

**UNIVERSIDADE FEDERAL
FLUMINENSE**

Instituto de Matemática e Estatística

**Controlabilidade do sistema N-dimensional
de Navier-Stokes com N-1 controles
escalares**

Dany Nina Huaman

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Juan Bautista Límaco Ferrel

Niterói, 27 de Março de 2015

Controlabilidade do sistema N-dimensional de Navier-Stokes com N-1 controles escalares

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática e Estatística da
Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a
obtenção do grau de Mestre.

Área de concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Juan Bautista Límaco Ferrel
(Orientador)

Prof. Dr. Aldo Amilcar Bazan Pacoricona
(Co-orientador)

Prof. Dr. Enrique Fernández Cara

Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández

Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark

Niterói, 27 de março de 2015

Ficha Catalográfica

Dany, N. H.

Controlabilidade do sistema de Navier-Stokes N-dimensional com N-1 controles escalares

Aluno: Dany Nina Huaman,

Niterói, UFF/IME, 2015

i-iv, 93 páginas

Orientador: Juan Límaco Ferrel

Dissertação de Mestrado - UFF/IME/ Programa de Pós-graduação em

Matemática,

Referências Bibliográficas: f. 82-83.

1. Introdução.
2. Resultados Básicos.
3. Controlabilidade do sistema de Navier-Stokes N-dimensional com N controles escalares.
4. Controlabilidade do sistema de Navier-Stokes N-dimensional com N-1 controles escalares.

Dedicatória

Aos meus pais Doris e Maximo Nina,
ao meu irmão e ao meu tio Cesar.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e por ter me dado forças para concluir mais esta etapa de meus estudos.

Um agradecimento especial ao meu orientador, o professor Juan Límaco Ferrel, pela sua eficiente orientação, paciência, boa vontade, sabedoria, pelo exemplo de dedicação a profissão e por ter aceitado me orientar.

À coordenação de Pós-Graduação pelo apoio nos momentos difíceis .

Aos amigos do mestrado da UFF que de alguma forma me ajudaram a nunca desistir.

Aos funcionários da UFF pela atenção e convivência amigável durante a realização do curso.

A minha família pelo apoio incondicional e por terem sido a força que faz ir em frente.

A minha amiga Jany Meirelles quem me ajudou a não desistir.

A meus amigos: Reillon Santos, Genyle Nascimento, Israel Diaz, Miguel Nuñez, Ronald Ramos.

Ao professor Orlando Moreno Vega quem sempre me ajudou.

Aos amigos da Universidad Nacional del Callao: Kupac, Yerson, Chacal, Ronald, John Suarez, Edson Suarez, Paul, Lennin, etc.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de pessoal de Ensino Superior) pelo apoio financeiro .

Resumo

O objetivo principal desta dissertação é estabelecer a controlabilidade local por trajetória com $N-1$ controles escalares do seguinte sistema N -dimensional de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = v1_{\mathcal{O}}, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Onde $T > 0$, $N=2$ ou $N=3$, Ω é qualquer aberto de \mathbb{R}^N limitado, conexo e com fronteira regular e \mathcal{O} é um aberto que está contido em Ω .

Palavras-chave:

Sistema de Navier-Stokes; Controlabilidade local exata por trajetórias; Desigualdade de Carleman; Teorema da função inversa

Abstract

The main objective of this work is to establish the local controllability of trajectories with $N-1$ scalar controls the following N -dimensional system of Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y \cdot \nabla) y + \nabla p = v 1_{\mathcal{O}}, & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y) = 0, & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ y = 0, & \text{on } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0, & \text{in } \Omega \end{cases}$$

Where $T > 0$, $N=2$ or $N=3$, Ω any open \mathbb{R}^N , bounded, connected and regular boundary and \mathcal{O} is open and which is contained in Ω

Keywords System of Navier-Stokes; Local controllability for trajectories; Carleman inequality; Inversa function theorem.

Sumário

1	Preliminares	3
1.1	Tópicos de Análise Funcional	3
1.1.1	Convergência Fraca e Fraca Estrela	3
1.1.2	Espaços Separáveis e Reflexivo	4
1.2	Teoria das Distribuições Escalares	5
1.3	Os Espaços $L^p(\Omega)$	6
1.4	Espaços de Sobolev	8
1.4.1	Os Espaços $W^{m,p}(\Omega)$	9
1.4.2	Os Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,q}(\Omega)$	10
1.5	Espaços $L^p(0, T; X)$	11
1.6	Distribuições Vetoriais	15
1.7	Equação de Navier-Stokes	15
1.8	Resultados Importantes	23
2	Controlabilidade do sistema de Navier-Stokes N dimensional com N controles escalares	25
2.1	Formulação do problema	26
2.2	Resultados e estratégias	26
2.3	Método de Penalização	28
2.4	Desigualdade de Observabilidade	36
2.5	Controle e solução de decrescimento exponencial	50
2.6	Problema Não Linear	55
3	Controlabilidade do sistema de Navier-Stokes N-dimensional com N-1 controles escalares	65
3.1	Formulação do problema	65

3.2	Resultados	67
3.3	Desigualdade de Carleman	68
3.4	Controlabilidade Nula do Problema Linear	71
3.5	Problema Não Linear	78

Introdução

Consideremos o seguinte sistema de Navier-Stokes:

$$(a) \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = v 1_{\mathcal{O}}, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Onde o domínio Ω é um aberto de \mathbb{R}^N ($N=2$ ou $N=3$), com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ de classe \mathcal{C}^2 . Dado um subdomínio $\mathcal{O} \subset \Omega$ o qual é um aberto e seja $T > 0$. Nós usaremos a notação $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ e denotaremos por $\eta(x)$ o vetor normal fora de Ω no ponto $x \in \partial\Omega$.

Em (a) a função y é a velocidade de um fluido viscoso incompressível (viscosidade igual a 1), p é a pressão, v é o controle atuando sobre o subdomínio \mathcal{O} , y_0 é o valor inicial e $1_{\mathcal{O}}$ é a função característica de \mathcal{O} .

Todas as derivadas são no sentido das distribuições de Laurent-Schwartz e $(y \cdot \nabla)y$ denotará a função vetorial a qual tem como componente a:

$$[(y \cdot \nabla)y]_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial y_j}{\partial x_j} y_i + \sum_{j=1}^N y_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}.$$

O operador laplaciano $\Delta y = (\Delta y_1, \dots, \Delta y_N)$ onde

$$\Delta y_i = \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_N^2}, \quad i = \{1, \dots, N\}.$$

p é uma função real e $\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial p}{\partial x_N} \right)$.

Neste trabalho o que se vai estudar é controlabilidade local exata por trajetórias do sistema N -dimensional de Navier-Stokes (a) com $N - 1$ controles escalares.

Dizemos que (a) é localmente exatamente controlável por trajetórias se para (\bar{y}, \bar{p}) uma trajetória ideal(incontrolável) começando com o valor inicial \bar{y}_0 e satisfazendo:

$$(b) \begin{cases} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \Delta \bar{y} + (\bar{y} \cdot \nabla) \bar{y} + \nabla \bar{p} = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(\bar{y}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \bar{y} = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ \bar{y}(0) = \bar{y}_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $y_0 \in E$ e $\|y_0 - \bar{y}_0\|_E \leq \delta$ se possa encontrar um controle $v1_{\mathcal{O}} \in L^2(Q)^N$ tal que se satisfaz $y(T) = \bar{y}(T)$ em Ω .

Seguindo as técnicas de Enrique Fernández Cara [6] e J.P.Puel [11] nós vamos a conseguir a controlabilidade local exata por trajetórias do problema (a) com N -controles escalares a qual vai ser desenvolvido no capítulo 2, as ideias para conseguir este resultado são as seguintes:

- Obter a desigualdade de Carleman e a desigualdade de Observabilidade do estado adjunto do sistema linearizado de (a) .
- Estudar a controlabilidade local nula do sistema linearizado de (a) e obter um controle com decaimento exponencial.
- Obter a controlabilidade local exata por trajetória de (a) a partir do teorema da função inversa (Liusternik).

Finalmente fazendo uso das ideias obtidas em J. P. Puel em [11] assim como as ideias do capítulo 2 e fazendo uso das hipóteses e técnicas de Enrique Fernández Cara [5] no capítulo 3 nós vamos obter a controlabilidade local exata por trajetórias de (a) com $N-1$ controles escalares.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresenta-se alguns resultados necessários, para que o leitor possa ter uma melhor compreensão dos conteúdos abordados no capítulo seguinte.

1.1 Tópicos de Análise Funcional

1.1.1 Convergência Fraca e Fraca Estrela

Definição 1.1. (*Convergência Fraca*) Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E . Então $u_\nu \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle \varphi, u_\nu \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle$, para todo $\varphi \in E'$.

Definição 1.2. (*Convergência Fraca Estrela*) Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E' . Diz-se $\varphi_\nu \xrightarrow{*} \varphi$ fraca estrela se, e somente se, $\langle \varphi_\nu, u \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle$, para todo $u \in E$.

Proposição 1.3. Seja E um espaço de Banach e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em E . Então:

- (i) Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$ então $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in E'$;
- (ii) Se $x_n \rightarrow x$ forte então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente para $\sigma(E, E')$;
- (iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$ e se $f_n \rightarrow f$ fortemente em E' (isto é, $\|f_n - f\|_{E'} \rightarrow 0$) então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Brezis ([2], p. 35). □

1.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivo

Definição 1.4. Diz-se que um espaço métrico E é separável se existe um subconjunto $D \subset E$ numerável e denso.

Definição 1.5. Seja E um espaço de Banach e seja J a injeção canônica de E em E'' . Diz-se que E é reflexivo se $J(E) = E''$.

Quando o espaço E é reflexivo identifica-se implicitamente E e E'' (com ajuda do isomorfismo J).

Teorema 1.6. (Banach-Alaoglu-Bourbaki). Sejam E um espaço de Banach e E' o seu dual topológico. Então o conjunto

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\} \text{ é compacto na topologia fraca estrela}$$

Demonstração: Brezis ([2], p. 42). □

Teorema 1.7. Sejam E um espaço de Banach separável e E' o seu dual topológico. Então o conjunto

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\} \text{ é metrizável na topologia fraca estrela.}$$

Reciprocamente, se $B_{E'}$ é metrizável na topologia fraca estrela, então E é separável.

Demonstração: Brezis ([2], p.48). □

O primeiro resultado (o corolário) é uma consequência do Teorema 1.6 e Teorema 1.7.

Corolário 1.8. Sejam E um espaço Banach separável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E' . Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que converge na topologia fraca estrela.

Demonstração: Brezis ([2], p. 50). □

Teorema 1.9. Seja E um espaço de Banach reflexivo e suponhamos que a sequência $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset E$ é limitada. Então existe uma subsequência $(f_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $f \in E$ tal que

$$f_{k_j} \rightharpoonup f.$$

Demonstração: Evans ([10], p. 639). □

1.2 Teoria das Distribuições Escalares

Definição 1.10. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Denomina-se suporte de φ ao fecho em Ω do conjunto dos pontos x tais que $\varphi(x) \neq 0$. Simbolicamente,*

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^\Omega.$$

Definição 1.11. *Denota-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas e infinitamente deriváveis em Ω com suporte compacto em Ω .*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é de grande importância para o nosso estudo, visto que estamos interessados em estudar funcionais lineares contínuos definidos em $C_0^\infty(\Omega)$.

Dado Ω como acima, considere o espaço vetorial topológico $C_0^\infty(\Omega)$. Diz-se que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\text{supp}(\varphi) \subset K \quad \text{e} \quad \text{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α .

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima será representada por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de *espaço das funções testes*.

Denomina-se *distribuição escalar* sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com respeito a topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que T satisfaz as seguintes condições:

$$\text{i)} \quad T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ii) T é contínua, isto é, se uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge, em $\mathcal{D}(\Omega)$ para φ , então,

$$T(\varphi_\nu) \rightarrow T(\varphi) \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi \rangle$. Equipa-se o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergência:

Considera-se o espaço de todas as distribuições sobre Ω . Neste espaço, diz-se que a sequência $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para T , quando a sucessão $(\langle T_\nu, \varphi \rangle)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em \mathbb{R} para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω . Com o intuito de estudar os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribucional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$. A motivação no conceito de derivada fraca e posteriormente o conceito de derivada distribucional dada por Sobolev, se deve a fórmula de integração por partes de Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dada uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ define-se a *derivada distribucional* de ordem α de T como sendo $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ a forma linear e contínua dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Note-se que a aplicação

$$(1.1) \quad D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e continua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que

$$(1.2) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \rightarrow \infty} D^\alpha T_v = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

1.3 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção, serão dadas algumas definições e propriedades elementares dos espaços $L^p(\Omega)$.

Definição 1.12. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$; é definido*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Definição 1.13. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto; é definido*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mensurável e } \exists C \text{ constante tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.s em } \Omega\}.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C; |f(x)| \leq C \text{ q.s em } \Omega\}.$$

Teorema 1.14. (Desigualdade de Hölder). Sejam as funções $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p ; isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Brezis ([2], p. 56). □

Observação 1.15. Temos que mencionar uma consequência muito útil da desigualdade de Hölder: sejam f_1, f_2, \dots, f_k funções tais que

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \text{ para } 1 \leq i \leq k \text{ com } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então o produto $f = f_1 f_2 f_3 \dots f_k$ pertence a $L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Demonstração: Brezis ([2], p. 57). □

Teorema 1.16. (Teorema da convergência dominada, Lebesgue). Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em L^1 que satisfazem:

(a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ em q.t.p de Ω ,

(b) existe uma função $g \in L^1$ tal que, para todo n tem-se $|f_n(x)| \leq g(x)$, em q.t.p de Ω .

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Demonstração: Brezis ([2], p. 54). □

Teorema 1.17. Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de L^p e $f \in L^p$, tal que $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$. Então, existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e uma função $h \in L^p$ tal que

(a) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ em q.t.p de Ω

(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ para todo k e em q.t.p de Ω .

Demonstração: Brezis ([2], p. 58). □

Definição 1.18. Diz-se que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω , quando f é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Em símbolos tem-se

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |f| dx < \infty, \text{ para todo compacto } K \subset \Omega.$$

As distribuições que aparecem com mais frequência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Exemplo 1.19. Seja $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx$$

Nestas condições T_u é uma distribuição escalar sobre Ω .

De fato, não é difícil mostrar a linearidade de T_u , pois segue da linearidade da integral. Resta mostrar que T_u é contínua.

Seja uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω que converge em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ , então

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi_\nu \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| &= |\langle T_u, \varphi_\nu - \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)|dx \\ &\leq \sup |\varphi_\nu - \varphi| \int_{\Omega} |u(x)|dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pois, $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ uniformemente.

A distribuição T_u assim definida é dita “gerada pela função localmente integrável u ” e, usando o Lema de Du Bois Raymond, tem-se que T_u é univocamente determinada por u , no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω . Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$

Lema 1.20. (Du Bois Raymond). Seja $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração: Medeiros, L. A e Milla Miranda, M. ([15], p. 12). □

Observação 1.21. Outro resultado interessante é que a derivada de uma função $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, não é em geral uma função de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções conhecidas sob a denominação de *Espaços de Sobolev*.

1.4 Espaços de Sobolev

Como vimos na seção anterior, toda função $u \in L^p(\Omega)$ possui derivadas distribucionais de todas as ordens. Entretanto, as derivadas de u nem sempre são também funções em $L^p(\Omega)$.

1.4.1 Os Espaços $W^{m,p}(\Omega)$

Chamaremos multi-índice a toda n -upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de números naturais. Dado um multi-índice α , definimos a ordem $|\alpha|$ de α por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, e representamos por D^α o operador derivação

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição 1.22. *Sejam Ω um aberto do \mathbb{R}^n , $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. O Espaço de Sobolev que denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$, é o espaço vetorial das (classes de) funções em $L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais de ordem α pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$. Simbolicamente escrevemos:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

também $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup \text{ess}_{\Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H^m(\Omega)$ que é um Espaço de Hilbert, cujo produto interno e a correspondente norma induzida em $H^m(\Omega)$ são dadas por

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Agora vamos apresentar algumas desigualdades de Sobolev que nos ajudarão a alcançar objetivo proposto.

Corolário 1.23. *Supomos que Ω é um conjunto aberto de \mathbb{R}^n e de classe C^1 com Γ limitado, seja $1 \leq p \leq \infty$, então tem-se*

$$\text{Se } p < n \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

$$\text{Se } p = n \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in [p, +\infty),$$

$$\text{Se } p > n \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega),$$

e todas estas injeções são contínuas. Além disso, se $p > n$ tem-se para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|u\|_{W^{1,p}} |x - y|^\alpha \text{ q.s. } x, y \in \Omega,$$

onde $\alpha = 1 - (N/p)$ e C dependa apenas do Ω, p e n . Em particular $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

Demonstração: Brezis ([3], p. 285). □

Teorema 1.24 (Rellich–Kondrachov). *Suponha Ω um subconjunto de \mathbb{R}^n limitada e de classe C^1 . Então tem-se as seguintes injeções compactas*

$$\text{Se } p < n \text{ } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in [1, p^*) \text{ com } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

$$\text{Se } p = n \text{ } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in [p, +\infty),$$

$$\text{Se } p > n \text{ } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}).$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ com injeção compacta para todo p (e para todo n).

Demonstração: Brezis ([3], p. 285). □

Observação 1.25. *Note que $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$. Se $u, v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, vale a identidade*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (uv) dx = \int_{\Gamma} uv \nu_i d\Gamma,$$

sendo $\nu_i = \cos(x_i, \nu)$, ν normal unitária externa a Γ . Portanto

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} uv \nu_i d\Gamma,$$

para todo par de funções $u, v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Por densidade, estende-se este resultado para funções $u, v \in H^1(\Omega)$.

Demonstração: Medeiros, L. A e Milla Miranda, M. ([17], p. 126). □

1.4.2 Os Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,q}(\Omega)$

Observe que, embora o espaço vetorial das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto acontece porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é “bém maior” que a norma de $L^p(\Omega)$ é por isso que $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos sequências convergentes. Isto motivou a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Definição 1.26. *Seja Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , é definido*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H_0^m(\Omega)$.

Teorema 1.27. (*Desigualdade de Poincaré*). *Suponhamos Ω é um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n e $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver Brezis ([3], p. 290). □

Observação 1.28. *Em particular a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma no espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$; em $H_0^1(\Omega)$ tem-se o produto interno*

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, equivalente a norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Demonstração: Brezis ([3], p. 290). □

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e em particular os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham papel fundamental na Teoria dos Espaços de Sobolev e por conseguinte na Teoria das EDP's.

Se $1 \leq p < \infty$ e o número q é o expoente conjugado de p , isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$. Em outras palavras, se f pertence a $H^{-m}(\Omega)$ é uma funcional linear limitada sobre $H_0^m(\Omega)$.

Definição 1.29. *Se $f \in H^{-1}(\Omega)$ a norma é definida como sendo*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\langle f, u \rangle; \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega) \text{ com } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\}.$$

Observação 1.30. *Em particular, as conclusões do Corolário 1.23 é válido para o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ com um subconjunto arbitrário aberto Ω de \mathbb{R}^n . Similarmente, a conclusão do Teorema 1.24 é válido para $W_0^{1,p}(\Omega)$ com um subconjunto arbitrária Ω aberto e limitado de \mathbb{R}^n*

Demonstração: Brezis ([3], p. 290). □

1.5 Espaços $L^p(0, T; X)$

Estende-se as noções de mensurabilidade, integrabilidade, para funções

$$f : [0, T] \longrightarrow X,$$

onde $T > 0$ e X é um espaço de Banach real com a norma $\|\cdot\|$

Definição 1.31. (i) Uma função $s : [0, T] \rightarrow X$ é chamada simples se tem forma

$$s(t) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i}(t) u_i, \quad (0 \leq t \leq T),$$

onde cada E_i é um subconjunto Lebesgue mensurável de $[0, T]$ e $u_i \in X$, ($i=1, 2, \dots, m$).

(ii) Uma função $f : [0, T] \rightarrow X$ é fortemente mensurável se existem funções simples $s_k : [0, T] \rightarrow X$ tais que

$$s_k(t) \rightarrow f(t); \text{ para q.s } 0 \leq t \leq T.$$

(iii) Uma função $f : [0, T] \rightarrow X$ é fracamente mensurável se, para cada $u^* \in X^*$ a aplicação $t \mapsto \langle u^*, f(t) \rangle$ é Lebesgue mensurável.

Definição 1.32. (i) Se $s(t) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i}(t) u_i$ é uma função simple, definimos

$$\int_0^T s(t) dt = \sum_{i=1}^m |E_i| u_i.$$

(ii) Dizemos $f : [0, T] \rightarrow X$ é somável se existe uma sequência de $\{s_k\}_{k=1}^\infty$ de funções simples, tal que

$$\int_0^T \|s_k(t) - f(t)\| dt \rightarrow 0; \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

(iii) Se a função f é somável, definimos

$$\int_0^T f(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T s_k(t) dt.$$

Definição 1.33. Denota-se por $L^p(0, T; X)$, com $1 \leq p \leq \infty$ o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0, T) \rightarrow X$ fortemente mensuráveis com valores em X e tais que; se $1 \leq p < \infty$ a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à Lebesgue em $(0, T)$; e se $p = \infty$ a função $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$.

O espaço $L^p(0, T; X)$ é um espaço completo com a norma definido por

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \text{ se } 1 \leq p < \infty.$$

Se $p = \infty$ norma acima é substituída por

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{0 < t < T} \text{ess } \|u(t)\|_X.$$

Apenas no caso em que $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$\langle v, u \rangle_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_X dt.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach $L^{p'}(0, T; X')$, onde p e p' são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral por

$$\langle v, u \rangle_{L^{p'}(0, T; X') \times L^p(0, T; X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_{X' \times X} dt.$$

No caso $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0, T; X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0, T; X')$.

Definição 1.34. Denota-se por $C([0, T]; X)$, com $T > 0$ o espaço de Banach das funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Podemos citar algumas propriedades importantes do espaço $L^p(0, T; X)$ que serão úteis no desenvolvimento do trabalho.

Observação 1.35. Consideremos o intervalo aberto $I \in \mathbb{R}$ e um espaço de Banach X .

(i) Se I é um intervalo limitada e $p \leq q$, então

$$L^q(I, X) \hookrightarrow L^p(I, X) \quad e \quad \|f\|_{L^p(I, X)} \leq |I|^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_{L^q(I, X)}.$$

(ii) Se Y é um espaço de Banach e se $A : X \rightarrow Y$ um operador linear e contínua, então para todo $f \in L^p(I, X)$ temos $Af \in L^p(I, Y)$ e

$$\|Af\|_{L^p(I, Y)} \leq \|A\| \|f\|_{L^p(I, X)}.$$

Em particular se $X \hookrightarrow Y$ e se $f \in L^p(I, X)$, então $f \in L^p(I, Y)$ (tomar A para ser a imersão)

Demonstração: Cazenave ([7], p. 17). □

Teorema 1.36 (Aubin-Lions). *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach, B_0 e B_1 reflexivos, a imersão de B_0 em B é compacta, B imerso continuamente em B_1 , $1 < p_0, p_1 < \infty$ e W o espaço*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0); u' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

equipado da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}.$$

Então W é um espaço de Banach, e a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração: Lions ([14], p. 58). □

Observação 1.37. Uma consequência do Teorema de Aubin-Lions: se $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_1)$ então $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada em W . Daí, segue-se que existe uma subsequência $(u_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ tal que $u_{\nu_k} \rightarrow u$ forte em $L^2(0,T;B)$.

Lema 1.38. Sejam Q um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, g_m e g funções de $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$, satisfazendo

$$\|g_m\|_{L^q(Q)} \leq C \text{ e } g_m \rightarrow g, \text{ em q.t.p de } Q.$$

Então

$$g_m \rightarrow g, \text{ em } L^q(Q)$$

Demonstração: Lions ([14], p. 12). □

Lema 1.39. Sejam V, H, V' três espaços de Hilbert, sendo V' o dual de V . Se uma função u pertence ao espaço $L^2(0,T;V)$ e sua derivada u' pertence ao espaço $L^2(0,T;V')$, então u é quase sempre igual a uma função contínua de $[0,T]$ em H , e temos a seguinte igualdade no sentido de distribuição escalar em $(0,T)$

$$\frac{d}{dt} |u|^2 = 2\langle u', u \rangle.$$

A igualdade acima faz sentido desde que as funções

$$t \mapsto |u(t)|^2 \text{ e } t \mapsto \langle u'(t), u(t) \rangle$$

são ambos integrável em $[0,T]$.

Demonstração: Temam ([19], p. 261). □

Lema 1.40. Sejam X um espaço de Banach, $f \in L^p(0,T;X)$ e $f' \in L^p(0,T;X)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então

$$f \in C([0,T];X).$$

(Possivelmente redefinidas sobre um conjunto de medida nula.)

Demonstração: Lions ([14], p. 7). □

1.6 Distribuições Vetoriais

Seja um número real $T > 0$ e X um espaço de Banach real com a norma $\|\cdot\|$

Definição 1.41. Uma distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X , é uma função $f : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$ linear e contínua. O conjunto dessas transformações lineares é chamado Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X e é denotado por

$$\mathcal{D}'(0, T; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T); X).$$

Definição 1.42. Seja $f \in \mathcal{D}'(0, T; X)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X dada por

$$\left\langle \frac{d^n f}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle f, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Observação 1.43. Se a função f pertence ao espaço $L^p(0, T; X)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então define uma distribuição que denotamos pela mesma função f e é dada por

$$f(\varphi) = \int_0^T f(t)\varphi(t)dt, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(0, T),$$

com valores integrais em X .

Demonstração: Lions ([14], p. 7). □

1.7 Equação de Navier-Stokes

Definição 1.44. Seja Ω aberto e limitado em \mathbb{R}^N com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $N = 2$ ou $N = 3$

$$\gamma = \{\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^N, \operatorname{div}(\varphi) = 0\}$$

$$H = \{\varphi \in [L^2(\Omega)]^N; \operatorname{div}(\varphi) = 0, \gamma_\nu \varphi = 0\}$$

$$V = \{\varphi \in [H_0^1(\Omega)]^N; \operatorname{div}(\varphi) = 0\}$$

Teorema 1.45. Seja Ω aberto e limitado em \mathbb{R}^N com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $N = 2$ ou $N = 3$. Então.

$$\bar{\gamma}^{\|\cdot\|_{L^2}} = H$$

$$\bar{\gamma}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} = V$$

Demonstração: Temam ([19], p. 15). □

Definição 1.46. *Seja u e $v \in \mathbb{R}^N$, nós vamos a definir*

$$u \otimes v = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \cdots & u_1 v_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N v_1 & u_N v_2 & \cdots & u_N v_N \end{bmatrix}$$

Consideremos o seguinte problema de evolução de Stokes para (u, p)

$$(1.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f - \nabla p, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(u) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ u(0) = u_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Donde Ω é um aberto limitado de \mathbb{R}^N de classe \mathcal{C}^1 com $N = 2$ ou $N = 3$, $T > 0$ e $\Gamma = \partial\Omega$. Multiplicando a primeira equação de 1.3 por $\omega \in V$ tem-se:

$$(1.4) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t), w) + (u(t), w)_H = \langle f(t), w \rangle, & \text{em } (0, T) \text{ para todo } \omega \in V \\ u(0) = u_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Teorema 1.47. *Se $u_0 \in H$ e $f \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^N)$. Então existe uma única solução $u \in \mathcal{C}(0, T, H) \cap L^2(0, T, V)$ com $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, V')$ de 1.4 mais ainda existe $p \in \mathcal{D}'(0, T, L^2(\Omega))$ (De fato $p \in H^{-1}(0, T, L^2(\Omega))$) tal que (u, p) satisfaz 1.3*

Demonstração: Temam ([19], p. 254). □

Teorema 1.48. *Se $u_0 \in V$ e $f \in L^2(0, T, H)$, então a solução u de 1.3 satisfaz $u \in \mathcal{C}(0, T, V) \cap L^2(0, T, H^2(\Omega)^N)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, H)$ e $p \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$*

Demonstração: Temam ([19], p. 268). □

Consideremos o seguinte problema para (y, q)

$$(1.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla \cdot (y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla q = \nabla \cdot g + v1_\omega & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Onde Ω é um aberto limitado de \mathbb{R}^N de classe \mathcal{C}^1 com $N = 2$ ou $N = 3$, $\omega \subset \Omega$ é um aberto e $Q = \Omega \times (0, T)$, para $T > 0$ fixo.

Lema 1.49. *Seja $\bar{y} \in L^\infty(Q)^N$, $g \in L^2(Q)^{N^2}$, $y_0 \in H$ e $v \in L^2(Q_\omega)^N$, então existe uma solução de 1.5 tal que $y \in \mathcal{C}([0, T], H) \cap L^2(0, T, V)$*

Demonstração: Para $\tilde{y} \in L^2(0, T, V)$, denotemos por $f_0 = \nabla \cdot g + \nabla v 1_\omega - \nabla \cdot (\bar{y} \otimes \tilde{y} + \tilde{y} \otimes \bar{y})$ vamos provar que $f_0 \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^N)$, vejamos primeiro o seguinte:

$$\|\tilde{y}\|_{L^2(Q)^N}^2 = \int_0^T \|\tilde{y}\|_{L^2(\Omega)^N}^2 dt$$

Da equivalência das normas $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^N}$ e $\|\cdot\|_V$, se tem

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}\|_{L^2(Q)^N}^2 &\leq \int_0^T \|\tilde{y}(t)\|_V^2 dt \\ &\leq c^2 \|\tilde{y}(t)\|_{L^2(0, T, V)}^2 \\ &< \infty \end{aligned}$$

por tanto $\tilde{y} \in L^2(Q)^N$ e como $\bar{y} \in L^\infty(Q)^N$ implica que $\tilde{y} \otimes \bar{y} \in L^2(Q)^{N^2}$ e $\bar{y} \otimes \tilde{y} \in L^2(Q)^{N^2}$ agora vamos a chamar por $\tilde{f}_{ij} = (\bar{y} \otimes \tilde{y} + \tilde{y} \otimes \bar{y})_{ij}$ o qual pertence a $L^2(Q)^{N^2}$.

$\langle \nabla \tilde{f}(t), w \rangle = - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N (\tilde{f}_{ij}(t), \frac{\partial w_i}{\partial x_j})_{L^2(\Omega)}$ para todo $w \in [H_0^1(\Omega)]^N$ assim $\nabla \tilde{f}(t)$ é linear, agora vamos provar que é continua.

$$\left| \langle \nabla \tilde{f}(t), w \rangle \right| \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left| \tilde{f}_{ij}(t) \right|_{L^2(\Omega)} \left| \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)}$$

$$\left| \langle \nabla \tilde{f}(t), w \rangle \right| \leq c \|w\|_{[H_0^1(\Omega)]^N}$$

$$\left| \langle \nabla \tilde{f}(t), w \rangle \right| \leq c \|w\|_{[H_0^1(\Omega)]^N}$$

e assim temos que $\nabla \cdot \tilde{f}(t) \in [H^{-1}(\Omega)]^N$, também se tem que:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left| \langle \nabla \cdot \tilde{f}(t), w \rangle \right|^2 dt &\leq \int_0^T c \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \left\| \tilde{f}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq c \|w\|_{[H_0^1(\Omega)]^N}^2 \int_0^T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_0^T \left| \tilde{f}_{ij}(t) \right|^2 dx dt \\
&\leq c \|w\|_{[H_0^1(\Omega)]^N}^2 \left\| \tilde{f} \right\|_{[L^2(\Omega)]^N} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Por tanto $\nabla \cdot \tilde{f} \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^N)$ isto nos leva a que $\nabla \cdot (\tilde{y} \otimes \tilde{y} + \tilde{y} \otimes \tilde{y}) \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^N)$, como $\nabla \cdot g \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^N)$ e $v1_w \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^N)$ nós vamos ter que $f_0 \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^N)$

Agora consideremos o seguinte problema:

$$(1.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f_0 - \nabla p & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Pelo teorema 1.47 existe uma única solução y de 1.6 com $y \in \mathcal{C}(0, T, H) \cap L^2(0, T, V)$ e $\frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0, T, V')$, isto nós diz que para cada $\tilde{y} \in L^2(0, T, V)$ existe solução de 1.5 a qual vamos chamar $L_T(\tilde{y}) = y$. Vamos a definir a seguinte função:

$$\begin{aligned}
L_T : \mathcal{C}([0, T], H) \cap L^2(0, T, V) &\longrightarrow \mathcal{C}([0, T], H) \cap L^2(0, T, V) \\
\tilde{y} &\longrightarrow L_T(\tilde{y}) = y
\end{aligned}$$

Esta bem definido e agora nós vamos provar que é uma contração para T muito pequeno. Sejam \tilde{y}_1 e $\tilde{y}_2 \in \mathcal{C}([0, T], H) \cap L^2(0, T, V)$ e denotemos por $y_1 = L_T(\tilde{y}_1)$ e $L_T(\tilde{y}_2) = y_2$ e como eles são soluções fracas de 1.6 respetivamente quando \tilde{y} é igual a \tilde{y}_1 e \tilde{y}_2 respetivamente nós vamos ter que y_1 e y_2 cumprem as seguintes equações:

$$(1.7) \quad \frac{d}{dt}(y_1(t), w) + a(y_1(t), w) = \langle f_0^1, w \rangle \quad \text{para todo } w \in V$$

$$(1.8) \quad \frac{d}{dt}(y_2(t), w) + a(y_2(t), w) = \langle f_0^2, w \rangle \quad \text{para todo } w \in V$$

restando 1.7 e 1.8 nós vamos ter:

$$\frac{d}{dt}(y_1 - y_2)(t, w) + a(y_1 - y_2)(t, w) = \langle f_0^2, w \rangle \quad \text{para todo } w \in V$$

Fazendo $w = (y_1 - y_2)(t) \in V$ e como $f_0^1 - f_0^2 = -\nabla(\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) + (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) \otimes \bar{y})$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|(y_1 - y_2)(s)\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + a((y_1 - y_2)(s), (y_1 - y_2)(s)) &= \\ &= -\langle \nabla \cdot (\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) + (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) \otimes \bar{y}), y_1 - y_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|(y_1 - y_2)(s)\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \|(y_1 - y_2)(s)\|_V^2 &= \\ (\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) + (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) \otimes \bar{y}, \nabla(y_1 - y_2))_{L^2(\Omega)^{N^2}} \end{aligned}$$

integrando de 0 ate T

$$\begin{aligned} \|(y_1 - y_2)(t)\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \int_0^t \|(y_1 - y_2)(s)\|_V^2 ds &\leq \\ \int_0^t (\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) + (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) \otimes \bar{y}, \nabla \cdot (y_1 - y_2))_{L^2(\Omega)^{N^2}} ds &= \\ = \int_0^t (\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2), \nabla \cdot (y_1 - y_2)) ds + \int_0^t ((\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) \otimes \bar{y}, \nabla \cdot (y_1 - y_2)) ds \end{aligned}$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^t \|\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)\|_{L^2} \|\nabla \cdot (y_1 - y_2)\|_{L^2} ds + \int_0^t \|(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) \otimes \bar{y}\|_{L^2} \|\nabla \cdot (y_1 - y_2)\|_{L^2} ds \\ &\leq 2 \int_0^t \|\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)\|_{L^2} \|\nabla \cdot (y_1 - y_2)\|_{L^2} ds \\ \|(y_1 - y_2)(t)\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \int_0^t \|y_1 - y_2\|_V^2 ds &\leq 2 \int_0^t \|\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)\|_{L^2(\Omega)^{N^2}} \|y_1 - y_2\|_V ds \\ &\leq 2 \int_0^t \|\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)\|_{L^2}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|y_1 - y_2\|_V^2 ds \end{aligned}$$

passando a restar o segundo somando da parte direita da desigualdade

$$\|(y_1 - y_2)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|y_1 - y_2\|_V^2 ds \leq 2 \int_0^t \|\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)\|_{L^2}^2 ds$$

obtemos

$$(1.9) \quad \|y_1 - y_2\|_{C(0,T,H)} \leq 4 \int_0^T \|\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)\|_{L^2}^2 ds$$

e

$$(1.10) \quad \int_0^T \|y_1 - y_2\|_V^2 ds \leq 4 \int_0^T \|\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)\|_{L^2}^2 ds$$

Agora vamos limitar o termino que aparece nas desigualdades 1.9 e 1.10

$$|\bar{y}_i(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)_j| \leq \|\bar{y}\|_{L^\infty(Q)^{N^2}} |\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2|_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N$$

de este fato vamos ter

$$\begin{aligned} \|\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)\|_{L^2(\Omega)^N}^2 &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} |\bar{y}_i|^2 |(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)_j|^2 dx \\ &\leq c \|\bar{y}\|_{L^\infty(Q)^N}^2 \left(\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} |(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)_j|^2 dx \right) \\ &\leq c \|\bar{y}\|_{L^\infty(Q)^N} \|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \end{aligned}$$

somando 1.9 e 1.10 para depois substituir a desigualdade de acima nós vai dar

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|_{C(0,T,H) \cap L^2(0,T,V)}^2 &\leq c \|\bar{y}\|_{L^\infty(Q)^N}^2 \int_0^T \|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\|_{L^2(\Omega)^N}^2 ds \\ &\leq c \|\bar{y}\|_{L^\infty(Q)^N}^2 \int_0^T \|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\|_{C(0,T,H)}^2 ds \\ &\leq cT \|\bar{y}\|_{L^\infty(Q)^N}^2 \|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\|_{C(0,T,H)}^2 \\ &\leq cT \|\bar{y}\|_{L^\infty(Q)^N}^2 \|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\|_{C(0,T,H) \cap L^2(0,T,V)}^2 \end{aligned}$$

$$(1.11) \quad \|L_T(\tilde{y}_1) - L_T(\tilde{y}_2)\|_{C(0,T,H) \cap L^2(0,T,V)} \leq c\sqrt{T} \|\bar{y}\|_{L^\infty(Q)^N} \|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\|_{C(0,T,H) \cap L^2(0,T,V)}$$

Tomando em 1.11 $T = T_0$ muito pequeno temos que L_{T_0} é uma contração e pelo teorema do ponto fixo de Banach vai existir um único $y \in \mathcal{C}(0, T, H) \cap L^2(0, T, V)$ tal que $L_{T_0}(\tilde{y}) = y$

Chamaremos por y^1 a solução de :

$$(P_1) \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla \cdot (y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla p = \nabla \cdot g + v1_\omega & \text{em } \Omega \times (0, T_0) \\ \operatorname{div}(y) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T_0) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T_0) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

onde $y^1 \in \mathcal{C}(0, T_0, H) \cap L^2(0, T_0, V)$ e $\frac{\partial y^1}{\partial t} \in L^2(0, T, V')$, desta maneira como se conseguiu solução do problema (P_1) se vai conseguir a existência de solução do problema:

$$(P_2) \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla \cdot (y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla p = \nabla \cdot g + v1_\omega & \text{em } \Omega \times (T_0, 2T_0) \\ \operatorname{div}(y) = 0 & \text{em } \Omega \times (T_0, 2T_0) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (T_0, 2T_0) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

e a solução do problema P_2 chamaremos por $\hat{y}^2 \in \mathcal{C}(T_0, 2T_0, H) \cap L^2(T_0, 2T_0, V)$ a qual cumpre que $\frac{\partial \hat{y}^2}{\partial t} \in L^2(T_0, 2T_0, V')$ e agora definamos y^2

$$y^2(x, t) = \begin{cases} y^1(x, t); & (x, t) \in \Omega \times [0, T_0] \\ \hat{y}^2(x, t); & (x, t) \in \Omega \times [T_0, 2T_0] \end{cases}$$

e se pode ver que $y^2 \in \mathcal{C}(0, 2T_0, H) \cap L^2(0, 2T_0, V)$ com $\frac{\partial y^2}{\partial t} \in L^2(0, 2T_0, V')$ e y é a única solução de 1.5 para $T = 2T_0$, então o que nos vamos fazer é utilizar o principio de indução matemática para provar que existe uma única solução de 1.5 para $T = nT_0$ para qualquer n numero natural.

Suponhamos que existe uma única solução y^n de 1.5 para $T = nT_0$, então consideremos o seguinte problema:

$$(P_{n+1}) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla \cdot (y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla p = \nabla \cdot g + v1_\omega & \text{em } \Omega \times (nT_0, (n+1)T_0) \\ \operatorname{div}(y) = 0 & \text{em } \Omega \times (nT_0, (n+1)T_0) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (nT_0, (n+1)T_0) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

Da mesma como se provo que P_1 tem uma única solução se consegue obter uma única solução de P_{n+1} a qual vamos chamar por $\hat{y}^{n+1} \in \mathcal{C}(nT_0, (n+1)T_0, H) \cap L^2(nT_0, (n+1)T_0, V)$ e $\frac{\partial \hat{y}^{n+1}}{\partial t} \in L^2(nT_0, (n+1)T_0, V')$ e vamos a definir y^{n+1}

$$y^{n+1}(x, t) = \begin{cases} y^n(x, t); & (x, t) \in \Omega \times [0, nT_0] \\ \hat{y}^{n+1}(x, t); & (x, t) \in \Omega \times [nT_0, (n+1)T_0] \end{cases}$$

o qual é solução de 1.5 quando $T = (n+1)T_0$ e por tanto pelo principio de indução temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ o problema 1.5 quando $T = nT_0$ tem uma única solução $y^n \in \mathcal{C}(0, nT_0, H) \cap L^2(0, nT_0, V)$ e $\frac{\partial y^n}{\partial t} \in L^2(0, nT_0, V')$

Agora tomemos $\tilde{T} > 0$ como os números naturais não são limitados existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 T_0 > \tilde{T}$, então pelo que se provo acima se sabe que existe uma única solução y^{n_0} solução de 1.5 com $T = n_0 T_0$ devido a isto fazendo $y = y^{n_0}|_{\Omega \times [0, T]}$ vamos ter que y é a única solução de 1.5 com $T = \tilde{T}$ qualquer e que cumpre com $z \in \mathcal{C}(0, T, H) \cap L^2(0, T, V)$ e $\frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0, T, V')$

□

Lema 1.50. *Seja $k \in L^{4/3}(0, T, L^{12/11}(\Omega)^N)$. Então existe uma única solução (z, q) para o sistema de Stokes.*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla q = k, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(z) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ z = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ z(T) = 0, & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

com $z \in \mathcal{C}(0, T, L^{4/3}(\Omega)^N) \cap L^2(0, T, W^{1,6/5}(\Omega)^N)$

Demonstração: E. Fernandez. Cara (Ver [6], p. 1538)

□

1.8 Resultados Importantes

Nesta seção, apresentamos alguns resultados importantes que serão utilizados na obtenção dos objetivos desejados.

Teorema 1.51. *Seja Ω aberto de \mathbb{R}^N e $w \subset \Omega$, então existe $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\eta^0 = 0$ sobre $\partial\Omega$, $\eta^0(x) > 0$ em Ω e $|\nabla\eta^0| > 0$ em $\Omega \setminus \overline{w}$.*

Demonstração: Fursikov ([13], p. 4). □

Definição 1.52. *Seja X subconjunto de um espaço de Banach E se diz que X é convexo se e somente se para todo $t \in [0, 1]$ se tem que $tx + (1 - t)y \in X$ para todo $x, y \in X$*

Definição 1.53. *Seja X un subconjunto convexo de um espaço de Banach E e uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, se diz que:*

1. *f é convexa se e somente se $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$ para todo $x, y \in X$ e $t \in [0, 1]$.*
2. *f é estritamente convexa se e somente $f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y)$ para todo $x, y \in X$ e $t \in (0, 1)$.*

Teorema 1.54. *Seja \mathcal{U}_{ad} um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Hilbert \mathcal{U} e $J : \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente convexa, diferenciável e que cumpre que $\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty$ para todo $v \in \mathcal{U}_{ad}$. Então existe um único $u \in \mathcal{U}_{ad}$ satisfazendo:*

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

e caracterizado por

$$\langle J'(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

Demonstração: Lions ([8], p. 10). □

Teorema 1.55. *(Teorema de completção) Para qualquer espaço com produto interno X existe um espaço de Hilbert H e um isomorfismo $A : X \rightarrow W \subset H$ denso. O espaço H é único excepto por isomorfismos.*

Demonstração: Kreyszig ([4], p. 139). □

Teorema 1.56. (*Lax-Milgram*) Seja H um espaço de Hilbert e $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, para o qual existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que:

$$|B(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\| \quad (u, v \in H)$$

e

$$\beta \|u\|^2 \leq B(u, u) \quad (u \in H)$$

Finalmente dado $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear limitado em H . Então existe um único $u \in H$ tal que

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{para todo } v \in H$$

Demonstração: Evans ([10], p. 297). □

Capítulo 2

Controlabilidade do sistema de Navier-Stokes N dimensional com N controles escalares

Neste capítulo, apresentaremos um resultado sobre a controlabilidade local exata por trajetórias para um sistema do tipo Navier-Stokes. Em um primeiro passo, fazendo uso do método de penalização e assumindo a desigualdade de Observabilidade para o sistema adjunto associado o problema linear do sistema de Navier-Stokes vamos conseguir a controlabilidade nula do problema linear de Navier-Stokes. Num segundo passo vamos demonstrar uma desigualdade do tipo Carleman o sistema adjunto do problema linear de Navier-Stokes e como consequência disto ultimo se vai conseguir a desigualdade de Observabilidade. Em um terceiro passo mostraremos a controlabilidade nula do problema linear de Navier-Stokes e conseguiremos que a solução do problema linear seja exponencialmente decrescente quando $t \rightarrow T$. Ao final, graças a um teorema da função inversa provaremos que o sistema de Navier-Stokes é localmente exatamente controlável por trajetórias.

2.1 Formulação do problema

Consideremos o seguinte problema:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = v1_\omega & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Donde $T > 0$, $N = 2$ ou $N = 3$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto, limitado e conexo com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ regular. $w \subset \Omega$ é um conjunto aberto.

y = velocidade de um fluido de viscosidade incompressível

p = pressão

y_0 = valor inicial de velocidade do fluido

v = controle atuando no subconjunto ω

Nós vamos chamar por $Q = \Omega \times (0, T)$ e $Q_\omega = \omega \times (0, T)$.

Seja (\bar{y}, \bar{p}) uma trajetória com dato inicial \bar{y}_0 , isto é uma solução do problema:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \Delta \bar{y} + (\bar{y} \cdot \nabla)\bar{y} + \nabla \bar{p} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(\bar{y}) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \bar{y} = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ \bar{y}(0) = \bar{y}_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Esta trajetória é a ideal (sem controle), o que nós queremos é obter a controlabilidade local exata por trajetórias de (2.1)

Definição 2.1. *Nos dizemos que (2.1) é localmente exatamente controlável por trajetórias, se para (\bar{y}, \bar{p}) uma trajetória a qual é solução de (2.2) existe $\delta > 0$ tal que se $y_0 \in E$ e $\|y_0 - \bar{y}_0\|_E \leq \delta$ então podemos achar um controle v tal que a solução de (2.1) satisfaz $y(T) = \bar{y}(T)$ em Ω .*

O espaço E vai ser definido depois.

2.2 Resultados e estratégias

Como nós queremos achar a controlabilidade local de (2.1) o seguinte teorema nós vai a dar isso.

Teorema 2.2. *Assumindo que ω é um subconjunto aberto não vazio de Ω e que $T > 0$, suponhamos que $\bar{y} \in L^2(0, T, V) \cap [L^\infty(Q)]^N$. Então existe $\delta > 0$ tal que se $\|y_0 - \bar{y}_0\|_{[L^4(\Omega)]^N} \leq \delta$, existe um controle $v \in [L^2(Q_\omega)]^N$ e uma solução y de (2.1) tal que $y(T) = \bar{y}(T)$.*

Para provar o teorema 2.2 de acima nós precisamos fazer alguns passos.

Fazendo $z = y - \bar{y}$, $q = p - \bar{p}$ e $z_0 = y_0 - \bar{y}_0$ assim temos:

$$(2.3) \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}.$$

$$(2.4) \quad \nabla q = \nabla p - \nabla \bar{p}.$$

$$(2.5) \quad \Delta z = \Delta y - \Delta \bar{y}.$$

Como $(w \cdot \nabla)w = \sum_{i=1}^N w_i \frac{\partial w}{\partial x_i}$ e como

$$\nabla \cdot (u \otimes v) = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_N} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \cdots & u_1 v_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N v_1 & u_N v_2 & \cdots & u_N v_N \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j v_1) & \cdots & \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j v_N) \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot (u \otimes v)]_i &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j v_i) \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_j}{\partial x_j} v_i + \sum_{j=1}^N u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \\ &= (\operatorname{div}(u)v)_i + (u \cdot \nabla v)_i \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (u \otimes v) = ((u \cdot \nabla)v) + (\operatorname{div}(u))v.$$

Desta última igualdade como $\operatorname{div}(u) = 0$ temos que $\nabla \cdot (u \otimes v) = ((u \cdot \nabla)v)$, então

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (y \otimes y) &= \nabla \cdot ((z + \bar{y}) \otimes (z + \bar{y})) = \nabla \cdot (z \otimes z + z \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes z + \bar{y} \otimes \bar{y}) \\ &= \nabla \cdot (z \otimes z) + \nabla \cdot (z \otimes \bar{y}) + \nabla \cdot (\bar{y} \otimes z) + \nabla \cdot (\bar{y} \otimes \bar{y}) \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (y \otimes y) - \nabla \cdot (\bar{y} \otimes \bar{y}) = \nabla \cdot (z \otimes z) + \nabla \cdot (z \otimes \bar{y}) + \nabla \cdot (\bar{y} \otimes z)$$

$$(2.6) \quad (y \cdot \nabla)y - (\bar{y} \cdot \nabla)\bar{y} = (z \cdot \nabla)z + (z \cdot \nabla)\bar{y} + (\bar{y} \cdot \nabla)z.$$

Substituindo (2.6) junto com z em (2.1) vamos ter o seguinte:

$$(2.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla \cdot (z \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes z) + (z \cdot \nabla)z + \nabla q = v1_\omega & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(z) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ z = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ z(0) = z_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Definição 2.3. *Nós dizemos que (2.7) é localmente nulo controlável se existe $\delta > 0$ tal que se $y_0 \in E$ e $\|y_0\|_E < \delta$ vai implicar que existe $v \in L^2(Q_\omega)^N$ tal que a solução y de (2.7) satisfaz*

$$y(T) = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Então estudar a controlabilidade local exata por trajetórias de (2.1) equivale a estudar a controlabilidade local nula de (2.7).

Nós vamos estudar o problema de controle linearizado de (2.7) e seguiremos trabalhando com a variável y , para $g = (g_{ij}) \in L^2(Q)^{N^2}$ e $y_0 \in H$ considere para todo $v \in L^2(Q_\omega)^N$, consideremos o problema linearizado de (2.7) com uma força externa $\nabla \cdot g$

$$(2.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla \cdot (y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla q = \nabla \cdot g + v1_\omega & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

2.3 Método de Penalização

Novamente vamos estudar o problema linearizado de (2.7) com $\nabla \cdot g$ o qual é uma força externa.

$$(2.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla \cdot (y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla q = \nabla \cdot g + v1_\omega & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Assumindo que $\bar{y} \in [L^\infty(Q_\omega)]^N$, $g \in [L^2(Q)]^{N^2}$,

e

$y_0 \in H$ nós queremos provar que existe um controle $v \in [L^2(Q_\omega)]^N$ tal que sua solução y de (2.9) satisfaz que $y(T) = 0$

Para $v \in [L^2(Q_\omega)]^N$ e para $\epsilon > 0$ definamos:

$$J_\epsilon(v) = \frac{1}{2\epsilon} \|y_v(T)\|_H^2 + \frac{1}{2} \int_{Q_\omega} |v|^2 dxdt.$$

Onde y_v é a solução do sistema (2.9) com dado v .

Afirmção 1: J_ϵ é diferenciável.

Com efeito como $J_\epsilon(v) = \frac{1}{2\epsilon} b_1(y_v(T), y_v(T)) + \frac{1}{2} b_2(v, v)$ para que J_ϵ seja diferenciável só precisamos provar que as formas bilineares b_1 e b_2 são contínuas com efeito se prova que existe $c > 0$ tal que $|b_1(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)| \leq c \|\tilde{v}_1\|_H \|\tilde{v}_2\|_H$ e $|b_2(v_1, v_2)| \leq \|v_1\|_{L^2(Q_\omega)^N} \|v_2\|_{L^2(Q_\omega)^N}$, por tanto J_ϵ é diferenciável.

Afirmção 2 : J_ϵ é estritamente convexo.

Para $\theta \in (0, 1)$ temos:

$$\begin{aligned} J_\epsilon(\theta v + (1 - \theta)w) &= \frac{1}{2\epsilon} \|y_{\theta v + (1 - \theta)w}(T)\|_H^2 + \frac{1}{2} \int_{Q_\omega} \|\theta v + (1 - \theta)w\|^2 dxdt \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon} (\theta \|y_v(T)\|_H + (1 - \theta) \|y_w(T)\|_H)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\theta \|v\|_{L^2(Q_\omega)} + (1 - \theta) \|w\|_{L^2(Q_\omega)} \right)^2. \end{aligned}$$

Como para $t \in \mathbb{R}$ a função $t \rightarrow t^2$ é estritamente convexa temos na desigualdade de acima que:

$$\begin{aligned} J_\epsilon(\theta v + (1 - \theta)w) &< \frac{1}{2\epsilon} (\theta \|y_v(T)\|_H + (1 - \theta) \|y_w(T)\|_H)^2 + \frac{1}{2} \left(\theta \|v\|_{L^2(Q_\omega)} + (1 - \theta) \|w\|_{L^2(Q_\omega)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2\epsilon} \theta \|y_v\|_H^2 + \frac{1}{2} \theta \|v\|_{L^2(Q_\omega)}^2 + \frac{1 - \theta}{2\epsilon} \|y_w\|_H^2 + \frac{1 - \theta}{2} \|w\|_{L^2(Q_\omega)}^2 \\ &= \theta J_\epsilon + (1 - \theta) J_\epsilon(w). \end{aligned}$$

Portanto J_ϵ é estritamente convexo.

Afirmção 3: J_ϵ é coerciva.

Com efeito pois como $\frac{1}{2} \|v\|_{L^2(Q_\omega)}^2 \leq J_\epsilon(v)$ vamos ter que $\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} J_\epsilon(v) = +\infty$.

Das afirmações 1,2 e 3 vamos ter pelo teorema 1.54 que existe um único $v_\epsilon \in [L^2(Q_\omega)]^N$ tal que

$$J_\epsilon(v_\epsilon) = \inf_{v \in [L^2(Q_\omega)]^N} J_\epsilon(v)$$

e além disso v_ϵ satisfaz $\langle J'_\epsilon(v_\epsilon), w \rangle = 0$ para todo $w \in [L^2(Q_\omega)]^N$.

Agora vamos achar a que é igual $\langle J'_\epsilon(v), w \rangle$, em $J_\epsilon(v)$ nós podemos expressar a y_v como $\hat{y}(T) + \tilde{L}(v)(T)$, onde \hat{y} é solução de:

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \hat{y}}{\partial t} - \Delta \hat{y} + (\hat{y} \cdot \nabla) \bar{y} + (\bar{y} \cdot \nabla) \hat{y} + \nabla q = \nabla g, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(\hat{y}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \hat{y} = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ \hat{y}(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

onde $\tilde{L}(v) = \tilde{y}_v$ é a solução de:

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - \Delta \tilde{y} + (\tilde{y} \cdot \nabla) \bar{y} + (\bar{y} \cdot \nabla) \tilde{y} + \nabla q = v 1_\omega, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(\tilde{y}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \tilde{y} = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ \bar{y}(0) = 0, & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

então do seguinte fato:

$$J_\epsilon(v) = \frac{1}{2\epsilon} (y_v(T), y_v(T))_H + \frac{1}{2} (v, v)_{[L^2(Q_\omega)]^N}$$

$$J_\epsilon(v) = \frac{1}{2\epsilon} \left(\hat{y}(T) + \tilde{L}(v)(T), \hat{y}(T) + \tilde{L}(v)(T) \right)_H + \frac{1}{2} (v, v)_{[L^2(Q_\omega)]^N}$$

$$\langle J'_\epsilon(v), w \rangle = \frac{1}{\epsilon} \left(\tilde{L}(w)(T), y_v(T) \right)_H + (w, v)_{[L^2(Q_\omega)]^N},$$

então nós temos que para qualquer $w \in [L^2(Q_\omega)]^N$ se tem:

$$\langle J'_\epsilon(v_\epsilon), w \rangle = \frac{1}{\epsilon} \left(\tilde{L}(w)(T), y_{v_\epsilon}(T) \right)_H + (w, v_\epsilon)_{[L^2(Q_\omega)]^N} = 0,$$

isto nós da

$$(2.12) \quad \frac{1}{\epsilon} \left(\tilde{L}(w)(T), y_{v_\epsilon}(T) \right)_H + \int_{Q_\omega} v_\epsilon w dx dt = 0.$$

Introduzimos o estado adjunto (φ, π) que satisfaz:

$$(2.13) \quad \begin{cases} -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi - (D\varphi)\bar{y} + \nabla \pi = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(\varphi) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \varphi = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ \varphi(T) = \frac{1}{\epsilon} y_{v_\epsilon}, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

onde $D(\varphi) = \nabla \varphi + \nabla \varphi^t$, de (2.13) multiplicando por \tilde{y}_w e integrando vamos ter:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi - (D\varphi)\bar{y} + \nabla \pi \right) \tilde{y}_w dx dt = 0 \\ & - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tilde{y}_w dx dt - \int_0^T \int_\Omega \Delta \varphi \tilde{y}_w dx dt - \int_0^T \int_\Omega \nabla(\bar{y} \otimes \varphi + \varphi \otimes \bar{y}) \tilde{y}_w dx dt + \\ & + \int_0^T \int_\Omega \nabla \pi \tilde{y}_w dx dt = 0 \\ & - (\varphi(T), \tilde{y}_w(T))_H + (\varphi(0), \tilde{y}_w(0))_H + \int_0^T \left(\varphi, \frac{\partial \tilde{y}_w}{\partial t} \right)_H dt - \int_0^T (\varphi, \Delta \tilde{y}_w)_H dt + \\ & + \int_0^T (\varphi, \nabla(\bar{y} \otimes y_w + \tilde{y}_w \otimes \bar{y}))_H dt - \int_0^T (\pi, \operatorname{div}(\tilde{y}_w))_H dt = 0, \end{aligned}$$

e como $\operatorname{div}(\tilde{y}_w) = 0$ tem-se:

$$-(\varphi(T), \tilde{y}_w(T))_H + (\varphi(0), \tilde{y}_w(0))_H + \int_0^T \left(\varphi, \frac{\partial \tilde{y}_w}{\partial t} - \Delta \tilde{y}_w + \nabla(\bar{y} \otimes \tilde{y}_w + \tilde{y}_w \otimes \bar{y}) \right)_H dt = 0,$$

pelo fato de que $\tilde{y}_w(0) = 0$ e $-\int_0^T (q, \operatorname{div}(\varphi)) dt = 0$, vamos ter:

$$-(\varphi(T), \tilde{y}_w(T))_H + \int_0^T \left(\varphi, \frac{\partial \tilde{y}_w}{\partial t} - \Delta \tilde{y}_w + \nabla(\bar{y} \otimes \tilde{y}_w + \tilde{y}_w \otimes \bar{y}) + \nabla q \right)_H dt = 0.$$

Como \tilde{y}_w é solução de (2.11) quando em lugar de v colocamos w , então daí temos que:

$$\int_{Q_w} w v_\epsilon dx dt + \int_{Q_w} \varphi w dx dt = 0$$

$$\int_{Q_w} (v_\epsilon + \varphi) w dx dt = 0,$$

para qualquer $w \in [L^2(Q_w)]^N$ daqui se tem

$$(2.14) \quad v_\epsilon + \varphi = 0.$$

Para v_ϵ , denotemos por $y_\epsilon = y_{v_\epsilon}$ à solução de:

$$(2.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial y_\epsilon}{\partial t} - \Delta y_\epsilon + (y_\epsilon \cdot \nabla) \bar{y} + (\bar{y} \cdot \nabla) y_\epsilon + \nabla q = \nabla \cdot g + v_\epsilon 1_\omega, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y_\epsilon) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y_\epsilon = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y_\epsilon(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

O que nós queremos é passar ao limite em (2.15), para isso tomemos φ a solução do estado adjunto que cumpre (2.13) quando $y_{v_\epsilon} = y_\epsilon$ e daí nós temos a seguinte igualdade:

$$(2.16) \quad (Ly_\epsilon, \varphi)_{[L^2(Q)]^N} = (\nabla \cdot g + v_\epsilon 1_\omega, \varphi)_{[L^2(Q)]^N}$$

Onde $Ly_\epsilon = \frac{\partial y_\epsilon}{\partial t} - \Delta y_\epsilon + (y_\epsilon \cdot \nabla) \bar{y} + (\bar{y} \cdot \nabla) y_\epsilon$. Vamos a desenvolver a parte esquerda de (2.16)

$$(Ly_\epsilon, \varphi)_{[L^2(Q)]^N} = \int_0^T \left(\frac{\partial y_\epsilon}{\partial t}, \varphi \right)_H dt + \int_0^T (-\Delta y_\epsilon, \varphi)_H dt + \int_0^T ((y_\epsilon \cdot \nabla) \bar{y} + (\bar{y} \cdot \nabla) y_\epsilon, \varphi)_H dt$$

Desenvolvendo a integral $\int_0^T \left(\frac{\partial y_\epsilon}{\partial t}, \varphi \right)_H dt$, nós da

$$\begin{aligned} (Ly_\epsilon, \varphi)_{[L^2(Q)]^N} &= (y_\epsilon(T), \varphi(T))_H - (y_\epsilon(0), \varphi(0))_H + \int_0^T \left(y_\epsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_H dt + \\ &\quad + \int_0^T (y_\epsilon, -\Delta \varphi)_H dt - \int_0^T (y_\epsilon, (\varphi \cdot \nabla) \bar{y} + (\bar{y} \cdot \nabla) \varphi)_H dt - \int_0^T (\nabla \pi, y_\epsilon)_H dt \\ &= (y_\epsilon(T), \varphi(T))_H - (y_\epsilon(0), \varphi(0))_H + \int_0^T (y_\epsilon, L^* \varphi)_H dt. \end{aligned}$$

Onde $L^* \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi - (D\varphi) \bar{y}$ e como φ cumpre 2.13 se tem:

$$(Ly_\epsilon, \varphi)_{[L^2(Q)]^N} = (y_\epsilon(T), \varphi(T))_H - (y_\epsilon(0), \varphi(0))_H$$

substituindo este último resultado em (2.16) vamos ter:

$$\begin{aligned} (y_\epsilon(T), \varphi(T))_H - (y_\epsilon(0), \varphi(0))_H &= - \sum_{i,j=1}^N \int_{Q_\omega} g_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx dt + \int_{Q_\omega} v_\epsilon \varphi dx dt \\ \frac{1}{\epsilon} \|y_\epsilon(T)\|_H^2 &= (y_\epsilon(0), \varphi(0))_H - \sum_{i,j=1}^N \int_Q g_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx dt + \int_{Q_\omega} v_\epsilon \varphi dx dt. \end{aligned}$$

Da igualdade de (2.14) e da equação (2.15) temos:

$$(2.17) \quad \frac{1}{\epsilon} \|y_\epsilon(T)\|_H^2 + \int_{Q_\omega} |v_\epsilon|^2 dx dt = (y_0, \varphi(0))_H - \sum_{i,j=1}^N \int_Q g_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx dt$$

Pelo momento vamos assumir que se cumpre a desigualdade de observabilidade:

$$(2.18) \quad \|\varphi(0)\|_H^2 + \int_Q \rho^2 |\nabla \varphi|^2 dx dt \leq c \int_{Q_\omega} |\varphi|^2 dx dt$$

a qual se provara na seguinte seção e com alguns pesos convenientes e assumindo que g satisfaz $\int_Q \frac{1}{\rho^2} |g|^2 dx dt < +\infty$

Como por Cauchy-Schwartz tem-se:

$$(y_0, \varphi(0))_H \leq \|y_0\|_H \|\varphi(0)\|_H$$

$$(2.19) \quad (y_0, \varphi(0))_H \leq c \|y_0\|_H^2 + \frac{1}{2c} \|\varphi(0)\|_H^2$$

$$- \sum_{i,j=1}^N \int_Q g_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dxdt \leq \int_Q |g| |\nabla \varphi| dxdt,$$

deste último temos que

$$(2.20) \quad - \sum_{i,j=1}^N \int_Q g_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dxdt \leq \frac{c^{-1}}{2} \rho^2 \int_Q |\nabla \varphi|^2 dxdt + \frac{c}{\rho^2} \int_Q |g|^2 dxdt,$$

de tal maneira que em (2.19) e (2.20) fique a mesma constante c , daí substituindo (2.19) e (2.20) em (2.17), tem-se:

$$\frac{1}{\epsilon} \|y_\epsilon(T)\|_H^2 + \int_{Q_\omega} |v_\epsilon|^2 dxdt \leq c \|y_0\|_H^2 + \frac{1}{2c} \|\varphi(0)\|_H^2 + \frac{\rho^2}{2c} \int_Q |\nabla \varphi|^2 dxdt + \frac{c}{\rho^2} \int_Q |g|^2 dxdt,$$

aqui nós vamos fazer uso da desigualdade 2.18 e a igualdade (2.14) se tem o seguinte

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \|y_\epsilon(T)\|_H^2 + \int_{Q_\omega} |v_\epsilon|^2 dxdt &\leq c \|y_0\|_H^2 + \frac{1}{2} \int_{Q_\omega} |v_\epsilon|^2 dxdt + \frac{c}{\rho^2} \int_Q |g|^2 dxdt \\ &\leq c \|y_0\|_H^2 + \frac{c}{\rho^2} \int_Q |g|^2 dxdt, \end{aligned}$$

e portanto se tem que $\frac{1}{\epsilon} \|y_\epsilon(T)\|_H^2 < \tilde{c}$ e $\int_{Q_\omega} |v_\epsilon|^2 dxdt < \tilde{c}$ para todo $\epsilon > 0$.

Pelo teorema 1.9 se tem que existe $v \in [L^2(Q_\omega)]^N$ tal que $v_\epsilon \rightharpoonup v$ em $[L^2(Q_\omega)]^N$, como $y_\epsilon = \hat{y} + \tilde{L}(v_\epsilon)$ e \tilde{L} é linear e continua, então

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}_\epsilon\|_{\mathcal{C}([0,T],H) \cap L^2(0,T,V)}^2 &\leq c \|\tilde{y}\|_{[L^\infty(Q)]^N}^2 + \|v_\epsilon\|_{[L^2(Q_\omega)]^N}^2 \\ &\leq \hat{c}_3. \end{aligned}$$

Por isto último temos que $\tilde{L}(v_\epsilon) \rightharpoonup \tilde{y}$ em $\mathcal{C}([0,T],H) \cap L^2(0,T,V)$ e como $L(y_\epsilon) = v_\epsilon 1_\omega$ tem-se $L(y_\epsilon) \rightharpoonup v 1_\omega$ em $[L^2(Q)]^N$ portanto $L(y) = v 1_\omega$, devemos lembrar que $\hat{L}(v)$ nós dá a solução de $L(y) = v 1_\omega$ satisfazendo (2.11) e por esta razão $\tilde{L}(v) = \tilde{y}$ e como $y_\epsilon = \tilde{y} + \tilde{L}(v_\epsilon) \rightharpoonup \tilde{y} + \tilde{L}(v)$, tem-se:

$$y_\epsilon \rightharpoonup y_v \text{ em } \mathcal{C}(0, T, H) \cap L^2(0, T, V)$$

isso vai implicar que $y_\epsilon(T) \rightharpoonup y(T)$ fracamente e como $\|y_\epsilon(T)\|_H \leq c\sqrt{\epsilon}$ então $y_\epsilon(T) \rightarrow 0$ forte em $[L^2(\Omega)]^N$.

Agora vamos mostrar que $y_\epsilon(T) \rightarrow 0$ em $[L^2(Q)]^N$, para obter isso vamos tomar $\psi = \phi\theta$ onde $\phi \in [H_0^1(\Omega)]^N$ e $\theta \in \mathcal{C}^1[0, T]$ satisfazendo $\theta(0) = 0$ e $\theta(T) = 1$.

fazendo contas se tem as seguintes igualdades:

$$(\psi(T), y_\epsilon(T))_{[L^2(\Omega)]^N} = - \int_Q (L\psi)y_\epsilon dxdt + \int_Q \nabla \cdot g\psi dxdt + \int_Q v_\epsilon 1_\omega \psi dxdt,$$

como a parte direita converge nós temos:

$$(\psi(T), y_\epsilon(T))_{[L^2(\Omega)]^N} \longrightarrow - \int_Q (L\psi)y dxdt + \int_Q \nabla \cdot g\psi dxdt + \int_Q v 1_\omega dxdt,$$

e por meio da seguinte igualdade

$$(\psi(T), y(T))_{[L^2(\Omega)]^N} = - \int_Q (L\psi)y dxdt + \int_Q \nabla \cdot g\psi dxdt + \int_Q v 1_\omega dxdt,$$

nós temos a seguinte convergência

$$(\psi(T), y_\epsilon(T))_{[L^2(\Omega)]^N} \longrightarrow (\psi(T), y(T))_{[L^2(\Omega)]^N}$$

pelo fato de $\psi(T) = \phi$ isso nós vai dar que $(\phi, y_\epsilon(T)) \longrightarrow (\phi, y(T))$, para qualquer $\phi \in [H_0^1(\Omega)]^N$ e como $[H_0^1(\Omega)]^N$ é denso em $[L^2(\Omega)]^N$ finalmente temos a convergência que nós queríamos $y_\epsilon(T) \rightharpoonup y(T)$ em $[L^2(\Omega)]^N$.

Assim vamos ter que:

$$y_\epsilon(T) \rightharpoonup y(T), \text{ em } [L^2(\Omega)]^N$$

$$y_\epsilon(T) \rightarrow 0, \text{ em } [L^2(\Omega)]^N$$

pela unicidade do limite tem-se que $y(T) = 0$.

2.4 Desigualdade de Observabilidade

Na seção anterior nós fizemos uso da desigualdade de observabilidade do estado adjunto da equação de Navier-Stokes, agora nesta seção nós vamos provar aquela desigualdade.

Para $y_0 \in V$ e $h \in [L^2(Q)]^N$, consideremos o seguinte sistema de Stokes:

$$(2.21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla q = h, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

Pelo teorema 1.48 se tem que $y \in \mathcal{C}([0, T], V) \cap L^2(0, T, [H^2(\Omega)]^N)$, $\frac{\partial y}{\partial t} \in [L^2(Q)]^N$ e $q \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$.

Definamos $w = \operatorname{rot}(y)$ portanto $\nabla \times y$.

Para $N = 3$:

$$\nabla \times y = \left(\frac{\partial y_3}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_3}, \frac{\partial y_1}{\partial x_3} - \frac{\partial y_3}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \right)$$

$$\nabla \times w = \nabla \times (\nabla \times y)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times w = & \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_3} - \frac{\partial y_3}{\partial x_1} \right), \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial y_3}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \right), \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_3} - \frac{\partial y_3}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial y_3}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\nabla \times w = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_3^2}, \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_3^2}, \dots \right).$$

Nesta última desigualdade vamos fazer uso de fato que $\operatorname{div}(y) = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_3}{\partial x_3} = 0$, para ter:

$$\nabla \times w = (-\Delta y_1, -\Delta y_2, -\Delta y_3)$$

$$\nabla \times w = -\Delta y,$$

então isto nós da:

$$(2.22) \quad \nabla \times w = -\Delta y$$

Para $N = 2$:

$$rot(y_1, y_2) = \frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = w$$

$$rot(w) = \left(-\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right),$$

e do fato de que $div(y) = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0$, se tem:

$$rot(w) = \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} \right)$$

$$= (\Delta y_1, \Delta y_2)$$

$$rot(w) = \Delta y$$

Agora vamos seguir trabalhando com $N = 3$ e fazer uso de 2.22.

$$\nabla \times \left(\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla q \right) = \nabla \times h$$

$$\nabla \times \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \nabla \times w + \nabla q \right) = \nabla \times h$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \times (\nabla \times w) + \nabla \times (\nabla q) = \nabla \times h$$

e como $rot(\nabla q) = 0$ temos:

$$(2.23) \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = rot(h), \text{ em } \Omega \times (0, T).$$

$$(2.24) \quad -\Delta y = rot(w), \text{ em } \Omega \times (0, T).$$

$$(2.25) \quad y = 0, \text{ sobre } \Gamma \times (0, T).$$

Definamos:

$$l(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, T/4] \\ l(t) \geq T/4, & t \in [T/4, 3T/4] \\ T - t, & t \in [3T/4, T] \end{cases}$$

Sempre é possível achar l asi de tal maneira que $l \in \mathcal{C}^\infty([0, T])$, agora definamos as seguintes funções:

$$(2.26) \quad \xi(x, t) = \frac{e^{\lambda(\eta^0(x)+m_1)}}{l^4(t)}.$$

$$(2.27) \quad \alpha(x, t) = \frac{e^{\lambda(\eta^0(x)+m_1)} - e^{\lambda(|\eta^0|_\infty + m_2)}}{l^4(t)}.$$

$$(2.28) \quad \beta(x, t) = e^{\lambda(\eta^0(x)+m_1)}.$$

Onde η^0 é a função do teorema 1.51 , $\lambda \geq 1$ e $m_1 \leq m_2$, são constantes escolhidas tais que:

$$(2.29) \quad \left| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right| \leq c\xi^{5/4} \text{ e } \left| \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \right| \leq c\xi^{3/2}.$$

Fazendo uso das estimativas de Carleman para equações Parabólicas a qual esta provado em [9] para a equação (2.23). Se tem que existe $\lambda_0 \geq 1$, $s_0 \geq 0$ e $c > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ e $s \geq s_0$ temos:

$$(2.30) \quad \int_Q \frac{e^{2s\alpha}}{s\xi} |\nabla w|^2 dxdt + \int_Q s\lambda^2 \xi e^{2s\alpha} |w|^2 dxdt \leq \\ c \left(s^{-1/2} \|\xi^{-1/4} e^{s\alpha} w\|_{H^{1/4, 1/2}(\Sigma)}^2 + \int_Q e^{2s\alpha} |h|^2 dxdt \right) + \\ c \int_{Q_w} s\lambda^2 \xi e^{2s\alpha} |w|^2 dxdt.$$

Para y solução do problema elítico em (2.24) e fazendo uso da estimativa para a equação elítica em [12] vamos ter que existem $\tau_0 \geq 0$ e λ_0 como acima tais que para todo $\tau \geq \tau_0$ se tem para quase todo $t \in (0, \tau)$:

$$(2.31) \quad \int_{\Omega} e^{2\tau\beta} (|\nabla y(t)|^2 + \tau^2 \lambda^2 \beta^2 |y(t)|^2) dx \leq c \left(\tau \int_{\Omega} \beta e^{2\tau\beta} |w(t)|^2 dx + \tau^2 \lambda^2 \int_{\omega} \beta^2 e^{2\tau\beta} |y(t)|^2 dx \right).$$

Fazendo $\tau = \frac{s}{l^4(t)}$ temos que $\alpha(x, t) = \frac{\beta(x)}{l^4(t)} - \tilde{k}(t)$ daqui substituindo em (2.31).

$$\int_{\Omega} e^{\frac{2s\beta}{l^4}} \left(|y|^2 + s^2 \lambda^2 \frac{\beta^2}{l^8} |y|^2 \right) dx \leq c \left(\frac{s}{l^4} \int_{\Omega} \beta e^{\frac{2s\beta}{l^4}} |w|^2 dx + \frac{s^2 \lambda^2}{l^8} \int_{\omega} \beta^2 e^{\frac{2s\beta}{l^4}} |y|^2 dx \right).$$

De (2.26) e (2.28) tem-se $\xi = \frac{\beta}{l^4}$ substituindo acima temos:

$$\int_{\Omega} e^{\frac{2s\beta}{l^4}} (|y|^2 + s^2 \lambda^2 \xi^2 |y|^2) dx \leq c \left(s \int_{\Omega} \xi e^{\frac{2s\beta}{l^4}} |w|^2 dx + s^2 \lambda^2 \int_{\omega} \xi^2 e^{\frac{2s\beta}{l^4}} |y|^2 dx \right),$$

multiplicando por λ^2 e tirando para fora o termo que só depende de t temos:

$$e^{2s\hat{k}(t)} \int_{\Omega} e^{2s\alpha} (\lambda^2 |y|^2 + s^2 \lambda^4 \xi^2 |y|^2) dx \leq c e^{2s\hat{k}(t)} \left(s \lambda^2 \int_{\Omega} \xi e^{2s\alpha} |w|^2 dx + s^2 \lambda^4 \int_{\omega} \xi^2 e^{2s\alpha} |y|^2 dx \right),$$

integrando de 0 ate T

$$(2.32) \quad \int_Q e^{2s\alpha} (\lambda^2 |y|^2 + s^2 \lambda^4 \xi^2 |y|^2) dx dt \leq c \left(s \lambda^2 \int_Q \xi e^{2s\alpha} |w|^2 dx dt + s^2 \lambda^4 \int_{Q_w} \xi^2 e^{2s\alpha} |y|^2 dx dt \right).$$

somando a desigualdade 2.30 e a desigualdade 2.32 tem-se:

$$(2.33) \quad \int_Q e^{2s\alpha} \left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi} + s \lambda^2 \xi |w|^2 + \lambda^2 |\nabla y|^2 + s^2 \lambda^4 \xi^2 |y|^2 \right) dx dt \leq c \left(s^{-1/2} \|\xi^{-1/4} e^{s\alpha} w\|_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)} + \int_Q e^{2s\alpha} |h|^2 dx dt \right) + c \left(\int_{Q_w} \xi^2 e^{2s\alpha} |y|^2 dx dt \right).$$

Nós vamos a eliminar o termo da fronteira, para isso devemos lembrar que:

$$\begin{aligned} \|\xi^{-1/4} e^{s\alpha} w\|_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)} &= \|\xi^{-1/4} e^{s\alpha} \text{rot}(y)\|_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)} \\ (2.34) \quad \|\xi^{-1/4} e^{s\alpha} w\|_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)} &\leq c \|\xi^{-1/4} e^{s\alpha} \frac{\partial y}{\partial \nu}\|_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)}. \end{aligned}$$

Definamos:

$$(2.35) \quad \check{\alpha}(t) = \min_{x \in \Omega} \alpha(x, t) = \frac{e^{\lambda m_1} - e^{\lambda(|\eta^0|_\infty + m_2)}}{l^4}.$$

$$(2.36) \quad \check{\xi}(t) = \min_{x \in \Omega} \xi(x, t) = \frac{e^{\lambda m_1}}{l^4}.$$

$$(2.37) \quad \hat{\alpha}(t) = \max_{x \in \Omega} \alpha(x, t) = \frac{e^{\lambda m_1} - e^{\lambda(|\eta^0|_\infty + m_2)}}{l^4}.$$

$$(2.38) \quad \hat{\xi}(t) = \max_{x \in \Omega} \xi(x, t) = \frac{e^{\lambda m_1}}{l^4}.$$

$$(u, r)(x, t) = \check{\xi}(t)^{-1/4} (y(x, t) e^{s\check{\alpha}(t)}, q(x, t) e^{s\check{\alpha}(t)})$$

$$u(x, t) = \check{\xi}(t)^{-1/4} y(x, t) e^{s\check{\alpha}(t)}$$

$$r(x, t) = \check{\xi}(t)^{-1/4} q(x, t) e^{s\check{\alpha}(t)},$$

e denotemos por $c_0 > 0$ a constante tal que $\check{\xi}(t) \geq c_0$ para todo $t \in (0, T)$ e definamos as variáveis u e q do seguinte modo:

$$y(x, t) = u \check{\xi}^{1/4} e^{-s\check{\alpha}(t)} \quad \text{e} \quad q(x, t) = r \check{\xi}(t)^{1/4} e^{-s\check{\alpha}(t)},$$

desta maneira obtemos:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \check{\xi}(t)^{1/4} e^{-s\check{\alpha}} + \frac{u}{4} \check{\xi}^{-3/4} \check{\xi}'(t) e^{-s\check{\alpha}} + u \check{\xi}^{1/4} (-s\check{\alpha}'(t) e^{-s\check{\alpha}})$$

$$-\Delta y = -\check{\xi}(t)^{1/4} e^{-s\check{\alpha}}$$

$$\nabla q = \check{\xi}^{1/4} e^{-s\check{\alpha}} \nabla r,$$

somando as ultimas igualdades e fazendo uso da equação (2.21)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla r \right) \check{\xi}^{1/4} e^{-s\check{\alpha}} + \frac{u}{4} \check{\xi}^{-3/4} \check{\xi}' e^{-s\check{\alpha}} - u \check{\xi}^{1/4} \check{\alpha}' e^{-s\check{\alpha}} = h$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla r = h \frac{e^{s\check{\alpha}}}{\check{\xi}^{1/4}} + u s \check{\alpha}'(t) - u \frac{\check{\xi}'(t)}{4\check{\xi}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla r = h \frac{e^{s\check{\alpha}}}{\check{\xi}^{1/4}} + y e^{s\check{\alpha}} s \frac{\check{\alpha}'(t)}{\check{\xi}^{1/4}} - y e^{s\check{\alpha}} \frac{\check{\xi}'(t)}{4\check{\xi}^{5/4}},$$

de isto último junto com a equação (2.21)

$$(2.39) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla q = \frac{e^{s\check{\alpha}'}}{\check{\xi}^{1/4}} y - \frac{1}{4} \frac{\check{\xi}' e^{s\check{\alpha}} y}{\check{\xi}^{5/4}}, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(u) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ u(0) = 0, & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

$$(2.40) \quad \frac{e^{s\check{\alpha}}}{\check{\xi}^{1/4}}, \quad \frac{s\check{\alpha}' e^{s\check{\alpha}}}{\check{\xi}^{1/4}} e \frac{\check{\xi}' e^{s\check{\alpha}}}{\check{\xi}^{5/4}} \text{ são limitadas em } (0, T).$$

Com efeito

$$\frac{e^{s\check{\alpha}(t)}}{\check{\xi}(t)^{1/4}} = \frac{l(t) e^{s\check{\alpha}(t)}}{e^{\lambda m_1/4}} < c \text{ é limitada em } [0, T]$$

$$\frac{s\check{\alpha}'(t) e^{s\check{\alpha}(t)}}{\check{\xi}(t)^{1/4}} = \frac{d}{dt} (e^{s\check{\alpha}(t)}) \frac{1}{\check{\xi}^{1/4}} = \frac{d}{dt} (e^{s\check{\alpha}(t)}) \frac{l(t)}{e^{\lambda m_1/4}} < c \text{ isto é porque } e^{s\check{\alpha}(t)} \text{ é de } \mathcal{C}^\infty \text{ em } [0, T]$$

$$\frac{\check{\xi}' e^{s\check{\alpha}}}{\check{\xi}^{5/4}} = -\frac{4e^{\lambda m_1} l'(t)}{e^{5/4 \lambda m_1}} = -4 \frac{e^{\lambda m_1} l'(t) e^{s\check{\alpha}(t)}}{e^{5/4 \lambda m_1}} < c \text{ é limitado em } [0, T].$$

Agora de (2.40) vamos ter que $\hat{f} = \frac{e^{s\check{\alpha}} h}{\check{\xi}^{1/4}} + \frac{s\check{\alpha} e^{s\check{\alpha}} y}{\check{\xi}^{1/4}} - \frac{1}{4} \frac{\check{\xi}' e^{s\check{\alpha}} y}{\check{\xi}^{5/4}}$ pertence a $[L^2(Q)]^N$

Fazendo uso da regularidade da equação de Navier-Stokes ver Temam [19] tem-se:

$$(2.41) \quad \|u\|_{H^{1,2}(Q)}^2 \leq c \left(\|e^{s\check{\alpha}} h\|_{[L^2(Q)]^N}^2 + s^2 \|\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} y\|_{[L^2(Q)]^N}^2 \right)$$

Com efeito como u é uma solução fraca de (2.39) temos que cumpre com

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (u(t), v) + a(u(t), v) = \langle \hat{f}, v \rangle, & \forall v \in V \\ u(0) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Por estimações de energia da equação Navier-Stokes dados em [19] tem-se

$$\|u\|_{H^{1,2}(Q)}^2 \leq c \int_0^T \|\hat{f}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^N}^2 dt$$

$$\|u\|_{H^{1,2}(Q)} \leq c \|\hat{f}\|_{[L^2(Q)]^N}$$

$$\|u\|_{H^{1,2}(Q)} \leq c \left(\left\| \frac{e^{s\check{\alpha}} h}{\check{\xi}^{1/4}} \right\|_{[L^2(Q)]^N} + \left\| \left(\frac{s\check{\alpha}'}{\check{\xi}^{1/4}} - \frac{\check{\xi}'}{4\check{\xi}^{5/4}} \right) e^{s\check{\alpha}} y \right\|_{[L^2(Q)]^N} \right)$$

$$(2.42) \quad \|u\|_{H^{1,2}(Q)} \leq c \left(\left\| \frac{e^{s\check{\alpha}} h}{\check{\xi}^{1/4}} \right\|_{[L^2(Q)]^N} + \left\| \left(\frac{\check{\alpha}'}{s\check{\xi}^{5/4}} - \frac{\check{\xi}'}{4s^2\check{\xi}^{9/4}} \right) s^2 \check{\xi} e^{s\check{\alpha}} y \right\|_{[L^2(Q)]^N} \right)$$

De (2.29) se tem que $|\check{\alpha}'| \leq c\check{\xi}^{5/4}$ e como $s \geq s_0$ vamos ter que $\frac{\check{\alpha}'(t)}{s\check{\xi}(t)^{5/4}} \leq c$.

Como $\check{\xi}' = -\frac{4e^{\lambda m_1}}{l^5}$ então $\frac{\check{\xi}'}{4s^2\check{\xi}^{9/4}} = -\frac{l^4 e^{\lambda m_1}}{s^2 e^{9/4 \lambda m_1}}$ e como l é limitado em $[0, T]$ isto nós da

$\left| \frac{\check{\xi}'(t)}{4s^2\check{\xi}(t)^{9/4}} \right| < c$. Desta maneira substituindo estos resultados em (2.42) vamos ter 2.41:

$$\|u\|_{H^{1,2}(Q)} \leq c \left(\|e^{s\check{\alpha}} h\|_{[L^2(Q)]^N} + \|s^2 \check{\xi} e^{s\check{\alpha}} y\|_{[L^2(Q)]^N} \right).$$

Do teorema do traço, ver [21] tem-se:

$$(2.43) \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)}^2 \leq c \|u\|_{H^{1,2}(Q)}^2$$

Do fato de $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \check{\xi}^{-1/4} e^{s\check{\alpha}} \frac{\partial y}{\partial \nu}$ e das desigualdades (2.41) e 2.43 tem-se

$$\begin{aligned} \|\check{\xi}^{-1/4} e^{s\check{\alpha}} \frac{\partial y}{\partial \nu}\|_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)}^2 &\leq c \left(\|e^{s\check{\alpha}} h\|_{[L^2(Q)]^N}^2 + s^2 \|\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} y\|_{[L^2(Q)]^N}^2 \right) \\ s^{-1/2} \|\check{\xi}^{-1/4} e^{s\check{\alpha}} \frac{\partial y}{\partial \nu}\|_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)}^2 &\leq c \left(s^{-1/2} \|e^{s\check{\alpha}} h\|_{[L^2(Q)]^N}^2 + s^{3/2} \|\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} y\|_{[L^2(Q)]^N}^2 \right), \end{aligned}$$

e como $\check{\xi}(t) = \xi(x, t)$ para $x \in \Gamma$ então se tem o seguinte:

$$(2.44) \quad s^{-1/2} \|\check{\xi}^{-1/4} e^{s\check{\alpha}} \frac{\partial y}{\partial \nu}\|_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)}^2 \leq c \left(s^{-1/2} \|e^{s\check{\alpha}} h\|_{[L^2(Q)]^N}^2 + s^{3/2} \|\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} y\|_{[L^2(Q)]^N}^2 \right)$$

substituindo (2.34) e (2.44) em (2.33)

$$\begin{aligned} &\int_Q e^{2s\alpha} \left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi} + s\lambda^2 \xi |w|^2 + \lambda^2 |\nabla y|^2 \right) dxdt + \int_Q e^{2s\alpha} s^2 \lambda^4 \xi^2 |y|^2 dxdt \leq \\ (2.45) \quad &c \left(s^{-1/2} \int_Q e^{2s\alpha} |h|^2 dxdt + s^{3/2} \int_Q \xi^2 e^{2s\alpha} |y|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha} |h|^2 dxdt \right) + \\ &c \left(\int_Q e^{2s\alpha} s\lambda^2 \xi |w|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha} s^2 \lambda^4 \xi^2 |y|^2 dxdt \right), \end{aligned}$$

tomando $s \geq s_0$ suficientemente grande tal que $s^{-1/2} < 1$ e $\frac{\sqrt{2c}}{\lambda^2} < s$ de modo que $cs^{3/2} < \frac{s^2 \lambda^4}{2}$ tem-se:

$$\begin{aligned} &\int_Q e^{2s\alpha} \left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi} + s\lambda^2 \xi |w|^2 + \lambda^2 |\nabla y|^2 \right) dxdt + \int_Q e^{2s\alpha} s^2 \lambda^4 \xi^2 |y|^2 dxdt \leq \\ &c \int_Q e^{2s\alpha} |h|^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_Q s^2 \lambda^4 \xi^2 e^{2s\alpha} |y|^2 dxdt + \\ &c \left(\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s\lambda^2 \xi |w|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^2 \lambda^4 \xi^2 |y|^2 dxdt \right). \end{aligned}$$

desta maneira temos

$$(2.46) \quad \int_Q e^{2s\alpha} \left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi} + s\lambda^2 \xi |w|^2 + \lambda^2 |\nabla y|^2 + s^2 \lambda^4 \xi^2 |y|^2 \right) dxdt \leq \\ c \left(\int_Q e^{2s\alpha} |h|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s\lambda^2 \xi |w|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^2 \lambda^4 \xi^2 |y|^2 dxdt \right).$$

Agora vamos eliminar o termo $\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s\lambda^2 \xi |w|^2 dxdt$ que aparece na direita.

Seja $\omega_0 \neq \Phi$ aberto com $\bar{\omega}_0 \subset \omega$ e $\theta \in C_0^\infty(\omega)$ com $0 \leq \theta \leq 1$ e $\theta = 1$ em ω_0 , vamos ter o seguinte:

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha} \xi |w|^2 dxdt &= s\lambda^2 \int_{Q_{\omega_0}} \theta e^{2s\alpha} \xi |w|^2 dxdt \\ &\leq s\lambda^2 \int_{Q_\omega} \theta e^{2s\alpha} \xi |w|^2 dxdt \\ &= s\lambda^2 \int_{Q_\omega} \theta e^{2s\alpha} \xi w \operatorname{rot}(y) dxdt \\ &= s\lambda^2 \int_{Q_\omega} \left[\varphi w_1 \left(\frac{\partial y_3}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \right) + \varphi w_2 \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_3} - \frac{\partial y_3}{\partial x_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. \varphi w_3 \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \right) \right] dxdt. \end{aligned}$$

Onde $\varphi = \theta e^{2s\alpha} \xi$

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha} \xi |w|^2 dxdt &\leq s\lambda^2 \left[\int_{Q_\omega} -\frac{\partial(\varphi w_1)}{\partial x_2} y_3 + \frac{\partial(\varphi w_1)}{\partial x_3} y_2 - \frac{\partial(\varphi w_2)}{\partial x_3} y_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial(\varphi w_2)}{\partial x_1} y_3 - \frac{\partial(\varphi w_3)}{\partial x_1} y_2 + \frac{\partial(\varphi w_3)}{\partial x_2} y_1 dxdt \right] \\ &= s\lambda^2 \left[\int_{Q_\omega} \left(\frac{\partial(\varphi w_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(\varphi w_2)}{\partial x_3} \right) y_1 + \left(\frac{\partial(\varphi w_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial(\varphi w_3)}{\partial x_1} \right) y_2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial(\varphi w_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\varphi w_1)}{\partial x_2} \right) y_3 dxdt \right] \end{aligned}$$

$$= s\lambda^2 \left[\int_{Q_w} \text{rot}(\varphi w) y dx dt \right].$$

Por tanto

$$(2.47) \quad s\lambda^2 \int_{Q_{w_0}} e^{2s\alpha} \xi |w|^2 dx dt \leq s\lambda^2 \int_{Q_w} \text{rot}(\theta e^{2s\alpha} \xi w) y dx dt$$

$$\text{rot}(\theta e^{2s\alpha} \xi w) = \text{rot}(\theta e^{2s\alpha} \xi w_1, \theta e^{2s\alpha} \xi w_2, \theta e^{2s\alpha} \xi w_3)$$

$$\text{rot}(\theta e^{2s\alpha} \xi w) = \theta e^{2s\alpha} \xi \text{rot}(w) + \theta e^{2s\alpha} 2s\xi \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ e^{2s\alpha} \xi \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial \theta}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial \theta}{\partial x_2} & \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \theta e^{2s\alpha} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial \xi}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial \xi}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}.$$

Como $\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \xi \lambda \frac{\partial \eta^0}{\partial x_i}$, tem-se

$$\text{rot}(\theta e^{2s\alpha} \xi w) = \theta e^{2s\alpha} \xi \text{rot}(w) + \theta e^{2s\alpha} 2s\lambda \xi^2 D\eta^0 w + e^{2s\alpha} \xi D\theta w + \theta e^{2s\alpha} \xi \lambda D\eta^0 w.$$

$$\text{Onde } D\eta^0 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial \eta^0}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta^0}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \eta^0}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial \eta^0}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial \eta^0}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta^0}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix},$$

isto último vamos substituir em 2.47

$$s\lambda^2 \int_{Q_w} e^{2s\alpha} \xi |w|^2 dx dt \leq s\lambda^2 \left(\int_{Q_w} \theta e^{2s\alpha} \xi \text{rot}(w) y dx dt + \int_{Q_w} \theta e^{2s\alpha} 2s\lambda \xi^2 (D\eta^0 w) y dx dt + \right. \\ \left. + \int_{Q_w} e^{2s\alpha} \xi (D\theta w) y dx dt + \int_{Q_w} \theta e^{2s\alpha} \xi \lambda (D\eta^0 w) y dx dt \right),$$

sabemos que $\lambda \xi D\eta^0$, $D\eta^0$ e $D\theta$ são limitados e também se sabe que existe $c > 0$ tal que $|\text{rot}(w)| \leq c |\nabla w|$

$$\begin{aligned}
\tilde{c}s\lambda^2 \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}\xi |w|^2 dxdt &\leq cs\lambda^2 \int_{Q_\omega} \theta e^{2s\alpha}\xi |\nabla w| |y| dxdt + c \left(\int_{Q_\omega} \lambda^3 \theta e^{2s\alpha} 2s^2 \xi |w| |y| + \right. \\
&\quad \left. + s\lambda^2 e^{2s\alpha}\xi |w| |y| + s\theta e^{2s\alpha} \lambda^3 \xi |w| |y| dxdt \right) \\
&\leq c \int_{Q_\omega} \left(\frac{e^{s\alpha} |\nabla w|}{s^{1/2} \xi^{1/2}} \right) (|y| \xi^{3/2} s^{3/2} \lambda^2 e^{s\alpha}) dxdt + \\
&\quad c \int_{Q_\omega} (s^{1/2} \lambda \xi^{1/2} e^{s\alpha} |w|) (s^{3/2} \lambda^2 \xi^{3/2} e^{s\alpha} |y|) dxdt + \\
&\quad c \int_{Q_\omega} (s^{1/2} \lambda \xi^{1/2} e^{s\alpha} |w|) (s^{1/2} \lambda \xi^{1/2} e^{s\alpha} |y|) dxdt + \\
&\quad c \int_{Q_\omega} (s^{1/2} \lambda \xi^{1/2} e^{s\alpha} |w|) (s^{1/2} \lambda^2 \xi^{1/2} e^{s\alpha} |y|) dxdt \\
&\leq c \left(\int_{Q_\omega} \frac{e^{2s\alpha}}{s\xi} |\nabla w|^2 dxdt \right)^{1/2} \left(\int_{Q_\omega} s^3 \lambda^4 \xi^3 e^{2s\alpha} |y|^2 dxdt \right)^{1/2} + \\
&\quad c \left(\int_{Q_\omega} s\lambda^2 \xi e^{2s\alpha} |w|^2 dxdt \right)^{1/2} \left(\int_{Q_\omega} s^3 \lambda^4 \xi^3 e^{2s\alpha} |y|^2 dxdt \right)^{1/2} + \\
&\quad c \left(\int_{Q_\omega} s\lambda^2 \xi e^{2s\alpha} |w|^2 dxdt \right)^{1/2} \left(\int_{Q_\omega} s\lambda^2 \xi e^{2s\alpha} |y|^2 dxdt \right)^{1/2} + \\
&\quad c \left(\int_{Q_\omega} s\lambda^2 \xi e^{2s\alpha} |w|^2 dxdt \right)^{1/2} \left(\int_{Q_\omega} s\lambda^4 \xi e^{2s\alpha} |y|^2 dxdt \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

como s é muito grande tal que $1 \leq s < s^3$ e fazendo uso de que sempre se cumpre $ab \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{b^2\epsilon}{2}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\tilde{c}s\lambda^2 \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}\xi |w|^2 dxdt &\leq \frac{1}{2} \int_{Q_\omega} \frac{e^{2s\alpha}}{s\xi} |\nabla w|^2 dxdt + \\
(2.48) \quad c_1 \int_{Q_\omega} s^3 \lambda^4 \xi^3 e^{2s\alpha} |y|^2 dxdt &+ c_2 \int_{Q_\omega} s\lambda^2 \xi e^{2s\alpha} |y|^2 dxdt + \\
\frac{1}{2} \int_{Q_\omega} s\lambda^2 \xi e^{2s\alpha} |w|^2 dxdt, &
\end{aligned}$$

como $c_0 < \check{\xi}(t) \leq \xi(x, t)$ para qualquer $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ e $1 \leq \lambda_0 \leq \lambda$ tem-se

$$\lambda^2 s \xi = \lambda^2 s \frac{\xi^3}{\xi^2} \leq \frac{\lambda^2 s \xi^3}{c_0^2} \leq \frac{\lambda^4 s^3 \xi^3}{c_0^2}$$

$$\lambda^2 s \xi \leq \frac{1}{c_0^2} \lambda^4 s^3 \xi^3$$

devido a isto temos $c_2 \int_{Q_\omega} s \lambda^2 \xi e^{2s\alpha} |y|^2 dx dt \leq \tilde{c}_2 \int_{Q_\omega} s \lambda^4 \xi^3 e^{2s\alpha} |y|^2 dx dt$, considerando isto em 2.48 tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{c} s \lambda^2 \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha} \xi |w|^2 dx dt &\leq \frac{1}{2} \int_{Q_\omega} \frac{e^{2s\alpha}}{s \xi} |\nabla w|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{Q_\omega} s \lambda^2 \xi e^{2s\alpha} |w|^2 dx dt + \\ &c \int_{Q_\omega} s^3 \lambda^4 \xi^3 e^{2s\alpha} |y|^2 dx dt \end{aligned}$$

como esta última desigualdade se cumpre para todo $\bar{\omega}_0 \subset \omega$ então para ω também se vai cumprir, logo de 2.46 tem-se

$$\begin{aligned} &\int_Q e^{2s\alpha} \left(\frac{|\nabla w|^2}{s \xi} + s \lambda^2 \xi |w|^2 + \lambda^2 |\nabla y|^2 + s^2 \lambda^4 \xi^2 |y|^2 \right) dx dt \leq \\ &c \left(\int_Q e^{2s\alpha} |h|^2 dx dt + \int_{Q_\omega} s^2 \lambda^4 \xi^2 e^{2s\alpha} |y|^2 dx dt \right) + \frac{1}{2} \int_Q \frac{e^{2s\alpha}}{s \xi} |\nabla w|^2 dx dt + \\ &\frac{1}{2} \int_Q s \lambda^2 \xi e^{2s\alpha} |w|^2 dx dt + c \int_{Q_\omega} s^3 \lambda^4 \xi^3 e^{2s\alpha} |y|^2 dx dt \\ &\int_Q e^{2s\alpha} \left(\frac{|\nabla w|^2}{s \xi} + s \lambda^2 \xi |w|^2 + \lambda^2 |\nabla y|^2 + s^2 \lambda^4 \xi^2 |y|^2 \right) dx dt \leq \\ &c \left(\int_Q e^{2s\alpha} |h|^2 dx dt + \int_{Q_\omega} s^3 \lambda^4 \xi^2 e^{2s\alpha} |y|^2 dx dt \right) \end{aligned}$$

este último resultado nós permite escrever o seguinte teorema.

Teorema 2.4. *Existe $s_0, \lambda_0 \geq 1$ e $c > 0$ tais que para $\lambda \geq \lambda_0$ e para toda solução da equação de Navier-Stokes (com $\text{rot}(y)=w$) tem-se*

$$(2.49) \quad \int_Q e^{2s\alpha} \left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi} + s\lambda^2\xi |w|^2 + \lambda^2 |\nabla y|^2 + s^2\lambda^4\xi^2 |y|^2 \right) dxdt \leq c \left(\int_Q e^{2s\alpha} |h|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} s^3\lambda^4\xi^2 e^{2s\alpha} |y|^2 dxdt \right).$$

Do sistema adjunto (2.13) fazendo $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(T-t)$ para $t \in (0, T)$, obtemos

$$(2.50) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} - \Delta \tilde{\varphi} + \nabla \pi = (\bar{y} \cdot \nabla) \tilde{\varphi} + (\tilde{\varphi} \cdot \nabla) \bar{y}, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \text{div}(\tilde{\varphi}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \tilde{\varphi} = 0, & \text{em } \Gamma \times (0, T) \\ \tilde{\varphi}(0) = \frac{1}{\epsilon} y_\epsilon(T), & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

e também temos

$$(2.51) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = \text{rot} [(\bar{y} \cdot \nabla) \tilde{\varphi} + (\tilde{\varphi} \cdot \nabla) \bar{y}], & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \Delta \tilde{\varphi}(t) = \text{rot}(w(t)), & \text{em } \Omega \text{ e quase sempre em } (0, T) \\ \tilde{\varphi}(t) = 0, & \text{sobre } \Gamma \text{ e quase sempre em } (0, T) \end{array} \right. .$$

Onde $w = \text{rot}(\tilde{\varphi})$ e $h = (\bar{y} \cdot \nabla) \tilde{\varphi} + (\tilde{\varphi} \cdot \nabla) \bar{y}$

$$\begin{aligned} \int_Q e^{2s\alpha} |h|^2 dxdt &\leq 4 \int_Q e^{2s\alpha} |\nabla(\bar{y} \otimes \tilde{\varphi})|^2 dxdt \\ &\leq c \int_Q e^{2s\alpha} |\nabla \tilde{\varphi}|^2 dxdt, \end{aligned}$$

substituindo isto último em (2.49) tem-se

$$\int_Q e^{2s\alpha} \left(\frac{|\nabla \text{rot} \varphi|^2}{s\xi} + s\lambda^2 \xi |\text{rot} \varphi|^2 + \lambda^2 |\nabla \varphi|^2 + s^2 \lambda^4 \xi^2 |\varphi|^2 \right) dxdt \leq$$

$$c \left(\int_Q e^{2s\alpha} |\nabla \varphi|^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt \right),$$

e passando o primeiro termo do lado direito para a esquerda

$$\int_Q e^{2s\alpha} \left(\frac{|\nabla \text{rot} \varphi|^2}{s\xi} + s\lambda^2 \xi |\text{rot} \varphi|^2 + \lambda^2 \left(1 - \frac{c}{\lambda^2}\right) |\nabla \varphi|^2 + s^2 \lambda^4 \xi^2 |\varphi|^2 \right) dxdt \leq$$

$$cs^3 \lambda^4 \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt.$$

Como λ é suficientemente grande tal que $1 - \frac{c}{\lambda^2} > 0$ na parte esquerda se toma $\min\{1, 1 - \frac{c}{\lambda^2}\}$

$$(2.52) \quad \int_Q e^{2s\alpha} \left(\frac{|\nabla \text{rot} \varphi|^2}{s\xi} + s\lambda^2 \xi |\text{rot} \varphi|^2 + \lambda^2 |\nabla \varphi|^2 + s^2 \lambda^4 \xi^2 |\varphi|^2 \right) dxdt \leq$$

$$cs^3 \lambda^4 \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt.$$

Para $s \geq s_0$ e $\lambda \geq \lambda_0$, vamos a definir para $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$

$$(2.53) \quad \tilde{\alpha}(x, t) = \begin{cases} \alpha(x, T/2); & t \in [0, T/2] \\ \alpha(x, t); & t \in [T/2, T] \end{cases} \quad \tilde{\xi}(x, t) = \begin{cases} \xi(x, T/2); & t \in [0, T/2] \\ \xi(x, t); & t \in [T/2, T] \end{cases}$$

Fazendo estimações tipo de energia para as equações (2.50), (2.51) e pelo fato da desigualdade (2.52) junto com as funções (2.53) se vai conseguir uma desigualdade similar a (2.52) mas com os novos pesos de Carleman.

$$(2.54) \quad \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}} \left(\frac{|\nabla \text{rot} \varphi|^2}{s\tilde{\xi}} + s\lambda^2 \tilde{\xi} |\text{rot} \varphi|^2 + \lambda^2 |\nabla \varphi|^2 + s^2 \lambda^4 \tilde{\xi}^2 |\varphi|^2 \right) dxdt \leq$$

$$cs^3 \lambda^4 \int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}^3 |\varphi|^2 dxdt$$

Novamente fazendo uso das estimações de energia junto com (2.54) nós podemos obter a Desigualdade de Observabilidade para o problema de Stokes

$$(2.55) \quad \|\varphi(0)\|_H^2 + \int_Q \tilde{\xi}^2 e^{2s\tilde{\alpha}} |\varphi|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}} |\nabla\varphi|^2 dxdt \leq c \int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}^3 |\varphi|^2 dxdt$$

Voltando ao problema de controle nulo com dato inicial $y_0 \in H$ e g satisfazendo $\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}} |g|^2 dxdt < +\infty$. Junto com os resultados da seção anterior temos o seguinte resultado de controlabilidade para o sistema linearizado de Navier-Stokes

Lema 2.5. *Assumindo que $y_0 \in H$ e g satisfaz $\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}} |g|^2 dxdt < +\infty$, então existe $v \in L^2(Q_\omega)^N$ tal que a solução y de (2.9) satisfaz.*

$$y(T) = 0.$$

2.5 Controle e solução de decrescimento exponencial

Nesta seção mostraremos que podemos achar um controle v o qual é exponencialmente decrescente quando $t \rightarrow T$ e $y(T) = 0$.

Definamos:

$$X_0 = \{(y, q) \in C^\infty(\bar{Q}), \operatorname{div}(y) = 0 \text{ em } Q, y = 0 \text{ sobre } \Sigma, \int_\omega q(t) dx = 0, \text{ q. s em } (0, T)\}$$

X_0 é um espaço vetorial e denotemos por $L^*y = -\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y - \bar{y} \cdot D(y)$ e definamos a forma bilinear:

$$\tilde{a} : X_0 \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$((y, q); (\tilde{y}, \tilde{q})) \rightarrow \tilde{a}((y, q), (\tilde{y}, \tilde{q})).$$

$$\tilde{a}((y, q), (\tilde{y}, \tilde{q})) = \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}} (L^*y + \nabla q)(L^*\tilde{y} + \nabla \tilde{q}) dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}^3 y \tilde{y} dxdt.$$

Veamos que \tilde{a} é um produto interno

Para provar que \tilde{a} é um produto interno so é preciso provar que para (y, q) elemento de X_0 tal que $\tilde{a}((y, q), (y, q)) = (0, 0)$ implique que (y, q) é igual a $(0, 0)$, da hipóteses se tem que $\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}} |L^*y + \nabla q|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}^3 |y| dxdt = 0$ então $e^{2s\tilde{\alpha}} |L^*y + \nabla q|^2 = 0$ como $e^{2s\tilde{\alpha}} > 0$ se tem que

$$(2.56) \quad L^*y + \nabla q = 0$$

e como $L^*y = -\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y - \bar{y} \cdot D(y)$, então $L^*y + \nabla q = h$ substituindo isto na hipóteses se tem $\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}} |h|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}^3 |y|^2 dxdt = 0$, fazendo uso da desigualdade de Carleman em 2.54 e do último resultado

$$\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}} \left(\frac{|\nabla \text{rot}(y)|^2}{s\tilde{\xi}} + s\lambda^2 \tilde{\xi} |\text{rot}(y)|^2 + \lambda^2 |\nabla y|^2 + s^2 \lambda^4 \tilde{\xi}^2 |y|^2 \right) dxdt \leq 0$$

daqui obtemos

$$\int_Q s^2 \lambda^4 \tilde{\xi}^2 |y|^2 dxdt = 0$$

isto nós da $y = 0$ em Q

e de (2.56) se chega a que $\nabla q = 0$ por tanto $q = c(t)$ so depende de t mas na definição de X_0

$$\int_\omega q(t) dx = 0 \text{ quase sempre}$$

$$\int_\omega c(t) dx = 0 \text{ quase sempre}$$

$$c(t)m(\omega) = 0 \text{ quase sempre}$$

$$c(t) = 0$$

$$q = 0,$$

então $(y, q) = (0, 0)$ e portanto $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ é um produto interno.

Fazendo uso do teorema 1.55 de completção o qual nós diz que existe X um espaço de Hilbert com este produto interno $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ tal que $X_0 \subset X$ denso.

Pela desigualdade de Observabilidade (2.55) para y tem-se

$$(2.57) \quad \|y(0)\|_H^2 + \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}} \left(|y|^2 \tilde{\xi}^2 + |\nabla y|^2 \right) dxdt \leq c\tilde{\alpha} ((y, q), (y, q))$$

Agora definamos o funcional

$l : X \rightarrow \mathbb{R}$ para $(y, q) \in X$ se define $\langle l, (y, q) \rangle = (y_0, y(0))_H - \sum_{i,j=1}^N \int_Q g_{ij} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dxdt$

a) l esta bem definido.

b) l é linear.

c) l é contínuo, com efeito

$$\begin{aligned} |\langle l, (y, q) \rangle| &= \|y_0\|_H \|y(0)\|_H + c \int_Q |g| |\nabla y| dxdt \\ &= \|y_0\|_H \|y(0)\|_H + c \int_Q e^{-s\tilde{\alpha}} |g| e^{2s\tilde{\alpha}} |\nabla y| dxdt \\ &\leq \|y_0\|_H \|y(0)\|_H + c \left(\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}} |g|^2 dxdt \right)^{1/2} \left(\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}} |\nabla y|^2 dxdt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

e como $\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}} |g|^2 dxdt < +\infty$ tem-se:

$$|\langle l, (y, q) \rangle| \leq c \left(\|y(0)\|_H + \|e^{2s\tilde{\alpha}} \nabla y\|_{L^2(Q)} \right)$$

$$|\langle l, (y, q) \rangle|^2 \leq c \left(\|y(0)\|_H^2 + \|e^{2s\tilde{\alpha}} \nabla y\|_{L^2(Q)}^2 \right)$$

$$|\langle l, (y, q) \rangle|^2 \leq c \left(\|y(0)\|_H^2 + \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}} (|\nabla y|^2 + \tilde{\xi}^2 |y|^2) dxdt \right),$$

e por (2.57) tem-se

$$|\langle l, (y, q) \rangle|^2 \leq \tilde{c}\tilde{\alpha} ((y, q), (y, q))$$

$$|\langle l, (y, q) \rangle| \leq c \|(y, q)\|_X,$$

e por tanto l é contínua.

Como $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear contínua e coerciva e $l \in X$ então nós podemos usar o teorema de Lax Milgram e por tanto existe um único $(y, q) \in X$ tal que:

$$(2.58) \quad \tilde{a}((y, q), (\tilde{y}, \tilde{q})) = \langle l, (\tilde{y}, \tilde{q}) \rangle$$

Definamos:

$$\begin{cases} \tilde{y} = e^{2s\tilde{\alpha}} (L^*y + \nabla q) & \text{em } Q \\ \tilde{v} = -e^{2s\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}^3 y_{1\omega} & \text{em } Q_\omega \end{cases} .$$

Como $\lim_{t \rightarrow T^-} \tilde{\alpha}(x, t) = -\infty$ daqui resulta que $e^{2s\tilde{\alpha}}$ e $e^{2s\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}^3$ são limitados em Q .

$$\int_Q e^{4s\tilde{\alpha}} |L^*y + \nabla q|^2 dxdt \leq c \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}} |L^*y + \nabla q|^2$$

$$\int_Q |\tilde{y}|^2 dxdt \leq c$$

Da mesma maneira se chega a que

$$\int_{Q_\omega} e^{4s\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}^6 |y|^2 dxdt \leq c \int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}^3 |y|^2 dxdt$$

$$\int_{Q_\omega} e^{4s\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}^6 |y|^2 dxdt \leq c$$

$$\int_{Q_\omega} |\tilde{v}|^2 dxdt < c.$$

Portanto $\tilde{y} \in [L^2(Q)]^N$ e $\tilde{v} \in [L^2(Q_\omega)]^N$.

De (2.58) usando as variáveis \tilde{y} e \tilde{v}

$$\int_Q \tilde{y} (L^*\tilde{y} + \nabla \tilde{q}) dxdt = (y_0, \tilde{y}(0))_H - \sum_{i,j=1}^N \int_Q g_{ij} \frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial x_j} dxdt + \int_{Q_\omega} \tilde{v} \tilde{y} dxdt,$$

para todo $(\tilde{y}, \tilde{q}) \in X$.

Consideremos o problema :

$$(2.59) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla(y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla p = \nabla g + \check{v}1_\omega, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

Dizemos que y junto com p é a única solução por transposição de (2.59) em $[L^2(Q)]^N$ se cumpre que para todo $b \in [L^2(Q)]^N$

$$\int_Q y b dx dt = (y_0, y(0))_H - \sum_{i,j=1}^N \int_Q g_{ij} \frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial x_j} dx dt + \int_{Q_\omega} \check{v} \tilde{y} dx dt,$$

onde \tilde{y} junto com \tilde{q} são solução de:

$$\left\{ \begin{array}{ll} L^* \tilde{y} + \nabla \tilde{q} = b, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(\tilde{y}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \tilde{y} = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ \tilde{y}(T) = 0, & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

Como nosso \tilde{y} junto com p é solução por transposição de (2.59) a qual é única, mas o problema (2.59) tem uma única solução fraca em $\mathcal{C}([0, T], H) \cap L^2(0, T, V)$ que também é uma solução por transposição então $\tilde{y} \in \mathcal{C}([0, T], H) \cap L^2(0, T, V)$ e das propriedades de \tilde{y} se tem $\int_Q e^{-2\tilde{\alpha}} |\tilde{y}|^2 dx dt = c < +\infty$.

Afirmção: $\tilde{y}(T) = 0$.

Suponhamos que $\tilde{y}(T) \neq 0$ então $\|\tilde{y}(T)\|_{[L^2(\Omega)]^N}^2 > c_1 > 0$, como $(T-t)e^{-2s\tilde{\alpha}(t)} \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow T^-$ então para $\frac{4c}{c_1}$ se tem que existe $\epsilon > 0$ tal que $\frac{4c}{c_1} < (T-t)e^{-2s\tilde{\alpha}(t)}$ para todo $t \in [\epsilon, T]$

$$\begin{aligned} \frac{4c}{c_1} \|\check{y}(t)\|_{L^2(\Omega)^N}^2 &\leq (T-t)e^{-2s\tilde{\alpha}(t)} \|\check{y}(t)\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \\ \frac{4c}{c_1} \int_{\epsilon}^T \frac{\|\check{y}(t)\|_{L^2(\Omega)^N}^2}{T-t} dt &\leq \int_{\epsilon}^T e^{-2s\tilde{\alpha}(t)} \|\check{y}(t)\|_{L^2(\Omega)^N}^2 dt \\ \frac{4c}{c_1} \int_{\epsilon}^T \frac{\|\check{y}(t)\|_{L^2(\Omega)^N}^2}{T-t} dt &\leq c \\ \frac{4c}{c_1} \int_{\delta}^T \frac{\|\check{y}(t)\|_{L^2(\Omega)^N}^2}{T-t} dt &\leq c, \text{ onde, } \delta \in [\epsilon, T] \\ \frac{4}{c_1} \frac{1}{T-\delta} \int_{\delta}^T \|\check{y}(t)\|_{L^2(\Omega)^N}^2 dt &\leq 1, \text{ fazendo } \delta \rightarrow T^- \\ \frac{4}{c_1} \|\check{y}(T)\|_{L^2(\Omega)^N}^2 &\leq 1 \\ 4 &\leq 1 \end{aligned}$$

Isto ultimo é absurdo. Por tanto $\|\check{y}(T)\|_{L^2(\Omega)^N}^2 = 0$ então $\check{y}(T) = 0$ em Ω .

E do fato que $\int_{Q_\omega} \frac{e^{-2s\tilde{\alpha}}}{\tilde{\xi}^3} |\check{v}|^2 dxdt = \int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}^3 |y|^2 dxdt < +\infty$ e portanto \check{v} é exponencialmente decrescente quando $t \rightarrow T^-$.

Tudo isto nós leva a enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.6. *Se $y_0 \in H$ e g satisfazendo $\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}} |g|^2 dxdt < +\infty$, então existe um controle v e uma solução y de (2.9) tal que $y(T) = 0$ e $\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}} |y|^2 dxdt < +\infty$ e $\int_{Q_\omega} \frac{e^{-2s\tilde{\alpha}}}{\tilde{\xi}^3} |v|^2 dxdt < +\infty$*

2.6 Problema Não Linear

Nós vamos a seguir chamando $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\xi}$ por α e ξ onde em $t \in [\frac{T}{2}, T]$

$$\hat{\alpha}(t) = \max_{x \in \bar{\Omega}} \alpha(x, t) = \frac{e^{\lambda(|\eta^0|_\infty + m_1)} - e^{\lambda(|\eta^0|_\infty + m_2)}}{l^4(t)}$$

$$\hat{\xi}(t) = \max_{x \in \bar{\Omega}} \xi(x, t) = \frac{e^{\lambda(|\eta^0|_\infty + m_1)}}{l^4(t)}$$

Consideremos o seguinte problema não linear a estudar:

$$(2.60) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla \cdot (y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla \cdot (y \otimes y) + \nabla q = v 1_\omega, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

Queremos achar um controle v e uma correspondente solução y de (2.60) tal que $y(T) = 0$ para isso definamos o seguinte conjunto que é um espaço vetorial:

$$E = \left\{ (y, v), e^{-s\alpha} y \in [L^2(Q)]^N, \frac{e^{-s\alpha}}{\xi^{3/2}} v \in [L^2(Q_\omega)]^N, e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} y \in L^4\left(0, T, [L^{12}(\Omega)]^N\right) \cap L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H), \exists q, \exists k, e^{-s\alpha} k \in L^2\left(0, T, [L^6(\Omega)]^{N^2}\right), Ly + \nabla q - v 1_\omega = \nabla k, y(0) \in H \cap L^4(\Omega)^N \right\}$$

Neste espaço vetorial definamos a seguinte norma, para $(y, v) \in E$

$$\begin{aligned} \|(y, v)\|_E^2 &= \|e^{-s\alpha} y\|_{L^2(Q)^N}^2 + \left\| \frac{e^{-s\alpha}}{\xi^{3/2}} v \right\|_{L^2(Q_\omega)^N}^2 + \|e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} y\|_{L^4(0, T, L^{12}(\Omega)^N)}^2 + \\ &\quad \left\| e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} y \right\|_{L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)}^2 + \|e^{-s\alpha} k\|_{L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2})}^2 + \|y(0)\|_{L^4(\Omega)^N}^2, \end{aligned}$$

é fácil provar que $\|\cdot\|_E$ é uma norma, agora nós vamos a provar que E é um espaço de Banach com esta norma, seja $(y_m, v_m)_{m=1}^\infty \subset E$ uma sequencia de Cauchy, então pela norma de E se tem que $\frac{e^{-s\alpha}}{\xi^{3/2}} v_m$ é uma sequencia de Cauchy em $L^2(Q_\omega)^N$ e como este espaço es de Banach então existe $\tilde{v} \in L^2(Q_\omega)^N$ tal que $\frac{e^{-s\alpha} v_m}{\xi^{3/2}} \rightarrow \tilde{v}$ em $L^2(Q_\omega)^N$

$$\begin{aligned} \|v_m - \tilde{v} \xi^{3/2} e^{s\alpha}\|_{L^2(Q_\omega)^N} &= \|(\xi^{3/2} e^{s\alpha}) \left(\frac{e^{-s\alpha}}{\xi^{3/2}} v_m - \tilde{v} \right)\|_{L^2(Q_\omega)^N} \\ &\leq \|\xi^{3/2} e^{s\alpha}\|_{L^\infty(Q_\omega)^N} \left\| \frac{e^{-s\alpha}}{\xi^{3/2}} v_m - \tilde{v} \right\|_{L^2(Q_\omega)^N} \\ &\leq c \left\| \frac{e^{-s\alpha}}{\xi^{3/2}} v_m - \tilde{v} \right\|_{L^2(Q_\omega)^N}. \end{aligned}$$

Fazendo $m \rightarrow +\infty$ se vai ter que:

$$(2.61) \quad v_m \rightarrow v, \text{ em } L^2(Q_\omega)^N.$$

Onde $v = \tilde{v}\xi^{3/2}e^{s\alpha}$, de igual maneira $e^{-s\alpha}y_m$ é de Cauchy em $L^2(Q_\omega)^N$, então existe $\tilde{y} \in L^2(Q_\omega)^N$ tal que $e^{-s\alpha}y_m \rightarrow \tilde{y}$ em $L^2(Q_\omega)^N$ daqui obtemos que

$$(2.62) \quad y_m \rightarrow y \text{ em } L^2(Q_\omega)^N,$$

onde $y = e^{s\alpha}\tilde{y}$. Da mesma maneira se consegui provar que existe $k \in L^2(Q)^N$ tal que $k_m \rightarrow k$ em $L^2(Q)^N$, então por isto último junto com 2.61 e 2.62 tem-se $(y_m, v_m) \rightarrow (y, v)$ em $(E, \|\cdot\|_E)$. Por tanto E é um espaço de Banach.

Definamos o seguinte conjunto:

$$G = \{(\nabla k, y_0); e^{-s\alpha}k \in L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2}), y_0 \in H \cap L^4(\Omega)^N\}$$

G é um espaço vetorial. Definamos uma norma para G para $(\nabla k, y_0) \in G$

$$\|(\nabla k, y_0)\|_G^2 = \|e^{-s\alpha}k\|_{L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2})}^2 + \|y_0\|_{L^4(\Omega)^N}^2,$$

é fácil ver que é uma norma, vejamos que $(G, \|\cdot\|_G)$ é um espaço de Banach.

Com efeito, tomemos $(\nabla k_m, y_{0m})_{m=1}^\infty$ uma sucessão de Cauchy em $(G, \|\cdot\|_G)$ então (y_{0m}) é uma sequencia de Cauchy em $H \cap L^4(\Omega)^N$ (devido á norma de G e a que $L^4(\Omega) \subset L^2(\Omega)$) e portanto existe $y_0 \in H \cap L^4(\Omega)^N$ tal que $y_{0m} \rightarrow y_0$.

Também $e^{-s\alpha}k_m$ é uma sequencia de Cauchy em $L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2})$ e como ele é completo existe $\tilde{k} \in L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2})$ tal que $e^{-s\alpha}k_m \rightarrow \tilde{k}$ em $L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2})$ devido a isto tem-se $k_m \rightarrow k$ em $L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2})$, onde $k = e^{s\alpha}\tilde{k}$ logo $(G, \|\cdot\|_G)$ é um espaço de Banach.

Definamos a seguinte função:

$$\begin{aligned} A: \quad E &\longrightarrow G \\ (y, v) &\longrightarrow A(y, v) = (Ly + \nabla \cdot (y \otimes y) + \nabla p - v1_\omega, y(0)) \end{aligned}$$

A esta bem definida, com efeito para $(y, v) \in E$ vamos a garantir que $A(y, v) \in G$.

Da definição de E se sabe que existe \tilde{k} tal que $Ly + \nabla p - v1_\omega = \nabla \tilde{k}$ então temos que $A(y, v) = (\nabla \cdot k + \nabla(y \otimes y), y(0))$ e de E temos

$$(2.63) \quad e^{-s\alpha}\tilde{k} \in L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2}),$$

e $e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}y \in L^4(0, T, L^{12}(\Omega)^N) \cap L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$

$$(2.64) \quad \int_0^T \|e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}y(t)\|_{L^{12}(\Omega)}^4 dt = \int_0^T \left(\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}} |y(t)|^2 dx \right) dt < +\infty.$$

A partir daqui obtemos que $e^{-\frac{3}{2}s\hat{\alpha}}(y \otimes y) \in L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2})$, com efeito

$$\begin{aligned} \int_0^T \|e^{-\frac{3}{2}s\hat{\alpha}}(y \otimes y)\|_{L^6(\Omega)^{N^2}}^2 dt &= \int_0^T \left(\int_\Omega |e^{-9s\hat{\alpha}}| |y \otimes y|^6 dx \right)^{1/3} dt \\ &= \int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}} |y_i|^6 |y_j|^6 dx \right)^{1/3} dt \\ &\leq \int_0^T \left[\sum_{i,j=1}^N \left(\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}} |y_i|^{12} dx \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. \left(\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}} |y_j|^{12} dx \right)^{1/2} \right]^{1/3} dt \\ &\leq \int_0^T \left[\sum_{i,j=1}^N \frac{1}{2} \left(\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}} |y_i|^{12} + \int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}} |y_j|^{12} dx \right) \right]^{1/3} dt \\ &\leq c \int_0^T \left(\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}} |y|^{12} dx \right)^{1/3} dt \\ &\leq c \int_0^T \|e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}y(t)\|_{L^{12}(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

De (2.64) tem-se $e^{-\frac{3}{2}s\hat{\alpha}}(y \otimes y) \in L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2}) < +\infty$ e por tanto $e^{-\frac{3}{2}s\hat{\alpha}}(y \otimes y) \in L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2})$ e como $-\alpha \leq -\check{\alpha} \leq -\frac{3}{2}\hat{\alpha}$, então

$$(2.65) \quad e^{-s\alpha}(y \otimes y) \in L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2}).$$

Chamemos $k = \tilde{k} + y \otimes y$ e por (2.63) e (2.65) tem-se $e^{-s\alpha}k \in L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2})$ e como $A(y, v) = (\nabla k, y(0))$.

De acima e junto ao fato de que $y(0) \in H \cap L^4(\Omega)^N$ tem-se $A(y, v) \in G$.

Agora nós vamos provar que $A \in \mathcal{C}^1(E, G)$

$$A(y, v) = (Ly + \nabla \cdot (y \otimes y) + \nabla p - v1_\omega, y(0))$$

$$A(y, v) = (Ly + \nabla p - v1_\omega, y(0)) + (\nabla \cdot (y \otimes y), 0),$$

como a parte linear é de classe \mathcal{C}^1 , então nós só devemos provar que $\nabla(y \otimes y)$ é de classe \mathcal{C}^1 . Como a aplicação $((y, v), (\tilde{y}, \tilde{v})) \rightarrow (\nabla(y \otimes \tilde{y}), 0)$ é uma aplicação bilinear so precisamos provar que é continua de $E \times E$ em G .

$$\begin{aligned} \|(\nabla(y \otimes \tilde{y}), 0)\|_G^2 &= \|e^{-s\alpha}(y \otimes \tilde{y})\|_{L^2(0,T,L^6(\Omega)^{N^2})}^2 \\ &\leq \int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega e^{-6s\alpha} |y_i|^6 |\tilde{y}_j|^6 dx \right)^{1/3} dt \\ &\leq \int_0^T \left[\sum_{i,j=1}^N \left(\int_\Omega e^{-6s\alpha} |y_i|^{12} dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega e^{-6s\alpha} |\tilde{y}_j|^{12} dx \right)^{1/2} \right]^{1/3} dt \\ &\leq c \int_0^T \left[\left(\int_\Omega e^{-6s\alpha} |y|^{12} dx \right)^{1/6} \left(\int_\Omega e^{-6s\alpha} |\tilde{y}|^{12} dx \right)^{1/6} \right] dt, \end{aligned}$$

e como $-6s\alpha \leq -9s\hat{\alpha}$

$$\begin{aligned} \|(\nabla(y \otimes \tilde{y}), 0)\|_G^2 &\leq c \int_0^T \left[\left(\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}} |y|^{12} dx \right)^{1/6} \left(\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}} |\tilde{y}|^{12} dx \right)^{1/6} \right] dt \\ &\leq c \left[\int_0^T \left(\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}} |y|^{12} dx \right)^{1/3} dt \right]^{1/2} \left[\int_0^T \left(\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}} |\tilde{y}|^{12} dx \right)^{1/3} dt \right]^{1/2} \\ &\leq c \left\| e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} y \right\|_{L^4(0,T,L^{12}(\Omega)^N)}^2 \left\| e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} \tilde{y} \right\|_{L^4(0,T,L^{12}(\Omega)^N)}^2 \\ &\leq c \|y\|_E^2 \|\tilde{y}\|_E^2. \end{aligned}$$

Portanto $A \in \mathcal{C}^1(E, G)$.

Para $(y, v) \in E$

$$A'(0, 0)[y, v] = (Ly + \nabla p - v1_\omega, y(0))$$

Vamos provar que $A'(0,0) : E \longrightarrow G$ é sobrejetiva. Seja $(\nabla h, y_0) \in G$ pelo teorema 2.6 existe (y, v) tal que:

$$(2.66) \quad \left\{ \begin{array}{ll} Ly + \nabla p = v1_\omega + \nabla h, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{array} \right. .$$

Com $y(T) = 0$, $y \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$, $e^{-s\alpha}y \in L^2(Q)^N$ e $\frac{e^{-s\alpha}v}{\xi^{3/2}} \in L^2(Q_\omega)^N$.

O que nós vamos mostrar agora é que $(y, v) \in E$, mas para isso so fica provar que $e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}y \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H) \cap L^4(0, T, L^{12}(\Omega)^N)$.

Definamos:

$$(2.67) \quad \tilde{y} = e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}y, \quad \tilde{h} = e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}h, \quad \tilde{p} = e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}p \quad \text{e} \quad \tilde{v} = e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}v$$

Agora vamos a ver a regularidade das funções de acima.

Como $e^{-s\alpha}h \in L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2})$ então

$$(2.68) \quad \int_0^T \left(\int_\Omega e^{-6s\alpha} |h|^6 dx \right)^{1/3} dt < +\infty$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{h}\|_{L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2})}^2 &= \int_0^T \left(\int_\Omega |\tilde{h}|^6 dx \right)^{1/3} dt \\ &= \int_0^T \left(\int_\Omega e^{-\frac{9}{2}s\hat{\alpha}} |h|^6 dx \right)^{1/3} dt, \end{aligned}$$

e como $-\frac{9}{2}s\hat{\alpha} \leq -6s\alpha$,

$$\|\tilde{h}\|_{L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2})}^2 \leq \int_0^T \left(\int_\Omega e^{-6s\alpha} |h|^6 dx \right)^{1/3} dt$$

de isto último junto com a desigualdade (2.68) tem-se

$$\|\tilde{h}\|_{L^2(0,T,L^6(\Omega)^{N^2})}^2 < +\infty$$

Portanto $\tilde{h} \in L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2})$ e como $(y, v) \in E$ tem-se que $\frac{ve^{-s\alpha}}{\xi^{3/2}} \in L^2(Q_\omega)^N$.

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}\|_{L^2(Q_\omega)^N}^2 &= \int_0^T \|\tilde{v}\|_{L^2(\omega)}^2 dt \\ &= \int_0^T \int_\omega e^{-\frac{3}{2}s\hat{\alpha}} |v|^2 dx dt \\ &= \int_0^T \int_\omega \left(\frac{e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} |v|}{\xi^{3/2}} \right) (\xi^{3/2} e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} |v|) dx dt \\ &\leq \int_0^T \left(\int_\omega e^{-\frac{3}{2}s\hat{\alpha}} \frac{|v|^2}{\xi^3} dx \right)^{1/2} \left(\int_\omega e^{-\frac{3}{2}s\hat{\alpha}} |v|^2 \xi^3 dx \right)^{1/2} dt, \end{aligned}$$

e como $-\frac{3}{2}s\hat{\alpha} \leq -2s\alpha$

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}\|_{L^2(Q_\omega)^N}^2 &\leq \int_0^T \left(\int_\omega e^{-2s\alpha} \frac{|v|^2}{\xi^3} dx \right)^{1/2} \left(\int_\omega e^{\frac{5}{2}\hat{\alpha}} e^{-2s\hat{\alpha}} |v|^2 \xi^3 dx \right)^{1/2} dt \\ &\leq c \int_0^T \left[\int_\omega (e^{\frac{5}{2}\hat{\alpha}} \xi^6) (e^{-2s\alpha} \frac{|v|^2}{\xi^3}) dx \right]^{1/2} dt, \end{aligned}$$

é possível limitar $e^{\frac{5}{2}\hat{\alpha}} \xi^6$ assim tem-se

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}\|_{L^2(Q_\omega)^N}^2 &\leq c \int_0^T \left(\int_\omega e^{-2s\alpha} \frac{|v|^2}{\xi^3} dx \right)^{1/2} dt \\ &\leq c + c \int_0^T \int_\omega e^{-2s\alpha} \frac{|v|^2}{\xi^3} dx dt \\ &\leq c + \|e^{-s\alpha} \frac{v}{\xi^{3/2}}\|_{L^2(Q_\omega)^N}^2 \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Por tanto $\tilde{v} \in L^2(Q_\omega)$

Da equação (2.66) e das funções em (2.67) vamos ter:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - \Delta \tilde{y} + \nabla(\bar{y} \otimes \tilde{y} + \tilde{y} \otimes \bar{y}) + \nabla \tilde{p} = \nabla \cdot \tilde{h} + \tilde{v}1_\omega - \frac{3s}{4} \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} \tilde{y} \quad , \text{ em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(\tilde{y}) = 0, \quad \text{ em } \Omega \times (0, T) \\ \tilde{y} = 0, \quad \text{ sobre } \Gamma \times (0, T) \\ \tilde{y}(0) = e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} y_0, \quad \text{ em } \Omega \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} \tilde{y} = \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} y = \left(\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} e^{\frac{s}{4}\hat{\alpha}} \right) (e^{-s\hat{\alpha}} y)$$

De (2.29)

$$\left| \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} e^{\frac{s}{4}\hat{\alpha}} \right| \leq c \hat{\xi}^{5/4} |e^{\frac{s}{4}\hat{\alpha}}|$$

Verifica-se que $\hat{\xi}^{5/4} e^{\frac{s}{4}\hat{\alpha}}$ é limitado e portanto:

$$\left| \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} e^{\frac{s}{4}\hat{\alpha}} \right| \leq c,$$

e logo $\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} e^{\frac{s}{4}\hat{\alpha}} \in L^\infty(Q)^N$ e do fato se tem $e^{-s\hat{\alpha}} y \in L^2(0, T, L^2(\Omega)^N)$ por isto tem-se que $\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} \tilde{y} \in L^2(0, T, L^2(\Omega)^N)$.

Chamemos por $\tilde{k} = \tilde{v}1_\omega - \frac{3}{4}s \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} \tilde{y} \in L^2(0, T, L^2(\Omega)^N)$ e consideremos o seguinte sistema:

$$(2.69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - \Delta \tilde{y} + \nabla \cdot (\bar{y} \otimes \tilde{y} + \tilde{y} \otimes \bar{y}) + \nabla \tilde{p} = \nabla \tilde{h} + \tilde{k}, \quad \text{ em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(\tilde{y}) = 0, \quad \text{ em } \Omega \times (0, T) \\ \tilde{y} = 0, \quad \text{ sobre } \Gamma \times (0, T) \\ \tilde{y}(0) = y_0 e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}(0)}, \quad \text{ em } \Omega \end{array} \right.$$

Pelos resultados de existência e unicidade de se tem-se que

$$(2.70) \quad \tilde{y} \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$$

pelo fato de $L^2(0, T, V) \hookrightarrow L^2(0, T, L^6(\Omega)^N)$ e como $\bar{y} \in L^\infty(Q)^N$ vai implicar $\bar{y} \otimes \tilde{y}, \tilde{y} \otimes \bar{y} \in L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2})$, chamemos por $\tilde{h} = \tilde{h} - \bar{y} \otimes \tilde{y} - \tilde{y} \otimes \bar{y} \in L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2})$ assim substituindo em (2.69)

$$(2.71) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - \Delta \tilde{y} + \nabla \tilde{p} = \nabla \cdot \bar{h} + \tilde{k}, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(\tilde{y}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \tilde{y} = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ \tilde{y}(0) = y_0 e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}(0)}, & \text{em } \Omega \end{array} \right. .$$

Mostraremos que $\tilde{y} \in L^4(0, T, L^{12}(\Omega)^N)$, com efeito seja $k \in L^{4/3}(0, T, L^{12/11}(\Omega)^N)$ pelo lema 1.50 existe uma única solução de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla q = k, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(z) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ z = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ z(T) = 0, & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

Desta última equação junto com (2.71) tem-se

$$(2.72) \quad \int_{\Omega} z(0)\tilde{y}(0)dx - \int_Q \bar{h}\nabla z dxdt + \int_Q z\tilde{k}dxdt = \int_Q k\tilde{y}dxdt,$$

o que vemos aqui é que \tilde{y} é a solução por transposição de (2.71). Definamos

$$\begin{aligned} F : L^{4/3}(0, T, L^{12/11}(\Omega)^N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ k &\longrightarrow \langle F, k \rangle, \end{aligned}$$

onde $\langle F, k \rangle = \int_{\Omega} z(0)\tilde{y}(0)dx - \int_Q \bar{h}\nabla z dxdt + \int_Q z\tilde{k}dxdt$, \tilde{y} , \bar{h} e \tilde{k} são fixos tem-se F é linear, vejamos agora que F é continua

$$|\langle F, k \rangle| \leq c(\|z_0\|_{L^{4/3}(\Omega)^N} + \|\nabla z\|_{L^2(0, T, L^{6/5}(\Omega)^N)} + \|z\|_{L^2(Q)^N})$$

$$|\langle F, k \rangle| \leq c\|k\|_{L^{4/3}(0, T, L^{12/11}(\Omega)^N)}$$

Portanto pela unicidade de solução por transposição tem-se $F = \tilde{y}$, portanto $\tilde{y} \in (L^{4/3}(0, T, L^{12/11}(\Omega)^N))' \equiv L^4(0, T, L^{12}(\Omega)^N)$, de isto junto com 2.70 vamos ter $e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}y \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H) \cap L^4(0, T, L^{12}(\Omega)^N)$ e portanto $A'(0, 0)$ é sobrejetiva de E em G .

Fazendo uso do seguinte teorema o qual é provado em [20] vamos ter a controlabilidade local nula do problema.

Teorema 2.7. *Seja B_1 e B_2 dois espaços de Banach e $A : B_1 \rightarrow B_2$ satisfazendo $A \in \mathcal{C}^1(B_1, B_2)$. Assumindo que $e_0 \in B_1$, $A(e_0) = h_0$ e $A'(e_0) : B_1 \rightarrow B_2$ é sobrejetiva. Então existe $\delta > 0$ tal que para todo $h \in B_2$ satisfazendo $\|h - h_0\|_{B_2} < \delta$ existe solução da equação*

$$A(e) = h, \quad e \in B_1$$

.

Tome $e_0 = (0, 0)$ e $h_0 = (0, 0)$ tal que este teorema nós vai dar a controlabilidade local nula de (2.60)

Capítulo 3

Controlabilidade do sistema de Navier-Stokes N-dimensional com N-1 controles escalares

Neste capítulo, apresentamos um resultado sobre a controlabilidade local exata por trajetórias para um sistema do tipo Navier-Stokes N-dimensional. Em um primer passo, enunciaremos uma nova desigualdade do tipo Carleman para o sistema adjunto associado ao problema linear de Navier-Stokes e como consequência de isso vamos ter a desigualdade de Observabilidade. Em seguida, obteremos um resultado sobre a controlabilidade nula para o sistema linearizado com N-1 controles escalares. Ao final, devido a um teorema da função inversa, conseguiremos a controlabilidade local exata por trajetórias do sistema N-dimensional de Navier-Stokes com N-1 controles escalares.

3.1 Formulação do problema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N=2$ ou $N=3$) é aberto, limitado e conexo com fronteira $\partial\Omega$ de \mathcal{C}^2 e $\mathcal{O} \subset \Omega$ é um subconjunto aberto e dado $T > 0$ chamemos por $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$, $\partial\Omega = \Gamma$ e $\eta(x)$ é o vetor normal unitário de Ω em um ponto $x \in \partial\Omega$. Nós estudaremos a controlabilidade local exata por trajetórias do problema de Navier-Stokes.

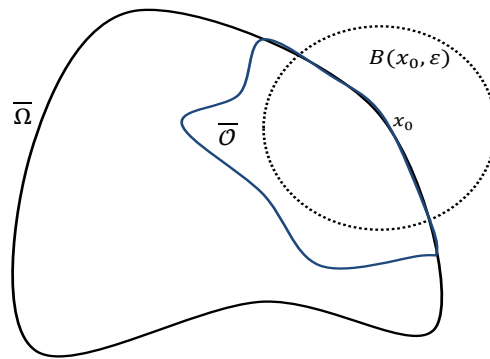
$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = v1_{\mathcal{O}}, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

chamemos por $E = \begin{cases} H, & \text{se } N = 2 \\ [L^4(\Omega)]^3 \cap H, & \text{se } N = 3 \end{cases}$

Para nosso problema 3.1 assumiremos que a região de controle \mathcal{O} é adjacente á fronteira $\partial\Omega$, isto é:

$$(3.2) \quad \exists x_0 \in \partial\Omega \text{ e } \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } B(x_0, \epsilon) \cap \partial\Omega \subset \overline{\mathcal{O}} \cap \partial\Omega$$

Aqui um esboço ilustrado de como \mathcal{O} é adjacente na fronteira de Ω



Consideremos o problema:

$$(3.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \Delta \bar{y} + (\bar{y} \cdot \nabla)\bar{y} + \nabla \bar{p} = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(\bar{y}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \bar{y} = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ \bar{y} = \bar{y}_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Nós queremos provar que o problema 3.1 é localmente exatamente controlável por trajetórias isto é para (\bar{y}, \bar{p}) solução fraca do problema 3.3 satisfazendo :

$$(3.4) \quad \bar{y} \in L^\infty(Q)^N \text{ e } \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \in L^2(0, T, L^\sigma(\Omega)^N); \quad \left(\begin{array}{l} \sigma > 1, \text{ se } N=2 \\ \sigma > 6/5, \text{ se } N=3 \end{array} \right)$$

é possível achar $\delta > 0$ tal que para qualquer $y_0 \in E$ que cumpre $\|y_0 - \bar{y}_0\|_E < \delta$ isso vai implicar que exista $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$ com $v_k = 0$ associado a (y, p) (solução de 3.1) satisfazendo $y(T) = \bar{y}(T)$.

O teorema que nós vai dar a controlabilidade local exata por trajetórias de (3.1) é o seguinte:

Teorema 3.1. *Assumindo que \mathcal{O} satisfazendo (3.2). Então para qualquer $T > 0$ (3.1) é localmente exatamente controlável no tempo T pela trajetória (\bar{y}, \bar{p}) satisfazendo (3.3) com controle $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$ tendo uma componente nula.*

Para conseguir provar este teorema nós precisamos alguns resultados prévios, primeiro denotando:

$$z = y - \bar{y}, \quad q = p - \bar{p}, \quad z_0 = y_0 - \bar{y}_0 \quad \text{tem-se de (3.1) e (3.3)}$$

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + (\bar{y} \cdot \nabla)z + (z \cdot \nabla)\bar{y} + (z \cdot \nabla)z + \nabla q = v1_{\mathcal{O}}, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(z) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ z = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ z(0) = z_0, & \text{em } \end{array} \right.$$

Tem-se que a controlabilidade local nula de (3.5) equivale a controlabilidade local por trajetórias de (3.1).

3.2 Resultados

Para obter a prova do teorema 3.1 vamos a estudar o problema linear de (3.5) adicionando uma função f na parte direita para ter o seguinte problema:

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (\bar{y} \cdot \nabla)y + (y \cdot \nabla)\bar{y} + \nabla p = f + v1_{\mathcal{O}}, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

Para $\mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}$ aberto tal que $\overline{\mathcal{O}_0} \subset\subset \Omega$ vamos ter pelo teorema 1.51 de Fursikov existe $\eta^0 \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ tal que $\eta^0 = 0$ sobre Γ , $\eta^0 > 0$ em Ω e $|\nabla \eta^0| > 0$ em $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}_0}$. Definamos as seguintes funções:

$$\alpha^*(x, t) = \frac{e^{\frac{5}{4}\lambda m |\eta^0|_{\infty}} - e^{\lambda(m |\eta^0|_{\infty} + \eta^0(x))}}{t^4(T-t)^4}.$$

$$\xi^*(x, t) = \frac{e^{\lambda(m |\eta^0|_{\infty} + \eta^0(x))}}{t^4(T-t)^4}.$$

O estado adjunto de 3.6 é:

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi - (D\varphi)\bar{y} + \nabla \pi = g, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(\varphi) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \varphi = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ \varphi(T) = \varphi_0, & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

onde $D\varphi = (D\varphi)_{ij} = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right)$.

3.3 Desigualdade de Carleman

Lema 3.2. *Assumindo que $N = 3$, $\eta_1(x_0) \neq 0$ com \mathcal{O} satisfaz (3.2) e \bar{y} satisfaz (3.3). Então existem constantes positivas c , $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ com $0 < \tilde{\alpha} < \bar{\alpha}$ e $8\tilde{\alpha} - 7\bar{\alpha} > 0$ dependendo*

de Ω , \mathcal{O} , T , e \bar{y} tal que para qualquer $g \in L^2(Q)^3$ e $\varphi_0 \in H$ a solução φ associada a (3.7) satisfaz

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_Q e^{-2\frac{\bar{\alpha}}{t^4}} (l^{-12} |\varphi|^2 + l^{-4} |\nabla\varphi|^2) dxdt \leq c \left(\int_Q e^{\frac{-4\bar{\alpha}+2\tilde{\alpha}}{t^4}} l^{-30} |g|^2 dxdt + \right. \\ \left. \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} e^{\frac{-16\bar{\alpha}+14\tilde{\alpha}}{t^4}} l^{-132} (|\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2) dxdt \right) \end{array} \right.$$

onde

$$(3.9) \quad l(t) = \begin{cases} \frac{T^2}{4} & \text{para todo } 0 \leq t \leq T/2 \\ t(T-t) & \text{para todo } T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Demonstração: Ver E.F.Cara-S.Guerrero([5], p. 151). □

Lema 3.3. Assumindo que $N = 2$, $\eta_1(x_0) \neq 0$, \mathcal{O} satisfaz (3.2) e \bar{y} satisfaz (3.3). Então existem constantes positivas c , $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ com $0 < \tilde{\alpha} < \bar{\alpha}$ e $8\tilde{\alpha} - 7\bar{\alpha} > 0$ dependendo so de Ω , \mathcal{O} , T e \tilde{y} tais que para qualquer $g \in L^2(Q)^2$ e $\varphi_0 \in H$ a solução φ associada a (3.7) satisfaz

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_Q e^{-2\frac{\bar{\alpha}}{t^4}} (l^{-12} |\varphi|^2 + l^{-4} |\nabla\varphi|^2) dxdt \leq c \left(\int_Q e^{\frac{-4\bar{\alpha}+2\tilde{\alpha}}{t^4}} l^{-30} |g|^2 dxdt + \right. \\ \left. \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} e^{\frac{-16\bar{\alpha}+14\tilde{\alpha}}{t^4}} l^{-132} |\varphi_2|^2 dxdt \right) \end{array} \right.$$

onde l é a função definida em (3.9)

Demonstração: Ver E.F.Cara-S.Guerrero([5], p. 154). □

observação 3.4. Na prova do lema 3.2 os $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ são da forma:

$$\bar{\alpha} = s_0(e^{5/4\lambda_0 m} |\eta^0|_\infty - e^{\lambda_0 m} |\eta^0|_\infty).$$

$$\tilde{\alpha} = s_0(e^{5/4\lambda_0 m} |\eta^0|_\infty - e^{\lambda(m+1)} |\eta^0|_\infty).$$

Fazendo λ_0 muito grande se consegue que $\tilde{\alpha}$ e $\bar{\alpha}$ satisfaçam que $0 < \tilde{\alpha} < \bar{\alpha}$ e $8\tilde{\alpha} - 7\bar{\alpha} > 0$, além disso também se pode assumir que $16\tilde{\alpha} - 15\bar{\alpha} > 0$

observação 3.5. (*Desigualdade de Observabilidade*) Assumindo que se satisfazem as condições do lema 3.2 e sendo φ a solução de 3.7, então se consegue provar que:

$$\int_Q e^{\frac{-2\bar{\alpha}}{l^4}} (l^{-12} |\varphi|^2 + l^{-4} |\nabla\varphi|^2) dxdt + \|\varphi(0)\|_H^2 \leq c \left(\int_Q e^{\frac{-4\bar{\alpha}+2\bar{\alpha}}{l^4}} l^{-30} |g|^2 dxdt + \int_{O \times (0,T)} e^{\frac{-16\bar{\alpha}+14\bar{\alpha}}{l^4}} l^{-132} (|\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2) dxdt \right).$$

3.4 Controlabilidade Nula do Problema Linear

Consideremos o seguinte problema:

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (\bar{y} \cdot \nabla) y + (y \cdot \nabla) \bar{y} + \nabla p = f + v 1_{\mathcal{O}}, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

Onde \mathcal{O} satisfaz (3.2) e \bar{y} satisfaz (3.3). O que nós queremos é achar um controle v com uma componente nula tal que a solução de (3.11) cumpre com $y(T) = 0$ sobre Ω e para isso vamos introduzir algumas funções de peso.

$$\beta_2 = e^{\frac{\bar{\alpha}}{l^4}} l^6$$

$$\beta_3 = e^{\frac{2\bar{\alpha} - \tilde{\alpha}}{l^4}} l^{15}$$

$$\beta_4 = e^{\frac{8\bar{\alpha} - 7\tilde{\alpha}}{l^4}} l^{66},$$

onde l é como em (3.9), $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ são constantes como no lema 3.2 e o 3.3 e devemos lembrar que $0 < \tilde{\alpha} < \bar{\alpha}$ e $0 < 8\bar{\alpha} - 7\tilde{\alpha}$.

Nós precisamos algumas condições específicas de f e y_0 para ter a controlabilidade nula de (3.11)

$$(3.12) \quad Ly = \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (\bar{y} \cdot \nabla) y + (y \cdot \nabla) \bar{y}.$$

Definamos os seguintes espaços:

$$E_0 = \{(y, v) : \beta_3 y, \beta_4 v 1_{\mathcal{O}} \in L^2(Q)^N, v_1 = 0, l^{-2} \beta_2^{1/2} y \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)\}$$

Para $N = 2$

$$E_2 = \{(y, p, v) : (y, v) \in E_0, l^{-4}\beta_2(Ly + \nabla p - v1_{\mathcal{O}}) \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^2)\}$$

Para $N = 3$

$$E_3 = \{(y, p, v) : (y, v) \in E_0, l^{-2}\beta_2^{1/2}y \in L^4(0, T, L^{12}(\Omega)^3), l^{-4}\beta_2(Ly + \nabla p - v1_{\mathcal{O}}) \in L^2(0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3)\}$$

E_N é um espaço de Banach com a norma:

$$\|(y, p, v)\|_{E_2} = \left(\|\beta_2 y\|_{L^2(Q)^2}^2 + \|\beta_4 v 1_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)^2}^2 + \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y\|_{L^2(0,T,V)}^2 + \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y\|_{L^\infty(0,T,H)}^2 + \|l^{-4}\beta_2(Ly + \nabla p - v1_{\mathcal{O}})\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^2)}^2 \right)^{1/2}$$

e

$$\|(y, p, v)\|_{E_3} = \left(\|\beta_3 y\|_{L^2(Q)^3}^2 + \|\beta_4 v 1_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)^3}^2 + \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y\|_{L^2(0,T,V)}^2 + \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y\|_{L^\infty(0,T,H)}^2 + \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y\|_{L^4(0,T,L^{12}(\Omega))}^2 + \|l^{-4}\beta_2(Ly + \nabla p - v1_{\mathcal{O}})\|_{L^2(0,T,W^{-1,6}(\Omega)^3)}^2 \right)^{1/2}$$

Proposição 3.6. *Assumindo que $\eta_1(x_0) \neq 0$, \mathcal{O} satisfaz (3.2) e \bar{y} satisfaz (3.3). Dado $y_0 \in E$ e assumindo que*

$$l^{-4}\beta_2 f \in \begin{cases} L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^2), & \text{se } N = 2 \\ L^2(0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3), & \text{se } N = 3 \end{cases}$$

Então podemos achar um controle v tal que a solução associada de (3.11) satisfaz $(y, p, v) \in E_N$. Em particular $v_1 = 0$ e $y(T) = 0$.

Demonstração: Sô vamos considerar o caso $N = 3$, quando $N = 2$ resulta mais fácil

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \inf \frac{1}{2} \left(\int_Q |\beta_3 y|^2 dxdt + \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\beta_4 v|^2 dxdt \right) \\ \text{restrita a } v \in L^2(Q)^3, \text{ } \text{supp}(v) \subset \mathcal{O} \times (0, T), \text{ } v_1 = 0 \text{ e} \\ \left\{ \begin{array}{ll} Ly + \nabla p = f + v1_{\mathcal{O}}, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \text{div}(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0, \text{ } y(T) = 0, & \text{em } \Omega \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Nós vemos que uma solução $(\hat{y}, \hat{p}, \hat{v})$ de (3.13) é um bom candidato para que $(\hat{y}, \hat{p}, \hat{v}) \in E_3$. Assumindo que (3.13) tem uma solução $(\hat{y}, \hat{p}, \hat{v})$. Então pelo principio de Lagrange existem \hat{z} e \hat{q} tais que

$$(3.14) \quad \begin{cases} \hat{y} = \beta_3^{-2}(L^*\hat{z} + \nabla\hat{q}), & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(\hat{z}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \hat{v}_1 = 0, \quad \hat{v}_i = -\beta_4^{-2}\hat{z}_i \quad (i = \{2, 3\}), & \text{em } \mathcal{O} \times (0, T) \\ \hat{z} = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \end{cases}$$

Seja:

$$P_0 = \{(w, h) \in \mathcal{C}^2(\overline{Q})^4; \operatorname{div}(w) = 0 \text{ em } Q, w = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0, T), \int_{\mathcal{O}} h(x, t) dx = 0\}$$

Para todo (z, q) e (w, h) que pertencem a P_0

$$a((z, q), (w, h)) = \int_Q \beta_3^{-2}(L^*z + \nabla q)(L^*w + \nabla h) dxdt + \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \beta_4^{-2}(z_2w_2 + z_3w_3) dxdt$$

P_0 é um espaço vetorial e para que $a(\cdot, \cdot)$ seja um produto interno em P_0 so fica provar que para $(w, h) \in P_0$ tal que $a((w, h), (w, h)) = 0$ implique que $(w, h) = (0, 0)$

Com efeito se $a((w, h), (w, h)) = 0$ então

$$\int_Q \beta_3^{-2} |L^*w + \nabla h|^2 dxdt + \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \beta_4^{-2}(w_2^2 + w_3^2) dxdt = 0 \text{ daqui tem-se } \beta_3^{-2} |L^*w + \nabla h|^2 = 0, \text{ mas como } \beta_3^{-2} = e^{\frac{2\bar{\alpha}-4\bar{\alpha}}{i^4}} l^{-30} > 0 \text{ para todo } t \in (0, T) \text{ portanto}$$

$$(3.15) \quad L^*w + \nabla h = 0$$

pela desigualdade de Carleman no lema 3.2 tem-se

$$\int_Q e^{-\frac{2\bar{\alpha}}{i^4}} (l^{-12} |w|^2 + l^{-4} |\nabla w|^2) dxdt \leq c \left(\int_Q \beta_3^{-2} |L^*w + \nabla h|^2 dxdt + \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \beta_4^{-2} (|w_2|^2 + |w_3|^2) dxdt \right)$$

$$\int_Q e^{-\frac{2\bar{\alpha}}{i^4}} (l^{-12} |w|^2 + l^{-4} |\nabla w|^2) dxdt \leq ca((w, h), (w, h)) = 0,$$

então $e^{-\frac{2\bar{\alpha}}{i^4}} l^{-12} |w|^2 = 0$ em Q e como $e^{-\frac{2\bar{\alpha}}{i^4}} l^{-12} > 0$ em $(0, T)$ dai tem-se $w = 0$ quase sempre em Q e substituindo em (3.15) se vai ter que $\nabla h = 0$ como consequência de isto se vai ter que $h = c(t)$ mas como $\int_{\mathcal{O}} h(t) dx = 0$ então $h = 0$ e portanto $(w, h) = (0, 0)$. Portanto $a(\cdot, \cdot)$ é um produto interno.

Pelo teorema 1.55 (completação) existe um espaço de Hilbert P com o produto interno $a(\cdot, \cdot)$ tal que $P_0 \subset P$

$$\begin{aligned} \text{Seja } G : P &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (w, h) &\longrightarrow \langle G, (w, h) \rangle \end{aligned}$$

$$\text{onde } \langle G, (w, h) \rangle = \int_0^T \langle f(t), w(t) \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} dt + \int_{\Omega} y_0 w(0) dx.$$

Esta bem definido pois $f \in L^2(0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3) \subset L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^3)$ e $y_0, w(0) \in L^2(Q)^N$ é fácil ver que G é linear.

Vejamos que G é continua

$$|\langle G, (w, h) \rangle| \leq \int_0^T \left| \langle f(t), w(t) \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} \right| dt + \int_{\Omega} |y_0 w(0)| dx,$$

como $l^{-4} \beta_2 f \in L^2(0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3)$ devido ha isto $l^{-4} \beta_2 f \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^3)$

$$|\langle G, (w, h) \rangle| \leq \|l^{-4} \beta_2 f\|_{L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^3)} \|l^4 \beta_2^{-1} w\|_{L^2(0, T, H_0^1(\Omega)^3)} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)^3} \|w(0)\|_{L^2(\Omega)^3}$$

$$\begin{aligned} |\langle G, (w, h) \rangle|^2 &\leq c \left(\|l^{-4} \beta_2^{-1} w\|_{L^2(0, T, H_0^1)}^2 + \|w(0)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \right) \\ &= c \left(\int_0^T \int_{\Omega} e^{-\frac{2\bar{\alpha}}{i^4}} l^{-4} |\nabla w|^2 dx dt + \int_{\Omega} |w(0)|^2 dx \right) \end{aligned}$$

Da Desigualdade de Observabilidade tem-se

$$|\langle G, (w, h) \rangle|^2 \leq c \left(\int_Q \beta_3^{-2} |L^* w + \nabla h|^2 dx dt + \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \beta_4^{-2} (|w_2|^2 + |w_3|^2) dx dt \right)$$

$$|\langle G, (w, h) \rangle| \leq \tilde{c} \|(w, h)\|_P,$$

então G é continua.

Agora fazendo uso do teorema 1.56 de Lax Milgram pois $a(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear continua e coerciva e $G \in P'$. Então existe um único $(\hat{w}, \hat{h}) \in P$ tal que

$$(3.16) \quad a\left((\hat{w}, \hat{h}), (w, h)\right) = \langle G, (w, h) \rangle \quad \text{para todo } (w, h) \in P$$

$$\begin{cases} \hat{y} = \beta_3^{-2}(L^*\hat{w} + \nabla\hat{h}), \quad \text{div}(\hat{w}) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \hat{v}_1 = 0, \quad \hat{v}_i = -\beta_4^{-2}\hat{w}_i, \quad i = 2, 3 & \text{em } \mathcal{O} \times (0, T) \\ \hat{w} = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \end{cases}$$

$$\int_Q |\hat{y}|^2 dxdt = \int_Q \beta_3^{-2} \beta_3^{-2} |L^*\hat{w} + \nabla\hat{h}|^2 dxdt,$$

como $\beta_3^{-2} = e^{-\frac{2\bar{\alpha}}{t^4}} I^6$ é limitado em $[0, T]$

$$\begin{aligned} \int_Q |\hat{y}|^2 dxdt &\leq c \int_Q \beta_3^{-2} |L^*\hat{w} + \nabla\hat{h}|^2 dxdt \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Por tanto $\hat{y} \in L^2(Q)^N$, da mesma maneira como $\beta_4^{-2} = e^{-\frac{-16\bar{\alpha}+14\bar{\alpha}}{t^4}}$ é limitado em $[0, T]$ tem-se $\hat{v} \in L^2(Q)^N$ e consequentemente

$$(3.17) \quad \int_Q \beta_3^2 |\hat{y}|^2 dxdt < +\infty \quad e \quad \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \beta_4^2 |\hat{v}|^2 dxdt < +\infty,$$

e de (3.17) como $\beta_3^2 \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow T^-$ tem-se $\hat{y}(T) = 0$.

De (3.16) vamos ter a seguinte igualdade

$$(3.18) \quad \int_Q \hat{y}(L^*w + \nabla h) dxdt = \int_0^T \langle f(t), w(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega)^3 \times H_0^1(\Omega)^3} dt + \int_\Omega y_0 w(0) dx + \int_Q \hat{v} 1_{\mathcal{O}} w dxdt.$$

Consideremos o seguinte problema

$$(3.19) \quad \begin{cases} L\tilde{y} + \nabla\tilde{p} = f + \hat{v}1_{\mathcal{O}}, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \text{div}(\tilde{y}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \tilde{y} = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ \tilde{y}(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Dizemos que (\tilde{y}, \tilde{p}) é solução por transposição de 3.19 se $\tilde{y} \in L^2(Q)^N$ e

$$(3.20) \quad \int_Q \tilde{y} b dx dt = \int_0^T \langle f(t), w(t) \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} dt + \int_Q \hat{v} 1_{\mathcal{O}} w dx dt + \int_{\Omega} y_0 w(0) dx.$$

Para todo $b \in L^2(Q)^N$ e w junto h solução de

$$\begin{cases} L^* w + \nabla h = b, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(w) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ w = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ w(T) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

De (3.18) se vê que \hat{y} satisfaz (3.20) e como so existe uma única solução por transposição temos que $\tilde{y} = \hat{y}$ e por teorema 1.47, como $y_0 \in H$ e $f + \hat{v} 1_{\mathcal{O}} \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^3)$. Então existe uma única solução fraca de (3.19) que fica em $L^\infty(0, T, H) \cap L^2(0, T, V)$ isto nós leva a que $\hat{y} \in L^\infty(0, T, H) \cap L^2(0, T, V)$.

Vamos provar que $(\hat{y}, \hat{p}, \hat{v}) \in E_3$, se sabe que $\hat{v} \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^N)$, $f = (l^{-4} \beta_2 f)(l^4 \beta_2^{-1}) \in L^2(0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3) \subset L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^3)$ e $y_0 \in E$ e de (3.17) temos $\beta_3 \hat{y} \in L^2(Q)^3$

$$(3.21) \quad \beta_4 \hat{v} \in L^2(Q)^3 \text{ e } \hat{v}_1 = 0$$

A continuação mostraremos que $l^{-2} \beta_2^{1/2} \hat{y} \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$ consideremos $y^* = l^{-2} \beta_2^{1/2} \hat{y}$, $p^* = l^{-2} \beta_2^{1/2} \hat{p}$ e $f^* = l^{-2} \beta_2^{1/2} (f + \hat{v} 1_{\mathcal{O}})$ verifica-se cumpre

$$(3.22) \quad \begin{cases} Ly^* + \nabla p^* = f^* + (l^{-2} \beta_2^{-1/2})_t \hat{y}, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y^*) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y^* = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y^*(0) = l^{-2}(0) \beta_2^{1/2}(0) y_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Como $l^2 \beta_2^{-1/2} \in L^\infty(Q)^3$ e $l^{-4} \beta_2 f \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^3)$. Então $l^{-2} \beta_2^{1/2} f = (l^{-4} \beta_2 f)(l^2 \beta_2^{-1/2}) \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^3)$ da mesma maneira $l^{-2} \beta_2^{1/2} \beta_4^{-1} \in L^\infty(Q)^3$ e $\beta_4 \hat{v} \in L^2(Q)^3$ e como consequência de isto $l^{-2} \beta_2^{1/2} \hat{v} \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^3)$ por tudo isto $f^* \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^3)$.

Também

$$\begin{aligned} (l^{-2} \beta_2^{-1/2})_t &= (l^{-5} e^{-\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}})_t \\ &= \underbrace{-5l^{-6} l' e^{-\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}}}_{\text{limitado}} + \underbrace{l^{-10} 2\bar{\alpha} e^{-\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}} l'}_{\text{limitado}} \end{aligned}$$

daqui temos $(l^{-2}\beta_2^{-1/2})_t\hat{y} \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^3)$. Então pelo teorema 1.47 a solução de (3.22) pertence a $L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$ portanto

$$(3.23) \quad l^{-2}\beta_2^{1/2}\hat{y} \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H),$$

também

$$(3.24) \quad l^{-4}\beta_2(L\hat{y} + \nabla\hat{p} - \hat{v}1_{\mathcal{O}}) = l^{-4}\beta_2f \in L^2(0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3)$$

De (3.22) , (3.23) e (3.24) so falta provar que $l^{-2}\beta_2^{1/2}\hat{y} \in L^4(0, T, L^{12}(\Omega)^3)$ para dizer que $(\hat{y}, \hat{p}, \hat{v}) \in E_3$

Definamos $B : L^{4/3}(0, T, L^{12/11}(\Omega)^3) \longrightarrow \mathbb{R}$, onde

$\langle B, k \rangle = \int_{\Omega} l^{-2}(0)\beta_2^{1/2}(0)y_0z(0)dx + \int_0^T \langle F, z \rangle_{W^{-1,6} \times W_0^{1,6}} dt$, donde pelo lema 1.50 z é a única solução de:

$$\begin{cases} -\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla q = k, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(z) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ z = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ z(T) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Com $z \in \mathcal{C}(0, T, L^{4/3}(\Omega)^3) \cap L^2(0, T, W_0^{1,6/5}(\Omega)^3)$ e $F = f^* + (l^{-2}\beta_2^{-1/2})_t\hat{y} - \nabla \cdot (y^* \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y^*)$, $y^* \in L^2(0, T, V) \subset L^2(0, T, L^6(\Omega)^9)$ então $\nabla(\bar{y} \otimes y^* + y^* \otimes \bar{y}) \in L^2(0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3)$ e devido a que $f^*, \hat{y} \in L^2(0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3)$.

B esta bem definida, linear e continua. Vejamos que é continua

$$\begin{aligned} |\langle B, k \rangle| &\leq \|l^{-2}(0)\beta_2^{1/2}(0)y(0)\|_{L^4(\Omega)} \|z(0)\|_{L^{4/3}(\Omega)^3} + \\ &\quad \|F\|_{L^2(0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3)} \|z\|_{L^2(0, T, W_0^{1,6}(\Omega)^3)} \\ &\leq c(\|z\|_{\mathcal{C}(0, T, L^{4/3}(\Omega)^3)} + \|z\|_{L^2(0, T, W_0^{1,6}(\Omega)^3)}) \\ &= c \|z\|_{\mathcal{C}(0, T, L^{4/3}(\Omega)^3) \cap L^2(0, T, W_0^{1,6}(\Omega)^3)} \\ &\leq c \|k\|_{\mathcal{C}(0, T, L^{12/11}(\Omega)^3)} \end{aligned}$$

Portanto B é continua.

Nós sabemos que y^* é solução de

$$(3.25) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla p = f^* + (l^{-2}\beta_2^{-1/2})_t \hat{y} - \nabla(y^* \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y^*), & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = l^{-2}(0)\beta_2^{1/2}(0)y_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

e do fato de ser y^* é também solução por transposição de (3.25), se cumpre

$$(3.26) \quad \int_Q y^* k dx dt = \int_\Omega l^{-2}(0)\beta_2^{1/2}(0)y_0 z(0) dx + \int_0^T \langle F, z \rangle_{W^{-1,6} \times W_0^{1,6}} dt$$

Para todo $k \in L^{4/3}(0, T, L^{12/11}(\Omega)^3)$ onde z e q são solução de

$$\begin{cases} -\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla q = k, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div}(z) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ z = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ z(T) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Da definição de B e de (3.26) se tem que

$$\langle B, k \rangle = \int_Q y^* k dx dt, \quad \text{para todo } k \in L^{4/3}(0, T, L^{12/11}(\Omega)^3)$$

daqui temos $y^* \in (L^{4/3}(0, T, L^{12/11}(\Omega)^3))'$ então $y^* \in L^4(0, T, L^{12}(\Omega)^3)$ e como consequência de todo isto $(\hat{y}, \hat{p}, \hat{v}) \in E_3$.

□

3.5 Problema Não Linear

O teorema que nós vai a dar la controlabilidade local nula do sistema (3.5) é o seguinte:

Teorema 3.7. *Assumindo que \mathcal{O} satisfaz (3.2). Então para todo $T > 0$ (3.5) é localmente nulo controlável com um controle $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$ tendo uma componente nula.*

Demonstração: Para provar o teorema de acima vamos fazer uso do teorema 2.7(Liusternik), nosso caso $B_1 = E_N$ e

$$B_2 = \begin{cases} L^2(l^{-4}\beta_2; 0, T, H^{-1}(\Omega)^2) \times H, & \text{se } N = 2 \\ L^2(l^{-4}\beta_2; 0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3) \times (H \cap L^4(\Omega)^3), & \text{se } N = 3 \end{cases}$$

$A : B_1 \longrightarrow B_2$ onde $A(y, p, v) = (Ly + (y \cdot \nabla)y + \nabla p - v1_{\mathcal{O}}, y(0))$, vejamos que satisfazem as condições do teorema 2.7(Liusternik)

Caso N=3:

Vamos provar que A esta bem definida isto é para todo $(y, p, v) \in E_3$ se deve implicar que $A(y, p, v) \in B_2$, por o que so devemos provar que $Ly + (y \cdot \nabla)y + \nabla p - v1_{\mathcal{O}} \in L^2(l^{-4}\beta_2; 0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3)$ e $y(0) \in H \cap L^4(\Omega)^3$

Como $(y, p, v) \in E_3$ então $l^{-2}(0)\beta_2^{1/2}(0)y(0) \in H$ de aqui tem-se $y(0) \in H$ da mesma maneira $l^{-4}\beta_2(Ly + \nabla p - v1_{\mathcal{O}}) \in L^2(0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3)$ e $l^{-2}\beta_2^{1/2}y \in L^4(0, T, L^{12}(\Omega)^3)$ então $l^{-2}\beta_2^{1/2}y \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y \in L^2(0, T, L^6(\Omega)^3)$ e como $l^{-4}\beta_2(y \cdot \nabla)y = \nabla \cdot (l^{-2}\beta_2^{1/2}y \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y) \in L^2(0, T, W^{1,6}(\Omega)^3)$, se vai ter que $l^{-4}\beta_2(Ly)$ e por tanto $A(y, p, v) \in L^2(l^{-4}\beta_2; 0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3) \times (H \cap L^4(\Omega)^3)$

Agora como em $A(y, p, v)$ aparecem partes lineares as quais são de classe $\mathcal{C}^1(B_1, B_2)$ por isto so é preciso provar que $B : B_1 \times B_1 \longrightarrow B_2$, com $B((y^1, p^1, v^1); (y^2, p^2, v^2)) = (\nabla \cdot (y^1 \otimes y^2), 0)$ é contínuo.

Com efeito vamos provar que a aplicação bilinear B é contínua. Para $y^1, y^2 \in B_1$ se tem que:

$$\begin{aligned} \|B((y^1, p^1, v^1); (y^2, p^2, v^2))\|_{B_2}^2 &= \int_0^T \|l^{-4}\beta_2 \nabla(y^1 \otimes y^2)\|_{W^{-1,6}(\Omega)^3}^2 dt \\ &= \int_0^T \|\nabla(l^{-2}\beta_2^{1/2}y^1 \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y^2)\|_{W^{-1,6}(\Omega)^3}^2 dt \\ &\leq c_1 \int_0^T \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^1 \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y^2\|_{L^6(\Omega)^3}^2 dt \\ &\leq c_1 c_2 \int_0^T \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^1\|_{L^{12}(\Omega)^3}^2 dt \int_0^T \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^2\|_{L^{12}(\Omega)^3}^2 dt \\ &= c_1 c_2 \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^1\|_{L^2(0,T,L^{12}(\Omega)^3)}^2 \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^2\|_{L^2(0,T,L^{12}(\Omega)^3)}^2 \end{aligned}$$

Pelo de acima temos que

$$\|B((y^1, p^1, v^1); (y^2, p^2, v^2))\|_{B_2} \leq c \|(y^1, p^1, v^1)\|_{B_1} \|(y^2, p^2, v^2)\|_{B_1}$$

Por tanto B é contínua e como consequência de isso $A \in \mathcal{C}^1(B_1, B_2)$

Caso N=2:

Em este caso $B_1 = E_2$. Vamos provar que A esta bem definido, seja $(y, p, v) \in E_2$ devemos provar que $Ly + (y \cdot \nabla)y + \nabla p - v1_{\mathcal{O}} \in L^2(l^{-4}\beta_2; 0, T, H^{-1}(\Omega)^2)$, como (y, p, v) estão em E_2 então $l^{-2}(0)\beta_2^{1/2}(0)y(0) \in H$ de aqui se tem que $y(0) \in H$.

Como (y, p, v) esta em E_2 então se cumpre que $l^{-4}\beta_2(Ly + \nabla p - v1_{\mathcal{O}}) \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^2)$ e como $l^{-4}\beta_2(y \cdot \nabla)y = \nabla(l^{-2}\beta_2^{1/2}y \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y)$ e pelo fato de $l^{-2}\beta_2^{1/2}y \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$ como consequência de isto se tem $l^{-2}\beta_2^{1/2}y \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y \in L^2(0, T, L^2(\Omega)^4)$. então $\nabla(l^{-2}\beta_2^{1/2}y \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y) \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^2)$ tem-se $Ly + (y \cdot \nabla)y + \nabla p - v1_{\mathcal{O}} \in L^2(l^{-4}\beta_2; 0, T, H^{-1}(\Omega)^2)$ por o que $A(y, p, v) \in B_2$ por tanto A esta bem definida.

Agora vamos a provar que $A \in \mathcal{C}^1(B_1, B_2)$. De maneira muito similar ao caso 3 nos so devemos provar que a forma bilinear $B : B_1 \times B_1 \longrightarrow B_2$ com $B((y^1, p^1, v^1); (y^2, p^2, v^2)) = (\nabla \cdot (y^1 \otimes y^2), 0)$ seja continua. Sejam $(y^1, p^1, v^1), (y^2, p^2, v^2) \in B_1$.

$$\begin{aligned}
\|B((y^1, p^1, v^1); (y^2, p^2, v^2))\|_{B_2}^2 &= \|(\nabla \cdot (y^1 \otimes y^2), 0)\|_{B_2}^2 \\
&= \int_0^T \|l^{-4}\beta_2 \nabla(y^1 \otimes y^2)\|_{H^{-1}(\Omega)^2}^2 dt \\
&= \int_0^T \|\nabla(l^{-2}\beta_2^{1/2}y^1 \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y^2)\|_{H^{-1}(\Omega)^2}^2 dt \\
&\leq c_1 \int_0^T \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^1 \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y^2\|_{L^2(\Omega)^4}^2 dt \\
&\leq c_1 c_2 \int_0^T \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^1\|_{L^4(\Omega)^2}^2 dt \int_0^T \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^2\|_{L^4(\Omega)^2}^2 dt \\
&= c_1 c_2 \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^1\|_{L^2(0, T, L^4(\Omega)^2)}^2 \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^2\|_{L^2(0, T, L^4(\Omega)^2)}^2 \\
&\leq c_1 c_2 \|(y^1, p^1, v^1)\|_{B_1}^2 \|(y^2, p^2, v^2)\|_{B_1}^2
\end{aligned}$$

y por tanto tem-se $\|B((y^1, p^1, v^1), (y^2, p^2, v^2))\|_{B_2} \leq c \|(y^1, p^1, v^1)\|_{B_1} \|(y^2, p^2, v^2)\|_{B_1}$ desta maneira B é continua e assim $A \in \mathcal{C}^1(B_1, B_2)$

Dos casos quando $N = 2$ ou $N = 3$ vamos agora provar que $A'(0, 0, 0) : B_1 \longrightarrow B_2$ é sobrejetiva. Fazendo conta se consegue que $A'(0, 0, 0)(y, p, v) = (Ly + \nabla p - v1_{\mathcal{O}}, y(0))$ para todo $(y, p, v) \in B_1$. Seja $(f_0, y_0) \in B_2$ pela proposição 3.6 existe $(y, p, v) \in E_N$ tal que satisfaz $A'(0, 0, 0)(y, p, v) = (f_0, y_0)$ e por tanto $A'(0, 0, 0)$ é sobrejetiva, então por o

teorema 2.7 de Liusternik, se tem que existe $\delta > 0$ tal que $\|(f_0, y_0)\|_{B_2} < \delta$ então existe uma solução da equação $A(y, p, v) = (f_0, y_0)$ com $(y, p, v) \in B_1$. Isto dos diz que (3.5) é localmente nulo controlável com um controle v que tem uma componente nula.

□

Finalmente como a controlabilidade local nula de (3.5) tendo o controle uma componente nula vai implica a controlabilidade local exata por trajetórias de (3.1) com um controle v tendo uma componente nula temos provado o teorema 3.1

Bibliografia

- [1] Adams, R. A., - *Sobolev Spaces*, New York, Academic Press (1975).
- [2] Brezis, H., - *Análisis funcional, Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial (1980).
- [3] Brezis, H., - *Functional Analysis, Sobolev Spaces and partial Differential Equations*, Rutgers University, March (2010).
- [4] E. Kreyszig., - *Introductory Functional Analysis with Applications* , University of Windsor, (1978).
- [5] Fernandez Cara, Sergio Guerrero, O.Y.Imanuvilov. & Jean-Pierre Puel, - *Some controllability for the N-dimensional Navier-Stokes and Bussinesq Systems with N-1 scalar controls*, SIAM J.Control Optim. v. 45, n.1, (2006), p. 146-173.
- [6] E. Fernández Cara, S. Guerrero, O. Yu. Imanuvilov.& J.-P.Puel, - *Local exact controllability of the Navier Stokes System*, J. Math. Pures Appl. 83 (2004), p. 1501-1542.
- [7] Cazenave, T., - *An introduction to nonlinear Schrodinger equations*, Textos de Metodos Matematicos numero 26, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, (1996).
- [8] J.-LIONS, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differentia Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York (1971).
- [9] O. Imanuvilov, J.-P. Puel, & M. Yamamoto., - *Carleman estimates for second order non homogenous parabolic equations*, to appear.
- [10] Evans, L. C., - *Partial Differential Equations*, Berkeley Mathematics Lecture Notes, (1993).

- [11] Jean-Pierre Puel.,- *Controllability of Navier-Stokes Equations*, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, (2012)
- [12] O. Yu. Imanuvilov, J-P. Puel., - *Global Carleman estimates for weak elliptic non homogeneous Dirichlet problem*, Int. Math. Research Notices, 16 (2003), p.883-913.
- [13] A. Fursikov., O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of Evolution Equations*, lecture Notes 34, Seoul National University, Korea, 1996.
- [14] Lions, J. L., - *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, (1969).
- [15] Medeiros, L. A. & Milla Miransa, M., - *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos)*, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, (1999).
- [16] Medeiros, L. A e Milla Miranda, M., - *Introdução às Equações Diferenciais Parciais Não Lineares*, Instituto de Matemática-UFRJ, (1997).
- [17] Medeiros, L. A. & Milla Miranda, M., - *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, (2011).
- [18] Medeiros, L. A., Rivera, P. H., - *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, Instituto de Matemática-UFRJ, número 9, (1975).
- [19] Temam, R., - *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, Amsterdam, (1977).
- [20] V. M. ALEKSEEV, V. M ТИХОМИРОВ, S. V. FOMIN, Optimal Control, Translated from the Russian by V. M. Volosov, Contemporary Soviet Mathematics. Consultants Bureau, New York, 1987.
- [21] J.-L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 2, Paris, Dunod, 1968.