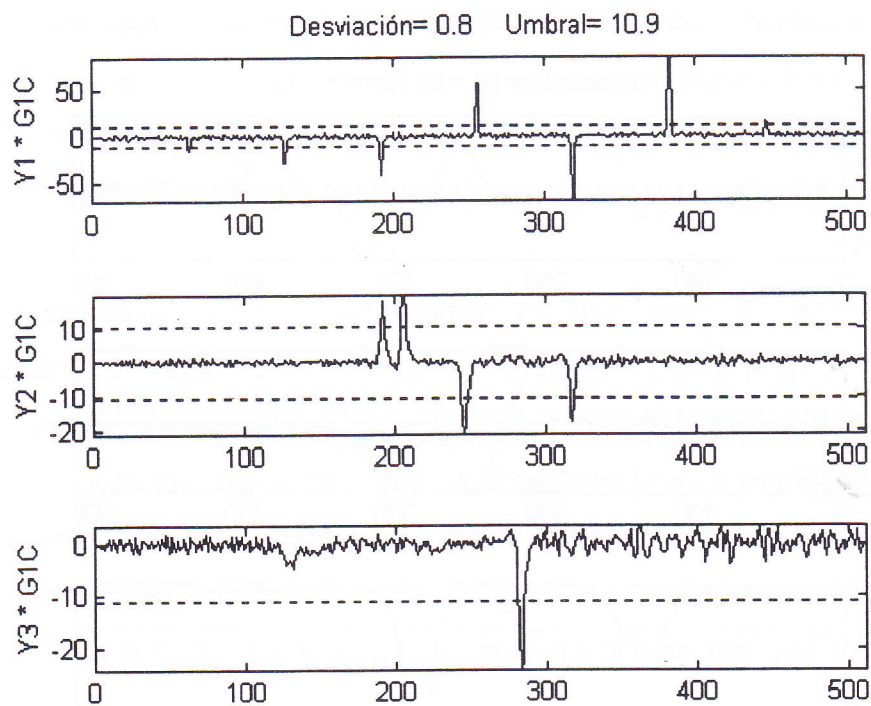


Figura 3.48 Primera derivada y el umbral estimado, desviación 0.8.

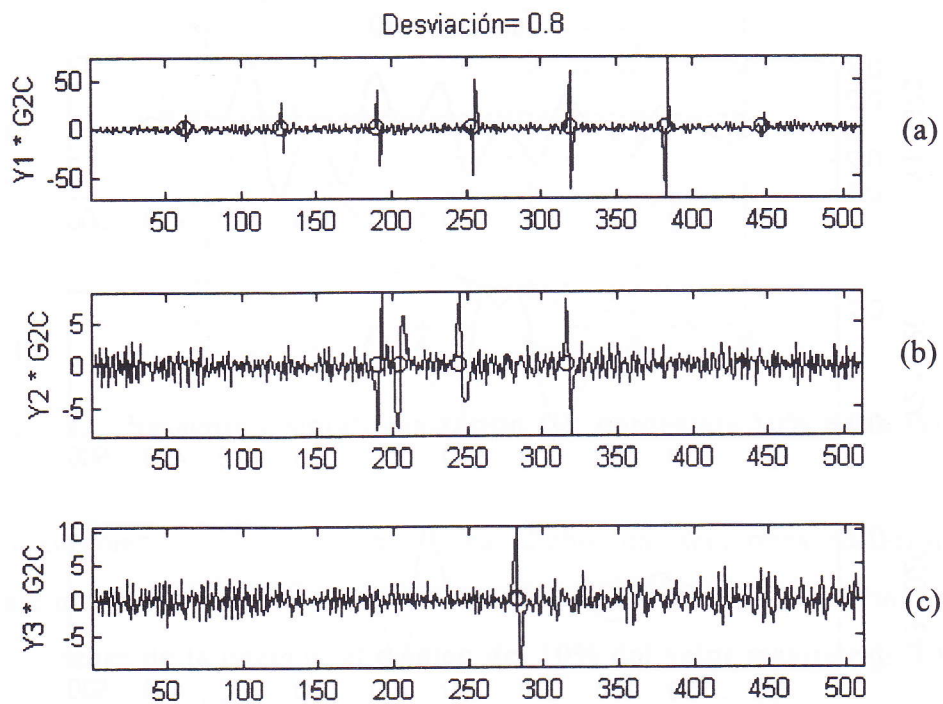


Figura 3.49 Segunda derivada de  $F(x)$  y los bordes localizados, desviación 0.8.

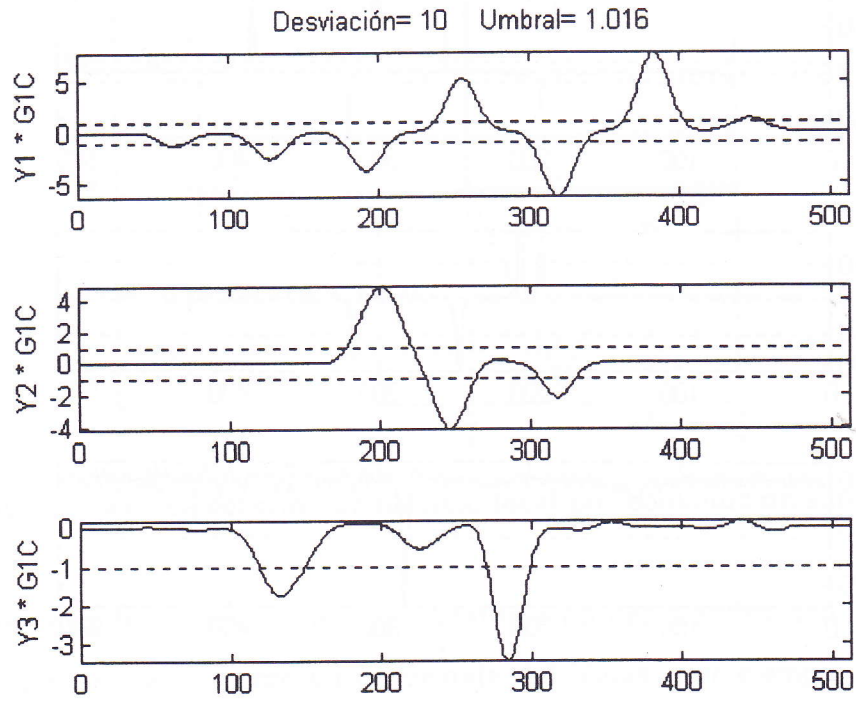


Figura 3.50 Primera derivada de cada modelo y el umbral para  $\sigma = 10$ .

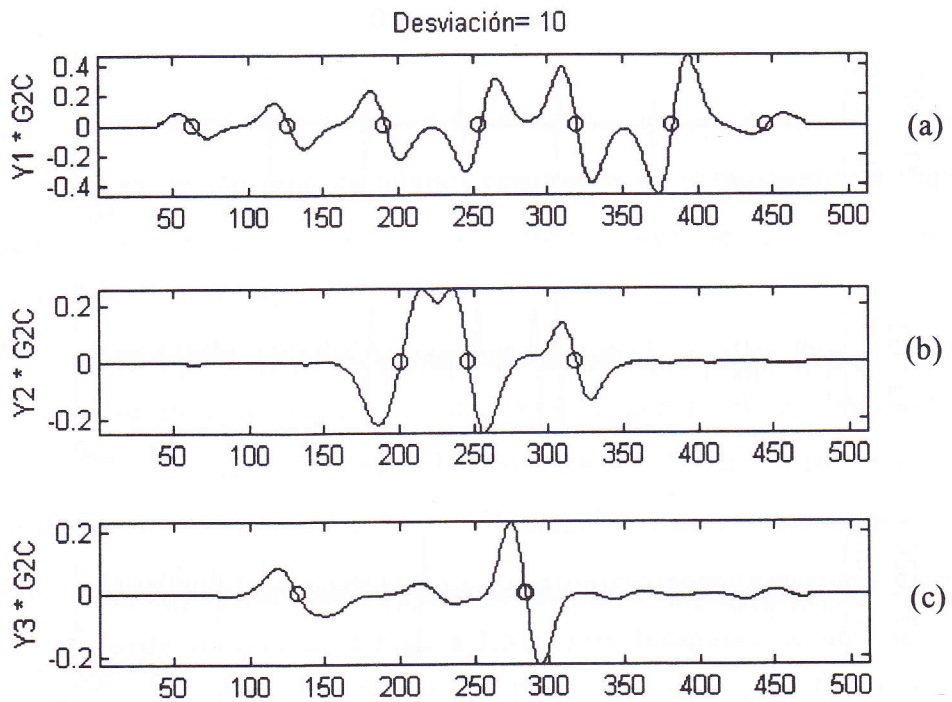


Figura 3.51 Segunda derivada de  $F(x)$  y los bordes localizados para  $\sigma = 10$ .

Por otra parte, y siempre comparando los resultados obtenidos empleando  $\sigma=10$  con los obtenidos para  $\sigma=0.8$ , se aprecia en la Figura 3.51(c) que se ha detectado un borde que en la Figura 3.49(c) no aparecía; esto se debe también al aumento de la desviación que implica un aumento en el tamaño del kernel.

Sin embargo, lo más interesante es que pese a haber aumentado drásticamente el valor de la desviación, se aprecia cierta proporcionalidad del umbral con los valores de la primera derivada tanto en la Figura 3.48 como en la Figura 3.50. Además, recuérdese que en el ejemplo se está empleando un umbral que es el 10% del valor máximo. Se puede ver en la Figura 3.48 y Figura 3.50 que los picos producidos por el ruido de fondo no se acercan en lo más mínimo al umbral establecido. La Figura 3.52 muestra la relación que existe entre el umbral y la desviación.

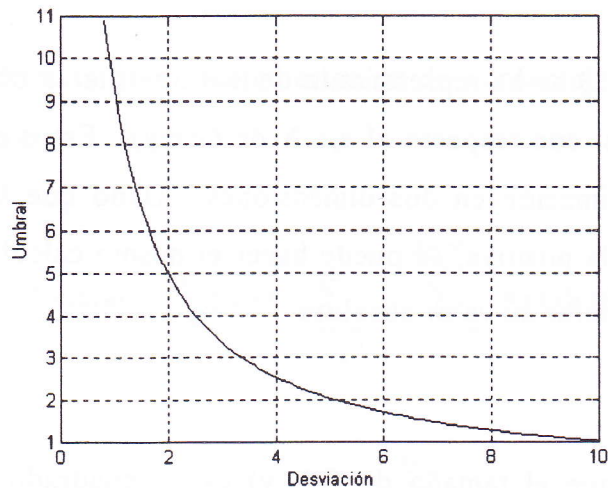


Figura 3.52 Relación Umbral-Desviación 1D, porcentaje 10% del máximo.

Evidentemente, y como ya se ha dicho en secciones anteriores, el porcentaje que se aplique al valor máximo está en función de la información que se desee obtener de la imagen, el empleo del 10% del valor máximo de F1 es un buen punto de partida en la estimación, se sugiere ir disminuyendo este porcentaje hasta encontrar el grado de detalle buscado. En múltiples pruebas

realizadas se ha determinado experimentalmente que los mejores resultados se obtienen empleando un porcentaje entre dos y cinco por ciento.

A partir de éstas relaciones, en la siguiente sección se extienden éstos conceptos al espacio bidimensional.

### 3.2.2 Consideraciones del Umbral en Dos Dimensiones

Para calcular el umbral en dos dimensiones hay que sumar ya sea los valores negativos o valores positivos de  $G'(i,j)$ , multiplicar el resultado por el valor  $2^n - 1$ , y aplicarle el factor de escala que se va a emplear; para este caso  $n=8$  bits/pixel. Como en el caso anterior, se continua empleando el 10%, aunque se sugiere valores entre 2% y 5% para obtener el máximo número de detalles.

En la Figura 3.53 se ha representado dentro de un área cerrada los puntos de la derivada parcial con respecto al eje X de  $G(x,y)$ . Estos puntos deben ser sumados para la estimación en dos dimensiones. Dado que la parte negativa guarda simetría con la positiva, se puede hacer el mismo cálculo con cualquiera de las partes y considerar su valor absoluto.

Considerando que el tamaño de  $G'(x,y)$  es un cuadrado cuyo lado mide kernel, se puede establecer para el espacio bidimensional la siguiente relación:

$$V_{\max} = 255 \sum_{i=-\frac{\text{kernel}}{2}}^0 \sum_{j=-\frac{\text{kernel}}{2}}^{\frac{\text{kernel}}{2}} |G'(i)(j)| \quad (3.34)$$



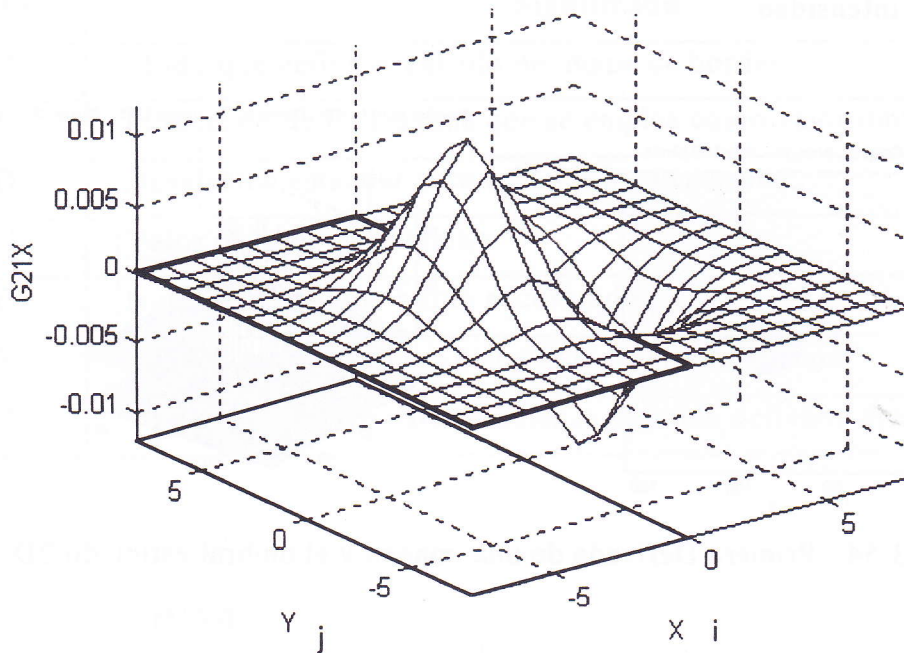


Figura 3.53 Representación de  $\partial^2 G(x,y)/\partial x^2$

Una generalización para cualquier valor de porcentaje puede escribirse de la siguiente manera:

$$\text{Umbral} = \frac{P}{100} \left( 255 \sum_{i=-\frac{\text{kernel}}{2}}^{\frac{\text{kernel}}{2}} \sum_{j=-\frac{\text{kernel}}{2}}^{\frac{\text{kernel}}{2}} |G'(i)(j)| \right)$$

$$\text{Umbral} = 2.55P \sum_{i=-\frac{\text{kernel}}{2}}^{\frac{\text{kernel}}{2}} \sum_{j=-\frac{\text{kernel}}{2}}^{\frac{\text{kernel}}{2}} |G'(i)(j)|$$

( 3.35 )

A continuación se presenta a modo de ejemplo la primera derivada de la imagen de la bola de goma, citada anteriormente, calculada obteniendo los máximos en valor absoluto de las derivadas parciales en el eje X y en el eje Y.

En la misma Figura 3.54, se ha dibujado el umbral, que para el 10% vale 4.975 unidades de intensidad.

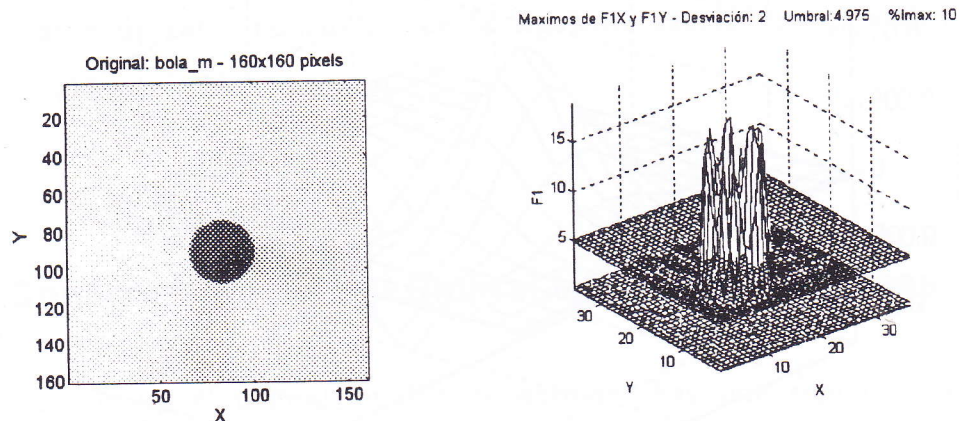


Figura 3.54 Primera Derivada de una imagen y el umbral estimado 2D.

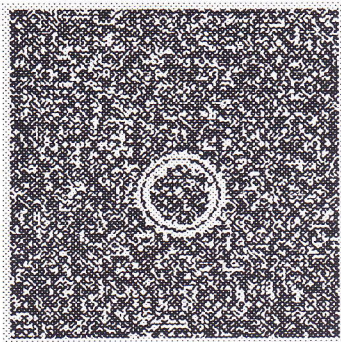
El umbral así encontrado establece una buena referencia para destacar de la imagen los bordes deseados. Aún cuando la imagen original no contenga cambios bruscos de intensidad, esto es, que sea tomada de una escena uniforme como puede ser la imagen de una hoja de papel blanco, la digitalización muestra variaciones múltiples debido a fenómenos de iluminación y captación. Estos gradientes de intensidad se ven reflejados en la primera derivada y por lo tanto producen puntos bordes. Este efecto disminuye cuando se emplean valores de desviación elevados, pero para valores bajos, como pueden ser desviaciones menores a 2 unidades, es necesario eliminar el ruido aplicando un cierto umbral en la detección.

Para contar con mayor información en las ilustraciones, en adelante, una leyenda acompañará a las figuras que contengan más de una representación, como es el caso de la Figura 3.55. Los números situados a la derecha de cada letra indicarán cierta información referente al resultado que se haya obtenido. La tabla siguiente muestra el significado de cada letra:

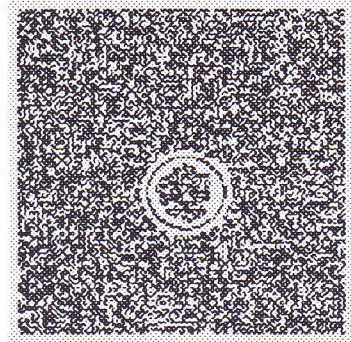
Tabla 3-7

Símbolo	Significado
M	Modo que define el cálculo del mapa de bordes.
%	Porcentaje de F1 máxima que se emplea como valor umbral.
D	Desviación estándar para calcular los gaussianos.
U	Valor del umbral obtenido.
B	Número de puntos-borde encontrados.
k	Tamaño del Filtro para calcular la primera derivada
K	Tamaño del Filtro para calcular la segunda derivada directamente

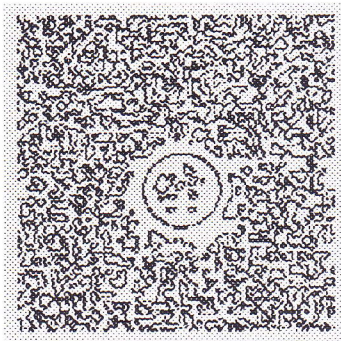
M1%0



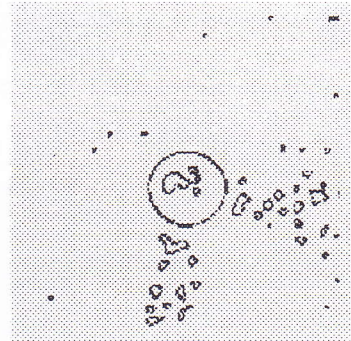
D0.8U0B1.599e+004k7K7



D1U0B1.308e+004k9K9



D1.5U0B8089k13K13



D2U0B645k15K15

Figura 3.55 Mapa de Bordes de la bola para  $\sigma=0.8$ , 1, 1.5, y 2. Umbral=0%.

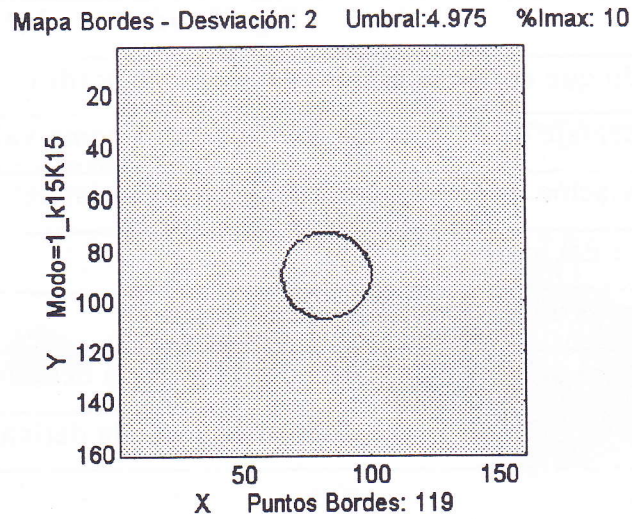


Figura 3.56 Mapa de bordes de la bola  $\sigma=2$ , Umbral=10%.

La misma prueba realizada a la bola (Figura 3.55) se ha practicado con la imagen denominada robot (Figuras 3.57 y 3.58). En este caso se ha disminuido el valor de la desviación de 10% a 5% para resaltar los detalles. Es preciso mencionar que este segundo ejemplo tiene como fondo de imagen una pared muy rugosa que acentúa el "ruido de fondo".

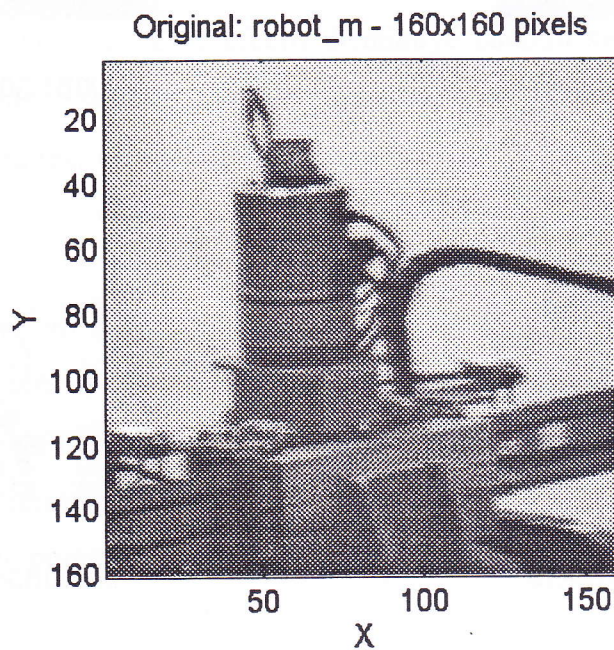


Figura 3.57 Ejemplo articulación de Robot.

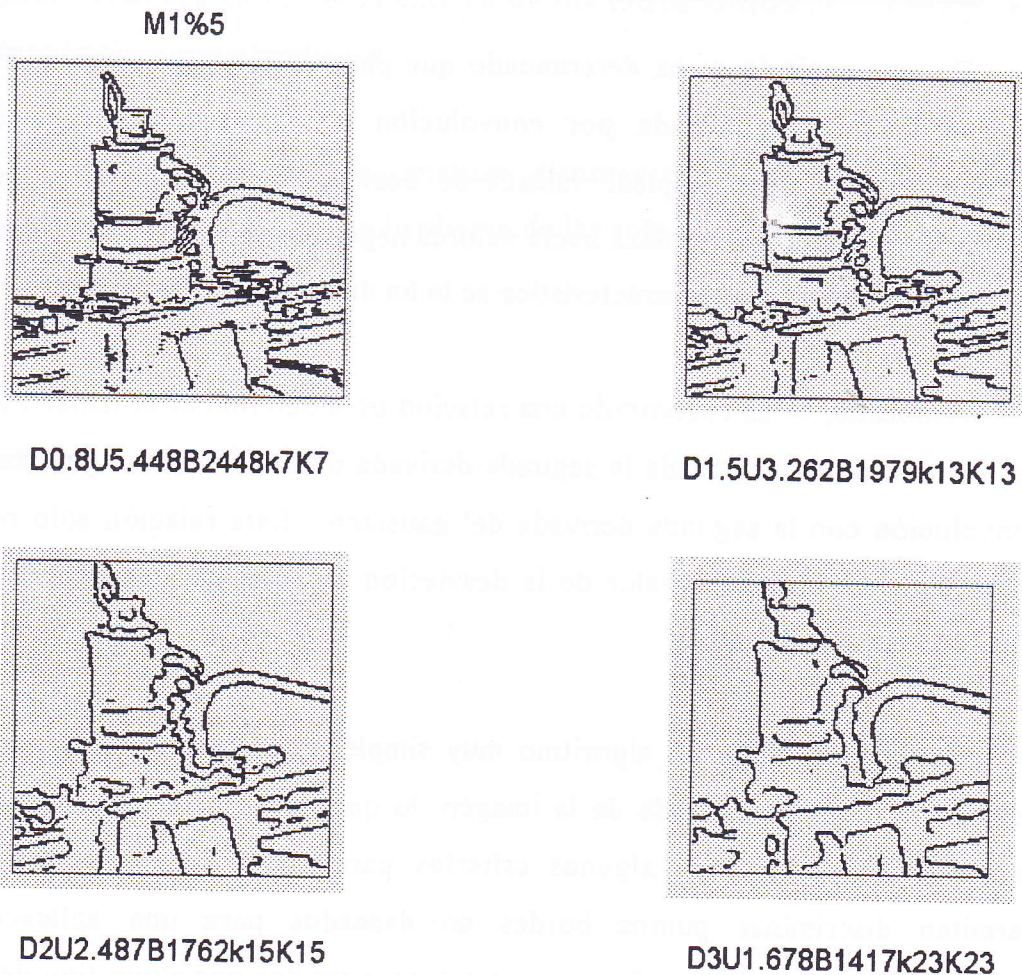


Figura 3.58 Mapa de Bordes para  $\sigma=0.8, 1.5, 2, 3$ . Umbral=5%.

Los resultados presentados corroboran las bondades del filtro Segunda Derivada del Gaussiano. Se aprecia continuidad en las líneas que forman los bordes.

Las discontinuidades que se observan en los límites de las imágenes (desviaciones 2 y 3) se deben a que el tamaño de la máscara para desviaciones grandes obliga a perder información en esta zona por las operaciones de convolución. Esa pérdida de información aumenta al aumentar el valor de la desviación.

### **3.3 Sumario del Tercer Capítulo**

En este capítulo se ha determinado que para calcular la segunda derivada de una imagen digitalizada por convolución con la segunda derivada del gaussiano, no se debe emplear valores de desviación típica menores que 0.8 porque el resultado se desplaza hacia valores negativos, dificultando la detección de paso por cero. A esta característica se le ha denominado "alcance del filtro".

Asimismo, se ha encontrado una relación para determinar el tamaño mínimo del kernel cuando se calcula la segunda derivada de una imagen digitalizada por convolución con la segunda derivada del gaussiano. Esta relación sólo necesita como dato de entrada el valor de la desviación. A esta característica se la ha llamado "tamaño del filtro".

Se ha presentado un algoritmo muy simple para encontrar los pasos por cero de la segunda derivada de la imagen, lo que hace posible su implantación hardware. Se proponen algunos criterios para elegir ciertos umbrales que permitan discriminar puntos bordes no deseados para una aplicación en particular, sin que ello signifique que estén constituidos por algún tipo de ruido. Estas relaciones se basan solamente en los datos de la segunda derivada de la imagen, y sirven para aplicaciones donde los detalles muy finos no son importantes.

Para aplicaciones donde los detalles finos son importantes, se propone una relación que determina el umbral partiendo de la primera derivada del gaussiano. Relaciona un porcentaje del valor máximo esperado de la primera derivada de la imagen. Esta relación es muy importante porque se puede calcular "off line" dado que no necesita los datos de la imagen, sino que le basta con los datos de la primera derivada del gaussiano empleado.

Para todas las soluciones expuestas se presentan procedimientos para encontrar versiones en números enteros de los filtros analizados. Esto permite su futura implantación hardware.

En el próximo capítulo se analizan distintas configuraciones que puedan hacer posible la implantación en hardware de las soluciones aquí expuestas.